EVCLIDES
ADAVCTVS,
ET METHODICVS.
D. GVARINI GVARINII
C. R. THEATINI.

EVCLIDES ADAVCTVS
ET METHODICVS
MATHEMATICAQ; VNIVERSALIS ...
CAROLO EMANVELI II.
SABAVDIAE DVCI PEDEMONTIVM PRINCIPI
REGI CYPRI, &c.

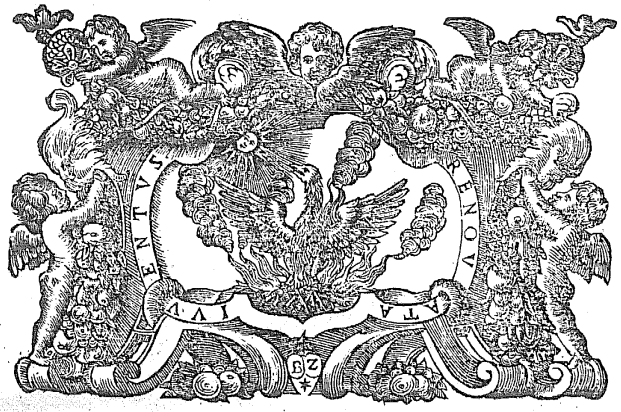
DICATA,

Quæ ne dum propoſitionum dependentiam, ſed & rerum ordinem obſeruat. Et complectitur ea omnia, quæ de quantitate tum diſcreta, tum continua abſtracta ſpeculari queunt. Reſectis ſuperfluis demonſtrationibus, & requiſitis omnibus profusè coadunatis.

Singuli quoque Tractatus nouis propoſitionibus adaucti ſunt, & aliqui etiam ex integro adornati. Omneſque tùm figuris, tùm verbis clarè, dilucidèque propoſiti.

AVCTORE

D. GVARINO GVARINO
MVTINENSI C.R. THEATINO,
Philoſofo, Theologo & eiuſdem R. C. Mathematico.



AVGVSTÆ TAVRINORVM, M DC. LXXI.

Typis Bartholomæi Zapatæ Bibliopolæ S. R. C.

Superiorum permiſſu.

REGALIS CELSITVDO.

FOLIA hæc, quæ Vniuerſalis Mathematicæ limpidiſsimas demonſtrationes candidis ſinubus concepere, inſolubili obligatione deuincta, & mole officiorum coacta, ſub auguſtiſsimo nomine R. C. V. in ſcenam literariam prodire gliſcunt. Illi enim glorioſiſsimo ſuæ magnitudinis iubare obſcura huius voluminis incunabula irradiare iuuabit, quòd ab ea facultate deriuet, quæ nobilis inter alias Magnorum Principum limina familiari terit inceſſu, & modo ad pedes R. C. V. ſe obſequioſa prouoluit in tributum profuſa illius maieſtatis, quæ omnigenæ virtutis, & ingenuæ, ne dum in ſolidiſsimum columen, & liberaliſsimum Mæcenatem ſe ſe magnanimo offert ſubſidio: ſed inſuper Thaumaturga Mathematicorum miraculorum inſigni, verèque Regali architectura coruſcat: Talem etenim illam plaudenti conclamant aſpectu Venariæ amænis inſtructæ viridaryis, ſubſtructionibuſque ſuperbis turritæ regius voluptatum, deliciarumque thronus, auguſtiſsimæ Palatia, Ædes ſumptuoſiſsimæ, aditus triumphales magnarum vrbium, aliaque permulta ſua admirabili protoplaſtice excogitata, & ad artem vltimam ſolis nutibus, aſpectuque directa.

Excipiat itaque R. V. C. pacato vultu, ſerenaque clementia illam: quam toties in concipiendis ſublimibus ideis vaſto ingenij ſui ſinu fouit matheſim, & in ea adornanda exanthlatos laboris mei conatus; qui ſimul opportunitatem mihi aperiunt, & me, & totius voluntatis meæ dicatiſsimas vires in hoſtiam obſequij, deuotique cultus conſecrandi. Dum ad terram demiſſo vultu profundiſsimum in flexum deciduus regales veſtros poplites humillimus adoro.

V. R. C.

Humillimus, Obſequentiſs.^mus^ & Oblig.^mus^ Seruus

D. Guarinus Guarinus C. R.

BENEVOLO LECTORI.

V. M inter illos, qui in elementa Euclidis deſudarunt, nullum intuear, vnico conſarcinare volumine, quæ ad quantitatem ſub genere inueſtigandam faciunt, ſecutus ſęculi genium, quod centuriat, vt plurimùm, & florilegia condit, putaui nequaquam me frugem perdere; ſi huic muneri vniuerſaliùs inſeruirem, & Mathematica rerum exordia ex omni parte rotunda, & contornata exiberem. Siquidem ex meo labore didici, cuius pretij, cuius vtilitatis id operis emergat; quod ea omnia, quæ Mathematicas luces, & euidentias in vnicum lucis fontem, adeoq; ſolem nedum tumultuaria collectione aglomeret: ſed etiam ordinato agmine diſponat, in ſerieſq; ſuas naturali conſecutione diſtinguat præcipué illis, qui nullo Mercurio tramitis indice, aut duce audent ſe huic ſtudio conſignare, & admodùm difficilem prouinciam in ſuam ſarcinam traducere. Pone enim me tibi offerre pulcherrimam, eamq; vtiliſſimam demonſtrationem, quæ tamen, aut Pergæi, aut Archimedis, aut Pappi rariſſimos libros ad ſui euidentiam expoſcat, quos, aut nunquam perluſtraueris, aut ne quidem conſequi te poſſe fidas: quam hauries lucem, aut quam ſcientiam adipiſceris? aut potiùs quibus tenebris, qua caligine non confuderis? Ideoq; cum tota Mathematica ſit alligata in vnumq; corpus naturali lege deuincta: quod diuidi non patiatur ſine totius detrimento, ſi quis totum non colligat, nihil colligit, & frugiperda nixu monſtrum nulla euidentia animatum in malè deſtinatos trahit amplexus.

Scio quidem Herigonium Pariſijs, & Schotum in Belgio curſus Mathematicos eruditiſſimos cudiſſe: ſed hic oſtenſiones ſæpius ſolis operibus occupatus ex induſtria præterit, ille multis libris diuerſoq; tempore editis, vt rarus ſit ille, qui in ſuum commodum congerere poſſit, inſtitutum proſequutus eſt. Quamobrem cum nullus in Italia huic locubrationi ſe dederit, & exteri, aut nullatenùs obtineri; aut non ſine magno pretio negotioq; à ſuo cęlo in noſtras regiones peregrinari cogantur; non ingratum reipublicę literarię fore ſuſpicatus ſum; ſi illud laboris, quod meis priuatis profectibus deſudaram, publici iuris facerem: Maximè quia in illud, quod omnes huius rei ſcriptores poſthabuerunt, pręcipuè animum fixi; vt propoſitiones nedum in ſeriem, quoad earum, vt aſſolet, deriuationem, ſed etiam quoad doctrinæ dignitatem, rerumq; naturalem ſedem digererem: & à ſuperfluis, & quæ nullius vtilitatis erant expiarem: nullas aduenas rogarem aſſertiones in veritatis vadimonium; doctrinam in ſe ſe redeuntem, ſibiq; ipſi famulam ab omni alieno iure abſoluerem, vt qui legit nihil aliud ad perfectum captum deſideret, quæ omnia non ſine eluctamento obtinui. Odopęium me præſtiti; nulliſq; parcens verbis, aut figuris, amfractus, alioquin ſenticoſos, petricoſoſq; ab omni offendiculo immunes in vias veluti conſulares aperui: Et ne aliquis ſubroſtrarius mihi obmurmuret, in faſtidiumq; verſus torcularibus incaſſùm defatigatis miſereatur; non omnia ex pęnu rurido antiquitatis prolata; lapidem, & nos protulimus, & antiquos Matheſis limites aliquantùm ſubmouimus. Herculęos enim terminos præterlabenti ingenio nouæ doctrinarum regiones, illęq; feraces, & vtiles detectę Multę oſtenſiones, aut quod nullę extabant, aut quòd proniores exoptarentur inſtructę; quidam tractatus denuò magna ex parte adornati, aliqui exintegro conditi, paucis non additum. Quæ omnia aſteriſmis prenotaui, aut ſaltem plurima (in paucis enim ex incuria prętermiſſum) Scilicet ne videar alienis pennis

amici-

amiciri malè ominata cornix, & de cęterò, vt noſtra cautiùs excipiantur, tanquam nulla auctoritate ſuffulta, & ſi aliquid erratum fuerit, aut in meliùs fęliciori ingenio reſtituatur, aut ſaltem ab humanitate lectorum meę imbecillitati condonetur. Noui hominum non vnam eſſe indolem; cuicunq; neceſſe eſt ſuos ante ſe cernere antiſtomos, ſuos audire antiſthroſos. Vateſq; mihi ſum eos, qui omne encęniſmum ſtomacantur vindices annoſitatis quęſituros in ſcirpo nodum, vt quid culpent, nanciſcantur. Sed faciant per me; licet. Talibus infortunijs aſſueui. Meus, etenim liber, quem inſcripſi *Placita Philoſofica*, & Pariſijs cuſioni dedi anno 1665. iam pridem in hoc detrimentum, & quidem à limine inceſpitauit. Anno enim 1667. Ioannes Bonifacius Bagatta, quondam meus auditor Curſum Philoſoficum edidit, qui ne dum philoſofantium more multa in quęſtionem prothrait: ſed videtur maiori nixu me perſequi. Omnia veterat. Auctores plurimi ſaltem aliqui anonymi iam ſententias omnes meas propoſuere, dicant, vel ſaltem accinant, vel etiam pœnitùs non alludant, verum ſemper eſt idem iam protuliſſe. In meas aliquas rationes inuehitur non tamen in omnes ferociſcit: ſed nec quidem earum meminit, vt ſcilicet credatur funditùs omnia proſtrauiſſe. Sententias non ſemel meas amplectitur; Sed quaſi in occulto eas diuerſis verbis perſonatas proponens, quaſi piaculum foret, me aperto vultu ſequi, & aliquando in verba Magiſtri iuraſſe. Sed quod diſſimulare nequeo, me vocat in memetipſum, & cogit contra fas in me, & iniuſtè quidem, pugnare. Et ne videar in ventos fari; hoc ſiue aliud exemplum in ſpectaculum producam. Ipſe enim Sec. 2. de præd. p. 77. n. 14. in reſp. vbi tantùm aliqua mea argumenta oſtendentia Modum prędicamenti dignitate non potiri ſubuertere nititur, dicit. *Deinde ſecundùm communem ſententiam, quam, & ipſe Guarinus ſuſtinet actio, & paſſio ſunt diuerſa prædicamenta, & tamen.* & cæt. Intuere an actionem, & paſſionem in diuerſa prędicamenta ſecerni, cum communi fatear, & lege meam diſput. 12. Exp. 2. lit. B. pag. 105. probat. 2. vbi ex eo quod *aliqua ex prædicamentis non diſtinguantur inuicem, vt actio, & paſſio* arguo. *Diuiſionem entis in decem prædicamemta potiùs per modum exempli ab Ariſtotele fuiſſe traditam; quam quod exiſtimauerit eam eſſe bonam, & adæquatam.* Et ibidem conc. 2. aſſero. *Quæ verè, & cerè prædicamenta appellantur ſunt ſubſtantia, & accidens.* Si itaq; duo tantùm prædicamenta ſtatuo ſubſtantiam, & accidens, quì ſuſtineo actionem, & paſſionem prædicamenta quoq; multiplicare? Vidiſti ne: vt ſua confirmet, quàm me verſatilem efficiat? Sed & patere aliud huius rei ſpecimen adhuc proponi. Concluſionem ſtatuit diſ. 2. ſec. 2. in 1 L. phiſic. pag. 54. conc. 2. n. 11. *Formam materialem ſubſtantialem non eſſe entitatem diſtinctam à materia (ſed eſſe actualem terminum ſubſtantialem intrinſecum (iusdem materiæ, à quo materia taliter modificata, & affecta, & terminata conſtituitur in determinata phiſica ſpecie.) Fitq; potens ad conſeruanda ea omnia, quæ ad totalem conſeruationem compoſiti ſpectant.* Deinde ſubinfert. *eam etiam aliquo pacto defendit Guarinus aſſerendo eam eſſe puram potentiam.* Sed heus ſequere; ne quęſo mancha proferas effata, quid pono diſ. 3. phiſicæ conc. 1. pag. 119? Non ne hic affirmo; formam de ſe non habere vllam entitatem: ſed eſſe puram potentiam? quod deinde declaro pag. 200. l. D, conc. 2. *Dicimus*, in quiens, *formam eſſe puram potentiam; quia agens naturale per ſuas operationes nihil aliud facit; niſi imprimere quandam potentiam in materia per quam efficitur ſibi principium ſuorum accidentium conſeruatiuum, & reparatiuum, & etiam omnium aliarum operationum.* Tolle ergo à tua Theſi verba quæ parentheſi clauduntur, veluti ea, quæ ex eo quod forma dicatur. naturali lege ſequantur, & ipſiſſimam defendam opinionem; non aliquo pacto imitabor: Sed quid deinde in mea argumenta buccinas? ad

quid

quid immeritò me cogis? vt tibi videaris efficaciſſimum in me vibraſſe argumentum inquis. *Si agens naturale non haberet virtutem producendi ex nihilo.* Hoc enim ad confirmandam propoſitionem aſſumpſi. *neque formas accidentales poſſet producere, quod tamen nec ipſe Guarinus aſſerere poteſt.* Sed cur accidentia ab agente non produci affirmare nequeo? Non ne diſp. 14. logicæ exp. 5. pag. 117. accidens ab alijs accidentibus edi per modificationem diuerſam probaui? Non ne eadem diſp. exp. 4. & diſp. 6. phiſicæ exp. 10. conc. 1. pag. 124. affirmaui accidentia de ſubiecto in ſubiectum peregrinari, & per communicationem produci. Non ne diſp. 5. de gener. & corrupt. exp. 4. conc. 2. effectum formalem ab efficiente diſtinxi, & poſſe accidens in ſubiecto commorari abſque eo, quod vllum ſui inditium pręberet in mouendo ſubiecto. Igitur, & ſi aliqua cauſa denudata accidente videatur. V G. aqua feruida frigore; frigus tamen latens in ſe, vel in minimo gradu tuetur quoad entitatem, quamuis non prodeat in frigefactionem; quod remota cauſa efficatiori calorem extraneum de ſe euaneſcentem vt dico diſp. eadem exp. 2. in reſp. ad arg. 2. facilè deſijcit, & in priſtina ſe reſtituit. Semper itaq; exeret accidens, ex aliquo gradu ſui; cum nunquam à materia elliminetur. Vbi eſt ergo ex meis principijs formarum accidentalium ex nihilo prolatio ſiue in compoſiti proprios ſinus, ſiue in alienos?

Hæc autem non dixerim; quod virum in crimen vocem, quaſi ex inſtituto, & arte ſubdola hæc mihi inuſſerit; neq; enim candidos eius mores ea ſuſpicione fædare fas, & honeſtum permittit: Sed quod aut tædio victus, vel agendorum machina preſſus, non potuerit totum volumen perluſtrare. vel quod ſcriptorum meorum, quos extemporaneos, & ſubleſtos eccepit aliqua fortè poſitione deluſus iudicauit eamet typis mandaſſe. Quid quid cauſę id fuerit non potuit in adeo religioſo viro; quod in me actum eſt, non niſi ab honeſtatis amore, ſtudioq; veritatis excludi.

Debui tamen meis non deeſſe; beneuoloq; lectori dementum, improuidamq; allucinationem aperire, ne quis putaret mea tela mihi inimica, & in mea præcipitia ædificaſſe. Contineat ergo fidem ſuam quis quis æquus iudex in illum Curſum Philoſoficum inciderit; donec, & noſtra euoluat, & quod mihi tribuitur, meum eſſe dignoſcat: auritus vtrinq; ſit, nec reum damnet, donec in ius compellat, & denunciatos lapſus ipſa re intueatur.

Interim hunc Librum eccipe, in quo non multæ opiniones: omnia ſolidiſſimis demonſtrationibus illuſtrata, ex quò facilè dignoſces an in Placitis Philoſophicis adeo inconſtanti voce vibriſſare potuerim, & alternatione tam continuata ludere. interim dum rerum menſuras, & Symbolizationes ſtupendas eccipis Diuinam artem admirari non intermittas: qui omnia trutina examinauit, lanceq; ſuæ omnipotentiæ, vt ſemper admirabilis dignoſceretur appendit.

LIBRVM hunc, cui titulus Euclides adauctus, & methodicus à doctissimo Patre D. Guarino Guarino conscriptum vidi iussu Reuerendissimi P. Magistri Thomæ Camotti Generalis Inquisitoris Taurinen. in eoq; nihil, quod orthodoxæ religioni, vel bonis moribus aduersetur, deprehendi: quinimo præclarum hoc opus omnibus matheseos studiosis vtilissimum, & publica luce dignissimum censeo. Datum in Colleggio Societatis Iesu die 31. Martij 1671.

Franciscus de Malines Societatis Iesu
in Collegio Taurinensi studiorum Præfectus.

EGO infrascriptus Sacræ Theologiæ Lector de mandato Reuerendissimi Patris F. Thomæ Camotti Inquisitoris Taurini diligenter perlegi opus, cui titulus est, Euclides adauctus, & methodicus ab Adm. Reuerendo Patre D. Guarino Guarinio Ordinis Clericorum Regularium conscriptum, & elaboratum, & nihil in eo animaduerti Sanctæ fidei, aut bonis moribus aduersum; Imo omnia in eo contenta perutilia fore Reipublicæ literariæ, & Mathematicarum artium professoribus. In quorum fidem, &c. Datum in Conuentu S. Dominici de Taurino die 20. Martij. 1671.

F. Petrus Martyr Rubeus Ord. Præd.

Imprimatur.
F. THOMAS CAMOTTVS Ord. Predicatorum Inquisitor Taurini.

EVclidem Methodicum Adm. Reu. P. Guarini Guarini sedulò euolui. Euclides ipse est si apodexion puritatem, acumen, neruos estimauero; nec ipse tamen, si doctrinæ ordinem, copiam, iucunditatem. Tam multa, noua, pulcherrima accessere, vt sibi admodùm blandiri queat Euclides Iconem suum, hactenus rudem, ac salebrosum, iam tandem accuratissimâ viri, verè viri, industriâ absolutissimè, reformatum. Promus condus ipse est Mathematicę vniuersæ, totaq; exhauritur Geometria: de numeris numerosissimè, deq; dimensionibus supra humani mensuram ingenij. Nec modò latet in eo quicquam Patrijs legibus onerosum: Quin totum tantum opus est; vnde maximum sint habituræ, & literaria, & Politica Respublica incrementum. Ergò ne quæso publica fraudetur luce purgatissimis luminibus volumen micans. Ita sentio. Taurini 4. Aprilis. 1671.

Bartholomæus Torinus vidi de mandato Illustriss.
& Excellentiss. D. Magni Cancellarij.

Permittitur imprimi.
BVSCHETTVS.

IVssu A. R. P. D. Petri Pauli Nobilioni Præp. Generalis nostræ Religionis Euclidem Adauctum, & Methodicum à R. P. D. Guarino Guarino compositum diligenter perspeximus, & cum nihil in eo deprehenderimus, quod catholicę Religioni, aut bonis moribus aduersetur; imò potiùs tanta diligentia, ac ingenio elaboratum vt nihil ad perfectionem sumpti argumenti desiderari videatur. Ideo vt typis excusus in publicam lucem prodeat non solum dignissimum putamus, verùm, & necessarium, tam pro Mathematicarum artium professorum vtilitate, quàm vt ab ijsdem collatus cum eiusdem auctoris Philosofia iam impressa ipsius ingenij fæcunditas acumen, & profunditas agnoscatur. Datum Taurini in domo S. Laurentij die 3. Aprilis 1671.

D. Amedeus Romagnanus C. R.

D. Carolus Saluaticus C. R.

D. Gaetanus Garimbertus Præpositus Generalis Clericorum Regularium.

HOc opus, cui inscriptio Euclides adauctus à D. Guarino Guarino nostræ Religionis Theologo Sacerdote compositum, & iuxta præfixam assertionem patrum, quibus id commissimus approbatum, vt typis mandetur, quoad nos spectat, facultatem concedimus. Datum Romæ die 30. Iunij. 1671.

D. Gaetanus Garimbertus Præpositus Generalis Cl. Reg.

Locus † Sigilli.

D. Antonius Maria Rinanus Secret.

INDEX

Tractatuum & Expensionum totius operis

Vt id, in quo erratum sit singulis tractatibus, expensionibusque pateret, facilior-que euaderet correctio; hic errores aliquos, quos in relegendo potui aduertere, emendaui: alios, qui fortè me præterierunt, tuæ humanitati, & benevolentiæ relinquo.

TRACTATVS I.
De quantitate continua.

1 EXpensio. In quo consistat conceptus quantitatis in genere & in quot species secernatur.
2 An aliquod argumentum Mathematicum ostendat quantitatem ex punctis constare.
3 An aliquod argumentum Mathematicum ostendat quantitatem ex punctis non constare.
4 Puncta infinita in quantitate an admitti debeant.
5 In quantitate partes infinitę capacitatis virtualis seu mentalis capaces sunt.
6 An partes quantitatis Physicam diuisionem in infinitum subire possint.
7 Quid sit punctum Physicum & reale.
8 Quæ sint Mathematica indiuisibilia.
9 An datis indiuisibilibus, illa possint esse obiectum Mathematicæ.

TRACTATVS II.
De quantitate discreta.

1 EXpensio. Quid sit vnitas numerica.
2 An vnitas, numerusque distinguantur realiter à re in qua sunt.
3 An ratio indiuiduationis consistat in differentia aliqua, per quam pluificetur.
4 An vnitas numerum constituat.
5 An vnitas, numerusque prescindant perfectè à naturis numeratis.
6 An possit dari numerus infinitus.
7 An numerus essentiam consequatur.

TRACTATVS III.
De Mathematica & eius affectionibus.

1 EXpensio. De obiecto Mathematicæ, eiusque abstractione.
2 De Mathematica.
3 De titulis Mathematicis.
4 De Mathematica instructione.
5 De illis, qui studiis Mathematicis operam nauant.
6 De Principijs vbi def. 8. l. 48. ab dele & l. 27. vdos lege duos.

TRACTATVS IV.
In primum librum elementorum.

1 EXpensio de triangulis constituendis.
2 De lineis secandis.
3 De linearum se tangentium situ.
4 De proprietatibus triangulorum
5 De comparatione triangulorum ad inuicē.
6 De situ linearum, nec se secantium, nec se tangentium.
7 De parallelogrammis & trapeziis.
8 De triangulorum cum parallelogrammis trapeziisque parallelis constantibus comparatione.

TRACTATVS V.
In secundum libri Euclidis, de æquipotentia linearum

1 EXpensio. De Principijs huic libro inseruientibus
2 De potentiis linearum diuersimodè sectarum ad æquanda suorum segmentorum rectangula.
3 De potentia laterum triangulorum.
4 De reperiendis æquepotentibus lineis.

TRACTATVS VI.
In librum 3. Euclidis de circulis.

1 EXpensio. De Principijs.
2 De punctis centri & contactuum.
3 De segmentis circulorum.
4 De lineis intra circulum ductis.
5 De lineis circulum tangentibus exteriùs
6 De angulis in circulis existentibus.
7 De Peripherijs.
8 De rectis circulo inscriptis, & circumscriptis quoad potentiam ipsarum.

TRACTATVS VII.
In lib. 4. elementorum de inscriptione & circumscriptione figurarum in circulo.

1 EXpensio. De principijs.
2 De mutua circuli & quadrati inscriptione & circumscriptione.
3 De mutua circuli & quadrati inscriptione & circumscriptione.
4 De pentagoni & circuli mutua inscriptione & circumscriptione.
5 De exagoni, & quindecagoni in circulo inscriptione.

TRACTATVS VIII.
De Arithmetica simplici integrorum numerorum.

1 EXpensio. De principijs.
2 De integrorum numeratione.
3 De integrorum collectione,

4 De subductione integrorum.
5 De numerorũ integrorum multiplicatione
6 De integrorum numerorum diuisione.
7 De probationibus.

TRACTATVS IX.

Pars 1. in 5. Euc. lib. de proportionum notione.

1 EXpensio. Quid sit ratio.
2 In quantitate quænam sint proportionis notiones?
3 Quænam quantitates proportionem consequantur (pr.c 15.multiplicatum *lege* improportionatum.
4 De diuisione rationum.
5 De rationum compositione.
6 Quæ quantitates proportionem consequantur & quam obtineant?
7 De modis arguendi in proportionibus.

Pars 2. De proportionib. in genere.

1 EXpensio. De similitudine multiplicium quantitatum
2 De proportione ad vnicam quantitatem relata.
3 De plurium quantitatum ad plures dissimili comparatione.
4 De modis arguendi in similitudine proportionum.

TRACTATVS X.

In 6. lib. Euc. De proportione quantitatis continuæ.

1 EXpensio. De principijs huic tractatui inseruientibus.
2 De proportione laterum triangulorum.
3 De reciprocatione laterum in figuris.
4 De lineis proportionaliter secandis.
5 De æquipotentia linearum.
6 De proportione duplicata & composita figurarum respectu laterum homologorum.
7 De similiũ figurarum notione & effectione.
8 De similium figurarum additione & subductione.
9 De laterum figurarum proportionali potentia.
10 De proportionibus circuli & partium eius.

TRACTATVS XI.

In 7. lib. Euc. Pars 1. De proportionibus numerorum in genere.

1 EXpensio. De principijs.
2 De partibus numerorum alterum mensurantium (pr.10.l.11.duenarios lege ternarios.
De propotione nnmerorum (vbicunque reperies vicissim lege vicissim. In ipsa p. 17. multiplicantes lege multiplicati.
4 De minimis, primisque numeris.

Pars 2. De speciali numerorum proportione.

1 EXpensio De principijs.
2 De minimorum numerorum proportionibus.
3 De proportionibus numerorum non primorum.
4 De numeris planis, & solidis.
5 De quadratis & cubis (in ipsa pr.1.3.& rursus l.9. duplicatam lege triplicatam (p.23.l.9.vbi 9.l.6.

TRACTATVS XII.

1 EXpensio. De principijs.
2 De commensurabilibus & quantitatibus.
3 De comparatione linearum rationalium & irrationalium.
4 De inuentione linearum rationalium.
5 De Binomijs lineis.
6 De lineis Apotomis.
7 De irrationalibus medijs (p.26.l.22. quadrata lege quadrangula.
8 De irrationalibus, quæ nascuntur à medijs.
9 De lineis in partes commensurabiles & incommensurabiles & omninò irrationales secandis.
10 De irrationalibus simpliciter.
11 De irrationalibus quæ ex irrationaliũ simpliciter additione, vel subductione resultant.
12 De cõmensurabilibus ad lineas irrationales.

TRACTATVS XIII.

De numeris proportionalibus Pars 1.

1 EXpensio. De minutiarum proportionibus.
2 De fractionum valore.
3 De fractorum numerorum additione.
4 De minutiarum subductione.
5 De fractorum multiplicatione.
6 De minutijs diuidendis.
7 De minutijs minutianum.

Pars 2. De muneris proportionalibus inueniendis.

1 EXpensio De inueniendo datis tribus quarto proportionali (pr.3.exemplum erratũ.
2 De probatione regule aureæ.
3 De regula trium inuersa (in exordio l. 26. vbi secundæ lege primæ.
4 De regula aurea composita.
5 De numeris æquè potentibus.
6 De radice quadrata perquirenda & medio proportionali tertioque persecrutando datis duobus (pr.22.l.51.vbi 1600. lege 2200.
7 De radice cubica, duobusque numeris medijs proportionalibus.

TRACTATVS XIV.

De proportionibus numericis continuis.

1 EXpensio. De proprietatibus proportionis Geometricæ continuæ.
2 De summandis Geometricis proportionalibus continuis.
3 De proportione Geometrica propaganda.
4 De proportionalibus in Geometrica proportione interserendis.

Pars 2. De proportione Arithmetica continua.

1 EXpensio. De proprietatibus Arithmeticæ proportionis continuæ.
2 De proportionalibus Arithmeticæ proportionis in vnam summam colligendis.
3 De proportione Arithmetica propaganda.
4 De proportione Arithmetica interserẽda.

Pars 3.

Pars 3. De proportione Harmonica continua.

1 EXpensio De proportione Harmonica inueniendâ, & aliquibus eius proprietatib.
2 De proportione Harmonica continuanda.
3 De proportione Harmonica interserenda.
4 De comparatione proportionum.
5 De maxima & minori Harmonia.

TRACTATVS XV.

De linearum, segmentorumque proportionibus.

1 EXpensio De linearum proportionali inuentione in proportione Geometrica.
2 De proportionali linearum additione.
3 De linearum diuisione.
4 De proportione linearum Arithmetica.
5 De proportione linearum musica.

TRACTATVS XVI.

De linearum progressione Geometrica. Pars 1.

1 EXpensio 1. De principijs.
2 De progressionum terminis inuicem cõparatis, & differentijs.
3 De serie linearum proportionalium inuicem comparatarum (pr. 3. l.2. quadrata lege rectangula.
4 De progressionis termino.

Pars 2. De linearum progressione Harmonica.

1 EXpensio. De progressionis Harmonicæ continuatione.
2 De comparatione vnius seriei harmonicæ ad aliam.
3 De interpositione Harmonicorum terminorum.
4 De terminis inuicem comparatis, & differentijs.
5 De progressionis Harmonicæ extremo (Prop.13.l.1. Nam *lege* non.

TRACTATVS XVII.

De proportionalitatibus Rationum.

1 EXpensio. De principijs def.3.l.11. ab lege A.B.
2 De proportionibus, ad denominatores collatis, & ad terminos.
3 De proportionum compositione.
4 De proportionum similitudine commutatis terminis.
5 De proportionum dialectica.
6 De proportionum algorithmo.
7 De proportionum simplicium continuatione.

TRACTATVS XVIII.

1 EXpensio. De circuli descriptione atque mensura (Pr. 3. l.55. vbi 28049. lege 230490 & l.56.vbi 14223690. & l. 142231490
2 De circuli segmentis in figuram flexam accomodandis.
3 De linea spirali.
4 De linea quadratrice (pr.19.l.18.radij dele.
5 De linea Ellipsi (Pr. 25. l. 14. quà adde O.
6 De linea Conchili.
7 De lineę Ciclicæ descriptione.

TRACTATVS XIX.

De Angulis.

1 EXpensio. De basi triangulorum, atque lateribus in vnicum verticem conspirantibus (Pr.1. l.25. apud A adde & 1. albo.
2 De triangulis quoad angulos secundùm rationem datam constituendis.
3 De angulis quoad latera secundùm rationem datam constituendis.
4 De angulis in figuris rectilineis.

TRACTATVS XX.

De lineis circulo circumpositis.

1 EXpensio. De principijs.
2 De lineis, quæ latera alicuius figuræ regularis intexunt (pr.1. corol. l. 1. totus adde quadratus, & pr.3. coroll.l.1. Zifris adde quadres. pr.4.l.54. & 58. albus lege niger.
3 De proportione laterum figurarum circulo inscriptarum cum diametro.
4 De circulo inscriptis, quæ figurã non constituunt.
5 De sinubus, chordisque inueniendis sine extractione radicis quadratæ.
6 De reperiendis sinubus aliquibus sine diuisione.
7 De tangentibus, & secantibus.

TRACTATVS XXI.

De logarithmis.

1 EXpensio. Cur arithmetici proportionales geometricis vniantur.
2 De serie facili geometricorum reperienda, cui Arithmetica deseruiat.
3 De arithmeticis proportionalibus reperte Geometricorũ seriei copulandis (pr.16.Cor. l.5.l. 47. l. 58 vbi 10009. lege 100090.
4 De logarithmis in tabulas sinuum transferendis (pr. 17.l. 20 vbi 341502 4.adde 49.
5 De tabulis ordinandis, & logarithmis tangentium addendis.
7 De logarithmis numerorum absolutorum.

TRACTATVS XXII.

De interfectionibus planorum.

1 EXpensio. De principijs.
2 De linearum cum planis habitudine.
3 De planorum interfectionibus, cuius pr. 18. potest intelligi de quocunque angulo.

TRACTATVS XXIII.

De sphęræ contactibus, & sectionibus in genere. Pars 1.

1 EXpensio de principijs.
2 De sphæræ situ.
3 De poli, axe, diametris, centroque sphęræ.
4 De circulis maximis & minoribus.
5 De circulis minoribus parallelis.

Pars 2. De interfectionibus maximorum circulorum ad inuicem.

1 EXpensio 1. De principijs.
2 De angulis triangulorum sphæricorum.

3 De

3 De cruribus ipſorum, & eorum ſubtenſis.
4 De angulorum crurumque mutua dependentia & relatione generica.
5 De angulorum & laterum ſpecifica dependentia.
6 De ſpecie laterum & angulorum cognoſcenda. (In ipſa pr. 26. duo lege ſi duo & l. 3. dele ſi Coroll. ..l. 6 tertius lege vnus & 10. ſimul lege ſeorſim.
7 De caſu normalis in triangulis ſphæricis.

Pars 3. De maximorum circulorum & minorum in ſphæra contactibus & inſectionibus.

1 EXpenſio. De contactibus minorum circulorum.
2 De circulorum maximorum & minorum interſectionibus proportionalibus & æqualibus.
3 De circulorum maximorum & minorum interſectionibus inæqualibus & diſſimilibus (pr. 29. l. 15. Z I V Z P V & Z Q V. lege X A S X B S & X C S & pr. 32. l. 14. & per lege ſed qui per.
4 De partibus quæ ab interſectionibus maximorum circulorum fiunt nullâ proportionem dicentibus nec inuicem nec cum diametris ipſorum circulorum (in ipſa pr. 34. vtrique lege alicui & pr. 27. l. 33. maius lege minus & in pr. ipſa l. 1. plana lege plani.

TRACTATVS XXIV.

De ſectionibus conicis.

1 EXpenſio. De principijs.
2 De Diametro.
3 De Parametro.
4 De Tangentibus.
5 De interceptis diametri portionibus inter contingentem & alia puncta in ipſo impreſſa.
6 De Vmbelicis.
7 De rectis inclinatis à contactibus ad vmbelicos.
8 De Diametris ſecundis.
9 De ſectionum æqualitate.
10 De parallelis ad diametrum ſectionis.
11 De Aſymptoto Hyperbolarum (p. 43. l. 77. alterno V A L lege externo P A R.
12 De lineis in ſectionibus vt cumque ductis applicatas ſeu parallelas ſecantibus.
13 De ſimilitudine figurarum (pr. 54. l 10. ſemiparametrum adde 3 4. vt ſemidiameter C A ad ſemiparametrum.
14 De deſcriptione vniuerſali ſectionum.
15 De circumſcriptione figurarum conicarum.
16 De parabolis ſpecialiter deſcribendis (pr. 61. l. 36. intra lege iuxta.
17 De Hyperbolarum particulari deſcriptione (pr. 64. l 5. ; proportionalis adde, & ſit vt R ad illam mediam, ſic A D ad, & lin. 8. portio lege proportio.
18 De deſcriptione particulari ellipſium (pr. 68 & conuertendo lege permutando.
19 Sectiones omnes deſcribere ope parallelogrammi.
20 De tranſſumtione figurarum conicarum à circulo.
21 De mutua figurarum tranſſumptione.

TRACTATVS XXV.

De ſectionibus corporum conicorum per planas ſuperficies.

1 EXpenſio. De ſectione coni cuiuſcumque per planas ſuperficies.
2 De conſectionibus in lineam deſinentis.
3 De ſectione ſphæroidis per planas ſuperficies.
4 De ſectionibus conoidis parabolici.
5 De ſectionibus conoidis Hyperbolici.
6 De ſectionibus Cylindronum per planas ſuperficies.

TRACTATVS XXVI.

De Projectionibus Pars 1. De Orthographia.

1 EXpenſio Quid & quotuplex ſit projectio.
2 De Orthographia partium ſuperficiei.
3 De projectione ſuperficierum in genere.
4 De ſuperficiebus rectilineis projiciendis.
5 De projectione ſuperficierum circularium
6 De ſpeciali projectura circuli in ordine ad ſphæram deſcribendam.

De Stereographia Pars 2.

1 EXpenſio. De projectura lineę.
2 De projectura circuli (pr. 12. l. 25. partem adde ſemicirculi.
3 De projectura ſuperficiei cuiuslibet independenter à ſphæra (pr. 16. l. 12. ſtereographo plano H R Q lege originario plano S T V Q.

TRACTATVS XXVII.

Trigonometrie Pars 1. De triangulis planis ſoluendis.

1 EXpenſio. De triangulorum planorum rectorum ſollutione perſinus, vel tangentes.
2 De triangulorum rectangulorum ſollutione adhibitis logarithmis (in ipſa pr. 18. in cruris lege crure & coroll. l. 3. crurum lege angulorum.

Pars 2. De triangulis ſphæricis ſoluendis.

1 EXpenſio. De rectangulis ſphæricis ſoluendis per ſinus (pr. 4. l. 27. dele arcuſque P D erit complementum arcus cruriſque B A.
2 De tangentibus ad idem præſtandum (pr. 16. l. 17. l V. ad l O tangentem lege I B tangens ad l O ſinum, & in ipſa pr. 19. l. 1. complementi dele.
3 De ſecantibus ad idem præſtandum.
4 Regule breuiſſimæ, & facillimæ pro rectangulis adhibendæ precipuè in logarithmis (pr. 47. (in penul crus lege angulus.
5 De ſubſtitutione figurarum, & laterum (pr. 49. l. 42. &, lege A T.
6 De triangulis obliquangulis ſoluendis reducendo ad rectangula.
7 De obliquangulorum ſollutione per duas tantùm operationes.

TRAC

TRACTATVS XXVIII.

De progreſſione ſuperficierum.

1 EXpenſio. De ſerie proportionis geometricę ſuperficierum (in exor. l. 6. Ambroſius lege Gregorius, & vbicunque repereris.
2 De planorum progreſſione muſica.
3 De progreſſione ſpatiorũ arithmetica. Prop. 19. Coroll. adde hanc conſiderationem Seriem rectangulorum deficientium quoad vnum latus vſque ad vltimum, pro alio non vſque ad vltimum vt ſeries P A eſſe æqualem dimidio rectangulo P A, & trienti rectanguli I O.

TRACTATVS XXIX.

Geodæſia rectilineorum planorum.

1 EXpenſio. De planarum figurarum tranſformatione in æquales ſuperficies.
2 De caſu normalis in rectilineis figuris, & eius quantitate.
3 De areis triangulorum, aliarumque figurarum menſu andis.
4 De augmento & partitione trianguli.
5 De quocunque rectilineo augendo, vel partiendo in plana rectilinea ſimilia.
6 De rectilineo partiendo etiam in partes non ſimiles per parallelas vni lateri.
7 De figuris planis rectilineis in partes diſſimiles ſecandis à dato puncto in ipſis.
8 De rectilineis per lineas vtcunque ductas partiendis.
9 De planis à puncto extrinſeco partiendis.
10 De planitiebus muſicis.
11 De proprietatibus figurarum Iſoperimetrarum (pr. 55. figura debet eſſe prop. 50. & p. 57. l. 12. Exagoni lege pentagoni.

TRACTATVS XXX.

De transformatione curuilineorum.

1 EXpenſio. De quadratione circuli (pr. 5. l. 8. æqualis adde duplo & l. vlt. circuli adde dupla.
2 De quadratione circuli geometrica.
3 De ellipſium tum inuicem, tum in allas figuras tranſmutatione.
4 De areis parabolarum quadrandis (pr. 33. l. 41. adde in fine I N.
5 De partitione Hyperbolę. Pr. 5. lin. 6. EA lege EB & lin. 11. AF dele F.
6 De ſpiralibus ſpatijs (pr. 54. l. 7. minus lege maius pr. 55. l. 5. vt lege pluſquam & l. 5. corol. rectangula circumſcripta lege ſectores circumſcripti pr. 56. l. 36. vbi eſt 12. lege circulum. Et Prop. 60. l. 5. cum quadrato lege cum trienre quadrati.

TRACTATVS XXXI.

De transformatione ſuperficierum corpora circundantium.

1 EXpenſio. De transformatione ſuperficierum corporum planis contentorum (def. 1. lege 2. terminantia I. terminantibus.
2 De ſuperficie Cylindrica (prop. 4. & 5. intelligenda eſt ne dum de cylindris pro baſi circulum habentibus; ſed etiam de cylindris, quæ pro baſi habent ellipſim vel quamcunque aliam figuram curuam; ſeu etiam ſemicuruam, vt contat ex demonſtratione, qui appellantur poſtea à nobis cylindracei (pr. 8. l. 36. cujus adde dimidia.
3 De quadratione ſuperficiei vngulæ cylindricę.
4 De ſuperficiebus conuexis, quę conum ambiunt. Prop. 30. l. 3. IE lege CO.
5 De ſuperficie ſpheroidis Elliptici.
6 De ſuperficie cuiuſcunque corporis ad axem ſuum recti Prop. 30. falſa eſt vel ad ſummum intelligitur de ſuperficie conica quacunque vt Trac. 35. Prop. 2.
7 De ſuperficie ſphęrę menſuranda (pr. 40. l. 41. bus dele. Prop. 4. l. 4. & 14. & 26. DB

TRACTATVS XXXII.

De ſuperficiebus corporum in planum redigendis.

1 EXpenſio. De ſuperficiebus cylindricis vatiè ſectis plano conſignandis.
2 De ſuperficiebus conorum diuerſimodè ſectorum in ; lanum extendendis.
3 De ſuperficie ſphærica multimodè ſecta in planum extendenda.
4 De ſuperficie conoidis hyperbolici, parabolici, & ſpheroidis elliptici, annulique ſolidi in planas ſuperficies extendenda.

TRACTATVS XXXIII.

De inſcriptione, et circumſcriptione ſolidorum.

1 EXpenſio. De principijs.
2 De ſolido angulo.
3 De deſcriptione Tetaedri in ſphęra & proportione laterum eius ad diametrum.
4 De deſcriptione octaedri in ſphęra, & eius laterum ad diametrum proportione.
5 De cubi in ſphęra inſcriptione, & eius lateris ad diametrum ratione.
6 De deſcriptione Dodecaedri in ſphæra, & eius laterum ad diametrum ratione.
7 Icoſaedrũ ſphęra inſcribere, ſimulque omnium corporum regularium proportiones exponere & numerum eorum demonſtrare (pr. 12. l. 42. rectum lege ſolidum.
8 De corpore multarum facierum in ſphęra Inſcribendo.
9 De deſcriptione, & circumſcriptione Cylindorum, vel quorumcunque aliorum corporum, donec relinquant quantitatem omni data minorem.

TRACTATVS XXXIV.

Pars 1. De ſolidis planis ſuperficiebus Contentis.

1 EXpenſio. De paralleipipedis. Prop. 9. in figura vbi eſt T pone H & vbi H pone T & vbicunque reperies L lege I.
2 De Priſmatibus Propoſ. 19. eſt intelligenda

INDEX TRACTATVVM.

da dúmodo prísmata sint eiusdem altitudinis vnde figura presupponenda est talis.

3 De Pyramidibus.

Pars. 2. De solidis curuis superficiebus contentis.

1 EXpensio. De C. ylindris & conis (pr. 6. l. vlt. A B N I. C dele. Propos. 13. l. 22. & 23. & vbicunque repereris diamet. lege semidiam.

2 De soliditate Annulorum, & Rhomborum solidorum.

3 De quorumcunque corporum soliditate quorum sectiones basi parallelæ sint similes & æquales.

4 De conis Ellipticis, atque conis in lineam terminantibus. Prop. 27. potest intelligi vniuersaliùs de quocunque corpore in punctū desinente collocato super quamcunque basim Vg parabolicam.

5 De conoidibus Hyperbolicis (pr. 30. l. 169. vbi 5. ad 12. lege 12. ad 5. & pr. 31. l. 13. quadrata lege quadrangula.

6 De conoidis Parabolici proportionibus (pr. 34. l. 175. & lege O & l. 134. & N O dele & lege in fine B N. & N O. minus.

7 De sphæroidibus & fruſtis eorum (pr. 40. l. 105. & l. 108. conorum lege Cylindorum.

8 De sphæra. Propos. 47. lin. 10. L H. lege A H. & lin. 20. X D. lege XC. & lin. 27. OX. lege CX.

9 De sphæra, sphæroidisque quadriformis, & vngulę Cylindricæ soliditate, cono flexis constante, de meta, & conoide parabolico & hyperbolico quadriformi. Prop. 56. vera est & demonstratur vsque ad illud verbum *Simulque* in linea 35. vnde nec Coroll. 1. verificatur.

10 De corporibus spiralibus.

TRACTATVS XXXV.

De corporum comparatione.

1 EXpensio. De similitudine corporum.

2 De trāsformatione equali corporum (pr. 39. l. 60. 17. ad 42. lege 7. ad 9. & vbicunque reperis 119. lege 49. & vbi 244. lege 63. & vbi 504. lege 108. Prop. 22. l. 31. & 36. & 41. A lege C & lin. 40. C lege A Prop. 27. lin. 25. O V. lege I V. O I. lege O V. Prop. 30. lin. 31. P D. lege P C. lin. 37. E X D. lege P V C. & lin. 38. D C. lege H I. lin. 40. F T C. lege C I H.

3 De corporum proportionali diuisione.

4 De corporum proportionali transformatione.

5 De corporum calculatione.

Corrige, & hos errores, qui postea occurrerunt. Pagin. 30. Principio 3. lin. 6. minori lege maiori, & lin. 7. minori lege maiori. Pag. 38. Pr. 14. lin. 5. DCA; lege A B F. Pag. 70. Prop. 16. in figura appone R; vt fiat triangulum POR. Pag. 205. Prop. 45. & sequen. lin. 2. ipsius propositionis, quorum lege quarum, & Pr. 47. in figura sub H. pone P. Pag. 161. Pr. 21. l. 42. vt 3. ad 8. lege vt 6. ad 12. rursus vbi est 6. lege 8, & l. 44. vbi est 3. 8. 12. lege 3. 6. 12. Pag. 240. Pr. 9. lin. 27. & 28. vbi est 9. lege 11. Pag. 251 Prop. 11. l. 7. A C. lege A H, & Prop. 9. lin. 28. A B. lege A L, lin. 29. G D. lege G B. Pag. 252. lin. vltima ad A O. lege E O. Pag. 292. Prop. 11. in figura ad finem lineę O F. Scribe T. Pag. 297. Pr 25. lin. 15. est lege est O. Pag. 304. in fig. propos. 14. Scribe E. inter C, & F. Pag. 310. Prop. 7. l. 12. A E. lege A B, lin. 14. A C. lege A B. Pag. 340. Pr. 26. coroll. aliqui numeri errant in tabula; sed corriges addendo ex ordine num 4. Pag. 386. Prop. 31. in figura ducito lineam A X. Pag. 492. Pr. 75. l. 9. 10. 11. quod dicitur de arcubus B D, & D F. intellige de complementis. Pag. 440. l. 14. pro num. 68. repone 48. Pag. 542. Prop. 48. in fig. ducito lineam C H.

TRACTATVS I.
PRÆLIMINARIS.

De essentia Quantitatis continuæ.

ANTEQVAM agamus cùm Euclide de proportionibus Mathematicis quantitatis, necessarium videtur, essentiam quantitatis ipsius, proprietatesque Metaphysicas cognouisse. Definitiones enim primas vix independenter ab essentiâ quantitatis potest haurire cognitio: Quarum notitiâ obscuriùs perceptâ, cætera omnia, quæ ab ipsis dependent in apertum prodire nequaquam possunt. Verum quidem est; quòd nec ipsa quantitatis essentia probè dignoscitur; nisi dependenter à multis propositionibus, quæ deinde sunt ostendendæ: Vnde nos tanquam Philosophos gerentes, quibus anticipare non insuetum, & præsuponere non indecens, earum probationibus, aut principijs ad oportuna loca seruatis, quæ ad quantitatis notionem faciunt Theoremata hìc vsurpabimus, tanquam nota, & ostensa, vt solùm, quantùm necessitas reposcit, percipi possit ipsius quanti constitutio.

EXPENSIO I.

In quo consistat conceptus quantitatis in genere, & in quot species secernatur.

HAnc quæstionem diffusiùs agitaui in nostris placitis philosophicis dis. 15. pag. 119. ex qua disputatione liceat aliqua, quæ magis ad Mathematicam faciunt, hìc delibare; vt deinde euidentiùs ipsa quantitatis essentia sese in apertum prodat.

PRÆASSVMPTVM.

COmmunis hominum conceptus in id conspirat; vt quantitatis nomine notet, tum continuam quandam rerum successionem, aut multitudinem, tum vnius rei extensam molem. Et quamuis Virtutum, potentiarum, accidentiumque intensionem, & vim operatiuam quantitatis mensuris subigant: an tamen verè sub quantitatis definitione veniant, incertum, & apud Philosophos controuersum. Motus quoque & temporis incerta, & anceps quantitatiua denominatio, & licet mensurentur, non propterea certum est, quantitatis sub genere contineri. Quamobrem, vt omnino pateat, quænam inter quantitates enumeranda sint, priùs Quantitatis, quæ apud nullos est controuersa, vt est successiua, continua, & discreta, conceptus, & definitio est inquirenda.

CONCLVS. I. PROPOS. I.

Essentia quantitatis *in genere eo consistit; vt sit capacitas quædam entitatis ad partes habendas*, vel actu, vel potentiâ, vel saltem per intellectus designationem.

1 PRobatur. Quia hæc definitio omnibus quantis etiam spiritualibus aptatur. Nam, & quantitas molis, & intensionis, & successionis, & numeri, & temporis, & loci, & extensionis, & omne aliud genus quantitatis sine partibus concipi nequit, siue illæ actu sint, siue potentiâ, siue designatione conciplantur. Sic in numero adsunt partes actu, in quantitate molis fieri queunt, in Cœlo, si esset incorruptibile, saltem concipi.

2 Probatur. Quia hæc capacitas ad obtinendas partes, omnium allarum proprietatum; quæ de quacumque quantitate dicantur, fons est, & origo. Prima est apud Vasq. T. 3. in 3. par. dis. 90. c. 3. n. 15.; Quòd det aliquam distinctionem materiæ: Nam si partes sint reales, dat distinctionem realem, si factibiles, vel conceptibiles dat distinctionem, aut virtualem, aut per intellectum. Secunda, quod mensuret, aut mensuretur: Nam si capacitate ad partes consequendas potitur; ergo erit inter partes, quæ excedat, quæ exæquet, aut ab alia quantitate deficiat. Tertia est numerari; nam partes, vel actu factę, vel designatæ plures sunt: Quamobrem numerationi obnoxiæ erunt. Quarta est proportio.

Etenim, vbi ſunt partes datur maius, minuſque, & vbi datur maius, aut minus, datur maior quoque, vel minor continentia, vel totius, vel aliquarum partium eius, & ideo maior, aut minor proportio, quæ in hac continentia conſiſtit: Quinta eſt vis quædam occupatiua loci. Quoniam, quod partes habet extenſas, ſecundùm eam extenſionem loco correſpondere poteſt. Sexta. Quòd obtineat partes in ſemetipſa ordinatas, & ſe inuicem excludentes; Nam vbi diuiſio eſt, vel conceptibilis, vel actualis, vel poſſibilis; ibi neceſſe eſt, vnam partem excludere aliam; alioquin ſi hæc aliam ſuâ ipſâ entitate inuolueret, non poſſet, nec quidem intellectus concipere cum fundamento partes; quia rei conceptus formalis earum excluderet multiplicitatem.

Dicet fortè aliquis ex Metaphyſicis. Ratio, per quam eſſentia alicuius rei ſecernitur, debet eſſe omnibus alijs prædicatis eſſentialibus prior; ſed extenſio eſt prior capacitate partium; ergo extenſio erit ratio conſtitutiua quantitatis.

Sed reſpond. Id optimè ſe habere, cùm plures proprietates adſunt eadem vniuerſalitate pollentes, quæ rem aliquam conſtituant. Tunc enim inter multas rationes eodem modo diſtinctiuas, cùm eadem, & æquâ ſpetie ſe diffundant, illa debet eſligi, quæ radix aliarum ſit, & alijs prior, & præeminens habeatur. At in contrarium res eſt. Si quidem extenſio licet in quantitate mollis ſit ratio prior, & per quam illa partibus fruatur, vt aduerſarijs morem geramus, non tamen adeo latè patet; cùm nec quantitas diſcreta, nec virtutis, nec temporis extenſione pateſcat. Verùm, nec equidem concedo. Extenſionem in quantitate cõtinua eſſe partium habitudine priorem, cùm imò entitas partium exiſtẽs ſit illa, quæ extenſionem cauſat; cùm vna extra aliam eſt: Quoniam ſi penetrentur extenſio non manet, & tamen eſſentia quantitatis adhuc eſt, & corpora diuinâ virtute penetrata quantitatis eſſentia non expoliantur.

2 Dices. Diuidere allam quantitatem, eſſentia quantitatis nõ eſt; ergo neque diuidi. Verùm, nec diuidere, nec diuidi eſſe quantitatis conſtituit: Neque enim in hac ſententia ſumus. Sed id aſſerimus; ex eo quantitatem conſtitui: quòd ſit entitas talis, cuius vna pars nõ ſit omnis pars, & toti adæquetur. Si detur itaque aliquod ens, cuius hæc entitas deſignata non ſit alla ſimpliciter, & ſine reduplicatione intellectiuâ; hoc erit ens quantum, & hoc eſt conſequi capacitatem partium ſaltem deſignabilem.

CONCLVS. II. PROPOS. II.

Species quantitatis ſex ſunt. Quantitas Molis, Numeri, Temporis, Motus, Virtutis, Ponderis.

PRob. Nam quantum, aut eſt ſubſtantiale, aut accidentale. Si ſubſtantiale eſt, aut conſideratur, vt extenſum loco, vel vt habens plures partes in eodem loco. Si conſideratur, vt loco ſubſtantia extenſa, iam quantitas molis eſt, quæ trinam dimenſionem conſequitur altitudinis, longitudinis, latitudinis. Si verò eius partes vna intra aliam latent, & eundem locum occupent; tunc eſt quantitas ponderis. At ſi quantum eſt accidentale; tunc, aut conſideratur accidens in ſubiecto extenſum, & tunc cum ſe accomodet ſubiecto eandem conſtituit cum eo molis quantitatem: licet propriè extenſionis vocetur. Si verò in eadem parte ſubiecti ſe colligat; tunc eſt quantitas virtutis, ſeu intenſionis. Quòd ſi ſubſtantia, ſeu accidens intelligantur moueri, tunc quantitas motus enaſcitur, & ſi perſeueret in motu, quantitas durationis, ſeu temporis emergit. Tandem ſi ſubſtantia, aut accidens motus, & duratio intelligantur diuiſa, & in plures partes ſeiuncta, diſcreta quantitas eſt; & vocatur, quantitas numeri.

COROLLARIVM.

HInc euenit, quòd, cùm quantitas molis, & numeri ſint, tum ſubſtantiæ, tum accidentium, in ſubſtantia extenſorum, quòd etiam ab illa dependeat quantitas, & ponderis, & motus, & temporis, & virtutis. Et hinc quod de illis primo diſcurrendum ſit, vtpotè, quòd vniuerſale præbeat fundamentum ad alias quantitates penitiùs conſiderandas.

Conſtat autem hoc de quantitate ponderis; nam à magnitudine rei pondus dependet; cùm pro ſui quantitate ſeue pondus in ſpecie poſſit æquare maius, ratione ſuperadditæ molis. Et ita quantitas motus, & temporis à multitudine, magnitudineque partium pertranſeuntium depẽdet: Sic quantitas virtutis à mole, ſeu magnitudine agentis, ſeu à numero mouentium, ſeu à magnitudine figuraque rerum motarum exerit. Quapropter in hoc libro agendum de *Quantitate Diſcreta, & Continua*; vtpote in quo res mathematicæ vniuerſaliter tractantur; ideoque de illis tanquam vniuerſaliſſimis quantis agendum, quorum cognitio omnem aliarum quantitatum cognitionem ſubalternat, & ab illâ euidentia principia mercantur. Subeſt & inſuper alia ratio. Nempe omnia alia genera quantitatum ſub ratione quantitatis diſcretæ, ſeu continuæ conſiderari, vt patebit (ſi Deo dante) ad illarum attingendos tractatus deueniamus.

EXPENSIO II.

An aliquod argumentum mathematicum euidenter oſtendat quantitatem, ex punctis non conſtare.

QVamuis hæc quæſtio requireret legentem mathematicâ imbutum: Cùm tamen ſit quoque philoſophica, & Philoſophi, licet Matheſi non exornati illam percurrant, & ventilent præſupponendo ea, quæ à Mathematica dependent, vel lumine naturæ cognita, vel ab eâ demõſtrata: hinc eſt, quòd hîc eam collocandam duxerimus, tanquam ad cætera, quæ deinde conſiderantur perneceſſariam.

CONCLVS. I. PROPOS. III.

Nullum mathematicum argumentum, ex punctis indiuiſibilibus quantitatem molis *conſtare, oſtendit.*

HÆc concluſio eſt negatiuè oſtendenda; nempe argumentorum eam impugnantium euidenti ſolutione: Primò itaque aliqui credunt, ex punctis conſtare quantitatem ex illa propoſ.

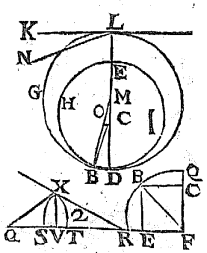
propoſ. Eucl. l. 3. p. 13. in qua probat circulũ aliũ circulũ non tangere in pluribus punctis, quam vno, & hoc adducit Bagata in 6. lib. ſec. 3. d. 4. de quantitate, tanquam vnicum, & ineuitabile argumentum ad puncta indiuiſibilia in quantitate oſtendẽda, & citat fallaciter Euc. lib. 1. propoſ. 16.

Sed reſpond. 1. Euclidem probare circulum non tangere planum, vel (quod ſpecialiter ipſe probat) circulum intrinſecùs in pluribus punctis, quam vno ſenſibiliter diſſitis; non autem immediatis. 2. Oſtendere, non tangere in pluribus punctis, quam vno; ſed diuiſibili; ſiquidem non oſtendit illud punctum contactus, aut eſſe diuiſibile, aut indiuiſibile.

Verùm dices. Licet id ipſe non oſtendat ex eius tamen demonſtratione colligitur: Nam ſi tangunt ſe in duobus punctis; tangant ſe in B & D; ita vt hæc duo puncta ſint in vtriuſque peripheria, tum maioris, tum minoris circuli. Certum eſt quod in omni triangulo duo latera ſimul ſunt tertio maiora ex propoſ. 20. lib. 1. Element. At ſi B punctum in circumferentia vtriuſque circuli eſt; triangulũ M B C duo latera B C, & C M eſſent tertio æqualia; quod eſt abſurdum, & contra citatam propoſ. 20. Id autem patet; nam B M, vtpote radius maioris circuli æquatur lineæ M D; cui etiam æquantur duo crura M C, & C B: Quoniam M C eſt eius pars, reliquæ verò parti C D crus B C eſt æquale, vtpote radius minoris à centro C ad eius peripheriam pertingens.

* Hæc eſt demonſtratio euidens illa quidem, ſi agamus de duobus punctis diſtantibus: non tamen immediatis. Nam primò, vel agimus de lineis, quæ ſint indiuiſibiles, vel quæ ſint diuiſibiles. Si ſint indiuiſibiles. Certum eſt, quòd maior eſt latitudo B D, quam O C: Si ergo B D ſint duo puncta immediatè ſe tangentia, multò magis ſe tangent duo puncta C, & O; vel ergo etiam ipſa erunt duo puncta immediata, & ſic maius ſpatium non erit B D, quam O C; vel erunt minùs immediata, & ſe penetrabunt puncta O, & C: quapropter B M C non erit triangulum; quia nulla diſtantia intericietur inter C, & O puncta inuicem penetrata. Si verò lineæ ſint diuiſibiles; iam latitudo vnius occupabit aliam in O, & C, licet in B, & D differant ſpatio: Vnde rursùs B M C non erit triangulum.

* 2 Certum eſt. Lineolam O C eſſe maiorem illa portione, qua excreſcunt latera B C, & M C ſupra tertium crus B M. Quoniam, vt potes videre in triangulo Q R X linea S V, & V T, qua excreſcunt latera Q X, & R X ſuper baſim Q R; vt vna eſt minor perpendiculari V X; quia ſunt duo ſinus verſi, qui numquam in triangulis obtuſangulis, quorum reliqui anguli ſint minores G. 45. ſinus recti medietatẽ æquare poſſunt. Quia, vt Th. 2. exp. 2. de ſin. Quadratũ ſinus recti eſt quadruplũ rectãguli ex ſemiradio, & ſinu verſo: Sed in 3. fig. ſemiradius ſuperat dimidiũ ſinus recti G. 45. E B. Quòd eius quadratũ ſit quadrato ſui dimidij quadruplũ ex p. 6. l. 2. ſemiradij verò duplũ; cùm ex pr. 11. l. 2.



ſit ſubduplũ quadrato radij R F, cui ſemiradij eſt ſubquadruplũ ex 6. l. 2. Ergo ſinus verſus E R minor erit dimidio ſinus recti E B. Alioquin cum ſemiradio maiori faceret quadratum maius, quam ſubquadruplum quadrato ſinus recti, cui quadratum ſui dimidij ſubquadruplum eſt; Cum ergo ſinus verſi angulorum minorum, quam Gr. 45. vt ſunt anguli Q R nõ æquent ſemiradium erunt minores; quà V X. Quod licet ex defectu principiorum modò ſit obſcurum, & incompertum; præſuponendum tamen eſt, vt certiſſimum, & euidens apud eos, qui Matheſi inſtructi ſunt.

Quamobrem O C in Fig. I. maior erit ea portione, quà excreſcunt latera B C, & C M ſuper baſim; cum anguli ad M, & B ſint acutiſſimi; eo quod angulus apud C ſemicirculo (excepto vnico puncto inter B D) menſuretur. Ponamus itaque illam perpendiculárem C O lineam eſſe vnius puncti: Ergo latera, nec quidem vnico puncto ſuper baſim excreſcent: Quare baſi eo in caſu, nec puncto quidem indiuiſibili erunt maiora. Sed minor eſt O C, quam D B: Ergo non excreſcentibus lateribus, nec quidem vnico puncto indiuiſibili ſuper baſim, & ideo æqualibus ipſi baſi; erunt tamen latera apud verticem C diſtantia, a baſi in C, & diſtabunt ſaltem puncto, & tantò magis diſtabunt in B, & D; quare D, & B erunt duo puncta, & B M C triangulum, & latera B C, & C M baſi B M maiora non erunt.

* 3 Sint duo circuli E D, & D L, eorumque centra non magis, quàm puncto diſtent in C, & M; illique ſint perfecti, vt ab aduerſarijs conceduntur. Ambitus itaque eorum in E, & L non diſtabunt magis, quàm duobus punctis: In G H vnico puncto: Ergo in reliquo ſpatio vſque ad D minus, quàm puncto diſtarent; ſic quę punctum in multas, multaſque partes diuideretur.

4 Aut contactus eſt phyſicus, & realis; aut non. Si phyſicus: certum eſt, quòd quilibet circulus in duo poteſt ſecari per imaginationem ſaltem; ita vt nihil integritati ſemicirculi deficiat. Diuidatur itaque, & diuiſio in punctum contactus cadat, vel punctum illud abſumet, & tunc aliquid, ſemicirculi partibus, vel vtritque, vel alteri deficiet: vel non; & ſic in duo ſecabit illud punctum.

Reſpondere verò (vt reſpondet quidam) circulum in duas æquales partes nequaquam poſſe ſecari, aut quòd non poſſit diuidi mente: niſi aliquod ex eo deperditum imaginemur, eſt contra mathematicos, pugnare, qui id euidenter probant, & euidens probatio fortiùs euincit de diuiſione mente conceptâ, quàm de diuiſione applicata materiæ.

Obijces 2. ex Pelletario apud Clauium. Omnis quantitas ſi augeatur in infinitũ poteſt quãcumque datam ſuperare, ſed angulus contactus circuli cum plano, licet auctus in infinitum, nunquam poteſt angulum rectilineum K L N, etſi minimum ſuperare; Ergo angulus acutus contactus K L G quantitas non eſt, & ſic multò minùs ipſe contactus quantitas erit.

Huic argum. Fuſè reſpondet Clauius. Nos illi reſpondemus, quatenus nititur probare punctũ contactus indiuiſibile eſſe. Rep. itaque. Quòd, vel angulus contactus ſumitur, vt inclinatio duarum linearum, prout Eucl. defin. 8. lib. 1. vel pro ſpatio inter lineas inclinatas cõtento. Si primo modo accipiatur verum eſt, quòd angulus contactus non eſt quantitas: ſed nec angulus re-

ctus. Verùm potiùs quidam modus quantitatis; vnde in genere quantitatis non est facienda comparatio, sed inclinationis. Cum autem lineæ rectæ à curua differant genere, hinc est, quod inclinatio curuæ ad rectam inclinatione rectę semper euadat maior, & curua magis inclinet ad planum, quàm recta. Licet deinde factâ comparatione inter lineas inclinatas eiusdem generis, puta peripheriarum possit dari minor, minorque in infinitum, prout se circuli augebunt. Si verò Angulus accipiatur prout dicit spatium comprehensum inter lineas, tunc quidem quantitas est; sed cuius ingnota mensura sit. Nam angulus quidem rectus arcu circulari mensuratur inter crura comprehensi: sed, quæ nam sit mensura anguli curuilinei, incompertum est; quare omni acuto rectilineo minor quidem est in principio sui, ex demonstratione Euclidis. Sed cùm non seruet semper eandem inclinationem, & cũ accedens ad quadrantem versus G maior fiat, an absolutè dicendus sit minor; res in dubio est; & quo sensu minor dicendus sit, magis anceps.

* Et hæc quidem de angulo. Verùm vltima consequentia nullo pacto colligitur; nempe quòd contactus ipse non sit quantitas quia angulus contingentiæ omni acuto rectilineo maior sit; imò è contra potiùs videtur deduci: Quia cùm curua omni rectâ inclinante alteri rectæ magis inclinet, magis etiam se illi adaptat: Vnde contactus ipse lineæ rectæ cum curuâ maior erit, cùm maior sit inclinatio, quàm rectæ cum rectâ. Datis enim duabus lineis materialibus, & aliquali latitudine pollentibus, contactus earum maior est, si inclinatio maior sit; & ideo etiam curua, & recta sensibilis se inuicem tangent magis, quàm quælibet recta tangat rectam omnimodâ inclinatione datâ; sed puncta licet indiuisibilia in contingendo, partes habent etiam iuxta aduersarios (siquidem tangitur vnicum punctum à pluribus punctis) Quare punctum contactus poterit esse secundum plures partes, & pauciores, & contactus poterit esse maior, aut minor. Quamobrem, cùm non sit indiuisibilis nullus, licet punctorum indiuisibilium, contactus, ex eo non poterit deduci quantitatis ipsius indiuisibilitas. Quandoquidem dato etiam; quòd punctum plani à circulo tangeretur; nihilominus secundum plura puncta peripheriæ illud punctum plani posset contingere.

EXPENSIO III.

An aliquod argumentum mathematicũ ostẽdat quantitatem ex punctis non constare.

VIdimus puncta indiuisibilia in quantitate nullâ efficaci ratione mathematicâ constare: Modò videndum est; an sit aliqua ratio mathematica, quæ illa explodat.

CONCLVS. I. PROPOS. IV.

Argumenta plurima mathematica ostendunt puncta indiuisibilia in quantitate non reperiri.

ARgumentum est vsitatum, quòd non posset secari linea nouem punctorum in duas partes æquales; quia scilicet punctum medium in duo esset secandum.

2 Quòd datis duobus punctis concentricis tot reperirentur puncta in maiori; quot in minori; cùm ductis à centro lineis ad omnia puncta circonferentiæ circuli maioris, illa necessariò transirent per tot alia puncta circuli minoris: Quare in vtroque par numerus punctorum lateret.

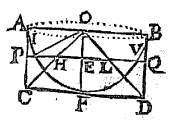
3 Quod Diagonalis in quadrato esset tot punctorum quot latus; cùm ductis à punctis omnibus laterum parallelis, per omnia diagonalis puncta transirent.

Quibus argumentis geminam opponunt aduersarij responsionem. Prima est negando lineam illam in duo secari, vel duci lineas per omnia puncta, vel laterum, vel circulorum. Sed hoc gratis negatur, cum inter concessiones de puncto ad punctum lineam posse duci, vt omnino concedibile exposcat Euclides, & fine, quo Mathematica non constaret. Et quoad sectionem lineæ bifariam, demonstratio Eucl. propos. 10. conuincit saltem de sectione mentali, & Methaphysicâ, vt euidens est, nec valet cuiusdam resp. omnino futilis, quod lineam demonstrauerit Euclides omnino in duo partibilem, ex suppositione Aristotelicæ sententiæ. Quasi quòd demonstrationes mathematicæ solam probabilitatem consequerentur, & præcipuè illa ex suppositione probabili procederet, quæ toti Mathematicæ euidentia fundamenta præbet.

Secunda est Galilei dialog. p. 21.; qui existimat puncta indiuisibilia in quantitate esse infinita; & ideo non posse punctum in duo secari, vel de puncto ad punctum, per alia puncta certa, & determinata, linea duci: Cùm nec duo, nec decem, nec aliquis numerus determinatus punctorum in quantitate reperiatur; sed inderminatus. At huic sua erit responsio; cùm ostendemus non posse infinita puncta, seu indeterminata in quantitate reperiri.

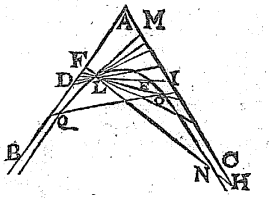
* 2 Sic probo spetialiùs positam sententiam. Sit Cylindrus A B C D excauatus concauitate spherica A B F Sitque in illo descriptus conus O C D. Dico; quòd si punctum illud extremum O indiuisibile est, Quod etiam tota circumferentia A B indiuisibilis est.

Et si illa circumferentia diuisibilis est; quòd etiam punctum O extremum, quodcũque illud sit, diuisibile est. Id verò constabit, quia circumferentia A B punctata, & punctum O probabuntur æqualia ex Luca Vallerio lib. 2. propos. 12. de cent. grauit. Quadratum O I ob angulum rectum E ex 47. elemen. Et nobis p.11. lib. 2. est æquale duobus quadratis ex linea O E, & ex linea I E Lineæ verò O I, est æqualis linea E P, & O E linea E H: Quare quadratum, ex linea P E est æquale duobus quadratis ex I E, & E H lineis, & quadruulum eius quadruplo. Quadratum verò ex P Q est quadruplum quadrato ex P E, & I V quadruplum quadrati I E: Et H L quadruplum quadrati H E, & ita etiam erunt circuli quadratis inscripti. Quare circulus, cuius diameter P Q est æqualis duobus circulis I V, & H L; Ablato itaque à circulo P Q, circulo I V, residuus annulus, cuius latitudo P I, & V Q, erit æqualis circulo H L. Et si lineam P Q eleues vsque ad vltimum punctum O, semper valebit idem



idem argumentum. Quare punctum O erit æquale circulo A B: Sed circulus A B diuisibilis est; Ergo etiam punctum O, quodcumque minimum accipiatur. Hæc autem demonstratio deseruiat pro ijs; qui iam Mathematica sunt instructi, sicut & sequentes.

* 3 Sic ostenditur ex propos. 2. Expens. 4. Conic. Agentes de Asymptoto demonstrabimus, Quòd hyperbole semper ad asymptotos accedit, & numquam illos tangit, vel secat, & si ponatur quælibet minima quantitas inter ipsos, & hyperbolem, distantia tandem etiam illâ minimâ quantitate datâ minor euadet. Sint Asymptoti B A & A C, sectio hyperbola Q E N, Ostensum est, hanc semper, quousque prolungantur latera Q L, & N E, accedere propiùs ad Asymptotos A B & A C; sed numquam illos tangere. Detur itaque punctum alliquod. Cum omni data quantitate tandem spatium interceptum inter Asymptotos A C & hyperbolam Q E N euasurum sit minus; euadet minus dato puncto; cùm tamen aduersarij nolint minus puncto in quantitate posse dari.



* Et idem erit argumentũ ex inscriptione Hyperbolarum deductũ: Nam ostendit Vincen. Viuianus insignis Geometra de maxim. & minim. lib. 1. pag. 45. Hyperbolas per diuersos vertices simul descriptas, verùm, quarum eadem sit regula, semper inuicem accedere; nunquam tangere. Quare idem quoque argumentum adornari poterit.

* 4 Prob. Quoniam omnia rectangula, vt docuimus de Superficie conicâ agentes inter Asymptotos, & Hyperbolem facta, inter se sunt æqualia; Sic rectangulum factum ex lineis L F & M L, est æquale parallelogrammis interceptis, & quibuscumque alijs quorum vnum latus L M sit vni Aymtoto parallelũ, alterum F L ad idem pũctum Hyperbolæ incipiens sit alteri Asymptoto parallelum, & in primum asymptotorum A C desinat. Sit ergo punctum quantitas aliqua proposita, ad quam hyperbola semper accedendo ad alteram asymptotos, iam peruenerit. Quare rectanguli huius pũcti interpositi inter hyperbolam, & asymptotos latitudo erit linea, vtpote ab eo puncto deducta, quo distat hiperbola ab asymptoto; quod est absurdum, & linea æquabitur parallelogrammis omnibus alijs interpositis V.g. parallelogrammo E L M A, quod item absurdum est, cùm linea solùm longitudine sit diuisibilis, & parallelogrammum etiam latitudine.

Contra verò hoc argumentũ ea responsio valeret, quòd puncta sunt infinita, & ideo, quòd nec in cono vltimum punctum assignari potest, nec in hyperbolâ ea distantia, quæ punctum æquare queat. Quamobrem vt euidentiam hæc argumenta fortiantur, hæc quæstio est resoluenda.

EXPENSIO IV.

Puncta infinita in quantitate, an admitti debeant.

POsset hæc quæstio agitari de punctis, quæ actu sint in quantitate distinctis secundùm suum esse, atque numerabilibus. Posset etiam intelligi de punctis, quæ in quantitate actu non distinguantur; sed mentaliter, vel per diuisionem successiuam separabilia. Si hoc secundo modo intelligatur, coincidit cùm opinione Aristotelicâ, quod partes sint in infinitum multiplicabiles absque eo, quòd earum vltima possit attingi. Nam, neque hoc pacto punctum vltimum, nec quidem intellectu assequi possemus; cùm infinitum exhauribile non sit, & si vltimum assignaretur, iam infinitum esset exaustum. De punctis itaque actu distinctis, & actu numerabilibus sermo est: de quibus sic assero.

CONCLVS. I. PROPOS. V.

Puncta infinita in quantitate actu distincta nequeunt admitti.

1 PRob. Quoniam numerus infinitus dari nequit, ergo neque in quantitate puncta infinita. Nam numerus numeratus, subelectumque numeri est multitudo ipsa. Quare si multitudo infinita punctorum daretur, etiam infinitus numerus daretur. Infinitus autem numerus dari nequit; quia innumerabilis esset. Quare infinitus numericus per exclusionem essentiæ numeri constitueretur.

2 Vel puncta illa simul addita constituunt maius, vel non, si non; ergo quantitatem non extendunt, vel malus constituunt, & sic cùm eorum multitudo sit infinita, & eorum quodlibet maius quid addat, magnitudinem infinitam constituent. Sunt enim infinita simul addita, quorum quodlibet extensionis aliquid facit: Ergo istud quid extensionis multiplicatur in infinitum; Ergo extensio erit infinita.

* 3 Omne infinitum æquale est; alioquin vbi conciperetur alterum maius, ibi minus esset exhaustum, & finitum. Ergo, cùm in qualibet quantitate puncta sint infinita, quælibet quantitas assignata maior A, minor B puncta infinita in se concludet, & ideo æqualia multitudine. Sed indiuisibilia magnitudine sunt etiã omnia æqualia; quia indiuisibilia sunt: Ergo exibebunt extensionem æqualem. Propterea quantitas maior A extensione æquali pateret, ac quantitas minor B; quod esse nequit, & omnes quantitates essent æquales, quod item absurdum est.

Dices ex Galilæo Dialog. pag. 23. Quòd neque sint infinita, nec finita; sed tot, vt cuilibet assignato numero respondeant.

Nam, vel hæc assignatio potest fieri finita in infinitum, & sic idem est, ac admittere puncta finita in infinitum in quantitate; quod ipse non vult, vel finita tantùm, & sic iam, nec puncta in quantitate sunt infinita, vtpote correspondentia finitis numeris. Deinde quæro de omnibus punctis. An omnia finito alicui numero correspondeant; & hoc negat. Igitur alicui infinito; sed hoc non datur; Ergo alicui incerto, & in determi-

determinatè : Quare collectio punctorum incerta est, & indeterminata ; & ideo actu non erit distincta : Siquidem omne, quod est actu, determinatum etiam est, & certum ; vnitateque gaudet, & singularitate ; quâ possit vnitatibus numericis correspondere.

4 De omni, quod assignatur quantitatis, illud licet minimum, quæritur an correspondeat cuicumque numero assignato, siue non : si correspondet, cùm omnis quantitas maior aliquotenùs illâ, eandem prorsus correspondentiam consequatur, erit æqualis minori. Et si dicas correspondere quidem in multitudine punctorum non autem in extensione.

Contra est. Nam omne punctum, cùm non sit cùm alio penetratum, & per aduersarios omnia sint eiusdem rationis, & substantiæ omnia æquo modo substantiam extendunt. Ergo cùm, & quantitatis magnæ puncta, & quantitatis paruæ omni assignato numero correspondeant ; æqualiter extensionem præstabunt.

5 Cùm omni numero indeterminato correspondeant, iam, & ipsa puncta erunt multitudine indeterminata : Sed multitudo eorum extensionem dat : Ergo est etiam indeterminata extensio ; quod est absurdum.

6 Deus v det omnia illa puncta ; imò & secernere, & separe potest. Separet itaque, vel re, vel cognitione. Tunc, aut illa puncta sunt infinita vel finita. Si infinita ; nulli numero correspondent ; cùm numerus infinitus dari nequeat. Si finita ergo non omni assignato numero ; sed alicui finito correspondere debent.

EXPENSIO V.

In quantitate partes infinitæ capacitatis virtualis, seu mentalis capaces sunt.

LICET excluserimus puncta infinita in quantitate, & indeterminata, quæ actu sint ; non tamen quandam infinitam capacitatem partium excluſimus, quam hac, & sequenti expensione in animo est declarare.

CONCLVS. I. PROPOS. VI.

In quantitate partes in infinitum concipi possunt, dummodo quantitas concipiatur.

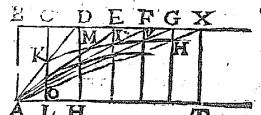
PRobatur. Nam essentia quantitatis in partium capacitate consistit : Ergo si quantitas concipiatur, capacitas partium concipienda est.

* 1 Mathematicè. Docet Euclides lib. 10. elemen propos. 12. reperire lineas longitudine alteri lineæ incommensurabiles, quarum natura talis est ; vt facta qualibet in eis diuisione, quamuis minimâ, & quacunque adhibitâ partium multiplicatione, nulla tamen pars possit deseruire pro communi mensurâ illarum ; sed semper inuicem pars vnius, parti alterius comparata inæqualis inueniatur. V.g. hæc diuidatur in 10, vel 100, vel 200, partes, illa in 7, aut 25, aut 138, aut quoquo modo in partes aliquotas : numquam tamen vna, alteri commensurabitur ; semperque partes diuidebunt, quousque erunt partes. Hinc autem deducitur, quòd erunt in infinitum diuisibiles. Alioquin, si tandem ad minimas deuentum esset ; iam, cùm omnia minima sint æqualia, partes factæ æquarentur, contra euidentiam demonstrationis.

* 2 Docet Euclides propos. 49. lib. 10. elem. à mediâ, quæ est irrationalis linea, infinitas irrationales facere ; quæ nulli antecedentium irrationalium parti sint in aliqua sui parte æquales, ideſt omnibus irrationales ; Ergo eadem quantitas poterit habere partes infinitas saltem conceptas intellectu ; cùm nequeat inueniri pars adeo minima, quæ alteram exequet. Alioquin tandem aliqua reperiretur eadem cum aliqua ex antecedentibus, vel tota, vel in aliqua sui parte ; Si enim punctis constaret, in numeris ea puncta numerantibus proportiones illarum exprimi possent ; & ita sicut omnis numerus alicui numero est proportionatus ; sic reperiretur irrationalis alicui irrationali consentiens, cuius proportio in numeris exprimi posset. Quare irrationalis non esset : Ea enim est irrationalium incommensurabilitas ; quæ nullis numeris effari possit.

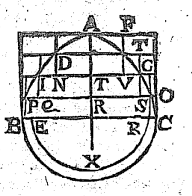
* 3 Probatur. Ductis parallelis AH, & BC, & perpendicularibus BA, & CL, &c. Ducantur ab A puncto rectæ AD, & AE, & AF, & AG, &c. in infinitum. Dico quod CL diuiditur in partes minores, & minores in infinitum : & tamen numquam finiri potest.

Nam primo in K bifariam ; deinde per E in tres partes : deinde per AF in quatuor, in quinque per AG, in sex per AOX, ita vt OL sit sexta pars totius CL : & semper lineæ inferiùs, & inferiùs diuident in partem minorem, iterumque minorem, & nũquam ad punctum L peruenient, quia AX, aut quælibet alia longiùs in infinitum ducta, semper magis distabit in O ; quam in A à linea AH ; cùm faciat angulum AOL. Alioquin si conueniret in O, non esset recta ; vt præsupponitur. Sic lineæ CK, & MD, & IE semper breuiores erunt in infinitum : Quia MD minor erit KC, & IE minor, quàm MD, & VF, quàm EI, vt ostendemus dante Deo in tractatu perspec. & quilibet ex se potest concipere. Quapropter illæ lineæ poterunt diminui in infinitum ; & semper supererit, quid auferatur.



Probatur 4. Trac. de annulis solidis demonstramus. Annulos solidos, per quorum soliditatem conoidis parabolici superficies transit, esse inter se æquales ; & eorum superficies horizontales inuicem quoque æquales. Sic crassitudo PB in annulum BXR solidum circa conoidem BAC flexa, & per cuius soliditatem per B, & P conoidis superficies transit ; iste inquam annulus est æqualis annulo PI grassitiei maioris ; sed minoris ambitus, & etiam annulo ID, & tandem DF Cylindro. Hi verò annuli, & superficies eorum orizontales ; dum dilatantur gyro, restringuntur soliditate, superficieque in infinitum. Vel ergo semper reperitur soliditas, & soliditas : superficies, & superficies ; quæ minor sit in infinitum, & in infinitum, vel non : Si non ; ergo deueniemus ad vltimum indiuisibile in superficie annulari ; quæ erit circumferentia, & in annulo solido ad vltimum indiuisibile soliditatis, quod erit superficies vltima, in quam desijt soliditas, quæ soliditati Cylindricę DF æqualis erit ;

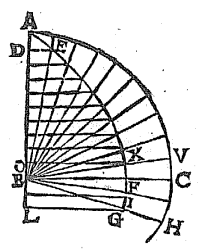
erit ; quod est absurdum, cùm superficiei ad corpus, & lineæ ad superficiem nulla sit proportio ; quia sunt in diuerso genere, & primo quãtitatis. Deinde tunc parabola APB de P angulo ad alterum angulum B more diagonalis non transiret ; cum nulla esset grassities ; sed parallelæ PP congrueret ; quod contra naturam parabolę est : cum nunquam parallela diametro linea parabolea esse possit. Quod si grassities PB numquam ad vltimum sui esse peruenret. Ergo soliditas est diuisibilis in infinitum. Eademque ratione si superficies BE numquam ad vltimum sui esse peruenit. Ergo diuiditur in infinitum.



* 5 Docet Archimedes, & nos de solidis, & de sphæra, & sphæræ superficie. Corpus segmentis conorum sphæræ inscriptum esse sua soliditate minus ; quam quadruplum superficiei circuli maximi sphæra inscripti. Et semper crescentibus, & multiplicatis lateribus quocumque numero quadruplo ; accedere quidem semper magis ad æqualitatem, tum soliditate quadrupli coni inscripti, tum superficie quadrupli circuli maximi : sed nũquam ad eam peruenire cressente semper figurâ conica in soliditate, & superficie ; sed semper minoribus, minoribusque incrementis in infinitum. Ergo quantitas illa, quâ deficit figura conicis segmentis constans sphæræ inscripta, tum superficie accedendo ad quadruplum maximi circuli, tum soliditate ad quadruplum coni inscripti, recipiet infinita augmenta in infinitum absque eo, quod æquet ipsum quadruplum : quare quantitas illa per quam fit accessus ad quadruplũ circuli, vel coni erit diuisibilis in infinitum ; cùm additione minoris, & minoris, quanti, numquam ad quadruplum deuenire possit.

6 Probatur. Nam licet angulus contactus sit minor omni acuto angulo. Iste tamen angulus potest diuidi in finitas quidem partes ; sed in infinitum. Possunt enim fieri circuli centris à linea, quam tangit, perpetuò remotioribus : Sic poterit fieri circulus semidiametro digiti vnius, semidigiti, & sic in infinitum. Sed illi circuli semper faciunt angulum contactus in infinitum minorem. Ergo angulus ille in infinitum diuidi potest.

* Probatur vltimò ex linea quadratrice EA. Eadem ; etiã si vltima pars quadrantis CV diuidatur, & subdiuidatur in infinitum ; sicut, & vltima pars proportionalis semidiametri O B ; & à partibus subdiuisis circumferentiæ, ad centrum rectæ, vt BV ducantur. Sicut & à partibus eiusdem rationis semidiametri, perpendiculares, vt OX ; In



mutuis occursibus, & intersectionibus X puncta quadratricis semper, semperque approximantia magis ipsius basi exibebunt ; sed numquam ad ipsam basim BF peruenientia. Quare Quadratrix per ea puncta continuata, numquam consequetur suam basim, aut ad eam coniungetur, vt ostendemus coroll. 2. ex pen. 3. trac. de lineis flexis in fine. Vnde partes, quæ inter basim, & datam partem vltimã quadratricis reperiuntur, vt FX, erunt in infinitum diuisibiles. Multa sunt in idem conspirantia argumenta philosophica, sed, quæ, vt extera consultò relinquimus, cum satis superque hæc conuincere videantur.

EXPENSIO VI.

An partes quantitatis phisicam diuisionem in infinitum subire possint.

HÆc quæstio philosophicè soluenda est, cùm hoc, non ab ipsa quantitate dependeat ; sed à rerum natura : Licet enim res donec concipiantur quantę semper vlteriùs diuisibiles concipi debeant. Nihilominus potest esse ; quod res determinatam quantitatem ad sui existentiam reposcant, sic ipsâ earum naturâ poscente : & ideo quòd licet vlteriùs, vt quantæ diuisibiles sint, si tamen diuidantur, pereant, cùm iam eà quantitate non potiantur, quæ ad ipsarum constitutionem requiritur.

CONCLVS. I. PROPOS. VII.

Probabile est in diuisione quanti tandem esse necessariò quiescendum.

1 PRobatur. Qualitatis per gradus augmentabilis primus gradus à Deo, vel produci potest ; vel non. Si potest : Ergo ille est indiuisibilis : Neque enim sub minori quantitate intensionis, qualitas illa producibilis est ex suppositio, alioquin assignatus ille gradus primus non esset. Si verò dicas. Nequaquam id posse facere Deum. Illa igitur qualitas primum gradum non habet, à quo produci incipiat, & quomodo habebit secundum, & tertium ?

2 Efficiat Deus primam partem rei, quam potest facere. Sed non repugnat, quod faciat Deus id, quod potest. Et ideo non repugnabit consequenter, quod primam partem rei producat. Quare neque repugnabit, quod vltimam relinquat.

3 Multa sunt, quæ videntur per solam diuisionem proprias formas deperdere, & alias consequi. Ergo etiam erunt aliqua, quæ diuisa se subducent, & in nihilum abibunt. Nam difficulter potest ostendi in adustione ligni, quòd forma noua cinerum ab igne introducatur. Cùm ignis formam cinerum, vaporum, carbonum, spumarum, scoriarum, & tam diuersarum rerum, in quæ lignum, & alia similia in se adurendo conuertuntur, non contineat. Quod si noua forma non est ab igne ; à quo erit ? nisi à solâ segregatione, quam præstat ignis, tanquam à causa destruente connexionem sub quâ in esse perfectiori, & sub forma altioris ordinis detinebantur. Quâ destructâ subiectum ad aliud, ad quod erat in potentia, faciliit. Si ergo res per solam diuisio-

uisionē posſunt mutari; ergo etiā in nihilū redigi.

4 Viuentia determinatos limites paruitatis, & magnitudinis recognoſcunt ita, vt datâ vniuſcuiuſque ſpecie, ſub minore quantitate produci nequeant. Ita ergo non Improbabiliter poterit de quacumque re inanimatâ concludi, licet tamen repugnantiam; cur ſub minori quantitate eſſe nequeant, euidenter non cognoſcamus.

5 Deus videt omnes partes factibiles in quanto, & quæ ſimul, & quæ ſucceſſiuè fieri queunt. Ergo præter illas diuiſiones, quas videt, Deus nullas alias agnoſcit. Ergo partes ſunt ad vltimum ſui eſſe redactæ: Alioquin, ſi adhuc eſſet capacitas partium, non eſſent omnes partes acceptæ; quas videret Deus.

6 Deus quoque agnoſcit extremo ſignato A, quæ pars immediata ſuccedat; Quæ erit indiuiſibilis; Siquidem, ſi multas partes concluderet, iam non eſſet pars immediata.

Obijcies ſi in quanto partes in infinitum concipi poſſunt. Ergo etiam fieri.

Reſpondetur diuerſam eſſe rationem. Nam concipi quidem poſſunt; quia ſupponitur id quod partes eſſentialiter recipit: At ſi per ablationem ſubiecti tollatur, & quantitas; tunc ſicut quantitas non eſt, ſic nec diuiſibilitas ampliùs concipi poteſt. Nos autem dicimus, quòd ſubſtantia determinatos limites paruitatis obtineat, ita quòd, cùm ad illud vltimum deuentum fuerit, pereat, & defficiat. Vnde neque per diuinam potentiam poſſit in minutiores partes diſcindi: niſi pereat: Eo quòd eſſentialiter ita poſcat eſſe, nec ſub minori paruitate coarctari poſſit.

Dices nulla eſt ratio aſſignabilis; cur dato quolibet minimo quanto, minus etiam dari non poſſit; Ergo quantum eſt diuiſibile in infinitum.

Reſpondetur eandem rationem eſſe de multis alijs in natura exiſtentibus, in quibus, licet nullam poſſimus reddere rationem; cur non potuerint aliter eſſe; adhuc tamen ita neceſſariò ſunt. Scimus enim repugnare mundum non exiſtere in aliqua capedine; & ſcimus item in ſpatijs imaginarijs infinitas capedines reperiri. Sed non poſſumus cognoſcere. Quare Deus potiùs elegerit hanc capedinem, quàm illam. Sic non eſt maior ratio, quod motus diurnus tendat in Occidentem potiùs, quàm in Orientem; & tamen illa tendentia, ſiue in hanc, ſiue in aliam partem neceſſaria eſt. Itaque ſic philoſophandum de quanto; Quamuis enim non repugnet vlteriùs diuidi; non tamen inde aſſerendum; quòd poſſit ſemper diuidi. Licet enim repugnantia ex parte quantitatis non eſſet: poſſet tamen à ſubſtantia, ſeu qualibet rerum corporearum ſpecie, repugnantia ſuboriri.

Dices inter ens, & nihil eſt infinita diſtantias Ergo, antequam deueniatur ad nihil, infinita diminutio fieri poterit.

Reſpon. Semper facta qualibet diuiſione, eſſe eamdem diſtantiam rei à nihilo. Vnde, cùm per diuiſionem non procedamus ad nihil, diſtantia infinita non erit in cauſa; cur infinitus proceſſus in diuidendo fieri queat. Quare concludimus generaliter, non eſſe partes in infinitum factibiles in re quanta; nec quidem in ipſa quantitate; niſi ex ſuppoſitione, quòd maneat quantitas: Sed quia diuidendo in infinitum perit omne ſubiectum corporeum; perit etiam quantitas ipſa. Vnde infinitæ diuiſibilitatis, ſeu in infinitum tendentis capax non eſt.

7 Probatur etiam concluſio. Agens naturale V. g. Ignis attingit omnes partes ſubiecti diſgregando, cùm in omnibus ſit calor. Vel ergo omnes partes factibiles diſgregat, & iam partes in infinitum diſtinguibiles non habemus; ſed quæ, omnes tandem diſgregari, & ſeiungi poſſint. Quod ſi aliquas. Tunc non eſt maior ratio de vna, quam de alia: cùm calor ſit in quacumque parte ſubiecti, æqualiter intenſus; & ſic ſubiectum ſecundùm omnes ſuas partes adultum, non eſſet dilatatum, cùm aliquæ tranſirent immunes ab efficacia caloris.

EXPENSIO VII.

Quid ſit punctum phiſicum, & reale.

CONCLVS. I. PROPOS. VIII.

Punctum phiſicum partes habet non poſſibiles, vel factibiles, ſed deſſignabiles tantùm; deſſignabiles quidem eſſentiâ ſuâ ſic poſcente; non factibiles autem per accidens.

EX dictis hæc concluſio, quæ puncti phiſici eſſentiam explicat eruta eſt. Si quidem, cùm probauerimus puncta per ſe indiuiſibilia nō reperiri in quantitate; reſtat, dùm etiam excludimus progreſſum in infinitum; quòd tandem ad aliquod punctum per accidens ſaltem indiuiſibile deueniendum ſit; quod quidem partes conſequatur, quæ tamen diuidi nequeant; non quia illa entitas ratione quantitatis capax non ſit maioris, & vlterioris diuiſionis: Sed quia non eſt capax ratione ſubſtantiæ, & ſpeciei; quæ ſub minori quantitate conſeruari nequit.

Dices. Si ergo partes in puncto conceptibiles ſunt; ergo etiam; cùm ſubſit quantitas ipſa huius deſſignabilitatis capax; in illa, vt correſpondeat noſtris conceptibus in infinitum progredientibus, partes minores, & minores in infinitum inuenientur.

Reſpondetur. Non conſequi partes deſſignabiles: niſi ex ſuppoſitione, quòd ſit quantitas. Et facta hac ſuppoſitione poſſe intellectum in infinitum procedere in ſubdiuidendo: quia ſcilicet rationem formalem intuetur; ob quam vlteriorem diuiſionem concipere poteſt. Verùm abſolutè nequaquam; neque enim in illo puncto talis ſubeſt quantitas, quæ illarum diuiſionum ſit capax. Quoniam illa quantitas eſt quantitas ſubiecti; quod reſpuit vlteriorem diuiſionem, & ſi fiat perit ſubiectum. Reperitur itaque in puncto ratio formalis vlterioris diuiſionis; non verò entitas illi correſpondens. Sicut in homine reperitur ratio formalis vniuerſalis: non ipſum vniuerſale, ſcilicet vnum quoddam in multis; Et cùm concipimus animalitatem, concipimus vnum quoddam in multis commune Homini, & Leoni: nec inde, ſi quando dicatur de Homine, eſt etiam Leonis; verùm ſit ipſius Hominis, & propter ſuam ipſam animalitatem dicitur Homo, animal. Si ergo in puncto quantitas concipiatur, vt quantitas partes obtinet; at ſi conſideretur, vt coarctata puncto; & in ſubſtantia tali, partes habere nequit. Sic pietas in Deo, vt pietas, eſt diſtincta à iuſtitia: cum tamen in ipſo Deo ſit vnum quid, & idem attributum.

Dices

Dices ſecundò idem punctum habet partes Orientales, Occidentales, &c. cùm vndique à ſimilibus punctis tangi poſſit, & cum eis vniri: ergo plures in illo partes reperiri poſſunt.

Reſpondetur. Quantum aliquod poſſe plura ſibi æqualia coniungere, quam plura ſe minora reſpectu ſuę ſoliditatis: Ita vt minor ſit proportio rerum æqualis ſoliditatis ſe alteri quanto A coniungentium ad quanti A ſoliditatem; quàm minoris ad ipſam ſoliditatem. Sic Cubus ſex ſibi cubos æquales coniungere poteſt ob ſex æquales ſuperficies, quibus circundatur.

Ita vt proportio cuborum æqualium, ſe alteri ſibi æquali coniungentium ſit vt 6. ad 1. At ſi cubi minores accipiantur, V.g. quorum 27. æquēt cubum A; tunc quælibet ſuperficies ſibi coniunget 9. cubos minores eo quòd comprehendat 9. quadratas ſuperficies æquales baſibus eorum, & ideo erunt cubi ambientes, & tangentes cubum maiorem 54., & hinc cum cubus maior ſit poſitus 27. cuborum cubis tangentibus æqualium erunt, vt 54. ad 27. nempe vt 2. ad 1. Et ſi cubi tangentes diminuantur reſpectu cubi A, & 64. minores integrent illud maius in ſua ſoliditate; tunc quælibet ſuperficies cum ſit 16. quadratulorum æqualium baſibus cuborum paruorum tangentium, erunt tangentes cubi 96. nempe vt 96. ad 64. nempe vt 2. ad 3. & ſic conſequenter; Vbi vides æqualia habere maiorem capacitatem ad ſibi coniungendum æqualia: quàm minora. Superficies ergo externa quanti, quę tangit aliud æquale, ſe exhibet à pluribus tangendam æqualibus, quàm inæqualibus: Quare etiam punctum licet in ſe non habeat partes ſolidas, quæ omnibus punctis æqualibus tangentibus correſpondeant: Poterit tamen conſequi ſuperficies tactiles plures: quàm quòd ipſum ſit in ſua ſoliditate, in quibus tangatur. Cùm ſit hæc omnis quantitatis proprietas; Cùmque punctum à ratione, & eſſentia quantitatis non excludamus hinc eſt. Quòd & eius terminationes, vt poſcit eſſe quantitatis, ei concedamus.

Dices hoc punctum tangeret aliud ſecundùm ſuperficiem exteriorem, & non ſecundùm interiorem: Ergo partes complecterentur exteriores, & interiores. Reſpondetur negando conſequentiam. Nam ſuperficies quanti, non eſt pars quanti; ſed eius terminus exterior, ſi præciſè ſumatur, & extrinſecè tantùm, vt infra oſtendemus. Tactus verò extrinſecus eſt; quare ab illo tactu, qui non eſt ſecundùm ſoliditatem, ad partes ſolidas non eſt arguendum. Nam tunc argumentum valeret: ſi partes ſolidæ ex ſuperficiebus, prout tanguntur; & quatenùs tanguntur, conſtarent: prout verò ſunt tales, nulla profunditate gaudēt, & ideò nec ſoliditatem adipiſcuntur. Cùm tactus non ſit, nec in minima quidem parte penetratio. Quare ſuperficies tactæ partes ſolidas integrare, & conſtituere nequeunt, vtpote indiuiſibiles. Vt verò hæc indiuiſibilitas ſuperficierum intelligenda ſit infra dicemus.

Dices 4. Si ſint duo circuli concentrici, qui ſuper duas lineas ſimul ſe voluant peruenientes ad eundem terminum, æqualem lineam percurrent: Ergo duo puncta à circulo minori in motu ſimul occupantur; ergo punctum circuli partes habet, quod pluribus punctis in linea, quam percurrit, correſpondeat.

Reſpondetur moueri circulum minorem velociùs, quàm maior circulus. Velocitas autem motus eſt cauſa, quòd ſimul occupet duas partes velocior, & minor circulus; dum maior vnum phyſicum indiuiſibile pertranſit tardiori motu. Nam illa correſpondentia motus ad duas partes non eſt ſimul; ſed ſucceſſiua. Quare alicui ſuperficiei etiam indiuiſibili plures æquales partes correſpōdere poſſunt ſucceſſiuè; imò ſimul, quod contactus indiuiſibilium ſit diuiſibilis. Velociùs itaq; moueri eſt acquirere plures partes; dū aliud tardius acquirit partem aliquam indiuiſibilem, & ſicuti datur indiuiſibile phyſicum; ſic datur mouens tardiſſimum, quò tardius dari nequit: quia ſcilicet virtus motiua ſub minori intenſionis gradu nequeat produci, quæ eſt ad vnum indiuiſibile phyſicum quantitatis.

EXPENSIO VIII.

Quid ſint Mathematica indiuiſibilia.

TRia ſunt Mathematica indiuiſibilia. *Punctum*, cuius pars nulla. *Linea*, quæ partes habet ſecundùm longitudinem tantùm. *Superficies*, quæ partes obtinet ſecundùm longitudinem, & latitudinem, non ſecundùm profunditatem, de quibus acturi ſumus.

PRÆASSVMPTVM.

OBſeruandum eſt autem. Quòd etiam priuatio corporis eaſdem commenſurationes; & figuras, quas corpus obtinet, conſequi poteſt relatiuè ad corpus, & abuſiuè. Sic capedo corporis cubi cuba eſt, & cubi palmaris, cuba eſt, & palmaris. Sicut etiam priuatio lucis, nempe vmbra, longa, lata eſt, & vt lux mouetur, vt lux, figuram habet, quàm à corpore illuminato conſequitur.

CONCL. I. PROPOS. IX.

Superficies, linea, punctum ſunt quid reale indiuiſibile, iuxta illud eſſe ſecundùm quod accipiuntur: non abſolutè.

PRobatur. Nam priuationes quantitatis eſſe nequeunt, & accipi, vt vltimum non eſſe quantitatis. Nam non datur priuatio priuationis: At verò linea, cùm ſit terminus ſuperficiei, eſſet priuatio ſuperficiei; ſed ipſa ſuperficies eſſet quoque priuatio, cùm eſſet vltimus terminus corporis; Ergo eſſet priuatio priuationis, quod eſſe nequit.

2 Corpora ſe tangunt in ſuperficie; Sed non ſe tangunt in nihilo, ſeu priuatione; quia contactus nihili, nullus eſt: Ergo ſuperficies eſt aliquid rei. Sed illud rei non habet profunditatem aliquam, cùm corpora ſe tangentia non ſe penetrent: Ergo eſt aliquid rei indiuiſibile.

3 Superficies, & lineæ figuram conſtituunt, vel planam, vel corporis ſolidi. Ergo non ſunt nihili; ſed aliquid rei. At figura partium interiorum non eſt. Ergo exteriorum. Verùm id, quod eſt purè exterius nulla profunditate graſſeſcit, ſi ſit corpus; nulla latitudine dilatatur; ſi ſit ſuperficies. Ergo ſuperficies, lineaque indiuiſibilis eſt. Et idem dicas de puncto; cùm lineæ extremum ſit. Neque valet recurrere ad intellectū;

gula contactus ; figuraque sunt quid à parte rei. Dices. Si superficies, linea, punctum sunt quantitates, & sunt indiuisibiles. Ergo quantum ex indiuisibilibus componitur.

Respondetur id non sequi. Nam non sunt indiuisibiles absolutè ; sed indiuisibiles, vt vltime & contingentes aliud secundùm sui vltimum esse : Si autem est vltimum esse quanti, non potest consequi secundùm illud, in quo est vltimum, & secundùm illud, in quo tangitur, partes. Nam, si superficies V. g. partes enumeraret, illa non esset vltimum molis ; nec propriè tangeretur ; sed penetraretur : cum illud, quod tangeretur, non esset exterius ; sed quid internum. Cùm igitur sint indiuisibiles, vt vltimæ sunt, & quatenus tactæ ; Illa tamen quantitas, vt tacta ; & vltima non subsistit, nec esse potest sine partibus intrinsecis, ob quas vltima dicitur ; si enim partes internæ non essent, hæc non esset vltima, nec exterior. Quare licet, vt vltima, partes non amplectatur profundas, & vt tacta ; quia tamen se solâ non est, nec esse potest ; hinc emergit, quòd non sit absolutè indiuisibilis ; Sed diuisibilitatem, vt composita ex alijs nanciscatur.

CONCL. II. PROPOS. X.

Pars vltima indiuisibilis, nec est, nec esse, aut concipi potest sine alijs compartibus.

PRobatur. Quod esse nequeat sine suis compartibus : *tum ex dictis*. Quia illa se solâ, aut esset quantitas molis, aut diuersæ speciei, non molis ; quia trinam dimensionem non consequeretur, non alterius speciei : Quia aliam entitatem ; quam quantitatis molis non obtineret, cùm sit terminus corporis solidi.

Quod verò nequeat concipi sine suis compartibus perfecto conceptu, probatur. Quia superficies, linea, punctum sunt vltimum esse rei : Quod autem vltimum refertur ad primum. Quæ est quid relatiuum : Relatiua autem sunt simul cognitione, nec vnum sine altero perfectè concipi potest. Quare, nec superficies poterit concipi sine alijs compartibus.

2 Si punctum posset concipi sine alijs partibus V. g. sine linea deberet concipi prout definit Euclides. *Cuius pars nulla* : sed id, quod nullam habet partem, quantitatis nihil est, ergo deberet concipi, vt priuatio quantitatis, & vt nihil, & idem dicas de lineâ, & superficie secundùm eam rationem, secundùm quam indiuisibiles sunt.

Dices. Tactus non præscindit : & tamen tangit solam superficiem ; Ergo superficies, si se solâ tangi potest ; etiam se solâ, & esse, & concipi potest.

Respondetur. Tactum esse modum quendam. Modus autem non est aliquid superadditum rei, cuius est modus. Quare, cum sit idem, ac ipsa superficies modificata, sicut ipse l. realiter rebus superueniat, nec esse, nec concipi sine illis valet, quæ modificat. Sic nec ipsius rei modificatæ ab alijs, quibus essentialiter annectitur, conceptus distinguere potest ; si de perfectis conceptibus sermo sit, sicut nec modus actionis, quòd sit facta hoc, vel alio modo vim habet secernendi, nec realiter, nec per intellectum ipsam actionem à motu, & passione licet modus actionis passionem nullo modo afficiat. Sic situs non efficit, figuram sine re figurata posse subsistere, licet figuram ipsam afficiat, & eam mutet.

3 Probatur vtraque pars. Quantitas molis non datur ; nec concipi potest sine superficie, sicut nec superficies sine linea, nec linea sine puncto. Alioquin esset quid infinitum. Ergo neque superficies, linea, punctum sine quantitate molis, cùm quantitas molis non sit aliquid latiùs patens, quàm ipsius terminationes.

COROLLARIVM.

CVm ergo superficies, linea punctum non sit, nec esse possit sine corpore : hinc est, quod non sint ; nisi vt tales, indiuisibiles ; non autem absolutè, & conceptu adæquato concepti, & quòd, nec conceptus superficiei, nec lineæ, nec puncti perfectus, & adæquatus hauriri queat ; & ideo, quòd in superficie, lineâ puncto semper partes cocipiendæ sint, si sit adæquatus cõceptus. Quare à Mathematicis definitur, nec superficies, nec linea, nec punctum, secundùm suum adæquatum conceptum. Verùm secundùm id ; quod precisè dicunt, & explicitè. Sicut definitur à Theologis pietas Dei, licet idem sit cum iustitia, non quidem, vt idem est cum ipsa, & prout in suo conceptu eam implicat ; sed explicitè prout ab illa conceptu inadæquato præcisa concipitur.

CONCL. III. PROPOS. XI.

Superficies, linea, & punctum secundùm suum esse inadæquatum à Mathematicis accipiuntur.

PAtet. Quia definiunt ea esse quædam indiuisibilia, aut omnino, aut secundùm quid. Sed etiam definiunt illa, vt quantitates. Ergo considerant inadæquatè. Cum quantitas adæquatè concepta nullis indiuisibilibus integretur.

CONCL. IV. PROPOS. XII.

Superficies, linea, punctum, accipiuntur quoque, vt negationes vlterioris extensionis.

PRobat. Quia superficies non semel accipitur in aliquo corpore solido pro eo, quod mediat inter vnam partem, & aliam non realiter factam ; sed tantùm conceptam. At id, quod inter vnam, & aliam immediatam interijcitur, nihil est, & solùm negatio vlterioris extensionis, prout taliter limitatur, aut limitata fuit ab intellectu : Ergo superficies etiam pro negatione extensionis vlterioris accipitur. Idem de linea, & puncto intelligi debet. Nam linea distinguens superficiem in multas partes, est inceptio huius partis, & desitio alterius in eadem superficie cõcepta. Dices. Non potest concipi negatio negationis. Respondetur concipi superficies, non vt negatio ; sed vt, quid positiuum inadæquatè conceptum, in quo, & cuius potest negatio concipi.

EX-

EXPENSIO IX.

An datis indiuisibilibus, illa possint esse obiectum Mathematicæ.

BOnauentura Cauallerius per indiuisibilia, libro ad id conscripto, non sine ingenio, & subtilitate Mathematicam se promouere profitetur ; Et ex contemplatione punctorum indiuisibilium in quantis existentium æqualitates, & proportiones Mathematicorum corporum inuenire.

Vnde rectè hic quærimus : an indiuisibilia, ex suppositione, quòd darentur, possint deseruire pro obiecto, quod speculationis Mathematicæ capax existat.

CONCL. I. PROPOS. XIII.

Indiuisibilia simpliciter non sunt obiectum Mathematicæ.

EST contra prædictum, Verùm communis inter Neotericos Betinum par. 2. Epilog. Planim. Bullialdi de lineis spiralibus propos. 42. Not. 2. Vincentij Mutij de Maximis, & Minimis lib. 1. propos. 17. Primus quidem directè impugnat ; Alij verò amicissimi sui laudant ingenium ; cautè tamen vsurpandam doctrinam censent. Et tandem Goldinus de centro grauitatis hanc doctrinam diuersimodè carpit.

1 Probatur. Licet enim indiuisibilia in quantitate laterent ; non tamen constat : An sint finita, vel infinita. Ergo non possunt præstare fundamentum euidens demonstrationi.

2 Suppositis punctis finitis. Dantur lineæ irrationales, superficiesque, & corpora. Si verò punctis finitis hæc constant, irrationales nullo modo esse queunt, cùm puncta finita aliquo numero exprimi possint : Partes verò linearum incommensurabilium nullo numero effari possunt, vt suo loco dicemus.

Dices indiuisibilia quidem proportione rationali potiri, seorsim, & distributiuè sumpta ; non autem collectiuè.

Sed frustra. Nam collectio finitorum nihil aliud est, quam ipsa distributiuè sumptorum multitudo. Vndè si distributiuè dicunt omnia proporti onem ; & numeris indicari possunt. Ergo etiam omnium collectio numero aliquo exprimibilis est.

Deinde licet finita : non tamen omnia accipi possunt : sed aliqua, à quibus paritas ad alia acceptibilia deducatur. Sed illa aliqua rationalia sunt. Ergo etiam rationalis erit aliorum proportio.

3 Suppositis item punctis finitis. Destruit hæc opinio lineas ; superficiesque potentiâ tantum commensurabiles. V.g. Latus quadrati incommensurabile est diagonali ; licet eorum quadrata commensurabilia sint, nempe vt 1. ad 2. : Sed omnes lineæ æquales lateri, ex quibus constat quadratum ex latere effectum sunt incommensurabiles diagonali, & omnibus illi æqualibus, ex quibus constat quadratum diagonalis. Ergo totum quadratum lateris incommensurabile esset quadrato diagonalis. Cùm lineæ omnes, ex quibus vtrumque quadratum conficitur, sint inuicem incommensurabiles.

4 Datis punctis infinitis. Ea ex Euclide proportionem dicunt ; quæ multiplicata possunt se inuicem superare. Sed infinitum multiplicari nequit ; neque aliud superare. Ergo datis punctis infinitis, quantitates, vt ex ipsis constantes, consideratæ nullam inuicem dicent proportionem. Quod autem infinitum multiplicari nequeat : patet. Quia daretur infinitum triplum, quadruplum, centuplum : Ergo daretur infinitum alio maius : Si autem vnum infinitum concedatur maius alio ; Iam ratio infiniti cessat in minori ; Cùm ibi finiatur, vbi incipit aliud augescere.

5 Probatur. Quoniam de finito ad infinitum arguere non licet, cùm infiniti, & finiti nulla sit proportio. Sed in argumentis omnia quantitatiua accipi nequeunt, quia infinita sunt : Ergo aliqua V.g. 10. aut 20. lineas ex quarum æqualitate ; vel proportione ad alias, arguitur totam planitiem alteri, vel æqualem esse, vel proportionalem : Ergo argumentum procedit ab aliquibus lineis ad omnes. Sed aliquæ finitæ sunt, omnes infinitæ. Itaque argumentum arguit à finito ad infinitum ; siquidem superficies totę infinitis lineis constant.

Dices omnia aliarum, etiã si sint infinitę similis ratio demonstratur, & ideo aliarum quamuis infinitarum idem argumentum vrget.

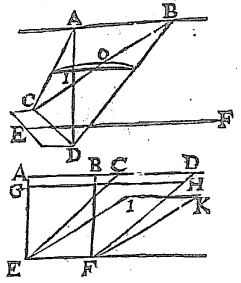
Respondetur nullam rationem æqualitatis, vel inæqualitatis in indiuisibilibus reperiri ; quę author admittit ; cùm punctum sit, cuius pars nulla : Vnde tota inæqualitas rejicitur in numerum punctorum ; quibus lineæ constant ; qui numerus cum sit infinitus omnem quoque proportionem obliterat. Deinde cum nesciamus an in quantitate sit maius, aut minus infinitum alio, vel æquale. Si omne infinitum est æquale, destruit omnem proportionem maioris, aut minoris inæqualitatis. Si admittuntur infinita inæqualia non possumus scire, an sint plura, vel pauciora ; quàm oportet ; & sic proportio, quæ secundùm alteram rationem militat, à numero incerto indiuisibilium destruatur.

6 Probatur vniuersaliter. Nam ex hoc sequeretur ; quod minus esset æquale maiori. Dicunt enim aduersarij : Rectangulum A B E F, in schemate inferiori, esse æquale rectangulo E C D F, vt verè est, & ostendit Euclides lib. 1. propos. 36. Sed non ex demonstratione Euclidis. Verùm, quia inter lineas A D, E F non possit intercipi ; nisi æqualis multitudo linearum parallelarum, qualis vna ex ipsis est G H. Quòd si ita est. Ergo E C esset æqualis lineæ E A, nam lineæ omnes, quæ duci possunt inter parallelas E F, & A D occupãt omnia puncta linearum E A, & E C ; Ergo E A, & E C æquali multitudine punctorum constabunt. Quare E C erit æqualis lineæ E A maior minori, quòd esse nequit. At si maior multitudo punctorum est in E C : Ergo non tota E C lineis productis occupata est ; cùm tamen totam superficiem A D E F integrent, & extendant.

Deinde, si maior multitudo punctorum est in E C ; quàm E A : Plures ergo lineæ duci poterunt ; cùm ex omnibus punctis lateris E C parallelæ duci queant : Ergo maius planum erit E C D F ; quã E A B F contra Euclidis demonstrationem.

* 7 Probat. Nam sint duo plana in figura altiori parallela A E, E F, & sectio C D existat ad angulos rectos ad E F ; sintque triangula C A D, & C D B æquicrura ; Erunt ergo inter parallelas E F, & A B.

Ille ergo superficies, quæ inter hæc plana A B, & E F. interponuntur, & secant triangulum CAD, tot erunt, quot illa, quæ secant triãgulum CDB: Ergo erit æqualis superficies CAD, superficiei CDB, cùm tot lineas sectionibus planarum impressas recipiant ambæ, vel eamdem multitudinem planorum secantium continuorum, vt est 10 terminent. Sed verè sunt inæquales: maiorque est CDB, quam CAD, ergo superficies eamdem linearum capax maior esse poterit; quã alia: Quod sint inæquales, patebit ex dicendis Propos. 1. lib. 6. Ele. quòd eadem basis existat, & inæqualis eorum altitudo.



Dices. Lineas considerandas secundùm eundem situm, nimirùm parallelum. Sed huic obiectioni vtraque adductarum proximè probationum satisfacit: Nam in primâ accipiuntur secundùm eundem situm, vel ductum parallelum, & tamen plura puncta reperiuntur in latere EC; quàm EA: cùm tamen planities sint æquales. Quòd si secundùm eundem situm lineæ GH non sunt plura puncta in EC, quàm EA; Ergo neque in secundo schemate altiori plura puncta erunt in CB, quàm CA, & ideo CAD, & CBD erunt æquales superficies. Quod verum non est ex cit. Eucl. 1. propos. lib. 6.

Deinde sequeretur, quod lineæ CB essent æquales lineę CA, saltem secundùm illum situm acceptæ, cùm eadem multitudo punctorum in CA reperiatur, quæ in CB, quòd tamen falsum euidenter est.

8 Probatur. Quia dantur figuræ Isoperimetræ, quæ scilicet sub eodem ambitu, linearum, & laterum superficies continent inæquales. Quę tamen non essent: Cum eadem multitudo punctorum in lateribus æquales in multitudine duci lineas superficiem secantes exposceret, cumque multitudo linearum, tùm huius, tùm alterius superficiei esset æqualis; superficies quoque essent æquales contra præsupositum.

Dices. Ex æqualitate omnium linearum, quæ duci possunt in circulo à centro ad circumferentiam, arguitur æquidistantia circumferentiæ à centro. Sic ex omnibus angulis rectis, quos facit linea erecta, & insistens cum omnibus lineis, quæ sunt in plano, arguitur, quòd illa linea sit perpendicularis lib. 11. propos. 3. Eucl.

Respondetur. Hîc neque æqualitatem, neque proportionem argui: sed solùm situm. Vnde est dispar ratio. Deinde à multitudine linearum æquali, non arguit vllam æqualitatem: Sed ab ipsis lineis æqualibus, sint, quot quot sunt, æquidistantiam definit. Ita vt argumentum in numero linearum non fundetur: sed vel in situ, vel in æqualitate earum: Vnde patet, quòd ab infinitate, multitudineque earum omninò præscindit. Tandem non arguit à lineis, vt indiuisibilibus ad planitiem, sed à lineis sumptis prout sunt diuisibiles, & secundùm longitudinem: Vnde non transit de genere ad aliud genus quantitatis. Hinc autem eruitur.

9 Argumentum. In Mathematicis non est bona illatio, cùm fit transitus de genere ad aliud genus quantitatis, V. g. à linea ad superficiem, cum inter prima genera non sit proportio: Sed Caullerius argumentatur ab indiuisibilibus ad planities, & à planis ad corpora. Ergo eius argumenta verâ, & euidenti illatione non concludunt.

TRACTATVS II. PRÆLIMINARIS.

De essentia quantitatis discretæ.

CVM multa, quæ de quantitatis numericæ essentia dicturi sumus, & etiam ex parte ea, quæ diximus, dependeant à quantitatis discretæ cognitione. Hinc est, quòd antequàm ipsas Mathematicas propositiones attingamus, aliquam de quantitatis discretæ essentia haurire cognitionem sit omninò opportunum; nam planiori, liberiorique pede, tùm discretæ, tùm continuæ quantitatis relationes, & respectus percipiendi facultas erit.

EXPENSIO I.

Quid sit vnitas numerica.

VNitas, quantò magis simplex est, tantò laboriosiùs penetratur, vt, velut indiuisa, ab intellectu non posse secerni, & in sua prædicata seiungi, videatur. Vnde apud Methaphisicos mirum est, quot quantæque opiniones de *vnius* essentia ventilentur. Sed nos, quæ certiora sunt, & euidentiora ex nostris Placitis philosoficis hic deducemus:

CONCL. I. PROPOS. I.

Vnitas numeralis est eadem, ac indiuidualis tùm re, tùm ratione.

1 PRob. ex Arist. 3. Methaph. tex. 14. *Numero enim vnum dicere, aut singulare nihil differt; ita enim singulare dicimus, quod numero vnum est.*

2 Ratione prima pars ostenditur. Si vnitas indiuiduationis non esset eadem cum vnitate numeri: multitudo quæ opponitur vnitati numeri; non opponeretur indiuiduationi, sed esset quid disparatum; vt humiditas, quia non est contraria frigori, est quid disparatum respectu caloris. Vnde cum calore morari potest; Sed quælibet multitudo destruit, tùm vnitatem numericam, tùm indiuidualem; estq; contraria, tùm vni, tùm alteri: Ergo idē est vnitas indiuidualis, & numeri.

3 Eatenùs entia sunt multiplicata, quia numerabilia, & è contra. Multiplicata verò sunt, quia diuisa sunt in se, & diuisa à quacumque alio; Sed esse diuisum in se, & diuisum à quocumque alio est vnitas indiuidualis: Ergo hæc ipsa est etiam numeralis.

4 Si tollatur per intellectum omnis vnitas numeralis, relinquendo in subiecto vnitatem indiuiduationis: Ita vel erunt numerabilia, vel non. Si poterunt numerari; Ergo contra hypotesim vnitas numeralis adhuc in subiecto latet, tùm quantum numerabile efficiat: Si verò non sunt numerabilia; Ergo contra præsupositum vnum essent; Siquidem illud vnum est; quod numerali plurtati non correspondet.

5 Entia numerata constituunt numerum. Quia reperit intellectus multitudinem, atque multiplicationem: Sed nulla aliã entia à parte rei multiplicationem adipiscuntur; nisi indiuidualem: Ergo vnitas indiuidualis, etiam numeralis fatēda.

Prob. 2. pars. Tunc aliquid cum fundamento distinguit potentia Intellectiua: quando reperit, vel capacitatem in re, vel æquiualentiam ad plura actu distincta: sed hæ duæ vnitates numerica, & indiuidualis diuersitatem inter se non habent, nec pluribus separatis æquiualent. Ergo intellectus illas distinguere nequit. Quod diuersitatem inuicem non seruent; quia indiuidua etiam, vt indiuidua, numerabilia sunt; Et quia numerabilitas, & indiuiduatio vnitatem non variant, nec vnum numerale alio pacto se gerit, ac indiuiduale. Quòd verò in ordine ad aliud non distinguãtur, id facit. Quoniam vnitas numeralis, & indiuidualis non æquiualent diuersis, cum vnitas numeralis illis omnibus æquiualeat, cui æquualet indiuidualis. Cui enim istę vnitates æquiualere possunt? nisi alicui vnitati? Pluribus enim vnitatem habentibus subiectum habens vnitatem numericam simul, & indiuidualem correspondere nequit. Illa enim vnitatem duplicem habentia vnumquodque, & vnitatem numeralem, & vnitatem indiuidualem possideret. Quare tùm vnum, tùm aliud vtrisque vnitatibus numerali, & indiuiduali correspondet.

Dices 1. Substantię spirituales sunt numerabiles, licet non sint indiuiduę. 2. Multitudo ipsa est quoque numerabilis: Nam exercitus, congregationes, acerui numero subesse possunt. 3. Gradus Methaphisici etiam in eodem subiecto, & modi numerabiles sunt, & tamen indiuidua nō sunt: Ergo vnitas indiuidualis numerica non est.

Respondetur hęc omnia esse numerabilia, quo pacto sunt diuisa, & vna. Nam quoad substantias spirituales diuisę verè sunt ab inuicem, & rationem indiuiduam veram habent secundùm Theologos numerosiores. Quoad verò ea, quę sunt vnum per accidens: Iam sicut sunt vnum per accidens, ita numerantur per accidens, & sictè vnum dicuntur, tùm numericè, tùm indiuiduè. Tandem de gradibus methaphisicis non alio pacto sentiendum, quì, cùm sint quid pluribus commune veram vnitatem nō participant:

& ſic nec veram numerabilitatem. Sed eam, quã mens noſtra preſcindendo illis tradit. Quare ſicut verè ſunt vnum in intellectu prædicata eſſentialia, vt vnũ cogitata verè numerabilia ſunt; & vt in mente, numerabilitatem conſequuntur propriam, vt propria vnitate gaudent; nempe intellectuali ad imitationem numerabilitatis à parte rei. Sed tolle, quod appoſuit humana mens vnitatis, aut diuiſionis, & numerabilia non erũt. Modi verò multiplicantur ad ſubeundam numerabilitatem per ſolam fictionem noſtri intellectus, qui aſſumit idem ſubiectum multoties, & vt ſubiectum diuerſorum modorum plurificat. Non enim poteſt concipi modus ſine re cuius eſt modus; & ideo, cùm concipit duos modos implicitè, cõcipit gemina vice ſubiectum, in quo ſunt, & ſic idem ſubiectum multiplicat tanquam ſibi notum ex gemina varietate. Verùm modus abſolutè numerabilis non eſt. Cùm verò plures modi, vt modi ſunt, non ſint, nec plures entitates, nec quid plurificatum, imò ab eodem ſubiecto, in quo inexiſtunt, nec re, nec ratione diſtinguantur, & modus, nec quidem poſſit concipi ſine re, cuius eſt modus. Ergo tantò minùs numerari.

Dices contra 2. partem. Poteſt intellectus concipere vnitatem indiuidualem in ordine ad aliud indiuiduum. Numericam in ordine ad ſe, qui numerare poteſt: Ergo poteſt per diuerſos reſpectus iſtas duas vnitates diſtinguere.

Reſpond. Poſſe quidem intellectum conſiderare diuerſos reſpectus: ſed hoc non eſt multiplicare conceptus ipſius rei. At relationes diuerſas in ipſa re conſiderare. Quòd maximè aſſeras de prædicamentalibus, vt ſunt iſtę. Nam etiam per aliquos, nec quidem tranſcendentales relationes ſuum multiplicant conceptum. Cùm per multos actio, paſſio, & motus, nec quidem ratione diſtinguantur, & tamen ſunt reſpectus tranſcendentales operationis ad agens, & paſsũ. Sic animal, licet, vt genus, dicat ordinem ad intellectum, & vt animal, ad naturas, in quibus eſt; non tamen genus, & animal duo conceptus ſunt in ipſo animali, ſed illud ipſum animal genericum eſt, & prout ſubſtat noſtris conceptibus.

CONCL. II. PROPOS. II.

Vnitas numeralis eſt indiuiſio in ſe, & diuiſio à quocunque alio.

PRob. ex præfata concl. Quoniam vnitas numeralis eſt idem re, ac ratione, quod vnitas indiuidualis. Sed vnum indiuiduale definitur; Quòd ſit in ſe vnum, at diuiſum à quocumque alio. Igitur tale erit quoque vnum numericum: Vnde eius vnitas erit indiuiſio in ſe, & diuiſio à quocumque alio.

CONCL. III. PROPOS. III.

Quantitas continua eſt fundamentum vnitatis poſſibilis numeralis in quocumque ſubiecto.

PRobat. Nam omne continuum diuidi poteſt: quę verò diuiſa ſunt indiuidua ſunt. Vnde & numerabilia.

COROLLARIVM.

HInc eruitur. Intellectum in re quanta ſufficiens fundamentum nancisci numerandi partes. Quia adeſt earum poſſibilitas, ob quam ſaltem potentiâ numerabiles ſunt, ſicut & ſunt potentiâ multiplicabiles. Vnde bene Ariſt. 2. Methaphiſ. tex. 2. inquit. *Cognoſcitur quantum, vt quantum, aut vno, aut numero; omnis autem numerus vno: Quare omne quantum, prout quantum, vno cognoſcitur; Et quo primo hoc cognoſcitur ipſum vnum, propter, quod vnum, prout vnum, principium eſt numeri, prout numerus eſt.*

CONCLVS. IV. PROPOS. IV.

Quantitas intenſionis quoque eſt fundamentum vnitatis numeralis poſſibilis.

PRob. ex noſtris placitis Philoſophicis. Quoniam accidens ſeparatum à ſubiecto, vel ſaltem diuinâ omnipotentiâ, indiuiduum conſtituere poteſt. Quare ſi tres, & tres gradus acciplantur caloris, & ſine ſubiecto contineantur, efficient duo indiuidua. Ergo etiam qualitas; cùm conſequatur indiuidua poſſibilia, erit fundamentũ multiplicationis, & vnitatis numeralis.

CONCLVS. V. PROPOS. V.

Quantitas ſucceſſiua, prout dicit reſ pertranſeuntes, eſt numerabilis, aut actu, aut potentiâ.

PRob. Quia omne, quòd mouetur ſucceſſiuè, aut extenſum, aut intenſum, aut diſcretum eſt, ſed hęc propriè numerabilia ſunt. Ergo etiam quantitas ſuccẽſſiua, quę conſiſtit in motu iſtarum quantitatum, numerabilis eſt, quoad partes vi motus pertranſeuntes, in quibus ratio temporis conſiſtit.

COROLLARIVM.

ET hinc emergit. Quòd tempus quoque numerabile ſit; Quia ſcilicet numerantur partes equali duratione pertranſeuntes, aut ſaltem proportionali.

EXPENSIO II.

An vnitas, numeruſque diſtinguantur realiter à re, in qua ſunt.

CVM dicimus vnum, aut numerabile operę pretium eſt ſcire; an intelligamus de ſubiecto, aut in ſubiecto ſit aliquid aliud, quòd numerabile, & vnum appellatur.

CONCLVS. I. PROPOS. VI.

Vnitas, quæ eſt principium quantitatis diſcretæ, non diſtinguitur realiter à re vnitatem habente.

EST concluſio noſt. Paſq. diſput. 45. par. 2. ſec. 3.

Probat. Namſi vnitas eſſet accidens aliquod, ſuam vnitatem indiuidualem poſſideret. Hęc vnitas itaque; aut eſt vna aliâ quadam ſuperadditâ vnitate, aut eſt vna ex ſe, ſi ex ſe vnitate fruitur: Ergo etiam ſubiectum vnum eſſe poterit abſque hac ſuperadditâ vnitate. Si verò requiritur alia vnitas, quę ſit accidens ſuperadditũ; iam

iam ad hanc vnitatem alia requireretur, & ſic in infinitum, quod repugnat.

2 Per hoc conſtituitur aliquid indiuiduum numero; *Quod ſit vnum in ſe, & diuiſum à quocumque alio*, ſed per aliquid extra ſe non poteſt quidquam eſſe indiuiſum in ſe, & diuiſum à quocumq; alio, ergo nec vnitatem numericam conſequi poteſt: Minor propoſ. exponitur. Nam per hoc, quòd ſubſtantia ſit alba, non eſt alba in ſe propriè: quia de ſe etiam nigredinis capax eſt. Vnde de ſe, neque alba eſt, neque non alba. Ita, ſi aliquid eſſet vnum in ſe per aliquid ſuperadditum, deberet eſſe indifferens ad diuiſionem, & indiuiſionem; nempe, neque eſſe diuiſum, neque non diuiſum; quod eſt impoſſibile.

3 Si indiuiduatio eſt forma ſuperadiuncta; poſſet deſtrui à Deo. Deſtruatur. Itaque illa natura iam indiuiduatione expoliata; vel erit à quocumque alio diuiſa, vel non? Si non erit diuiſa: Ergo erit idem cum aliqua alia natura ſingulari, & ſic eſſet ſingularis, ex alterius, cum qua vnum eſt, ſingularitate. Quod ſi, nec quidem ipſa ſingularis eſt, cum alia idem ſequeretur, & ſic de alijs, donec ad naturam ſingularem aliquam deueniremus, & vltimam, quæ vtique datur, & tunc illa eſſet vna, cùm ſit vltima; quod eſt abſurdum cum dentur multæ naturæ ſingulares. Vel eſſet diuiſa à quocumque alio illa natura ſingularitate priuata à Deo. Et iam ſingularis eſſet.

Deinde 4. A parte rei vnum in multis non admittitur: ergo quælibet natura in ſe eſt diuiſa in plura ſuppoſita. Alloquin ſi in ſe eſſet indiuiſa, & per multas ſuperadditas vnitates diuiſa, eſſet vniuerſale à parte rei.

5 Natura non eſt poſſibilis ſine indiuiduis: Ergo inter eius prædicata eſſentialia inuolvitur indiuiduatio, & vnitas.

6 Agens terminat ad ſingulare: Ergo natura de ſe eſt ſingularis. Quòd ad eam terminet agens.

7 Tandem; Si hęc vnitas eſt ſuperaddita ſeparetur intellectu. Et quęro de entitate illa ſuâ vnitate expoliata: eſtne vna, aut multiplex? Si eſt vna: Ergo ſine ſuperadditione alicuius entis, quòd vnitatem prębeat vna eſt, & ſingularis: Si multiplex. Ergo ſine diuiſione aliquid poteſt fieri multiplex. Deinde adhuc vnum erit, cùm pluritas ex vnitatibus conſtet: Vnde per ablationem vnius plures conſequeretur vnitates. Si quid medium ſtatim apparet abſurdum; quoniam vnum, & multiplex negatiuè opponuntur.

CONCL. II. PROPOS. VII.

Numerus, vt numerus eſt, non eſt ens diſtinctum à re numeratâ.

COntra Aulcenam 3. Methaph. Gaietanum, noſtrum Morandum, & alios.

Probatur. Quia numerus componitur ex vnitatibus. Sed vnitates non ſunt, quid diſtinctum à re vnâ: Ergo neque numerus.

2 Si eſſet aliquod accidens à ſubiecto ſeparabile numerari poſſet. Ergo numerabilitas numeraretur. Quòd eſt inconueniens.

3 Numerabilitas dicit poſſe numerari; nempe quandam potentiam ad actualem numerationem. Sed actualis numeratio nihil ſuperaddit aliud: niſi opus intellectus numerãtis: Ergo nec numerabilitas aliud ſuperaddet: niſi poſſibilitas operis intellectus numerantis. Quòd res in eſſe ſuo poſſibili tales ſint, quales in eſſe actuali quoad eſſentialia inueniuntur.

4 Si numerus eſt accidens; in quo inhæret? Non in omnibus numeratis; alloquin daretur vniuerſale à parte rei; nempe aliquod vnum in multis diuiſis. Si autem in aliquo tantùm, aut eſt vnum, aut duo, aut tria. Quare, cùm formæ expoſitæ ſuos effectus formales non poſſint ſuſpendere, trias in ſubiecto ſemper trinum denominaret ſubiectum, & dualitas duo. Quare nunquam poſſet fieri, aut quatuor, aut quinque. Deinde vnicum poſſet denominari, trinum, & duo ob formam triadis, vel dualitatis ſubiecto inhærentem.

5 Si numerus V. g quinque eſt ens ſine ſubiecto erit etiam vnũ ſine ſubiecto; quia vnum, & ens conuertuntur. Quod ſi non obtinet vnitatem ſine ſubiecto; vt patet; neque erit ens ſine ſubiecto. Quod verò numerus, vt numerus vnitatem nõ cõſequatur, patet; quia numerus, vt numerus eſt formaliter, in multiplicatione cõſiſtit.

6 Non poteſt ſeparari ratio ternarij à tribus ſubiectis. Ergo non eſt accidens; nam ſi tale eſſet, poſſet auferri, & ſic tria indiuidua eſſent, & non eſſent tria. Eſſent enim tria: Quia adhuc manerẽt indiuidua tot, vt erant priùs; cùm nullum deſtructum fuerit, non eſſent autem tria; Quia ab eis ablata eſt ratio ternarij.

Dices. Si ergo numerus accidens non eſt; nec aliquid reale: Ergo Muſica, & Arithmetica agens de numeris erit ſcientia fictitia.

Reſpond. Agere de numeratis ipſis rebus, prout objciuntur noſtris conceptibus, eiſque ſubſunt. Ideoque eſſe ſcientias reales.

CONCL. III. PROPOS. VIII.

Vnitas, & numerus metaphiſicè conſideratus dicit aliquid præter naturam, & ſuperadiungit aliquam rationem formalem.

1 PRob. Tunc eſt diuerſa formalitas. Quando conceptu affirmatiuo poteſt concipi vnum ſine alio. Sed natura poteſt concipi ſine indiuiduatione, & numero, & dicere. Natura non eſt vnitas indiuiduationis, aut numerus. Ergo ſuper naturam addit numerus, & vnitas aliquam formalitatem.

2 Omnes naturæ conueniunt in indiuiduatione; ſed non omnes conueniunt in naturâ. Diuerſificatur quoque numerus multoties, & non natura: Ergo vnitas, numeruſque dicit aliquid præter naturam, ſcilicet vnitas, indiuiſionem in ſe, & diuiſionem à quocumque alio: Numerus verò huius rationis multiplicationem in pluribus ſubiectis.

EXPENSIO III.

An ratio Indiuiduationis conſiſtat in differentia aliqua, ob quam plurificetur ab alijs.

CVm aliqui ex Philoſophis diuiſionem, quam aliquod vnum habet ab alijs, dubitent, an ſit

diuiſio

diuisio dissimilitudinis, ideſt distinctio; an verò diuisio realis per separationem substantiæ effecta. Hinc est, quòd, vt penitùs essentiâ vnitatis perueſtigemus, sit quoque videndum, an aliqua differentia adferat hanc vnitatem singularitatis subiecto, vel per solam diuisionem obtineatur.

CONCLVS. I. PROPOS. IX.

Vnitas nullam importat differentiam in sua formalitate; neque vlla distinctione constituitur ab alijs plurificata.

COntra multos Philosophos, qui id asserunt de vnitate indiuiduationis, præcipuè Fonsecam in Methaph. cap. 10. queſt. 7. sec. 3. Suarez in Meth. disp. 5. sec. 8. Zachar. Pasqual. noſtr. Tom. 2. Meth. disp. 44. sec. 2. num. 10.

1 Probatur. Diuisio non ingerit differentiam inter substantias, cùm nihil producat, nullamque formam nouam subiecto aduehat; sed per solam diuisionem indiuidua multiplicantur; & in vnitates plures transeunt; Sicut per coniunctionem duarum partium integralium in vnum coalescunt. Ergo vnitas nullam differentiam secum aduehit ex suo formali.

* 2 Prob. Huic assignato vni, V.g. huic indiuiduo non repugnat creari indiuiduum omninò simile, ne dum substantiâ; sed etiam in omnibus suis accidentibus, vsque ad positionem in eodem loco, & situationem. Et tunc expostulo. An hæc sint duo indiuidua. Quod si sunt; hoc est quod volumus, duas vnitates reperiri, quæ tamen nullâ differentiâ dissentiant. Quod si duo non sunt; hoc est contra diuinam potentiam pugnare, cui similis indiuidui creatio denegatur.

* 3 Prob. Similitudo est relatio, quæ fundamenta supponit proxima ad relationem fundandam. Sed fundamenta relationis non possunt esse minùs, quam duo. Quod si fundamenta omnimodæ similitudinis duo sunt: Ergo absque aliqua dissimilitudine duas vnitates habemus.

† Prob. Dissimilitudo est relatio; sed relatio præsuponit pro fundamento plura; Ergo ipsa non facit pluralitatem.

CONCLVS. II. PROPOS. X.

Tota ratio multiplicationis indiuiduorum est sola diuisio.

PRobatur. Diuisio formaliter importat negationem, & destructionem vnionis. Verùm, quę vnione non copulantur, vnum non sunt. Ergo multiplicata sunt. Sed nec genere, nec specie; Quoniam nulla inuecta est differentia; Ergo sunt multiplicata indiuiduatione, & vnitate numericâ.

Dices. Multa indiuidua, quæ nullo modo à subiecto diuisa sunt. Vt Accidentia materiæ, Anima corpori, Actus mentis ipsi intellectui, & inter se, Ens successiuum subiecto, & Modi. Quapropter, cùm hæc sint indiuidua, numeroque multiplicata, & tamen indiuisa, diuisio vnitatem numericam non constituet.

Resp. Hæc omnia, demptis modis esse diuersa numero à subiecto, in quo inexistunt, nō actu; sed potentiâ; quia entitatem possident, vt saltem diuina operante potentia sine subiecto commorari possint. Ad id verò de modis respondetur non constituere; neque in subiecto, neque inter se pluritatem numericam, sed solùm specificam; cùm nec sine subiecto concipi possint.

CONCL. III. PROPOS. XI.

Vnitas numerica, seu realis, seu potentialis per aliquam differentiam dignoscitur.

PRob. Quæ differentia non sunt ab intellectu distingui nequeunt: Ergo ea omnia, quæ distincta cognoscuntur, aliquam differentiam secum ferunt, ob quam dignoscantur. At si ab intellectu res non distinguantur, vt vnum concipiuntur: Ergo ad hoc, vt intellectus plures vnitates concipiat, debet recognoscere aliquam differentiam, ob quam distinguat. Quod verò quæ distincta non cognoscuntur, vt vnum aprehendantur, patet experimento. Nam pone mihi aliquod corpus omninò similis similis similis

distinguere. Vnde primò ob differentias, vel accidentales, vel substantiales concipit plura; vt euenit in omnibus heterogeneis. Secundò ob ipsius dessignationem, vt in omnibus homogeneis, in quibus intellectus designat partes, & de illis agit, tanquam si essent plura actu indiuidua. Tertiò accipere quandoque pro pluribus, quæ nullo modo in plura facessere possunt. Quia differentias percipit, ob quas distinguit ea, quæ vnum sunt, in plura. Quartò & aliquando concipere, vt vnum; quæ verè duo sunt, sic si Luces à diuersis luminibus prodeuntes in eodem foramine decussentur, videntur, vt vna lux, cum tamen duę luces sint, numero distinctæ.

EXPENSIO IV.

An vnitas numerum constituat.

NVmerus ex vnitatibus constare quibusdam dificile visum est; cùm vnitas opposita multitudini videatur. Verùm, vt rem determinemus, sit.

CONCL. I. PROPOS. XII.

Vnitas est idem obiectiuè; ac numerus; non formaliter, & reduplicatiuè.

PRob. Plura sunt numerus obiectiuè: Ea verò sunt ab inuicem diuisa, & in se singula nequaquam plurificata: Ergo quodlibet vnum est. Ergo numerus ex vnitatibus constat.

Dices. Vnum, & plura opponuntur. Ergo pluritas ex vnitatibus constare nequit.

Respondetur. Vnum, & plura opponi disparatè, non negatiuè; neque contrariè. Nimirum ex suppositione quòd intellectus conceperit vnũ, non potest cognouisse quinque. Hoc autem nẽdum vnitas habet; sed quilibet alius numerus præter vnitatem. Nam eâdem oppositione, quâ

obijcitur nihil inuoluat eorum, quibus à parte rei adnectitur. Sic conceptus perfectus est animalis, quia iste conceptus, prout in intellectu est rationalitatem, quæ ei à parte rei in homine connexa est, non inuoluit. At si ego concipiam ens. Iste conceptus, prout menti se obijcit, non est perfectus; quia, etiam quatenus in mente est, sine substantia quid chimericum euaderet.

CONCLVS. I. PROPOS. XIII.

Indiuiduatio numerica à rebus indiuiduatis perfectè non præscindit.

PRobat Arist. 8. Metaph. text. 16. *In prædicatione vnus homo non addit aliquid aliud, quam homo, sicut & ipsum esse, præter quid est, aut quale, aut quantum, & vni esse, est vnicuique esse.* Sic 3. Methaph. tex. 30. *Idem enim vnus homo, & ens homo, & non significat diuersum aliquid secundùm distinctionem repetitam homo, & ens homo, & vnus homo.*

Probaturque ratione. Vnitas numeralis, & indiuiduatio idem sunt, vt suprà dictum est. Ideoque vnitas est esse indiuisum in se, & diuisum à quocunque alio. Sed nec indiuisio, nec diuisio ab alijs potest concipi sine re indiuisa in se, & ab alijs diuisa. Igitur nec vnitas numeralis, nec numerus vnitatibus constans sine ipsis rebus numeratis perfecto conceptu potest intelligi.

CONCL. II. PROPOS. XIV.

Naturâ, neque ipsa, ab vnitate numerali perfectè præscindit.

PRobatur ex Arist. lib. 10. Methaphis. tex. 8. *Quòd autem id est quodammodo significet vnum, & ens, patet, quòd similiter se habet, sicut ens.*

2 Prob. Quidquid est in Petro diuisum est,

perfectè à naturâ non præscindit; sic nec natura ab indiuiduatione. Sed natura potest concipi sine indiuiduatione: Ergo etiam indiuiduatio sine naturâ.

Prob. 2. pars. Pluritas nihil addit vnitati; nisi aliam vnitatem, & vnum vni; Ergo ab vno, & vno præscindi nequit.

2 Ratio præcisa essentialiter excludit pluritatem: Quia debet esse quid vnum commune multis, atque conueniens. Ergo pluritas, vt pluritas præscindi nequit.

Dices con. 1. partem. Rationes contrahibiles, & contrahentes debent esse diuersæ. Sed indiuiduatio præcisa est eadem, ac illa, de qua dicitur; cùm sit vnum, & idem: Ergo non datur ratio contrahibilis vnitatis, & per consequens nec præcisa.

Resp. Totum concedendo demptâ vltimâ consequentiâ. Nam res, quæ à parte rei contrahit indiuiduationem, non est; nisi ipsum indiuiduū, nempe *hoc*, & *illud*. Non requiritur autem; quòd hoc contrahens, & illud sit aliquid diuersum à conceptu meo mentali; nisi per accidens. Ratio est: Quia intellectus multiplicat conceptus suos non ratione diuisionis: Sed ratione distinctionis. Cùmque diuisio à parte rei nullam differentiam dicat: Hinc est, quòd per ipsam conceptus suos multiplicare non possit, & in plura secernere, nisi ostensione huius, vel illius; vel (si adsit) mediante aliqua differentia extrinseca.

Dices con. 2. Mathematica, vtpote scientia, præscindit à rebus materialibus: Sed numerus est obiectum mathematicæ. Ergo ab indiuiduis, in quibus inest potest præscindi.

Resp. Præscindi quidem numerum ab hoc, & alio indiuiduo, sed non per se ipsum, at mediante vnitate, quam essentialiter dicit, & ex quâ methaphisicè componitur. Ideoque, cùm numerus sit idem, ac vnitates, & vnitas præcisa reperiatur, etiam numerus præscindi poterit. Inquies. Ratio præcisa importat immultiplicationem, vt dictum est: Ergo, neque ratione vnitatis præscindi poterit.

Respond. Posse naturam abstractam in indiuidua abstracta multiplicari: Vt quando concipiuntur plura animalia; certum est, quòd non concipitur hoc, seu illud animal. Sed concipitur animal abstractum ab hoc indiuiduo, & animal abstractum ab alio. Nam sicut ratio animalis à pluribus abstrahi potest, ita etiam ab vno tantū. Consideratur ergo animal quodlibet tanquam ab vno præcisum, & cum indiuiduatione abstracta. Quare si species, & genus abstractè, concipitur multiplicatum, tantò magis ipsa Vnitas.

COROLLARIVM.

Hinc potest agnosci rationem communem indiuiduationis esse vniuocam. Ratio est, quia tunc tollitur vniuocatio; quando in ipsa ratione vniuocâ sese ingerit aliqua dissimilitudo; ita vt ex parte quidem sit similis, ex parte dissimilis. Verùm ratio, per quam dicuntur vnitates, similes, nullam aduehit dissimilitudinem, quare relinquit vniuocationem.

EXPENSIO VI.

An possit dari numerus infinitus.

AD complementum tract. antecedentis hæc Expensio necessaria est; nam supposito, numerum infinitum dari non posse: Nec ipsa quantitas continua infinitis punctis; vtpote numerabilibus constare potest: At si numerus infinitus non repugnat, ibi statuta ex parte debilitantur.

CONCL. I. PROPOS. XVI.

Non potest dari infinitum actu in multitudine.

PRob. Multitudo infinita, vt perspicuum est, numeris aliquibus finitis constat. Quare, cùm sint finiti, omnes sumi possunt. Sumantur. Eritque ea, quæ superaddetur, vnitas extra omnem finitatem: Ergo infinita per additionem huius vnitatis ea multitudo efficietur. Rursusque infinita non erit: quia per additionem vnius, numerus finitus, Infinitus non euadit, cùm finitum additum finito nō faciat infinitum.

Neque dicas. Hoc argumentum contra Dei æternitatem militare: hoc enim falsum est, quia æternitas numerabilis non est; cùm sit tota simul; nec fluat per partes.

2 Vel in infinito numero adsunt partiales numeri, vel non. Si nōn; Ergo quantitas discreta summam vnitatem possidet; cùm numeros partiales non amplectatur. Et sic infinitus numerus vnitas est. Si verò numeros partiales possidet. Illi, vel infiniti sunt, vel finiti. Si Infiniti: Ergo totum partibus infinitis constat, cùmque non detur infinitum maius alio, pars erit æqualis toti. Neque dicas, hoc non verificari in infinito, vt aiunt Conimbricentes l. 1. phys. cap. 8. q. 2. ar. 4. & in eo totum suæ parti esse æquale. Nam hæc proprietas est essentialis conceptui totius, & partis; nec sine illa concipi potest. Quare si conceduntur partes in infinito: Fatendum quoque est partem in eo totum adhæquare non posse.

Neque dicas posse admitti infinita numerorum inæqualia, & maius aliquo infinito concipi posse. Nam si hoc concedatur, etiam multa infinita poterunt reperiri æqualia. Sed numerus infinitus vnicus solum esse potest, cùm omnia per eamdem seriem numerorum naturallium augeantur. Ergo cùm multa non dentur infinita æqualia, neque inæqualia admitti poterunt. Quòd verò vnicus numerus tantùm sit, patet: quia non loquimur de numero rebus applicato. Sed secundùm se, & abstractè; qui vnicus est, & immultiplicabilis, sic enim neque plura 4, neque plura 5, dantur; Sed tantùm ex singulis numeris vnum. Sed iam ad secundam partem Dilēmatis transeamus. Et si admittuntur partes huius infiniti omnes finitæ. Ergo totum infinitum, finitum erit: Cum quidquid in eo partium reperiatur finitum sit, & totum malus suis partibus simul sumptis non sit.

3. Quia Aduersarij contendunt, quemlibet numerum in infinito esse innumerabilem, etiam si sit veluti pars ipsius infiniti. Quæro: an diuidendo in infinitum semper reperiam, quidquid diuisum sit, Infinitum, vel non. Si numerum finitum

finitum nullum inuenio. Ergo infinitus numerus numeris non constat, cùm in numeris, duo, tria, quatuor essentialiter reperiantur; qui certè numeri infiniti non sunt: Si inuenio aliquos finitos, V. g. duo; Ergo infinitum, finitis numeris constat, & per medium diuidi potest; Vnde & duo numerorum infinita darentur vnum maius alio.

* 4 Secetur numerus infinitus proportionaliter; ita vt minus extremum sit ad maius, vt maius ad totum, & de minori, & minori extremo id fiat in infinitum. Certè illud extremum semper hac diuisione minus fiet, & in infinitū procedēdo fiet minus omni quantitate propositā. Sit ergo proposita quantitas 4, Vel ergo hac continua diuisione manet semper infinitum, & sic dabitur aliquis numerus infinitus minor, quam 4, vel fit tandem finitus; cùm ergo ita sit iste numerus finitus vltimo repertus ad malus extremum, vt maius extremum est ad totum; & sic consecutiuè, erit etiam maius extremum finitum; cùm finiti ad infinitum nulla sit proportio. Quare & totum erit finitum, non infinitum, vt à principio supponebatur.

Neque dicas contra hoc, & antecedens argumentum: Dualitates in numero infinito esse infinitas, sicut & triadas, & quatriadas, &c. Resp. enim idē sequi incōueniēs, quod in 3. Argum. Nā omninò vnitates plures erunt dualitatibus, & dualitates minùs erunt numero quaternarijs. Quod si sic. Ergo adhuc vnum infinitum est maius alio, & aliud includit. Quod si non. Iam inter numeros infinitos non datur proportio, quæ consistit. Quòd vna quantitas plures partes de alia consequatur, quam quòd ipsa contineat, vel pauciores, vel æquales. Si verò quantitates infinitæ proportionem excludunt, iam & quantitatis essentiam exuunt; quę inter prædicata essentialia proportionem enumerat.

5 Vel processus finitorum numerorum per finitos numeros, vsque dum peruenias ad infinitum, repugnat, vel non. Si repugnat, cur in infinitis deinde admittitur. Siquidem ternarij in infinito, licet infiniti, poterunt addi infinitis quaternarijs, & hi quinarijs, & sic in infinitum. Vnde infinitus esset numerus in infinitum numerorum, qui facerent infinitum numerum, licet naturali serie per 1, 2, 3, 4, &c. progredientes, & se augentes. Quod si non repugnat. Ergo repugnabit infinitus numerus; cùm admisso perpetuò finito, infinitus numerus excludatur.

* 6 Si datur infinitum malus alio, vt videtur concedendum. Admisso numero infinito quæro, An infinitum minus includat omnem numerum possibilem. Si includit omnem numerum possibilem includit etiam maius se. V. g. infinitum quaternariorum concludet infinitum decimarū. Si non amplectitur omnem numerum possibilē. Ergo non totam seriem naturalem numerorum includit. Sed series naturalis numerorum non tota finita est. Ergo etiam illud, quod dicitur infinitum; finitum.

* 7 Dantur numeri quadrati, qui nascuntur ex multiplicatione sui in seipsis, vt 3, multiplicatus per 3, facit 9. Dantur quoque simplices numeri non quadrati; qui omnes quadratorum sunt radices, cùm in seipsis multiplicari possint. Et idem dicas de numeris cubicis: nempe geminis vice in se multiplicatis, qui, & pro radicibus habent ipsos numeros, qui quadratorum sunt radices. Quare cùm omnes numeri sint radices, suumque quadratum, & cubum obtineant; Totierunt quadrati; & cubi, quot numeri. Quare si sunt infiniti, etiam quadrati, cubique erunt infiniti. Sed inter quadratum, & radicem; inter cubum, & radicem multi necessariò sunt numeri intermedij. vt inter 3, & 9, sunt 4, 5, & 6, &c. Et quo maiora quadrata, maioresque cubi, eo plures sunt numeri intermedij. Ergo datis numeris infinitis erunt plures radices; quam quadrata, & cubi. Sed supra ostensum est esse tot, quot numeri. Ergo æquales, & inæquales; quod repugnat.

* 8 Quantò magis procedimus in numeris, eo pauciores numero inueniuntur quadrati numeri, multoque pauciores cubi, & tantò ampliùs pauciores super solidi Sed numerus infinitus debet consequi tot cubos, tot quadrata, tot supersolida, quàm numeri; Ergo quo magis progredimur in numero, eo magis elongamur ab infinito quadratorum, & cuborum, vel supersolidorum: Quia rariores eos inuenimus. Sed non possumus discedere ab infinito quadratorum, & cuborum; quin discedamus ab infinito radicum, qui numeri simplices sunt; Ergo multiplicando numeros ab infinito discedimus.

* 9 Si numerus infinitus totalis infinitos numeros partiales claudit; multiplicetur infinitum partiale per infinitum totale. Vtique producetur numerus planus, maior ipso totali; Ergo ipse non erat totalis; cùm maior illo detur. Sed rursus erit totalis, vt præsuponitur, cùm omnem numerum possibilem includat. Ergo totalis, & non totalis.

Quod si dicas. Hanc multiplicationem adhiberi neutiquam posse: Ergo illud, quod dicitur Infinitum, numerus non est; cum multiplicationem excludat, qui numero essentialis proprietas est. At si numerus totalis immultiplicabilis est; numeri partiales fortè non erunt. Multiplicentur ergo inuicem duæ medietates, vel proximè numeri totalis, & producetur quadratum quadrùplo maius, quam duę medietates: Quare totius infiniti totalis, duplo maiùs infinitum erit productum, vt priùs.

EXPENSIO VII.

An numerus essentiam consequatur.

FRustra Arithmeticus numeros specularetur, si nullam essentiam possiderent. Neque enim, vt volunt Philosophi verissimo decreto, entia per accidens scientijs, quæ sunt æternæ veritatis sufficiens fundamentum præbere possunt; Sed solùm essentiæ rerum; quæ immutabiles sunt, & æternæ. Videtur autem numerus nulla essentia frui, cùm sit vnum per accidens, vt lapidum aceruus, vel vt multitudo. Verum sit.

CONCLVS. I. PROPOS. XVII.

Numerus essentiam non possidet vt numerus est.

PRobatur. Numerus, vt numerus, est quædam multitudo; sed multitudo essentiam non obtinet, cùm sit ens per accidens; Ergo neque numerus essentiā potitur.

2 Multitudo, & numerus excludunt, vt talia, vnitatem: Ergo quid essentiale non sunt: Patet.

Omne essentiale ens est. Omne ens est vnum; cùm vnum & ens conuertantur. Ergo, quòd non sit neque vnum, neque ens numerus essentia non gaudebit.

2 Numerus; seu sumitur in ordine ad intellectum, & sunt plures eius operationes ad placitum factæ, vel in ordine ad res numeratas, & est multitudo ad placitum coadunata: Sed entia ad placitum nullam essentiam adipiscuntur. Ergo numerus essentiâ deficit.

CONCL. II. PROPOS. XVIII.

Numerus, prout dicit partes quantitatis numeratas, essentiam possidet.

PRobat. Quantitas illa prout suis partibus integrata essentia potitur: Ergo etiam numerus, vt eam exprimens suâ gaudet essentiâ. V.g. si 4, assumatur tanquam quatuor partes alicuius planitiei, necessariò multiplicatæ in se producent cubum; Quia cubus, qui superficies suas in quatuor partes diuisas habeat necessariò amplectetur 16, cubos partiales, quorum quilibet superficiem vnam habet vni ex illis 4, æqualem, & sic dicas de alijs,

CONCL. III. PROPOS. XIX.

Numerus quoque possidet essentiam in ordine ad operà nostri intellectus.

PRobatur. Opera nostri intellectus essentialiter connexa sunt, & in arguendo dependentia. Nam priùs oportet cognoscere; deinde iudicare, tandem dicurrere. Sic quod acceptum est, vt priùs: semper acceptum erit, & stante eâ acceptione, posterius esse non poterit quòd ordinatum; ordinatum; Quod simile; simile, &c. Quare intellectus, si accipit duos numeros dicentes relationem æqualitatis; vel proportionis ad alios, necessariò illi numeri tales erunt; quia scilicet intellectus accepit numerum talis respectus participem, & discurres de alijs.

Dices. Euclides 7. lib. 8. & 9. absque vlla dependentia ab operibus intellectus, vel à quantitate continuâ affectiones numerum demonstrat. Ergo numeri secundum se essentiam; quam demonstremus; passionesque possident.

Resp. Euclidem 7. 8. & 9. lib. affectiones numerorum demonstrare per reductionem ad impossibile quoad primas propositiones, quæ in alijs arguendi fundamenta sternunt. Deinde arguere à ratione continentis, & contenti, mensurantis, & mensurati, quę relationes sunt, & applicationes vnius quantitatis ad aliam nostri intellectus; eo quod V. g. si assumatur numerus; qui sit pars alterius A; quòd etiam erit pars maioris; cuius A pars est. Relationes verò licet præbeant fundamentum euidenter arguendi, non tamen entia eam relationem habentia per eam essentialiter constituuntur; cùm per multos Philosophos relationes nihil sint à parte rei, & solùm per opus nostri intellectus comparantis habeantur: Cùm itaque numerorum demonstrantur passiones, operationum nostri intellectus in accipiendis vnitatibus demonstrantur, quæ taliter acceptæ, alio modo accipi nequeunt, alioquin implicantia in ipsis operationibus sequeretur.

Et licet operationes intellectus, vt simpliciter tales, sint ad placitum, vt 2. prob. Concl. 1. diximus: non tamen, vt relatiuæ, & dependentes inuicem: nam positis quibusdam cognitionibus, ad tali modo operandum deinceps in sequentibus mens impellitur ab ipsâmet speculationum naturâ, vt Logici nouerunt.

TRACTATVS III.

De Mathematica eiusque Affectionibus.

VÆDAM de ipsâ Mathematicâ præcognoscenda; antequam limina ipsius tentemus, & precipuè quodnam sit eius obiectum; qui modus procedendi, & similia; qui animum doceant, quò modo in mathematicis se debeat gerere; qui primus & inassuetus eas addit. Sic, & in artibus, congruum est; vt qui eas callere velit, instrumenta priùs, & materiam; quæ ei tractanda sunt, noscat, modum quoque, quo ea tenere, & manibus versare, adiscat; vt deinde in ipsa arte promptiùs se exercere, vt illa potiatur, facultas sit.

EXPENSIO I.

De obiecto Mathematicæ eiusq; abstractione.

PRÆASSVMPTVM.

QVælibet scientia, vt Logicus docet, obiectum materiale, & formale consequitur. Materiale quidem est illud, quod ab illa scientia consideratur; Formale verò est illa ratio sub qua consideratur. Sic Medicus considerat corpus animatum; sed vt sanabile. Sic Physicus considerat corpus naturale; sed vt mutabile. Sic Theologus Deum speculatur; sed vt cognoscibilis lumine reuelato medio discursu. Vnde in medicina corpus animatum erit obiectum materiale, sed eius sanabilitas obiectum formale.

PRÆASSVMPTVM II.

ITem considerandum est; quòd nulla scientia intuetur suum obiectum; vt in singularibus; sed, vt abstractum ab eis. Neque enim Medicus considerat corpus Petri, vt Petri: Sed, vt corpus. Ratio est, quia non vt singulare rationem formalem participat, sed vt vniuersale. Quare sub ea ratione consideratum, debet etiam concipi, non vt singularizatum. At vt inferioribus, particularibusque naturis denudatum; cum Petrus, vt Petrus sanus sit, non sanabile corpus. Et tantò magis, quod omnis scientia rei speculetur essentiam: quæ à particularibus, & indiuiduis præscindit.

CONCL. I. PROPOS. I.

Obiectum Mathematicæ est ens quantum, vt mensurabile.

PRobat. ex Arist. lib. 1. post. cap. 10. *Quare propter hoc non malè Geometræ dicunt, & de entibus differunt, vt entia sunt.*

Prob. Nam, quòd sit ens quantum, patet. Considerat enim trinam dimensionem longitudinem, latitudinem, & profunditatem, quę sunt dimensiones ens quantum constituentes. Considerat quoque quantitatem eorum, quæ corpora non sunt; Ergo eius cognitio latiùs patet, quâ corporis, & in ente quanto constituenda est.

2 Agit de Conis, Cylindris, Sphæris. De numeris, de tempore, de luminis intensione, de quantitate motuum, quæ conueniunt tantùm in ratione entis quantitatiui: Ergo ratio, per quam Mathematica ad illa perscrutanda fertur, est entis quanti; Nam enim de illis ageret omnibus; nisi in aliquâ ratione, conuenirent ob quam in illa simul posset intendere.

Dices. Agit de Superficiebus Lineis Angulis; quæ entia quanta non sunt, cùm sint negationes. Item obiectum, cuiuscumque scientiæ debet esse abstractum; vnde etiam obiectum Mathematicæ. Quapropter, eius obiectum erit potiùs quantitas ipsa; quàm ens quantum.

Respondetur ad primum. Superficies, lineas, puncta esse corporis extrema, ab illo, nec quidem mente, separabilia, vt diximus. Vnde agendo de illis, implicitè agit de corpore. Deinde multa in scientijs considerantur; quæ quidem obiectum non sunt. Sed solùm assumuntur, tanquam necessaria ad perfectam cognitionem obiecti. Sic agit medicina de plantis; quòd illa cognitio ad sanabilitatem corporis indagandam; conducat. Sic Theologia de Angelis, Sacramentis, Peccatis. Quæ licet Deus non sint. Ordinantur tamen ad cognitionem Dei sub ea formalitate, sub qua consideratur à Theologo. Vnde licet superficies, lineæ, puncta entis quanti conceptu non fruerentur; eorum tamen cõmensurationes deberet Mathematicus considerare, vt ad corporis quanti cognitionem, perneceſsarias.

Ad secundum respond. Obiectum cuiuscunq; scientiæ debere esse quid subsistens, & quod directæ sit positum in prædicamento substantiæ. Quantitas verò non ponitur in prædicamento substantiæ; sed ens.

Prob. quoque secunda pars, quòd in ens quantum tendeat; sed sub ratione mensurabilis. Nam intendit acquirere cognitionem entis quanti. Quanti verò essentia in capacitate partium consistit. Quare ens, vt partibus constans, & in partibus

tibus conueniens, aut disconueniens cum alio, debet cognosci, quæ est ratio mensuræ. Deinde tota disputatio, quæ inter Mathematicos versatur proportiones corporum rimatur: proportio verò in commensurabilitate consistit.

Dices agit de lineis, superficiebus, corporibusque irrationalibus; quæ nullam commensurabilitatem possident.

Resp. Primo quantitates incommensurabiles non esse omninò tales. Sed solùm respectiuè ad aliam quantitatem. Vnde de illis simpliciter agere potest. Deinde agit de ipsis, vt ad cognitionem commensurabilitatis conducunt: nisi enim sciret, quenam lineæ essent incommensurabiles, nec commensurabiles agnoscceret, aut distingueret. Sicuti Physicus agit de priuationibus, & negationibus, de vacuo, de spatijs imaginarijs; licet entia non sint naturalia: Quia ad cognitionem corporis naturalis deseruiunt.

CONCLVS. II. PROPOS. II.

Mathematica, quidquid considerat abstractè considerat, & ab ente indiuidualì præscindit.

PRob. 1. ex Arist. l. 2. Methaph. cap. 12. *Materia quædam sensibilis, quæ am intelligibilis: sensibilis quidem vt æs, lignum. Intelligibilis verò, quæ in sensibus existit, non prout sensibilia, vtpote Mathematica.*

Probatur verò ratione. Quoniam si hæreret sensibus: tunc multa falsa mentiretur; dum lineam alteri æqualem omninò dicit; cùm tamen linea alteri præcisè æqualis, vel dari nequeat in rebus materialibus, vel dari saltem certum non sit. Sic rectam esse ductam, quæ quidem, an possit rectissimè duci, dubium est. Sic circumferentiam circuli perfectam; quæ in circumferentijs materialibus non reperitur. Quod etiam aduertit Arist. l. post. cap. 10. *Neque*, inquiens, *Geometra falsum supponit quemadmodum quidam asserunt dicentes; quod non oporteret falso uti; Geometram verò mentiri dicentem pedalem, non pedalem; aut rectam descriptam non rectam existentem. Geometra verò nihil concludit, eoquod hæc est linea, quam ipse loquutus est, sed quæ per hæc ostenduntur.* Sic Proclus lib. 2. cap. 2. *Qui in sensibilibus circulis compositus, magnitudine distans, ac certa ratione diminutus, ac ineptiarum plenus ab immaterialium puritate longè deficiens. Geometria verò, cùm de circulo quidquam loquitur, atque diametro, & de passionibus, & affectionibus, quæ ad circulum spectant, non de sensibilibus docet, aut differit, ab ipsis, quidem separare conatur; & vniuersale ipsum considerat.*

* Prob. 2. Nam ostendimus puncta impartibilia nequaquam dari posse, à materia seiuncta partesque in infinitum diuisibiles esse prout consideratur à Mathematicis. Cùm itaque Mathematici præsuponant partes in infinitum diuisibiles, parat sumere ens quantum, vt quantum est; & ideo, vt semper partium capax. Non autem sumere ens, quod est à parte rei: quod diuisibilitatis infinitæ capax non est, aut saltem incertum. Sic in circulo supponit Mathematicus figuras inscriptibles in infinitum Hyperbolem ad Asymptotum accedere in infinitum, & multa alia, quæ certè de rebus sensibilibus non possunt verificari, sed de ipsis, vt abstractis, & vt tales sunt.

Dices. Mathematica docet operari in problematibus; Sed operari est circa res sensibiles, & vt sunt à parte rei. Mathematica igitur saltem in problematibus à materiâ non abstrahit.

Resp. Docere quidem operari, sed adhuc illam operationem, vt à materiâ seiunctam, & ei non applicatam considerare. Vnde Proclus lib. 2. com. 5. inquit. *Propriè in Mathematicis disciplinis problema vocatur, quòd ad contemplationem operantem proponitur. Quod namque in his fit, finem, contemplationem habet; & sæpenumero quidem eorum, quæ fieri non possunt, quædam problemata vocant.* Igitur, cum Mathematicus problema proponit, & docet operari, instruit, quid operetur, non circa rem materialem, licet, vt plurimùm etiam id, per doctrinam, quam tradit, præstari queat; sed circa rem conceptam, & eam operationem, vt versantem circa res abstractas considerat. Quare & aliquando docet problemata, quæ fieri nequeant, prout res ita se habent, non absolutè, V.g. datum pondus datâ quacumque potentiâ mouere. Quasi quod essemus cuiuscumque potentiæ vltimis viribus instructi, Vel cum docet Altitudines stellarũ fixarum, latitudines, lõgitudines mẽsurare, tãquã si essemus in centro, cùm nec ibi esse possimus; sed in superficie. Sic describere Horologia; tamquam si planum horizontale subesset centro mundi, & à centro in illud planum vmbra decideret.

EXPENSIO II.

De Machematica.

DIfficulter potest apprehendere, quis quod proponitur: nisi nec nomen eius quod proponitur nouerit. Quare in primis quærendum quid sit Mathematica.

Mathematicę nomen deriuat à Græco nomine, quod Latino deprumptũ significat doctrinã: seu disciplinam, eo quia vel è doceat; quòd nihil, nisi per ostensionem, vt plurimùm, affirmet, & nihil, nisi, aut per se euidens, aut probatum ad arguendum pro principijs assumat. Aliæ verò scientiæ pro maxima sui parte potiùs probabiles sunt, quam euidentes, vnde potest definiri.

CONCLVS. I. PROPOS. III.

Mathematica est scientia ostensiua, cuius obiectum est omne illud, quòd mensurari potest.

HÆc Conclusio probatur ipso experimento quoad primam partem, cum omnes eius propositiones ostensiuæ sint.

Dices. Sunt aliqui tractatus, vt Optica, Astrologia, Sphęra, & multæ aliæ partes, quæ rationibus probabilibus inituntur. Resp. id quidem esse verum saltem penes aliquas conclusiones, & tunc non appellatur simpliciter Mathematica; sed Phisiomathematica; quòd sic exigente obiecto partim Mathematica sit, quoad mensurationem, partim verò Physica, quò ad eas conclusiones, quæ mensurationi deseruiant, V.g. Sphęra, quòd probet fluiditatem Cœlorum erit Physica; quatenus verò ex fluiditate motus Planetarũ hypo-

hypotefes; & commensurationes colligit, & ea doctrinâ suppositâ ostendit, erit Mathematica.

CONCLVS. II. PROPOS. IV.

Mathematica in trẽs partes diuidi potest in Mathematicam, Vniuersalem, Cosmicam, & Microcosmicam.

PRobatur. Quia eius obiectum in tres has species facessit. Nam aut est vniuersalissimum, & à quocumque obiecto speciali præscindit. Et hoc à Mathematica vniuersali consideratur; Aut est speciale, & hoc diuiditur in duas amplissimas partes, nempe *mundum, & hominem*: Quæ considerat mundum eiusque proportiones dicitur *Cosmica*; quæ hominem *Microcosmica* appellari potest.

Prima est duplex, nam alia est; quæ agit de quantitate *Discreta*, alia de *Continua*. Secunda quoque duplex est, alia agit de Cœlo, altera agit de Terra, terrenisque omnibus, quæ mensuris subsunt. Tertia quoque duplex est. Alia enim pertinet ad naturam hominis, vt visus circa quẽ versatur Optica. Alia spectat ad artem, vt Mechanica, & huiusmodi.

Hoc autem libro tradimus Mathematicam Vniuersalem, quæ de omni quantitate in communi peragit, & omnibus alijs Mathematicis partibus aditum aperit. Omnes verò Mathematicæ partes possunt tendere in suum obiectum promiscuè. Modo illud speculando, vt quantitas discreta est, modo, vt quantitas continua. Quia scilicet, & quantitas, vt sic sumpta, & mundus, & homo, in se quantitates discretas, & continuas amplectuntur, in quas potest tendere intellectus; vnde promiscuè secundùm quod res exigit, & dependentia obiectorum reposcit, modo sit Geometria, modo Arithmetica: Vnde & harum scientiarum naturam exponere oportet.

CONCL. III. PROPOS. V.

Geometria est scientia ostensiua, quæ de quantitate continuâ pertractat: Arithmetica verò est scientia pariter ostensiua, quæ quantitatem discretam intuetur, & ambæ istas quantitates, vt mensurabiles considerant.

PAtet per semet conclusio; si nomen Arithmeticæ, & Geometricæ secundùm suam latam significationem accipiantur. Verùm non semper ita est. Geometria enim vt plurimùm significat eam partem Mathematicæ, quæ agit de planis nomine vniuersali sibi specialiter applicato, quæ propriè Panthometria dicitur. Arithmetica quoque strictiùs accepta illa est, quę dat regulas supputandi nullis adhibitis demonstrationibus. Mathematica, itaque vniuersalis, de qua hoc Libro agimus partim per occasionem Geometriâ, partim Arithmeticâ constans, in duas quoque partes secernitur intuitu modi procedendi: Nam alia est Elementaris, alia verò nequaquam, & licet eadem tractentur, tum in Elementari, tum in altera parte, & circa eadem obiecta speculatio versetur. In Elementis tamen solùm traditur quædam fundamentalis, & prima doctrina, & velut primi aditus ad profundiores speculationes aperiuntur, in alijs verò non elemẽtaribus circa eadem obiecta profundiora quidem cognoscuntur, sed quæ elementares cognitiones nequaquam dici possint, quoniam limen non aperiant, vt Elementa efficiunt, alijs speculationibus.

EXPENSIO III.

De titulis Mathematicis.

COngruum est librorum, & partium, quæ in ipsis reperiuntur titulos quandoque exponere, vt magis, quæ ipsâ continentur oratione, & euidentiùs innotescant: Ideoque cum Mathematica suis præfigat propositionibus titulos; qui non explicati possent, & ipsius rei, de quâ agitur, obnubilare euidentiam: hinc est, quod eos declarandi prouinciam sumpserim.

QVID SINT ELEMENTA.

DE Elementis inquit Proclus. *Totius Geometriæ sunt quædam theoremata principalia, & ad ea, quæ sequuntur, principij rationem habentia, quæ Elementa appellantur. Elementaria verò sunt, quæcumque extensam in multitudinem cognitionem non habent.* Et deinde. *Non omne lementum vocabitur. Verùm ea, quæ principalissima sunt eorum, quæ in rei effectæ ratione sunt constituta.*

Itaque Elementa sunt quædam Theoremata, vel etiam problemata; quæ in re, de quâ agitur vniuersalissima sunt, & plurimarum propositionum fons, & origo. Quas visum est Mathematicis, seorsim ab alijs propositionibus à se dependentibus segregare; vtpote illæ, quæ non solùm propositionibus de eâdem materiâ agentibus deseruiant; sed multis alijs possint aditus aperire. Vnde vt magis essent, ad manus, & familiariùs adiscerentur in vnam seriem coordinata fuerũt: Maximè quia, nec cognitio quidem omnigena; quæ extra Elementis erat; licet eamdem materiam, quæ in Elementis versata est, specularetur; sæpenumerò poterat perfici: sine Elementis ad illam materiam spectantibus: Vnde, ne dum fuit vtile; sed etiam necessarium, Elemẽtares cognitiones ab extraelemẽtaribus seiungere: vt ipsis singulis omnia Elementa, vt res postulabat, possent inseruire.

QVID SINT PRINCIPIA.

QVoniam, vt ait Arist., omnis cognitio fit ex præexistenti cognitione. Etiam Mathematica quædam habet principia adeo clara, vt prorsùs negari nequeant; nisi stultè, & imprudenter. Talia sunt. *Omne totum est maius sua parte.* In quibus ab alijs omnibus scientijs differt. Nam principia aliarum scientiarum multa, aut negari possunt, aut explicari, cùm vera semper non sint principia; sed quædam potiùs persuasiones mente firmiter radicatas; quàm euidentiæ. Mathematica verò, quæ principia ponit, aut omninò innegabilia sunt, aut talia, quæ, si negantur, protinùs per reductionem ad impossibile ostendat.

DE DEFINITIONIBVS.

DEfinitiones apud Mathematicos verè naturam rei non explicant ex eorum intentione; cùm essentiam rei explicare; sed tantùm nomen exponere sit apud ipsos in definitionibus constitutum, vt sentit Clauius in prolog. & Galilæus in dialog. contra Betlnum. Id verò patet; quia si naturam rei explicarent; oporteret, quòd eam definitionem ostenderent quidditatiuam esse, & naturam rei exponere; quod nequaquam efficiunt. In concessis tamen est; quòd etiam aliquandò naturam rei exponant. Sed id non curat Mathematicus; siquidem, si curaret; maximè in id incumberet; vt talem esse rei naturam; qualem definitio describit, comprobaret.

DE POSTVLATIS.

POstulata sunt quædam; quæ faciliter conceduntur, vt fiant, & quasi axiomata sunt; sed hæc solùm speculatiua; illa verò operatiua. V. g. vt liceat *lineam ducere*. Vt liceat, *lineæ adiungere*. *Vt* liceat, *Quacumque distantia circulm ducere*. Verùm non omnia; quæ clara sunt, & concedibilia postulantur. Cùm etiam. *Producere lineam æqualem alteri*, aut. *Quacumque distantia lineam producere*. potuisset postulari ab Euclide: quod tamen non fecit: Sed ea sine quibus permissis nulla posset inchoari Mathematica operatio, Cùm debeamus *posse aliquid efficere*, sine probatione, vt opus primâ eâ operatione effectum ostendatur euidenter se bene habere.

QVID SIT THEOREMA.

THeorema est pura speculatio alicuius passionis quantitatiuæ euidens. quæ nullo modo aliter esse potest, vocaturque Theorema; quia in purâ speculatione sistit, & nihil efficit.

QVID SIT PROBLEMA.

PRoblema vocatur sic. Quod sit circa operationem, quæ, aut alio modo exequi posset, aut circa illam materiam aliud effici: vt si quando demonstrat. *Triangulum æquilaterum super rectam constitu re*, hoc opus, aut alio modo executioni mandari, aut aliquod aliud triangulum super illam rectam constitui posset, & ideo *Problema* vocatur ad similitudinem Problematis dialectici; quod sicut in vtramque contradictoriam affirmari potest; sic & Problema Mathematicum, & hoc modo, & alio effici, & circa eamdem materiam aliud in opus demandari. Vnde illud, quod alio modo effici nequit; nec de eadem materia aliud fabricari, non vt Problema: sed vt Th orema proponendum est. Sic si quis proponeret in semicirculo angulum rectum efficere: Omninò errorem acciperet; cùm omnis angulus in semicirculo rectus sit: vnde cum alio modo effici nequeat; nec alius angulus in semicirculo constitui possit: Non erit hoc, vt *Problema*; proponendum; sed vt Theorema. At, inquies, sunt quædam, quæ ad modum problematis, & Theorematis proponi possunt. Id enim verum est, & licet aliquod Theorema possit etiam subire rationem problematis; non tamen vice versâ. Vnde attentiùs considerandum est; an ea, quæ problematis speciem ferunt. Verè illius naturam assequantur. Antiquorum verò sententiam Pappus refert de Theoremate, & Problemate. *Dixerunt*, inquiens, *Theorema esse, quod proponitur in ipsius propositi demonstrationem. Problema, quod effertur in constructionem propositi*; ideò propositionis.

QVID SIT PORISMA.

POrismatis nomen etiam apud antiquos fuit controuersum, & videtur Pappus triplicem efferre Porismatis significationem. Primam explicat, quam antiquioribus tribuit; dum ait. *Horum autem species omnes neque Problematum, neque Theorematum: sed mediam quandam inter hæc formam, & naturam habent; quo factum est, vt ex multis Geometris alij quidem ex genere esse Problemata, alij verò Theoremata opinati sint.*

Secùdà verò iuniorũ affert, inquiẽs, *Immutata est autem hæc Porismatis definitio apud iuniores, & definierunt; Porisma est, quòd hypothesi deficit à locali Theoremate*. Ideò, quod nullam consequitur hypothesim, seu suppositionem: Pro quo sciendum, quòd Theorema triplici modo potest considerari. Primò quoad modum procedendi in probatione. Secundò quoad ea, quę antecedunt demonstrationem. Tertiò quoad ea, quæ in demonstratione ostenduntur.

Modus procedendi quadruplus est; nam aut diuersas partes enumerat, aut plures casus, aut diuersos progressus probando priùs multa alia, antequam ad vltimam conclusionem deueniat, aut simplex est, nullaque vel partium, vel progressuum; vel casuum multiplicitate discriminatur. Porisma itaque videtur appellatum Theorema multiplex ex aliquorum sententia, aut partibus, aut casibus, aut progressibus. Quare, inquit Pappus. *Porisma à multis sic intelligitur, vt artificiosa collectio sit ad Analysim grauiorum, seu difficiliorum problematum, & generum in comprehensibilem multitudinẽ præbente ipsorum natura*. Si verò Theorema consideretur quoad antecentia; in triplici quoque differentia versantur. Alia præsuponunt aliquid in gratiam aduersariorum. Alia præsupponunt aliquid factum; quod non est operi demandatum, vt Archimedes præsuponit. V. g. Spheram esse proportionaliter sectam per talem superficiem, & probat deinde, id verè taliter se habere. Alia iubent ad demonstrationem efficiendam, talem, aut tali modo operationem faciendam. V. g. talem lineam ducere. Tandem si consideretur Theorema, quo ad ea, quæ in demonstratione ostenduntur duplex est; nempe locale, & non locale. Locale est illud, quod ostendit locum. V.g. lineas esse parallelas. Extremum alicuius lineæ esse in circumferentia. Tale punctum esse in medio circuli; quæ propriè circa quantitatem non sunt; nisi reductiuè, quatenùs locus est proprietas rei quantitatiuæ, & deseruit ad illius cognitionem.

Dicit itaque Pappus. Quòd secundum Iuniores Porisma non est Theorema locale, eo quia præsuponat Hypothesim, seu aliquam suppositionem, quam deinde non explicat, cuius sit illa suppositio, seu quænam? Insuper illud verbum *deficit* ambiguum est; nescimus enim: An deficiat ipta hypothesis ad hoc, vt sit theorema locale: An ipsum Theorema deficiat à locali, ideò localis naturâ nõ assequatur, eo quod Hypothesim obtineat.

Verùm

Verùm Proclus in Euclidem lib. 3. sic Porisma definit. *Porisma etiam de quibusdam problematibus dicitur qualia sunt ab Euclide conscripta porismata. Propriè verò talia dicuntur; quando ex demonstratis aliud aliquod Theorema nobis non proponentibus emergit, & offertur: Quod propterea Porisma appellarunt; quasi lucrum ex scientifica demonstratione obiter, & præter expectationem factum.*

Itaque habemus clarum duplicem sensum, penes quem Porisma accipi queat. Primum ex Pappo iuxta antiquos. s. quod sit quid medium inter Problema, & Theorema, quòd & possit, vt Theorema, & vt Problema proponi. Secundum ex Proclo. Quod sit veluti quoddam Corollarium ex demonstratione collectum, & breuiter ex dictis ostensum. Obtinemus quoque alias duas ex Pappo Porismatis acceptiones; sed obscuras, & ancipites: Nempe, quod sit aliquid simile Theoremati locali. Vel quod sit Theorema, vel Problema quoddam multiplex.

QVID SIT ZETEMA.

ZEtema est titulus, quem Algebrici suis operationibus præfigunt: cùm enim ea, quæ Algebra docet non demonstrentur; sed in ipsa operatione nota, & euidentia auadant; propter hoc, nec Problema, nec Theorema appellare potuerunt: vnde quam medio nomine Zetema appellauerunt.

QVID SIT LEMMA.

LEmmata sunt propositiones minus principales, & quæ obiectum, de quo agimus, non respiciunt. Sed tamen ad demonstrationes alterius propositionis omninò necessariæ sunt. Lemma itaque est demonstratio, seu constructio, quæ necessariò ad demonstrandam aliam propositionem principalem, & ad rem spectantem præter institutum assumitur.

QVID SIT PROPOSITIO.

PRopositio est nomen quoddam genericum; quod tùm Porismati, tùm Problemati, tùm Theoremati conuenit, & nihil aliud significat; nisi quòd proponitur aliquid ostendendum.

QVID SIT ANALYSIS, ET SYNTHESIS.

ANalysis nihil aliud est; nisi quædam explicatio rei, quæ proponitur. Synthesis verò accipitur, cùm traditur modus operis, quòd fieri iubetur.

EXPENSIO III.

De Mathematica institutione.

MAthematica institutio, aut potest sumi iuxta subiectum, aut penes modum instruendi.

Si penes modum instruendi. Modus quidem euidens est. Sed Syllogismis non procedit, at Enthimematum continuata serie, quæ breuiùs probant. Ratio huius rei est: Quia, cùm sæpè repetant easdem literas, si tres propositiones efficerent, vt requirit Syllogismus, pronam in mentem audientium confusionem inducerent. Vnde Entymematibus vtũtur, quę cõclusionẽ immediatam habent, & quæ probata Syllogismi demonstratiui efficatiam consequuntur.

2 Quod incipiat à primis principijs, & paulatim deueniat ad conclusiones. Vnde contrario modo, ac Philosophia facit, siquidem hæc conclusionem immediatè à præmissis deducit immediatioribus, & deinde assumptas præmissas probat euidentioribus alijs, donec ad prima principia deuentum sit. At Mathesis à primis principijs incipit, & paulatim per diuersa Enthimemata, diuersasque conclusiones, ad illam vltimam, quam proposuit, tandem accedit, & in illa conquiescit.

3 Mathematici nunquam anticipant, neque vt probata accipiunt, quæ probanda postmodum sunt. Vnde Proclus ad 11. Eucl. propos. ait. *Demonstrationem autem, quæ per semicirculum fit; nec commemorare dignum est: Multa enim præsuponit eorum, quæ posteriùs ostendenda sunt, ab Elementarisque institutionis ordine omninò recedit*. Et propos. 23. reijciendo operationem, quâ fiunt anguli æquales ex peripherijs interceptis æqualibus inquit. *Huiusmodi itaque ostensionem, tanquam posterioribus vtentem, ab elementari institutione alienam esse censemus*.

Aliquando tamen ipse Proclus anticipauit ostendendo ad propos. 24. Eucl. quæ sequentibus indigebant ad sui ostensionem, in hoc verò se gessit, tanquam interpres, & non vt absolutè pareret euidentiæ; sed potiùs, vt indigitaret fallacias, quæ in ea propositione potuissent accipi. Sic Clauius contra Pelletarium anticipat, & Commandinus, vel qui addiderunt propos. extremas lib. 5. Eucl. supponunt enim propos. 12. lib. 6. Nam verè non potest dici demonstratio, nec intelligi quidem, quæ præsuponit non ostensa, sed potiùs credulitas, & obscuritas: cùm addiscẽtem opporteat credere ea esse demonstrata; vt hæc, quæ ab illis dependent, sibi persuadeat, & capere nequeat illa, quorum, nec quidem figuram aspexit. Vnde valde illi culpandi sunt; qui Euclidis Elementa perperam augentes, ea introducunt, quæ multa cognitione aliarum propositionum indigent, non dum haustam, vt suam euidentiam nanciscantur.

4 Peregrina fugiunt, & quæ ab instituto recedunt. Sic Procl. lib. 2. cap. 10. enumerat conditiones, quæ ad institutionem Mathematicam necessariæ sunt; & ea inter primas est: *quod sicut necessaria non omittat; sic superflua non interferat; perspicuitatem, & breuitatem ferunt*. Et ratio est. Quod impertinens sit, sclentiam extra suum obiectum vagari, & alia obiecta contemplari, quæ ad ipsam non spectant. Cùmque partes Mathematicæ sint sclentiæ maximè subordinatæ; quarũ vna ab alia aliquo semper subalternationis vinculo dependeat; omnes commiscere, est omnes confundere, nihilque certi tradere; dum omnia sine necessariâ dependentiâ traduntur. Vnde in iura Mathematica maximè illi peccant, qui, vt ex vngue adiscamus Leonem, dum vnam propositionem probant, alias, quæ illius loci non sunt, praxes, propositionesque ex alijs non cognitis ostensas, aut tantumodò assertas adferunt, & sic mentes discentium tenebris, offundunt, & in ambages vrgent.

5 Eandem probationem multoties repetunt; dummodo propositioni deseruiat, quam demonstrare satagunt; Sic eandem demonstrationem

9. & 11. propoſ. primi Euclides replicat, vt paſſim vbique videre eſt.

6 Licet nitantur, quæ proponunt, oſtendere Mathematici, aliqua tamen ſunt; quę nonniſi probabili ratione attingunt: Vnde Matheſis ſecundum omnes ſuas partes euidens non eſt: Nam in multis ſuis partibus ob defectum principiorum, ab inſtituto deficit, & probabilitate conquieſcit: Sic Aſtrologia, Optica, Sphęra quoque, & Theorica Planetarum, & multi alij tractatus ex parte quidē euidentes ſunt, ex parte verò probabiles euadunt, vnde & Phiſicomathematici dicuntur Omnes autem praxes Mathematicę probabiles ſunt. Quis enim credat ſe diuiſiſſe perfectiſſimè lineam bifariam? Circulum perfectiſſimum duxiſſe? & circinum, aut crure ſe girante, aut pede immoto parumper non diuaricaſſe, & ſic de alijs. Qua de re Problemata Mathematica, vt monuimus, abſtractæ ſemper ſunt intelligenda, vt euidenter concludant.

EXPENSIO IV.

De illis, qui ſtudijs Mathematicis operam nauant.

SCiant illi fruſtra terere tempus, & in ventos niti: ſi poſtpoſitis Elementis, & prærequiſitis tractatibus, velint poſteriores Mathematicas demonſtrationes haurire. Duplici enim de cauſa nunquam intelligent. Primò, quòd ea, quæ in demonſtratis apud Mathematicos ſunt, obſcura per ſe ſint, & quæ ænigmatis formam præferant, vt putes de tripode Apollinem loqui, & abſoleta effari. Imò & aliqua à probabilitate remotiſſima ſunt: niſi demonſtratione firmentur ita quòd; nec quidē probabilem aſſenſum eis intellectus præbere poſſit proprio lumine ad id ſuadente, quod nó euenit in alijs ſcientijs. Siquidem, quæ V g. Philoſophi aſſumunt, vt probata, & demonſtrata in antecedentibus talia ſunt, vt intellectus propriâ vi impellente non abnuat. Vnde ſi non euidentem, ſaltem probabilem cognitionem aſſequuntur.

2 Termini Mathematici obſcuri; neque propriè, quid ſignificent, & quo pacto imaginationi repræſentari queant, neſcit ille, qui prima non viderit. Sicut enim propoſitio ſine figurâ licet multis explicata, & clariſſimis verbis, argumentiſque oſtenſa percipi nequit. Ita multò minus, quæ præceſſerunt intellectui, ſeu imaginationi ſuccurrere queunt, cùm tum demonſtratione, tum figurâ deſtituantur. Quamobrem patienter procedendum eſt, & cùm tractatus primus alteri aditum præbeat, per omnes ſucceſſiuè tranſeundum. Verum tamen eſt, quòd non omnes tractatus æquali nexu ſe vinciunt, aut adeo neceſſario, vt quis aliquem intermittere non poſſit, dum ad alios feſtinet; ſed vt plurimùm ſe neceſſario aſtringunt vinculo, aut certè multò facilius erit antecedentia legiſſe, vt ſingula poſtrema omninò percipiantur.

Verum eſt quoque Mathematicā praxibus vti, quæ independenter ab omni demonſtratione poſſint exerceri, ſed nunquam intelligi. Et hinc artifex Mathematicus excellens, & peritus euadere poteſt ſpretis demonſtrationibus; quę oſtendendis, non exercendis praxibus inſeruiunt.

Ne tamen aliquis, qui vnam, aut alteram Matheſeos partem conſequi exoptat, non omnem animo ampleƈti, mole rerum adiſcendarum obrutus, deficiat, & ab incepto ſe abſterreat, ſingulis tractatibus indicabimus, quænam neceſſariò præcognoſcenda, quænam tantùm vtiliter, vt facilè prætermitti poſſint; Et per omnes partes expeditè omnibus ſuperfluis amputatis diſcurremus, vt quantùm in nobis eſt, omnis faceſſat difficultas, & planum ſternatur iter ad omnia intelligendā.

Si quis verò exquirat. Quenam ingenia ad ſtudia Mathematica apta ſint, Iſti reſponſum erit, Pueros omninò ablegandos, ſi dē demonſtrationibus agatur; ſolùmque ad primas definitiones, & praxes admitti poterunt. Demonſtrationes enim Mathematicæ arduæ ſunt, & intellectum perſpicacem & acutum ſummoperè requirunt, maximè, cùm agitur de proportionibus. Et ſi quando quærit Ariſtoteles. *Quid eſt, quòd puer fieri Mathematicus poteſt, ſapiens autem, aut naturalis non poteſt.* Non intelligit ſimpliciter de puero; Sed de iuuene. Sic enim affirmat 6. mor. cap. 8. *iuuenes licet Geometrici, & Mathematici, & in eiuſmodi rebus ſapientes euadunt; prudentes autem euadere non videntur.* Quod & poteſt intelligi circa praxes; ſicut & prudens ſpeculatiue iuuenis fieri; ſed non practicè poteſt; iuuentute, & feruore animi, rerumque inexperientiā prohibente axiomata prudentię ad opus rectè demandari. Sic licet iuuenes exercitatiſſimi in rebus Mathematicis ſint; non tamen in demonſtrationibus exhauriendis. Cùm enim Iuuenum animi inſtabiles, & ad oblectamenta aclines ſint, parùm ad Mathematicam habiles videntur, quæ ingenium patiens, ſtabile, remotum, & ſolitarium requirit, & maximè quòd hodie Matheſis in tantam molem excreuerit; vt qui omnia probè nouerit, iam ad canos ſe peruenisſe cum ipſa perfectione doctrinæ experiatur.

EXPENSIO V.

De Principijs.

PRincipia, quæ primo Elementorum libro inſeruiunt, ea toti Mathematicæ aditum ſternunt, ſicut & ipſe primus liber ianua ipſius eſt, & limen, quo poſthabito, nullum aliunde in eius demonſtrationes ſeſe iter aperiat. Sunt autem In duplici differentia; nam quædam ſunt, quæ pertinent ad materiam, de qua agitur, vt definitiones; aliæ, quæ ad diſcurſum, & argumentationem inferuiunt: vt ſunt prima principia per ſe nota, & conceſſiones.

DEFINITIO I.

PVnctum eſt, cuius pars nulla.

DEFINITIO II.

Linea eſt longitudo latitudinis expers.

DEFINITIO III.

SVperficies eſt, quæ longitudinem, & latitudinem tantùm habet.

Dicitur *punctum* nullam partem habere; quia accelpſitur, vt vltimus terminus lineæ, & linea, vt vltimus terminus ſuperficiei: Superficies autem, vt vltimus terminus corporis conceptu explicito, & inadęquato. Ideoque à ſuperficie excluduntur partes ſecundùm eam rationem, in qua concipitur terminus: nempe penes profunditatem, non quidem poſitiuè, & conceptu affirmatiuo, ſed negatiuè præſcindendo à partibus ſecundùm profunditatem, & de illo conceptu loquitur Euclides in ſuperficie definienda excludēdo partes, quoad profunditatem à ſuperficie prout inadæquatè concepta, & prout ſtat in intellectu. Et eodem modo loquitur de lineâ, latitudinem ab ea excludendo; quia precisè, vt inadęquatè concepta, prout terminus ſuperficiei, partes penes latitudinem excludit. Et quia puncta ſunt quoque termini lineę; hinc eſt, quòd etiam à puncto debuit excludere partes ſecundùm longitudinem, & quia erat in linea, & pertinebat ad quid ipſius; cùm eſſet eius vltimus terminus; hinc, etiam debuere ab eo excludi partes penes latitudinem; & quoniam linea, quid erat ſuperficiei, vtpote terminus ipſius; hinc & à linea, & ideo etiam à puncto debuit excludere partes penes profunditatem. Ideoque punctum precisè ſumptum, vt terminus lineę debuit excludere partes, & penes longitunem, & latitudinem, & profunditatem. Vnde benè definitum eſt *cuius pars nulla*; non quidem à parte rei; ſed prout ſubſtat noſtris conceptibus negatiuis explicitis & inadęquatis; cùm punctum, etiam prout eſt in intellectu; ſed adęquatè conceptum partes obtineat.

DEFINITIO IV.

Lineæ autem termini ſunt puncta.

Non quod omnis linea terminos conſequatur, cum multæ redeant in ſemetipſas, vt *Circularis, Elliptica, Orbicularis*. Sed quia omnis linea, quę terminos conſequitur puncta vice terminorum recognoſcat; & quod omne punctum, vt terminus alicuius lineę concipiēdum ſit; cùm ſe ſolùm, vt quantitas concipi nequeat ea ratione, quòd nullam ſine linea partem obtineat: Ex partibus autem, vt dictum eſt, quantitas eſſentialiter conſtat.

DEFINITIO V.

REcta linea eſt, quæ ex æquo ſuis interiacet punctis.

Ideſt, vt exponit Proclus, *quod quanta ſit punctorum alterius ab altero diſtantia, tanta ſit rectæ lineæ, quæ ab ipſis terminatur magnitudo; atque hoc eſt ex æquo inter ſua puncta collocari.* Quare linea recta eſt breuiſſima, quę de puncto ad punctum duci queat, vt patet in 1. figura. Siquidem punctata eſt maior, quàm continuata linea, quæ inter A, & C, puncta mediant.

Regulæ verò alicuius, aut cupreę, aut ligneæ; quę deſeruit ad ducendas rectas lineas examen eſt: Si eā adhibitā ducatur linea A B ab A in B puncta. Deinde inuertatur, vt regulę ſuperior ſuperficies ſit inferior relinquendo extrema ipſius ad eas partes, ad quas erant, dextrum ad dextram, ſiniſtrum ad ſiniſtram, & ducatur alia linea, de puncto A ad punctum B, nam ſi per primam lineam incedit optima eſt, ſi verò non incedit falſa. Ratio eſt; quia linea recta eadem extrema conſequens, ſpatium non occupat, vt infrà in

DEFINITIO VI.

TErmini ſuperficierum ſunt lineæ.

Superficierum, & linearum terminantium exempla Proclus aſſignat, *vmbras*, quę cùm priuationes ſint, & nihil conſequenter altitudinis habeant, latitudinem tamen, & longitudinem poſſideāt lineiſque terminantibus circumſcribātur. Illud namque, in quo vmbra finit, lux incipit, quod equidem indiuiſibile eſt: niſi, pœnumbra obliteretur, linea eſt, vmbroſam ſuperficiem terminis definiens.

DEFINITIO VII.

SVperficies plana eſt ea, quæ ex æquo ſuas interiacet lineas.

Scilicet, quæ ad inſtar alicuius ſpeculi, nihil anfractuoſum, impollitum, aut montuoſum, rugoſumue continet. Eſtque ſuperficies breuiſſima; quæ de linea ad aliam lineam, duci queat. Et ſi ſuper eam ducantur rectę, omnes ſecundùm omnem ſuam ſuperficiem; ſubiectum tangent; Vnde modus experiundi ſuperficiem, eſt regulam exactiſſimam illi multimodè, & penes diuerſos ſitus applicare.

DEFINITIO VIII.

PLanus angulus eſt duarum linearum in plano ſe mutuò tangentium alterius ad alteram inclinatio.

Angulus planus, qui fiēā lineis rectis hic ſpecialiter definit ab Euclides: Quamuis, & angulos curuilineos comprehendat, qui eodem plano iacent. Licet enim multæ lineę curuę ad ſeſe perpetuo fluxu inclinent, vt circularis, Elliptica, Spiralis, & tamen angulum non conſtituant. Nihilominus, & ipſę angulum efficient, vel ad aliam curuam, vel ad rectam inclinatę, quę ſequellam ſuę inclinationis, & normam non imitetur, vt vides figura 3. & 4. & 5. At duę circulorum portiones A B, & B C ductę duobus centris E, & D angulum non conſtituunt, quia licet diuerſo centro ducantur, altera tamen alterius ductum ſuauiter ſequitur, & inclinationem emollit. Sicut enim rectę à rectitudine deflectentes angulum conſtituunt: Sic quoque curuę ſuam inclinationem, & ductum non continuantes angulum conſtituent.

Nota verò; quòd in angulo duo poſſunt conſiderari, & ipſa linearum inclinatio, & ſpatium, quod inter lineas rectas ab illā inclinatione relinquitur. Euclides verò non loquitur de ſpatio; ſed de ipſa inclinatione. Vnde frigidum eſt illud aliquorum paradoxum; Lineas mutuò inclinatas udos angulos conſtituere, licet enim duo ſpatia relinquant, nempe A B E C extimum, & A E C intimum; adhuc tamen vna eſt inclinatio. Quare & vnus angulus, qui relinquit ſpatium exteriùs A B C E vtcumque terminandum, & non vnicā rectā, & internum A E C, quod ductā lineā rectā à puncto A ad C terminari poteſt, & hoc ſpatium eſt propriè, anguli, qui circumferentiā A C metitur facto centro in E vertice inclinationis; Itaut malor ille angulus dicatur, qui habere poteſt æqualis circuli interpoſitam maiorem circumferentiam inter crura A E, & E G; minor verò; qui minorem inter ſua crura complectitur Peripheriam.

DEFINITIO IX.

CVm autem, quæ angulum conſtituunt lineæ rectæ, fuerint; rectilineus ille angulus appellatur.

Patet definitionem octauam de angulis rectilineis præcipuè loqui: quia tantùm hanc rectilineorum ponit definitionem. Sunt autem plures formæ angulorum rectilineorum. & mixtorum, de quibus hic ſuperfluè loqueremur. Tantummodò genericè aduerte. Mixtos eos eſſe, qui curuâ, & rectâ continentur, vt in figura 4. Curuilineos autem duobus curuis, vt in 5. figura videre eſt.

DEFINITIO X.

CVm autem recta linea ſuper rectam inſiſtens lineam angulos facit deinceps æquales, rectus eſt vterque æqualium angulorum; & quæ inſiſtit, recta linea perpendicularis vocatur ei, cui inſiſtit.

Anguli deinceps ſunt illi, qui ab eadem linea vltra contactum productâ, & ab altera inclinatâ ſunt ad idem punctum: Sic apud 6. figuram angulus BAD, & angulus DAC ad idem punctum A effecti, anguli deinceps vocitantur. Si ergo, in ipſa 6. figura, in puncto 6. recta A 6. cadat, & angulum A 6 B, & alterum B 6 A, qui ſunt anguli deinceps, æquales fecerit; itaut 6 A non magis inclinet in hanc, aut alteram partem, anguli illi recti dicuntur.

DEFINITIO XI.

OBtuſus angulus eſt, qui recto maior eſt.

DEFINITIO XII.

ACutus *verò, qui minor eſt recto.*

Acutus itaque angulus erit E 6 B; quia minor recto eſt B 6 A. At verò C 6 E recto maior erit. Anguli autem apud Mathematicos tribus literis deſignantur, & media litera ſemper ſignificat illud punctum, ad quod fit inclinatio, & ipſum angulum denotat.

DEFINITIO XIII.

TErminus *eſt alicuius rei extremum.*

Vnde ſunt tres termini quantitatis, Punctum, Linea, Superficies; quia eam ſecundum tres rationes terminant.

DEFINITIO XIV.

FIgura *eſt, quæ ſub vno, vel pluribus terminis comprehenditur.*

Igitur, nec punctum, nec angulus figura eſt; quia terminata non ſunt ſuis terminis. Angulus enim licet ſi clauſus duobus terminis; non tamen vndique: Cùm ab ea parte, quâ lineæ patent, licet poſſit terminari, vel rectâ, vel curuâ, & fieri triangulum; non tamen de ſua eſſentia, & ſecundùm eſſe præciſum angulus id conſequitur. Punctum verò ſecundum rationem puncti terminus omnigener eſt, cum nullam partem amplectatur: Quaderè, nec plures terminos, aut ambitum conſequi poterit hinc, & inde clauderem: alioquin in partes diſtingueretur. Sic nec quantitas infinita; etiam ſi aliquibus terminis clauderetur; ſi tamen ab aliquâ parte in infinitum pateret, figuræ appellationem mereretur; quia terminis vndiquè non comprehenderetur.

DEFINITIO XV.

CIrculus *eſt figura plana ſub vna linea comprehenſa, quæ* Peripheria *appellatur; ad quam, ab vno puncto eorum, quæ intra figuram ſunt, omnes rectæ lineæ terminantes æquales ſunt.*

Si in figura 7. omnes rectæ à puncto A in peripheriam terminantes, vt AB, & AC, AE, & AI ſint æquales, ille vocatur *Circulus*. Poteſt etiam hoc pacto definiri. *Circulus eſt figura plana, quæ deſcribitur à linea finita altero manente extremorum, alio ſe mouente; donec perueniat, ad idem punctum, à quo diſceſſit motus.* Sic ſi linea AB manente A moueatur, donec alterum extremum B ſe mouens perueniat ad punctum idem B, à quo incepit motus, circulum deſcribet. Differunt autem iſtæ definitiones, quòd hæc cauſam efficientem explicet, illa formalem. Geminus apud Proclum vocat lineam circularem compoſitam; nempe refractam, & in ſeſe inclinatam, & angulatam, & Ariſt. 1. de Cœlo inquit. Circulum infinitis angulis conſtare, quod intelligendum eſt, non à parte rei; quaſi quod circulus materialis infinitis angulis plicaretur, cùm, nec quidem infinitas partes conſequatur: Sed quod ex ſuo conceptu debeat vna pars concipi inclinata ad aliã. Cùmq; in quantitate partes quidem in infinitum conceptibiles ſint; licet non factibiles; hinc eſt, quòd infiniti anguli in circulo concipiendi ſint; nempe quælibet pars, quæ concipiatur, ſi vt circuli concipiatur, oportet concipi, ad aliam inclinata; interiùs minor, exteriùs maior.

DEFINITIO XVI.

HOc *verò punctum* Centrum *circuli appellatur.*

Itaque nullum aliud punctum *Centrum*; niſi circuli dici poteſt, eo quod debeat eſſe in circuli plani medio. Benè autem *Centrum* circuli dicitur punctum, licet enim nullas concludat partes; omnes tamen lineas, quæ à circumferenti ducuntur terminat. Quod nec lineæ ſecundum, id iuxtà quod in punctum feruntur, partes obtineant; nimirum latitudinem, & hoc Methaphyſicè, & abſtractè, cum fundamento tamen in re, ſcilicet in ipſa diuiſione circuli in ſectores, vt eſt ſector I AE, cùm enim diuiſiones ſpatium non occupent in latitudinem, mente conceptæ; nec illud, quod terminat iſtas diuiſiones, partes habebit in latitudinem. Sed neque in longitudinem: cùm lineæ terminus ſit. Verùm materialiter, & in ipſa quantitate punctum propriè non eſt, nec indiuiſibile, cùm nulla pars in quantitate ipſa indiuiſibilis ſit; vt ſupra dictum eſt.

DEFINITIO XVII.

DIameter *autem Circuli eſt recta quædam linea per centrum ducta, & ſuis extremis in peripheriam terminans; quæ circulum bifariã ſecat.*

Tales ſunt in fig. 7. lineæ IC, & EV; Tranſeunt enim per centrũ A, & in peripheriã ſiniunt ſuis extremis I, & C, ſicut etiam E, & V; circulumque bifariam ſecant; quia per punctum medium tranſeunt, nempe per centrum. Quamobrem, ſi ſuperficies circuli plicaretur, in punctis, EV, congrueret pars circuli EBV parti EDV; cùm AB ſit æqualis lineæ AD.

DEFINITIO XVIII.

SEmicirculus eſt figura, quæ continetur ſub diametro, & ſub dimidio peripheriæ.

Talis eſt *ſemicirculus* EDV, qui continetur ſub peripheria EDV, & ſub diametro EV.

Porrò ſegmentum circuli erit illud, quod ſub peripheriæ portione, & linea, quæ diameter non ſit, continetur. Sunt autem compoſitæ figuræ, & mixtæ ex curua, & recta linea; angulúſque tũ ſegmenti, tum ſemicirculi mixtus eſt, curua, rectaque comprehenſus, vt AED.

DEFINITIO XIX.

REctilineæ *figuræ ſunt, quæ ſub rectis lineis continentur.*

Genus explicat Rectilinearum figurarum. Non autem earum, quę vnica linea contineantur. Quod in iſtis libris agat quidem de pluribus figuris rectilineis; de ſolo autem circulo ſermonem ſit facturus. Quapropter non fuit neceſse explicare genus figurarum vnico ambitu comprehenſarum. Verùm poſſent ſic definiri *figuræ orbiculares vnica linea clauſæ, quæ in ſeſe regreditur.* Figuræ verò plurium laterum; ſed curuorum definirentur, *quæ flexis lineis continentur.* Mixtę autem, *quæ ſub curuis, & rectis claudantur.*

DEFINITIO XX.

TRilineæ *figura ſunt, quæ ſub tribus lineis continentur.*

DEFINITIO XXI.

QVadrilateræ, *quæ ſub quatuor.*

DEFINITIO XXII.

MVltilateræ, *quæ ſub pluribus, quam quatuor rectilineis comprehenduntur.*

Quoniam ſpecies figurarum rectilinearum deſumptę à multitudine laterum in infinitũ progrediuntur. Ideò omnes alias generali definitione complectitur. Attamen explicauit trilateras, & quadrilateras; quòd de iſtis hoc primo libro tractet, quę & omnibus alijs fundamenta præbent, & propriè ad Elementa pertinent; cùm omnis figura rectilinea plana, vt videbimus, in triangula reſoluatur.

DEFINITIO XXIII.

TRilaterarum *autem figurarum, Æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.*

DEFINITIO XXIV.

ISoſceles *autem, quod duo latera æqualia tantummodò tenet.*

DEFINITIO XXV.

SCalenum *autem, quòd tria inæqualia habet latera.*

Nam, cùm triangulum tribus lateribus claudatur; in tres etiam ſpecies diuiditur. Si etenim omnia latera ſint æqualia, conſtituitur *Æquilaterum*, vt fig. 8. Si duo tantùm *Iſoſceles*, vt 10. fig. & 11. Si omnia inæqualia, vt fig. 9. *Scalenon* conſtituitur.

DEFINITIO XXVI.

AD *hæc etiam trilaterarum figurarum*, rectangulum *quidem triangulum eſt, quod rectum angulum habet.*

Vt fig. 10. vel 11. Hęc autem ſecundã triangulorum diuiſio non eſt ſubordinata primæ; ſed æquâ vniuerſalitate patet, nec ei vllo pacto adnexa. Nam vt benè aduertit Proclus ad hanc definitionem poſſunt pertinere figuræ laterum quatuor, quæ tamen tres angulos ſolùm obtineant, vt triangula Cilogonia, & Accidoidea cuſpidi ſagittæ ſimilia, vt fig. 12. quæ tamen tres tantùm angulos obtinent. Deinde triangulum rectum angulum habens poteſt eſſe, & Iſoſceles, & Scalenum, non autem æquilaterum. Vnde patet hanc triangulorum diſtinctionem à primâ non pendere. Licet magnitudo angulorum à lateribus quaſdam inſignes obtineat dependentias; vt videbimus.

DEFINITIO XXVII.

AMblygonium *autem, quod obtuſum angulum habet.*

Veluti fig. 12. apud circulum. Quod etiam poteſt eſſe Scalenum, & Iſoſcelum.

DEFINITIO XXVIII.

OXigonium *autem, quod tres habet acutos angulos.*

Velut fig. 8. Quod etiam poteſt eſſe Scalenum, Iſoſceles, & Æquilaterum. Eò quod in omni triangulo tres quidem poſſint eſſe acuti anguli; ſed rectus, & obtuſus ſolùm vnus eſſe poteſt. Quamobrem reliqui duo neceſſariò acuti erũt. Qui ſi erunt æquales, triangula quoque, duo latera æqualia obtinebunt; ſi inæquales inuicem, duo latera quoque ſubtenta erunt inæqualia, & ſemper latus tertium angulo obtuſo, vel recto ſubtenſum malus, ob angulum maiorẽ reliquis, quem ſubtendit.

Oxigonium, cum tribus acutis angulis potiatur latera poteſt conſequi omnia inæqualia, vel duo, vel tria æqualia, & ſic eſſe Æquilaterum, Iſoſcelum, & Scalenum. Nam dari poteſt triangulum, vt cum Barocio aduertit Clauius ad propoſ. 15. lib. 4. Elemen. Oxigonium, quod latus habeat, tum hoc, tum altero crure ſeorſim ſumpto malus; etiam ſi crura reliqua inulcem ſint æqualia.

DEFINITIO XXIX.

QVadrilaterarum *figurarum* quadratum *eſt, quod æquilaterum, & rectangulum eſt.*

DEFINITIO XXX.

ALtera *parte longior figura eſt, quæ æquiangula quidem eſt, & non æquilatera.*

DEFINITIO XXXI.

RHombus, *quæ æquilatera, at æquiangula non est.*

DEFINITIO XXXII.

RHomboides, *quæ oppositа, & latera, & anguloς æqualia tantùm habet. Non omnia.*

DEFINITIO XXXIII.

RElignæ verò ab his quadrilatera Trapezia vocentur.

In istis Definitionibus illud aduerte. Quòd ab altera parte longiori, qualis est fig. 13. differt quadrata 2. non in angulis: sed in lateribus tantùm: Rhombo verò fig. 14. expresso in angulis; at non in lateribus: A Rhomboide fig. 16. signato in angulis simul, & in lateribus; sicut & à Trapezio, fig. 15. designato.

DEFINITIO XXXIV.

PArallelæ rectæ lineæ sunt, quæ, cùm in eodem sint plano, ab vtraque parte; etiam si in infinitum producantur, in neutram partem sibi mutuò incidũt.

Tales sunt in fig. 17. Parallelæ AB, & CD. Quare duas conditiones essentiales requirit Euclides; vt lineæ parallelæ, idest æquidistantes sint; Prima, quòd sint in eodem plano, alioquin in diuersis certum est non conuenire. Secunda quòd numquam coeant, licet in infinitum producerentur. Quod licet nequeat cognosci experimento, cognoscitur tamen animo, & ratione. Quòd, cùm distantia inuicem non sit imminuta, dùm procedunt vsque ad certum spatiũ atque terminum; nec vmquam imminuetur, cum par sit ratio de illo processu ad quamcumque distantiam: neque dicas, posse illam quidem distantiam esse imminutam; sed non sensibiliter: nam non loquimur de lineis sensibilibus; sed abstractis, & animo conceptis, in quas, vt supra diximus Mathematica, velut in suum obiectum fertur.

Definitiones, quę sequuntur Euclidis non sunt. Ab authoribus tamen adduntur, vt necessarię ad ea, quę primo libro traduntur, percipienda.

DEFINITIO XXXV.

PArallelogrammum *est figura quadrilatera parallelis oppositis lateribus.*

Sic fig. 13. 14. 16. 2. Parallelogramma sunt; estque nomen genericum conueniens quadrato, Rhomboidi Rhombo, & altera parte longiori, sed non Trapezio.

DEFINITIO XXXVI.

DIameter *in parallelogrammo est linea; quæ diuidit angulos oppositos, & latera bifariam.*

Hoc aduertit Archim. lib. 15. Probl. 1 & 2. Cur diameter appelletur, quę de angulo ad angulum ducta fit, vt AB, & non quęlibet alia bifariam figuram diuidens, & reddit rationem, quia diuidit bifariam non solùm latera, ita vt duo remaneant hinc, duo indè; sed etiam angulos, quod nullę alię rectę in parallelogrammis ductę efficiunt.

DEFINITIO XXXVII.

SI *parallelæ in parallelogrammo ducantur per idẽ diametri punctum, partes, per quas transit diameter, circa diametrum; per quas verò non transit, complementa dicuntur.*

Sic ductis parallelis AB, & CD per idem punctum 1, nigra, per quę diameter non transit, Parallelogramma *Complementa*; & alba, per quę transit, vocantur, *circa diametrum*, consistentia.

POSTVLATA.

1 POstuletur. *Vt à quouis puncto ad quoduis punctum linea recta duci concedatur.*
2 *Lineam rectam terminatam in continuum rectã producere.*
3 *Quouis centro, & interuallo circulum describere.*
4 *Omni magnitudine data posse sumi maiorem.*

PRIMA PRINCIPIA.

QVæ etiam solent dici *Dignitates, Axiomata, Pronuntiata, Effata, communes Notiones*; Alia omninò prima, quę adeo sunt clara, vt primo conceptu indubitata euadant; Alia non item; sed quasi immediatæ primorum principiorum conclusiones. Primi generis sunt.

PRINCIPIVM I.

Quæ eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia, & quod vni æqualium maius est; maius etiam alio necesse est esse, & si minus vno similiter minus altero. Et si vnum æqualium est maius magnitudine quapiam, aut minus, alterum quoq; æqualium ea magnitudine maius est, aut minus.

PRINCIPIVM II.

ET si æqualibus æqualia adiecta fuerint, tota erunt æqualia; Et, si ab æqualibus æqualia ablata fuerint, tota erunt æqualia.

PRINCIPIVM III.

ET si inæqualibus æqualia adiecta fuerint, remanent, vt prius inæqualia, & si ijsdem inæqualia inæqualia quoq; addantur; sed maius maiori, minus minori, adhuc sũt inæqualia; Et, si ab inæqualibus æqualia ablata fuerint manent, vt prius inæqualia. Quòd si ab ijsdem inæqualia ablata sint maius maiori, minus minori remanent inæqualia.

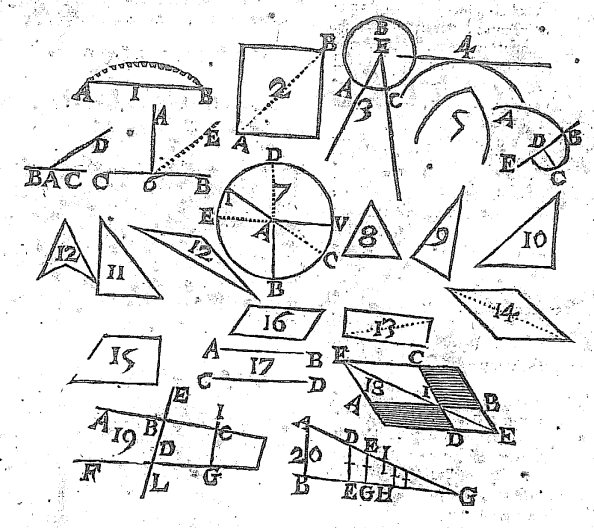
PRINCIPIVM IV.

ET quæ eiusdem dupliciа sunt, inter se sunt æqualia, & quod vni æqualium duplum est, duplum etiam est alteri. Et, quæ eiusdem sunt dimidia, inter se sunt æqualia; Et, quæ sunt æqualia, eiusdem dupli, sunt dimidia.

PRINCIPIVM V.

ET, quæ mutuò sibi congruunt, inter se sunt æqualia: Nimirum quando vnum alterum nulla parte excedit.

PRIN-



PRINCIPIVM VI.

TOtum sua parte maius est.

Quibus auctores addidere sequentia.

PRINCIPIVM VII.

OMne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis.

Si æqualibus inæqualia adijciantur, erit totorum excessus adiunctorum excessui æqualis; & si ijsdem inæqualibus æqualia addantur erunt adhuc excessus totorum, & adiunctorum æquales. Sic si è contrario æqualibus inequalia demantur, aut inæqualibus æqualia essent totorum excessus, & adiunctorum æquales.

V. G. si duobus palmis addantur, hinc tres quartæ palmi, inde palmus, differentia erit horum compositorum vnius quartæ palmi, vt differebant priùs tres quartæ palmi à palmo, antequam adderentur. Et si tribus quartis palmi palmus, & palmo palmus addatur quantitates additæ different vna quarta palmi; vt differebant priùs tres quartæ, & palmus antequam vnus palmus singulis adderetur: quod est dicendum pariter de ablatione.

Principia, quę minus clara sunt, & ideo ostendi possunt.

PRINCIPIVM VIII.

DVæ lineæ rectæ non habent vnum & idem segmentum commune.

Idest. Nequeunt reperiri duæ lineę quarum vna pars sit eadem cum altera, ita vt eandem lineam integret: Reliqua verò sit ab illa remota, V. g. in fig. 7. Quod IAV sit vna recta, IAC sit altera recta, quę consequantur eamdem partem IA, & in ipsa idem sint; Reliqua verò in duas partes abeat. Si enim hoc esse posset, vt ostendit Proclus, IDV esset semicirculus; quia linea, quę supponitur recta BAV, transiret per centrũ; vnde pars circuli IADV ab ipsa, & à peripheria conclusa esset semicirculus, & ideo æqualis IACDV semicirculo, quod esse nequit.

PRINCIPIVM IX.

DVæ lineæ ad idem punctum concurrentes, si producantur, se mutuò secant.

Sic AC, & AB in fig. 7. quæ ad Idem punctum A concurrunt productę in D, & 1 se mutuò secant. Id autem potest ostendi. Nam si se non secant, congruunt (Si enim producantur vtique retrò non redibunt) & IA erit idem segmentum, ac BD, & idem erit cum ipsa, quod est contrà præcedens pronunciatum.

PRINCIPIVM X.

DVæ lineæ rectæ in eadem puncta concurrentes spatium non comprehendunt.

Sic in prima figura. Si à puncto A, in B alia linea recta ducatur, cadet in lineam primo factam, & per eam ductus ipsius lineę incedet, nec inter eas spatium mediabit, vt mediat inter punctatam, & rectam AB.

PRINCIPIVM XI.

OMnes anguli recti sunt æquales.

Quoniam, si essent inæquales alter esset maior recto, vel minor, & sic esset acutus, vel obtusus; quod esse nequit, cùm esset rectus, vt supponitur; non rectus autem, quia minor altero recto. Et sic rectus, & non rectus.

PRINCIPIVM XII.

SI duas alias lineas alia secans, angulos intra ipsas, & versus eandem partem, minores duobus rectis

rectis fatiant; illæ lineæ tandem concurrent.

Quia est altera, ad alteram inclinata; vnde cùm non sint æquidistantes, necessariò tandem conuenient: Sic quia anguli in fig. 9. ad CBD, & CDB ad easdem partes, quas facit linea EL incidés, vel secans duas AC, & GF sunt minores duobus rectis; necessariò tandem concurrent, dummodo ducantur per partes semper æquales.

Ratio est. Quia si BC procedendo à B in C absumat aliquam partem distantiæ, V. g. sextam EI, quæ est eadem, ac illa, quæ est inter B, & D. Si producatur etiam per aliam partem æqualem; absumet rursus aliam partem æqualem sextam: Cumque partes æquales inter B, & D infinitè non sint. Ideo tandem omnes absumet, & sic perueniet ad aliam lineam FG. Dices; Dantur lineæ asymptotales, quæ ad rectam accedunt semper; nec vnquam eam assequuntur. Respondetur eas; aut esse flexas, & de istis non loquimur; aut esse rectas, & istæ non ducuntur per partes æquales, sed semper minores, & minores; Vnde est dispar ratio.

Nam. Sint duæ rectæ, vt in fig. 20. AC, & BC, sed tali modo ducantur. Producatur AD vsque ad D, & BE vsque ad E, & ducatur ED. Deinde medietas ED assumatur, & ad eam distantiam ducatur parallela CF, & postea producatur AD in F, & BE in G. Assumptaque rursus medietate GF, quæ est minor: quam ED ducatur alia parallela HI, & ad eam ducatur AD in I, & BE in H. Itaque Mathematici ostendunt, quòd lineæ de parallela in parallelam viciniorem ductæ, & semper in minores, minoresque distantias continuatæ quales sunt AD, DF, & FI; numquam esse perueniturras ad punctum C, in quo se coniungant. Eo quod spatium AC sit diuisibile in infinitum. Sed hoc est ducere lineas inuicem inclinatas per partes semper minores, & consequenter minori, minorique augmento eas prolungare, at non per partes æquales, & æquali additione eas continuare. Partes verò seipsis perpetuò minores saltem Methaphisicè Exp. 1. tract. 1. admisimus. Non autem æquales; quæ ipso sensu iudice infinitè in quantitate non reperiuntur.

EXPENSIO VII.

De Elementis in genere.

SVpra nomen Elementi, vimque explicauimus; modo de eius differentia, atque diuisione peragendum.

Elementares institutiones à varijs olim inuentas collegerunt antiquiùs aliqui Hypocrates, Chius. Leo discipulus Neoclidis, Theudius Magnes, Hermotinus Colophonius. Omnium autem Euclides præstãtissimus, qui, cùm longo tẽpore Alexandriæ docuisset, vt testatur Procl. l. 2. c. 4. *Multa construxit eorum, quæ ab Eudoxo multa verò perfecit eorum, quæ à Theæteto reperta fuerant, & ea præterea, quæ à prioribus molliore brachio ostensa fuerunt, ad ea redegit demonstrationes; quæ nec coargui, nec conuinci possunt.* Vnde etiam Ramus lib. 3. Scho. Math. testatur. *Nullus paralogismus nullæ Pseudographiæ in libris Elementis Euclidis nobis, quamquam seuerè inquirentibus animaduerti potuit.* Nec solùm Elementa, sed multas alias insignes lucubrationes edidit quarum, quæ ad nos peruenerunt, sunt Optica, Catoptrica, Musicæ elementares institutiones, Phænomena Datorum liber, & insuper, quas, non habemus, operas liber de diuisionibus, & Conicis: vnde insignem in Geometricis consecutus est, & primam laudem.

CONCL. I. PROPOS. VI.

Elementa in duplici ordine sunt, alia subalternata, alia subalternantia.

PAtet, quia aliqua dependent à primis, & suppositis illis probantur; Ergo aliqua sunt subalternantia, idest, quæ alijs prima principia præbent, alia dependentia, ab illisque principia mutuant, & ex eis euidentiam adipiscuntur. Vnde propriè, & verè Elementa non sunt. Hæc verò sunt, quæ II, & sequentibus libris explicantur; maximè quia non adeò vniuersalia sunt; sed ad certas figuras, nempe solidas tales, aut tales restringuntur.

CONCLVS. II. PROPOS. VII.

Ordo Elementorum decem libris comprehensorum talis est; Primò agitur de proportione; Secundò de proportionum similitudine; Tertiò de quantitatis Discretæ, & Continuæ comparatione.

PRob. Quia primis 4. libris ostendit figurarum, aut partium in ipsis factarum proportionem, & aut æquales, aut maiores, aut minores probat. Primo quidem lineas triangula parallelogrãma quo ad se, Secundo lineas quoad earum potentiam, Tertio circulos, Quarto alias figuras planas explicans. Libro verò 5. agit de proportionum similitudine in genere, Sexto de proportionum similitudine in quantitate continua, Septimo, Octauo, & Nono de proportionum similitudine in numeris. Decimò comparat quantitatem Discretam, & Continuam, & earum proportiones componit, aliasq; conuenire cum proportionibus numerorum. alias non conuenire affirmat, & ideò numeris inexprimibiles, & Irrationales asserit, &, quamuis passim agat de effectione figurarum, vt cũ agit de constituendo triãgulo æquilatero, & quadrato, &c. Attamen in ipsa probatione ostenditur, earum partium adinuicem æqualitas, vel quod vna altera sit, vel mãior, vel minor. Vnde semper agit de proportione corporum, vel eorum partium adinuicem. Non agit verò de proportione numerorum, quia in ipsa prolatione numeri statim agnoscitur, an numerus sit maior, aut minor, aut æqualis. Vnde superfluum erat de hac re demonstrationem extruere. Agit itaque de proportiõne in genere, 1. 2. 3. & 4. libro. De proportione verò in specie, eam comparando alteri proportioni, ideoq; de proportionum similitudine 5. 6. 7. 8. & 9. libro, & tandem 10. de quantitatis Continuæ, & Discretæ comparatione.

TRACTATVS IV.

In primum Librum Elementorum.



LIBER primus Elementorum agit præcipuè de lineis inter se comparatis, quoad situm, æqualitatemque, & de triangulis duplici modo, primò item in se, comparando latera angulis, quibus subsunt. Secundò etiam respectu aliorum triangulorum, ostendendo quænam sint æqualia, quæ verò non. Tandem agit de quadratis, & parallelogrammis versus finem. Agit autem duplici modo quædam speculatiuè tantùm, & Theoricè, quædam verò Problematicè, & in ordine ad operationem. Ordo verò confusus est; non quidem, quoad rerum dependentiam, cùm aptissimè in hoc procedat; sed quoad materiarum diuersitatem. Siquidem primo agit de triangulo, inde de lineis; rursus reddit ad triangula, &c. Nos verò hunc ordinem ausi sumus paululùm immutare; vt etiam secundus ordo seruaretur in ipsis rebus tractandis. Et quia modo nominantur latera, modo anguli, angulos nigro, alboque, vel sub nigro distinximus; at lineas literis notauimus, vt magis perspicua esset demonstratio, & literarum ferè eadem repetitio intellectum legentium non confunderet. Sicca verò, & nuda ponimus Elementa, quòd & ipse Euclides ita faciendum duxit, vt testatur Proclus lib. 2. cap. 5. *Præcipuè verò circa Geometricam Elementorum institutionem eum,* nempe Euclidem, *quispiam admirabitur, propter ordinem, & electionẽ eorũ, quæ per Elementa distribuit; etenim non ea assumpsit omnia, quæ poterat dicere;* sed ea dumtaxat, *quæ Elementi potuit ordine tradere.* Vnde puto grauia per se, & difficilia primo ingressu esse Elementa; vt contra ius faciat, & æquitatem, illum, qui insuper ad augendam fascem, aliena vocet in Elementa, & ex alijs principijs dependentia, & ideò obscurissima, & altioris ordinis, vt tenebras offundat clarissimis, proponat. Satiùsque existimaui sobriè me agere, & necessaria solùm proponere consulens simul, & breuitati, & claritati.

EXPENSIO I.

De Triangulis constituendis.

CVm Triangulum prima figurarum sit, & quædam etiam inter lineas exerceri nequãt sine eorum consideratione, & effectione, ideò primus limes in triangula ingreditur.

PROB. I. PROPOS. I.

Super data linea terminata Triangulum æquilaterum constituere.

SIt linea BA finita, super quam triangulum æquilaterum sit constituendum.

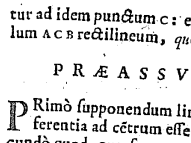
Centro B trahatur circulus interuallo AB vt in postulatis concessum. Iterumque centro A eodem interuallo AB alius circulus describatur.

Se intersecabunt in C; Trahatur igitur ad illud punctum intersectionis C à puncto B linea recta CB, & item à puncto A alia recta AB ducatur ad idem punctum C: eritque factum triangulum ACB rectilineum, *quod dico esse æquilaterum.*

PRÆASSVMPTVM.

PRimò supponendum lineas tractas à circumferentia ad cẽtrum esse æquales ex dictis. Secundò quod, quæ sunt æqualia alicui tertiæ rectæ, esse lineas æquales inuicem ex 1. pronunc.

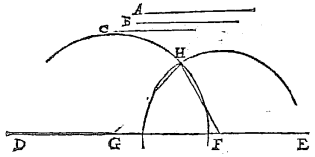
Prob. Linea CB est æqualis lineæ BA; vt ductæ à centro B ad punctum circumferentiæ A, & C. Linea quoq; altera AC est æqualis eidem AB, ob eandem rationem, quod ductæ sint à centro A ad puncta circũferentiæ C, & B; Ergo cùm lineæ tertiæ AB, duo crura AC, & CB sint æqualia, erunt & inuicem æqualia.



PROB. II. PROPOS. II. Euc. 22.

Datis tribus partibus in vna recta, quarum duæ simul sumptæ reliquâ mediâ sint maiores, constituere triangulum habens crura illis æqualia.

SVnt datæ in recta D E partes D G, & G F, & E F æquales, si ita placuerit, singulæ singulis A, C, B. Debeatque triangulum constitui, cuius crura dictis partibus sint æqualia.



Facto centro in F circulus ducatur interuallo F E. Iterumque facto centro in G interuallo D G circulus ducatur, qui se intersecabunt in H. Ductis igitur ad H rectis G H, & F H *erit factum triangul m* G H F. *Cuius basis est* G F *vna pars, linea* G H *æqualis* G D *alteri parti, &* F H *tertiæ parti* F E.

Probatur; quia sunt duæ D G, & G H æquales, vtpote radij eiusdem circuli ducti centro G. Sic quoque duæ F H, & F E sunt æquales, vtpote radij eiusdem circuli ducti centro F; Tertia autem G F eadem, quæ priùs. Ergo crura huius trianguli G F H, tribus partibus lineæ D G, & G F, & F E sunt æquales.

Quòd autem circuli se debeant intersecare; patet ex conditione, quam posuimus in propositione; quòd duæ D G, & F E reliquâ mediâ sint maiores simul sumptæ; quia sic circulus F H, & G H in linea G F vnus, vbi alter est, secundùm aliquam sui partem cadet: Vnde necessariò deuenti ad H, dum alter exit ab altero, se intersecabit.

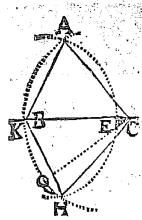
PROB. III. PROPOS. III.

* *Dato triangulo, ei triangulum æquale ad datam partem constituere.*

A Bantecedenti Propos. emergit, quod dato triangulo A B C possit fieri aliud triangulũ B H C super eãdem basim B C alteri æquale. Interuallo B A describatur circulus, & interuallo C A describatur rursùs circulus; vbi ergo se intersecant in H à punctis B, & C ducantur rectæ B H, & H C, *Et erit factum triangulum* B H A *æquale triangulo* B A C.

Probatur latera enim sunt æqualia; Nam B A crus, & B H crus sunt eiusdem A E H radij; Ergo æqualia: Sic & A C, & C H crura sunt eiusdem circuli A K H radij; Ergo æqualia. Crus verò B C commune.

Anguli autem singuli, angulis erunt æquales; Nam si aliquis est inæqualis; Sit V.g. B C H, qui sit maior: ita vt B C Q niger dicatur angulo B C A æqualis. Et tamen latera sint lateribus, singula singulis trianguli B A C æqualia; Ergo B Q crus



erit æquale B A: sed B A est æquale cruri B H; Ergo etiam B Q crus esset inæquale cruri B H, minus maiori; quod esse nequit. Ergo omnes quoque anguli erunt æquales: Cùm idem argumentum sit de reliquis, quòd verò possimus ducere circulũ interuallo dato, & centro V. g. C: hoc postulauit Eucl. & fecit in prima Propos. Nã in ducendo posteriori crure æquilateri trianguli interuallum assumpsit idem, quòd priùs facto alibi centro.

COROLLARIVM.

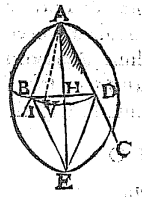
HInc est vniuersaliter, quòd si detur triangulum habens duo crura inuixa eidem basi. V.g. B C vel æquali, & crus vnum vni, alterum alteri sit æquale, quòd & triangula singulis angulis insistentibus, ijsdem lateribus æqualibus erunt æqualia: Sic anguli ad C erunt æquales; quia æqualibus B H, & B A cruribus insunt, vel insistũt.

PROB. IV. PROPOS. IV.

Datum angulum, & basim, æquicrurumque triangulum bifariam secare.

* SIt datus angulus I A C, qui in duo secãdus sit centro A interuallo I bitum A B ducatur circulus B V D, & secet crus A C in D, & recta ducatur B D. Facto deinde centro in D interuallo D A ducatur circulus, & idẽ fiat in B interuallo B A. Et à puncto, in quo se intersecãt in E, ducantur rectæ B E, & D E. A puncto deinde A, ad E ex post. 1. ducatur A E. Dico *angulum apud* A *esse medium factum, medietatemque nigri albæ esse æqualem.*

Probatur. Quia A D, & B A, vtpote eiusdem circuli radij sunt æquales; & B E est linea æqualis lineæ B A ob eandem rationem; nec non E D, ipsi A D. Ergo etiã erunt, vt illa A D, & B A, inter se æqualia hæc postrema crura B E, & E D. Ergo triãgulum A D E super eandem basim A E, ex præced. erit æquale triangulo E B A. Et sicut singula latera, singulis lateribus, sic & anguli singuli, singulis angulis; Quare angulus niger erit æqualis albo, apud A.



Dico secundo basim B D in duo sectam.

* Prob. Nam; si non est secta bifariam, erit pars altera, vel maior, vel minor. Sit, V.g. maior H B, quę, vt esset æqualis, deberet esse H V, & ducatur ab V linea V A.

Quæro, an V A sit æqualis A D, vel non? Si nó. Iam sumus extra præsuppositionem: Nam A D, & A B præsuponimus æqualia crura: Vtpote Isoscells. Si verò æquat V A crus A D. Iam habemus V A H triangulum æquis cruribus, singula singulis correspondentibus trianguli A H D, & basis communis: Ergo etiam anguli ex præced. erunt æquales. Quare angulus apud A inter V A, & A H erit æqualis angulo maiori H A D nigro, & consequenter albo sibi æquali B A H; pars toti, quòd esse nequit. *Quare basis* B H *non erit minor basi* H D, *sed æqualis.*

*Pro.

* Prob. 3. pars: Quòd etiam triangulum B A D nuper factum sit bifariam sectum. Nam cum omnia duo crura trianguli B A H, & H A D, vnum B A, vni A D, & aliud B H, alteri H D correspondenti sint æqualia, & basis H A cõmunis, erũt triãgula ipsa inter se æqualia, ex præced. B A H, & H A D.

EXPENSIO II.

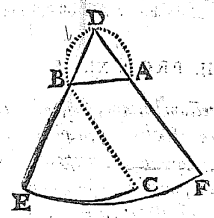
De lineis secandis.

LIcet lineæ circino secari possint, & æquales assumi, & inter postulata id potuisset connumerari; vt liceret lineam, ad placitam distantiam ducere. Id tamen noluit Euclides: Quia, vt aduertit Tartalea, poterat ostendi; & ipse voluit ostendere, quidquid ostendibile fuit.

PROB. I. PROP. V. Euc. 2.

A dato puncto datæ rectæ æqualem rectam ducere.

SIt linea data punctata B C, & datum punctum A. Oporteatque ab illo puncto A ducere rectam, quę sit æqualis datę punctatæ B C.



Coniungatur punctum extremum illius lineæ punctatæ, quę datur, cum puncto A dato, & sit linea coniungens A B. Superque eam constituatur triangulum equilaterum B D A: Deinde pũcto B, quod coniũctum est ad A, interuallo B E fiat circulus, & secet B D productum latus trianguli in E. Centro postea D vertice trianguli, interuallo prolungati lateris E D circulus describatur. Postea latus alterum D A prolungetur vsque ad hanc secundi circuli peripheriam E C F, nempe vsque ad F. *Et erit* A F *ea linea, quæ quæritur æqualis lineæ punctatæ* B C.

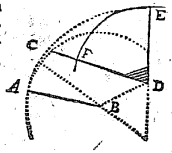
Probatur lineę D F, & D E sunt æquales, vtpote radij maioris circuli. Vnde demptis cruribus æquicruris trianguli D A, & D B, residuę portiones remanebunt æquales E B, & A F ex pronunc. 1. Sed etiam B E, & punctata B C; vtpote radij minoris circuli; sunt æquales. Ergo duę A F, & A C æquales tertię B E, inter se erunt æquales.

PROB. II. PROP. VI. Euc. 3.

Duabus datis lineis inæqualibus de maiori æqualem minori rectam lineam detrahere.

DEntur duæ rectæ A B minor, C D maior; Et iuxta præcedens Problema, vt punctatę lineæ, & circuli ostendunt à puncto D ducatur æqualis minori A B linea D E: Et ducatur cẽtro D interuallo D E circulus: qui secet D E in F. *Dico segmentum* D F *æquale esse lineæ* A B.

Probat. Quoniam sunt æquales vni tertiæ D E, linea A B ex effectione iuxta præcedens Problema, & F D segmentum, vtpote radius eiusdem circuli centro D ducti. Ergo etiam sunt inuicem æquales A B, & D E.

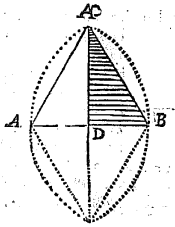


Patet itaque quod lineæ rectæ in tantum assumuntur æquales; quia sunt eiusdem circuli diametri, quod fortè intendit Euclides. Et ideò noluit id inter postulata exquirere, tanquam concedibile; cùm hãc proprietatem æqualium voluerit demonstrare; Quod scilicet potentiâ sint eiusdem circuli semidiametri.

PROB. III. PROP. VII. Euc. 10.

Datam rectam lineam finitam bifariam secare.

SIt linea recta data A B; quæ non in infinitum extendatur; & quæ in duas partes æquales sit diuidenda. Super eam fiat triangulum æquilaterum. Ex prop. 1. A B C. Cuius angulus C bifariam ex prop. 4. diuidatur. *Dico lineam* A B *in duas partes æquales esse sectam.*



Probat. Quia in propos. illa 4. ostensum est segmentum D B basis A B æquale segmento A D eiusdem: Ergo in duas partes æquales secta est.

EXPENSIO III.

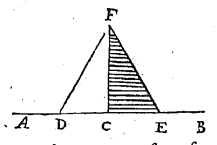
De linearum se tangentium situ.

QVo ad situm lineę considerate secũdùm se, non prout figuræ alicuius latera, inuicem referri possunt; quæ sunt in duplici differentia; aliæ parallellæ, quæ nunquam se tangunt, etiam in infinitum productæ; aliæ verò se tangunt, vel saltem productæ se tangunt, & de istis sermo in præsenti est.

PROB. I. PROP. VIII. Euc. 11.

Datâ rectâ lineâ à puncto in illa dato lineam rectam ad angulos rectos excitare.

REcta linea detur, quæ sit A B: & in ea punctum C, à quo linea perpendicularis, quæ def. 10. descripta est, sit educenda.



Electo puncto altero in ea, V.g. in E. Ex prop. 6. Portioni C E auferatur æqualis ad alteram partem C D; ita vt C sit pũctum medium. Et ex docum. propos. 1. super E D triangulum æqui-

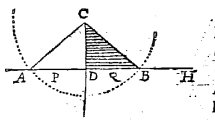
æquilaterum constituatur DEF. Et à puncto C ad F recta ducatur: *Hæc enim insistet super rectam datam* AB *perpendiculariter*.

Probatur crus CE, & DC sunt æqualia, & FE crus alteri FD; basis verò CF communis. Ergo totum triangulum nigrum toti albo triangulo erit æquale, etiam quoad angulos ex Coroll. prop. 3. Angulus itaque niger, est æqualis albo apud C existenti; Ideoque FC erit perpendicularis, ex defin. 10.

PROB. II. PROP. IX. Euc. 12.

Super datam rectam infinitam à dato puncto, quod in ea non sit, perpendicularem rectam ducere.

HAnc lineam indefinitam vult esse Eucl. quia, si esset nimis breuis posset euenire, circulum ad operationem necessarium ipsam non secare; vel quòd punctum, ita extra eam esset positum, vt ipsa prolungata in illud incideret, & sic circulus necessarius ad operationem, vt oportet, duobus punctis nõ secaret, vt si esset linea PQ, & punctum H: itaque.



In puncto dato C; quod in linea non est, fiat centrum electo radio, & interuallo tali, vt rectam datam AH secet in duobus punctis A, & B. Et ab illis ducantur ad punctum C duæ rectæ AC, & CB. Deinde ex propos. 8. ea diuidatur in duas partes æquales in D, & ducta CD. *Erit, quæ in propos. promittitur, ipsi* AB *perpendicularis*.

Probat. Nam trianguli nigri crus DB alterius triãguli albi cruri AD ex cõstructione est æquale, & item crus CB, cruri AC vtpote radij: Basis verò DC communis; Ergo totum triãgulũ nigrũ etiam quoad angulos toti albo est æquale. Vnde angulus niger ad D correspondẽti albo ad D erit æqualis, & ideò ex defin. 10. DC *erit perpendicularis*.

THEOR. I. PROP. X. Euc. 13.

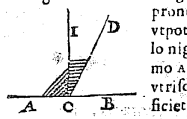
Cùm recta linea super rectam consistens angulos facit, aut duos rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

INcipit hic sola speculatio, & primam proprietatem linearum se tangentium demonstrat.

Sit itaque recta AB, super quam consistat CD, & si quidem anguli hinc, inde sunt æquales, sumus extra quæstionem: Nam ex 10. defin. illi anguli recti sunt. Quòd si anguli illi sint inæquales: Dicit tamen Eucl. duobus rectis, simul sumptos esse æquales. Quod vt ostendat, imperat ex propos 9. à puncto C dato erigi perpendicularem CI.

Probatur. Quoniam ex 7. pronunc. omne totum est æquale omnibus suis partibus simul sumptis; rectus angulus ICB erit æqualis nigro, & albo, vtpote suis partibus: Si verò addas, tum recto angulo ICB, tum albo, & nigro, nigerrimum ACI rectum, efficietur, vt albus niger, & nigerrimus additus, sint æquales duobus rectis ICB, & item eidem nigerrimo ei addito, ex 2. pronunt. quòd memor â tenendum.

Progres. 2. Rursus Angulus ACD ex eodem pronunt. 7. est æqualis, vtpote suis partibus angulo nigro ICD, & nigerrimo ACI: quare, si addas vtrisque angulũ album, efficietur, vt angulus ACD, & angulus albus ad C sint



æquales tribus albo, nigro, & nigerrimo ad C. Iam itaque vides angulum ICB rectum, & nigerrimum item rectum, vt priùs probatum est, tribus albo, nigro, & nigerrimo esse æquales: Rursusque, vt modo dixi, ACD obtusum, & album acutum factos à lineâ DC, tribus albo, nigro, & nigerrimo item esse æquales, vt modò demonstrauí: sed quę eisdem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia ex 1. pronun. Ergo *angulus* ACD, & *albus* ad C *sunt æquales angulis duobus* ICE *recto, & recto nigerrimo* ACI.

COROLLARIVM.

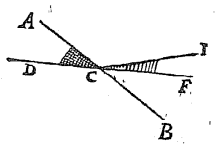
COllige quoscumque angulos super rectam à pluribus lineis insistentibus effectos esse duobus rectis æquales, sicuti hi tres albus, niger, & nigerrimus duobus rectis ostensi sunt æquales.

THEOR. II. PROP. XI. Euc. 14.

Si ad aliquam rectam lineam, atq; ad eius punctum, duæ rectæ lineæ non ad easdem partes ductæ, eos, qui sunt deinceps angulos duobus rectis æquales fecerint; in directum erunt inter se illæ lineæ rectæ.

ELigendum est punctum C in linea AB, & ab eo duæ lineæ trahendæ sunt in diuersas partes, ideſt ad oppositas, vt sunt CD, & CE. Modò inquit. *Si hæ lineæ angulos, qui ex eorum tractione nascuntur, æquales duobus rectis fuerint, necessariò erunt in directum, & vnicam lineam rectam continuabunt.* Hęc verò propositio conuertit superiorem, ibi enim probatum est ex rectis lineis nascentes angulos debere esse æquales duobus rectis, hìc probatur lineas *rectas*, & *in directum positas* fore; si angulos, quos hinc, inde faciunt, cum lineâ, super quam cadunt, duobus rectis æquales fecerint.

Probatur. Nam si anguli, quos super lineas CE, & CD facit CA duobus rectis sunt æquales; sicut & illi, quos BC efficit; & tamen DC, & CE in directum nõ sunt, Linea DC prolungata non coincidet, nec super lineam CB incedet: Sed vel suprà, vel infrà. Cadat V. g. suprà, & sit DCI recta, prout inquiũt aduersarij. Itaque CA suprà DCI cadens, vtpote super rectam, angulos nigerrimum DCA, & album ACI duobus rectis æquales efficiet ex precedẽti Prop.



Verùm

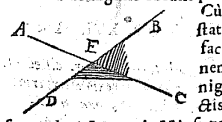
Verùm id præsuponimus, & facere AC insistens super DC, & CE. Quamobrem, cùm, ex 12. pronun. omnes recti sint æquales, emergit; vt tum anguli facti ab AC insistente super lineam ACI, quam volunt aduer. etiam rectam, quales sunt negerrimus, & albus, quàm anguli affecti ab eadem AC cadente, & insistente super DC, & CE, quales sunt niger cum albo, & nigerrimus, inuicem esse æquales; vtpote omnes duobus rectis æquales; Si itaque auferas DCA nigerrimum ab vtrisque, remanerent æquales albus tantùm, cum albo, & nigro simul sumptis; nempe pars toti, quod esse non potest. Ast si dicas infrà cadere lineam prolungatam DC, eodem argumento perurgeris: vnde oportebit confiteri; quòd *cadat in directum* DC *ipsi* CE, *& quòd eadem in vnicam lineam dirigantur*.

THEOR. III. PROP. XII. Euc. 15.

Si duæ rectæ lineæ se mutuò secuerint; angulos ad verticem æquales inter se efficient.

PRo angulis ad verticem intelligit eos, qui iuxta intersectionem sibi oppositi sunt; vt est in duobus lineis se intersecantibus AC, & BD, angulus nigerrimus, & albus E.

Prob. de angulis obtusis primò ex Propos. 10.



Cùm linea BE insistat super lineam AC, faciet angulos suos, nempe album E, & nigrum duobus rectis æquales: Rursus; quia recta CE insistit super rectam BD faciet item ex eadem 10. Propositione angulum nigrum, atque nigerrimum æquales duobus rectis: Omnes verò recti sunt inuicem æquales, ex 12. pronunc. Vnde, & duo albus E, & niger anguli, duobus nigro eidem, & nigerrimo æqualitate commensurabuntur. Aufer itaque angulum nigrum vtrisque coniunctum, & annexum, quia idem ab vtrisque abstulisti; ex 3. pronunc. *Anguli albus* apud E, *& nigerrimus, æquales remanebũt*.

Simili argumenti specie de angulis acutis vteris, qui sunt niger, & albus oppositus, cum etenim AE recta insistat rectæ BD; faciet ex propos. 10. cit. angulos duobus rectis æquales; nempe obtusum album E, & acutum album: Quòd & præstabit BE cadens super AC: Quapropter angulus niger acutus cum albo obtuso E, sicut & angulus albus acutus cum albo obtuso E, erunt æquales, vtpote duobus rectis æquales. Auferatur communis obtusus albus E; remanebuntque albus, & niger acuti æquales.

COROLLARIVM I.

EX sententia Procli colligit primo Euclides: *Lineas se secantes facere quatuor angulos, quatuor rectis æquales*; nam in demonstratione ostensum est, nigrum, & album E esse duobus rectis æquales; sicut & nigerrimum cum albo acuto.

COROLLARIVM II.

ET hinc colligitur secundo, *Omnes quotcumque angulos, qui circa aliquod punctum fieri possint tantùm esse quatuor rectis æquales*. Namque si multiplicas rectas ad punctum E terminantes, nihil aliud efficies, quàm diuidere in multas partes quatuor angulos dictos ad E constitutos, quæ omnes simul sumptę tótis suis adequantur; Cùmque illi angulis quatuor rectis sint æquales; hinc est, vt omnes quotcunque anguli circa aliquod punctum consistentes quatuor solùm rectis sint æquales. Quare & omne spatium circa aliquod punctum consistens non, nisi quatuor rectis angulis, poterit æquiualere.

EXPENSIO IV.

De proprietatibus Triangulorum.

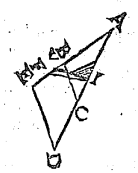
TRiangula possunt, aut considerari in se, aut considerari quatenus comparantur cum alijs. Primò agemus de triangulis in semet consideratis.

THEOR. I. PROP. XIII.

Si sit triangulum ita dissectum; vt crus, cruri, & alterum crus, alteri sit æquale; angulus quoq; ab illis cruribus clausus angulo sit æqualis. Basis quoq; erit basi æqualis, & totum triangulum toti.

SIt triangulum AED lineis sectum; ita quòd crus BA sit æquale cruri AI, & crus BC cruri FI; anguli verò ad B, & I æquales. *Dico Basim* AF *basi* AC, *& triangula per sectionem facta inuicem esse æqualia*.

Probatur. Nam, si basis basi non est æqualis, sit maior AF, quę, vt esset equales, deberet esse V. g. VA: Tunc quęro ductâ rectâ VI; an hęc sit æqualis cruri BC; Si non est æqualis, est contra hypothesim. Si verò est æqualis VI crus cruri BC, iam habemus triangulũ VAI, quod habet vnum crus VI, cruri BC æquale, & alterum BA alteri AI, basimque VA basi AC æqualem. Quare ex Coroll. Propos. 3. totum triangulum toti erit æquale, & angulus ad I niger erit æqualis angulo apud B; Et ideò angulo sibi æquali AIF seminigro, quod esse nequit; Cùm niger sit eius pars, & ille IAF totum, & idem contexes argumentum, si crus AF sit maius; Nam AC erit minus, & eadem operatio, & demonstratio valebit.



THEOR. II. PROP. XIV. Euc. 5.

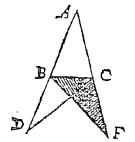
Anguli Isoscelium triangulorum, qui sunt super basim, sunt inuicem æquales, & productis cruribus, anguli infra basim sunt etiam inuicem æquales.

SI Triangulum duorum æqualium crurum ABC, & ea duo crura producãtur AB in D, & AC in F, & ex Propos. 3. BD, & CF portiones adiunctę fiant inuicem equales; & rectâ BF coniungantur puncta B, & F, sicut lineâ DC puncta

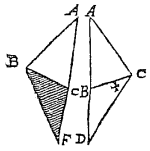
D, &c.

D, & C. *D'eo anguli ſuper baſim* BC *apud* B, & C *eſſe inuicem æquales; & anguli infra baſim, vt ſeminiger ad* B, *& niger ad* C *eſſe quoq; inuicē æquales.*

Probat. ſecunda pars. & conſiderentur DAC, & DCA; tanquam duo triangula; quæ vt tali ratione cogitarentur fecimus ſeparata, replicando in ipſis triangulum idem iſoſcelum BAC. Quoniam itaq; anguli ad A in triangulo ſeminigro, & albo ſunt æqualia, & crus vnum BA vni AC ex hypotheſi alterum AF ex effectione alteri AD eſt æquale; Ergo ex preced. DF baſis baſi DC erit æqualis; & totum triangulum ſeminigrum toti albo erit æquale.



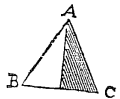
Progr. 2. Deme. BAC triangulum ab vtriſq; & quod reſiduum eſt æqualium, triãgulorum nigrum albo BDC erit æquale: *Quare, & anguli niger ad* C, *& ſemialbus* DBC *erunt æquales, qui ſunt infra baſim anguli.*



Prob. 1. pars. Quia triangulum ACD triangulo BAF eſt æquale ex 1. parte probat. erit angulus apud B totus angulo apud C toti æquale. Et eadem ratione pars nigra apud B parti C cruce ſignatæ erit æqualis; quòd triangulum nigrum ſit æquale albo BCD. Ablatis ergo partibus æqualibus angulorum nigra, & C cruce ſignatâ ab angulis totis æqualibus; *ex poſt.* 1. *remanebunt æquales anguli ſupra baſim* reſidui apud B, & C; nimirum CBA, & ACB, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HInc emergit triangulum æquilaterum habere omnes angulos æquales, Prob. Nam cũ duo crura AB, & AC ſint æqualia, anguli ſupra baſim C niger, B albus erunt æquales ex preced.



Sic quia duo crura AC, & CB ſunt æqualia angulus ſeminiger apud A, & albus B erunt æquales. Duo itaque anguli ſeminiger A, & niger C vni tertio B ſunt æquales; Ergo ex Pron. 1. ſũt æquales inuicem.

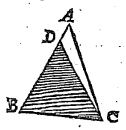
THEOR. III. PROP. XV. Euc. 6.

Si in triangulo duo anguli æquales inter ſe fuerint; & ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.

LIcet hoc Theorema faciliter poſſit colligi ab antecedenti; cùm ſit conuerſa eiuſdem propoſitio nihilominus, quia aliquæ ſunt propoſitiones, quę conuerti nequeunt, ex logicis: Ponendo prędicatum loco ſubiecti; eo quòd prędicatum ſit minus vniuerſale ſubiecto; vt hęc *omnis homo eſt animal*, conuerti nequit, & dici, *omne animal eſt homo*. Cùm animal magis pateat, quam prędicatum hominis; ſed dici debet, *aliquod animal eſt homo*. Ideò conſueuere Mathematici etiam conuerſas propoſitiones oſtendere, vt demonſtrent illas propoſitiones conuerti ſeruata quantitate. & qualitate earum; nimirum eſſe affirmatiuas, & eodem pacto vniuerſales, cõuerſę; vt priùs erant; quòd euenit in iſta propoſitione.

Dicit itaque Euclides, quod ſi ſit triangulum BAC, cuius duo anguli ſint æquales B niger, & C ſemialbus; *quod latera ſubtenſa* AB *ſeminigro*, & AC *nigro æqualia inter ſe erunt*.

Quod ſi aliquis neget; Ponatur; quod BA ſit crus maius, quam AC, & ideò quod ad hoc, vt ſit æquale debeat eſſe BD.



Probatur itaque, quia BD eſt æquale cruri AC ex aduerſarijs: Crus verò BC eſt commune, & angulus B niger, communis quoque, tàm triangulo nigro minori, quàm ſeminigro maiori: Ex prop. 13. erunt triãgulũ nigrũ BCD, & ſeminiger BCA æqualia; pars nigra toti BCA, quod eſſe nequit.

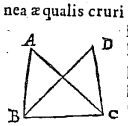
COROLLARIVM.

SEquitur ex hac propoſitione omne triãgulum æquiangulum eſſe quoq; æquilaterum; quòd eſt conuerſum prędecentis Corollarij, cùm enim anguli B albus in fig. preced. Coroll. & C niger ſint æquales, latera AB, & AC erunt æqualia: Item, cùm angulus A ſeminiger, & angulus B albus ſint æquales, etiam latera AB, & BC erunt æqualia: Quare omnia latera erunt æqualia.

THEOR. IV. PROP. XVI. Euc. 7.

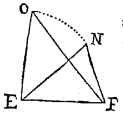
A baſis alicuius trianguli termino cruri diſcedenti æqualis linea, & ab altero extremo alteri cruri alia linea æqualis non diſcedet, quæ terminet ad aliud punctum; quàm ad verticem prioris trianguli: dummodo verſus eandem partem lineæ ducantur, in quam crura conueniunt.

MVltę requiruntur conditiones ad hoc, vt Theorema verificetur; Primò, quod linea æqualis cruri exeat ab eodem extremo baſis;

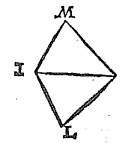


ideoque CA, & BD ſunt æquales; Sed non exeunt ab eodem puncto C, quod requirit propoſitio, & ideò de eis non loquitur.

Secundò, quòd, tum hæc linea ſit æqualis vni cruri, tum altera æqualis alteri; nec ſufficit æqualitas vnius cruris cum vna linea, & vt EO, & EN ſint æquales, & FO, & FN inęquales, & ideò de iſtis non eſt ſermo.



Tertiò requirit, quòd ducantur versùs eaſdem partes: Et ideò licet IM, & IL ſint æquales, & HM, & HL; quia tamen ducuntur, ad duas partes oppoſitas M, & L. Ideò nec de iſtis loquitur propoſitio.

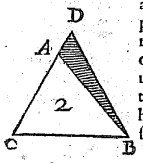


Multos verò habet caſus, hæc propoſitio ſecundùm quòd punctum hoc prope verticem trianguli, in quod conueniunt collocatur.

Caſus

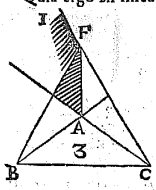
Caſus 1. Si ergo duę lineę dicantur conuenire, & non in verticem trianguli; quarum quęque ſuo cruri, à cuius extremo diſcedit, æquetur. Sit illud punctum aſſignatum D, pro primo caſu; ita vt linea DC à puncto C diſcedens ſuper crus CA ducatur, & perueniat ad D cũ alterâ BD æqualis alteri cruri BA. extra triangulum CAB. Sed hoc euidenter implicantiam inuoluit, & falſum eſt. Nam linea CD eſſet maior, quàm crus CA contra hypotheſim.

Caſus 2. Idem erit. Si punctum cadat in latere aliquo, V.g. CD in fig. 2. Nempe, quòd linea BA æqualis cruri BD, & linea CA diſcedens ab C, & ſuper crus CD ducta conueniant in A infra verticem trianguli D; Et hoc etiã extra hypotheſim; quia linea CA eſſet minor; quàm CD.



Caſus 3. Si punctum hoc concurſus ponatur intra triangulum in A; vt in 3. fig. Et tunc oſtendetur propoſitio, ex propoſ. 14. Producta enim linea AC, & crure CF ducatur recta AF; Et habebimus duo triangula; ex aduerſarijs æquicrura CAF, & BAF.

Quia ergo BA linea cruri BF ex aduerſarijs æquatur; erunt anguli ſuper baſim AF; nempe A ſeminiger, & niger F æquales in triangulo BFA. Angulus verò F eſt pars anguli IFA infra baſim AF trianguli alterius AFC, & AFI totum. Ideoque angulus ſeminiger A, toto illo IFA minor erit, & pars ipſius nigra ad A multò minor angulo eodem IFA infra baſim trianguli ACF exiſtenti.

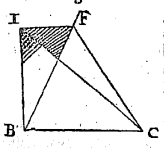


Pars verò iſta nigra anguli ad A eſt infra baſim AF trianguli ACF. Sunt ergo duo anguli infra baſim apud A, niger A, & IFA inæquales. Sed rurſum ſunt æquales ex propoſ. 14. quia linea AC ex aduerſarijs eſt æqualis cruri CF. Ergo eſſent æquales, & inæquales anguli infra baſim, quòd eſſe nequit.

Caſus 4. Quod ſi punctum concurſus ponatur extra triangulum ſit illud in F. Et productis cruribus trianguli BAC, & ducta AF, & producta CI idem contexes argumentum.

Caſus 5. Eſt. Si punctum concurſus cadat extra triangulum in I aſſignatum ab aduerſarijs tali modo; vt altera linearum poſteriùs ductarum ſecet aliquam ex primo ductis; V. g. ſecet lineam BF, & excurrat in punctum I.

Coniungatur recta FI, eritque factum triangulum CIF; cuius duo anguli ſupra baſim debebunt eſſe æquales; nempe angulus I niger, & angulus F ſeminiger ex propoſ. 14. quòd linea CI ab aduerſarijs dicatur æqualis cruri CF. Quare pars nigra anguli ſeminigri apud F erit minor angulo nigro CIF, & multò minor addita ei paſte nigerrima, vt ſiat angulus BIF; Sed angulus niger F, & totus BIF niger ſunt quoque æquales; quòd ſint anguli ad baſim in altero triangulo BIF, cuius linea BI ex aduerſarijs æquatur cruri BF; & ideò ex pr. 14. ſint æquales. Ergo æquales, & inæquales, quod eſſe nequit. Quare nullibi punctum concurſus linearum poſtremò ductarum poteſt cadere; niſi in verticem trianguli, igitur vera propoſitio.



THEOR. IV. PROP. XVII. Euc. 32.

Cuiuſcumque trianguli tres interni anguli duobus ſunt rectis æquales.

Et vno crure producto, externus angulus duobus internis, & oppoſitis eſt æqualis.

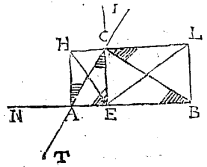
SI triangulum ABC. Volo primum oſtendere angulum ad A album, C ſeminigrum, & B nigrum omnes internos eſſe æquales duobus rectis; Quòd vt oſtendatur.

Progreſſus 1. Ducatur perpendicularis à puncto C ad baſim AB ex propoſ. 10. & ſit EC. Producto deinde AC in T, & I detruncetur ex propoſ. 5. CI æqualis AE, & AT æqualis EC; Et ex propoſ. 2. conſtituatur triangulum AHC; quod erit æquale ex Coroll. prop. 3. triangulo AEC; Ideoq; ad H angulus CH, & HA clauſus erit æqualis angulo recto nigro apud E. Ducatur deinde HE; Eritque rurſùs triangulum HCE æquale triangulo HAE ex prop 3. quod ſit ſuper eandem baſim HE, & inter crura vnum HC vni AE, & alterum CE alteri HA æqualia ex effectione; Sed hæc duo componunt totum AHCE. Quòd priùs erat. Ergo ambo ſimul æqualia triangulis ACE; & AHC; quæ priùs erant; Sed illa erant æqualia inter ſe, & ideò dimidia eiuſdem totius: Sed hęc etiam ſunt æqualia inter ſe, & dimidia eiuſdem totius; Ergo æqualia cum primis. Vnde HCE erit æquale triangulo AEC, & angulus C in ipſo ſeminiger, angulo E nigro, & recto. Sic dicas de angulo ſeminigro apud A, quòd erit æqualis angulo H albo, vel E nigro rectis. Vnde recti erunt angulus HAE, & HCE.

Eodem modo procedemus in conſtituendo triangulo CLB; & eodem pacto argumentabimur, oſtendendo angulum C, & B ſemialbos in triangulo ECL, & EBL eſſe rectos angulos.

Prog. 2. Quo poſito. Sic prima pars propoſitionis prob. In parte ACE; quę prima conſideratur. Angulus apud A niger eſt æqualis angulo apud C nigro, & albus apud C albo apud A ex propoſ. 3. Coroll. eo quod æquis cruribus inſiſtant. Quare interni trianguli niger apud C, ſimul cum albo apud A, ſunt æquales toti ſemialbo EAH, nempe angulo recto.

Prog. 2. Itérum in ſpatio ECB angulus niger apud B, & niger apud C; vtpote æqualibus cruribus inſiſtentes EC, & BL æquales ſunt. Item albus B, & albus apud C æquales; Ergo albus apud C, & niger apud B angulo recto EBL, vel ECL erunt æquales. Cum ergo in triangulo ACB anguli ACB nigra pars, cum angulo A ſit recto æqualis ex primo prog. & in angulo item C pars alba, cum nigra apud B ſit recto æqualis, qui in triangulo ACB ſunt interni anguli. Patet, quod omnes anguli interni trianguli ACB duobus rectis erunt æquales.



Prob. pars 2. Et producatur latus aliquod, V.g. NA. Quia angulus EAH ſemialbus rectus eſt, erit

erit quoque angulus NAH rectus; & ideò angulus externus NAC, & internus CAE erũt æquales duobus rectis ex propos. 10. & propterea tribus internis angulis trianguli CAB. Tolle internum communem album apud A: remanebit itaque solus angulus externus NAC equalis duobus internis, & oppositis seminigro apud C, & nigro apud B.

Hinc que est quadrangulum quodlibet habere angulos quatuor suos quatuor rectis æquales: Cum enim CHAE in duo triangula diuidatur, & quodlibet triangulum suis angulis duos rectos angulos æquet; patet omnibus angulis suis quadrangulum quatuor rectos æquare.

COROLLARIVM I.

HInc est primo, quod angulus externus maior sit: quàm quilibet oppositus, & internus seorsim sumptus; quia duobus internis, & oppositis est æqualis; quod ostendit Eucl. propos. 16. primi, alia ratione satis difficili.

COROLLARIVM II.

SEcundò deducitur cuiuscumq; trianguli tres angulos simul sumptos æquales esse tribus angulis simul sumptis alterius: Quia tum hi, tum illi sunt æquales duobus rectis. Deduciturque etiam, quòd, si duo anguli vnius erunt æquales duobus angulis alterius trianguli; quòd reliquus angulus reliquo erit æqualis, & æquiangulum erit triangulum alteri quoad omnes angulos.

COROLLARIVM III.

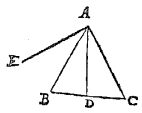
COnstat etiam in omni triangulo Isoscele, cuius angulus lateribus æqualibus comprehensus, fuerit rectus, quemlibet reliquorum esse semirectum; cùm omnes tres sint æquales duobus rectis, & tertius ex ipsis ponatur rectus. Quare, cùm duo reliqui inter se sint æquales, ex prop. 14. erit quilibet eorum semirectus. At si angulus cruribus comprehensus fuerit maior recto, nempe obtusus, qui ad basim sunt, erunt minus, quàm semirecti; Si verò minor recto, ideſt acutus, reliqui erunt magis, quàm semirecti.

COROLLARIVM IV.

PErspicuum quoque fit. Quemuis angulum trianguli æquilateri esse duas tertias partes anguli recti vel tertiam partem duorum rectorum. Quia omnes tres inter se æquales, exequant duos rectos.

COROLLARIVM V.

FIt etiam manifestum. Quòd si ab vno angulo A trianguli æquilateri BAC perpendicularis AD ad latus oppositum BC ducatur, constituet duo triangula Scalena ADC, & BDA; quorum cuiuslibet angulus ad D rectus erit duo B, & C quisque duas tertias anguli recti; reliquorum verò ad A; vtpote partes æquales vnius anguli in æquilatero vnam partem tertiam anguli recti quisque continebit. Quamobrem si super latus AC perpendicularis ab A eleuetur EA ex propos. 9. habebis angulum rectum inter crura EA, & AC diuisum in tres partes æquales, vt sunt EAB, & BAD, & DAC anguli,



COROLLARIVM VI.

CViuscumque trianguli duos angulos duobus rectis esse minores omnifariam sumptos; Quia tres duobus rectis sunt æquales. Ergo duo tantùm erunt minores.

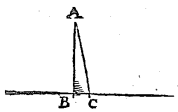
COROLLARIVM VII.

COlligitur quoque angulum externum superare hunc, siue illum internorum reliquo angulo opposito. V.g. NAC externum in fig. prop. superare oppositum internum ACB tantùm, quantùm est angulus B niger. Et etiam, quod duo anguli interni cuiuscumque trianguli deficiunt à duobus rectis reliquo angulo interno.

COROLLARIVM VIII.

HInc etiam manifestum est ex Proclo. Ab eodem puncto ad eandem rectam non posse deduci plures lineas perpendiculares, quã vnam.

Quod si fieri potest ducãtur ex A puncto ad rectam BC duæ perpendiculares; nempe AB, & AC, facientque triangulum ABC; In quo, quia AB est perpendicularis faciet angulum B internum nigrum rectum: Rursusque, quia AC perpendicularis præsupponitur, faciet angulum C album internum rectum; quòd militat contra præced. prop. in qua ostensum est, angulos duos internos cuiuscumque trianguli esse duobus rectis minores; cùm tres sint æquales duobus rectis.

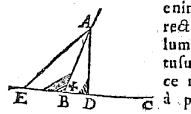


COROLLARIVM IX.

SEquitur quoque ex præc. propos. omnia triangula habentia vnum angulum rectum, vel obtusum reliquos obtinere acutos: cùm enim duo anguli interni sint duobus rectis minores, sequitur; vt si vnus sit rectus, aut obtusus, nempe maior recto; quod reliqui sint recto multò minores, nempe acuti; namque si reliqui, vel vnus eorum esset æqualis recto, vel maior, iam haberemus contra præced. propos. duos angulos in triangulo duobus rectis, aut maiores, aut æquales, sequitur quoque, quod vnus sit alterius complementum cum ambo vni recto sint æquales si tertius sit rectus.

COROLLARIVM X.

SEquitur quoque, quod si linea recta cum aliâ rectâ angulos faciat hinc, inde, obtusum vnum, alterum acutum, lineam perpendicularem à quouis eius puncto ad aliam rectam demissam, cadere ad partes anguli acuti. Faciat enim linea AB recta cum rectâ consimili DB angulum, nigrum quidem obtusum, album verò crucem notatum, acutum, & à puncto A demittatur perpendicularis AD. Cadet vtique ad partem anguli acuti albi cruce insigniti; nam si caderet ad aliam partem anguli obtusi nigri, vt facit linea altera AF; iam duo anguli interni essent duobus rectis maiores; nempe,



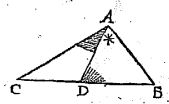
nempe, quia vnus, quem perpendicularis efficere, esset rectus, alius verò, vt niger esset obtusus ad B contrà positam propositionem. Itaque si perpendicularis rectum angulum internum nigerrimum efficit ad D, alius debebit esse acutus, vt est albus cruce notatus B; sic enim positi simul minores erunt duobus rectis, vt oportet esse duos angulos internos.

THEOR. XI. PROP. XVIII. Euc. 15.

Omnis trianguli maius latus maiorem angulum subtendit.

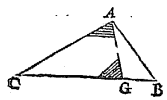
MVltâ declaratione non indiget propositio, cùm clarum sit, dici illud latus angulum aliquem subtendere, quod è regione illius est, & coniungit duo latera angulum illum comprehendentia; ita CB subtendit angulum A constantẽ medietate nigrã, & albã; quia è regione eius est, & copulat duo latera AC, & AB; quę illum angulum nigrum, & album A comprehendunt. Igitur ponatur, triangulum ACB habere latus CB maius alijs, *dicit, & angulum A nigrum, albumq; esse alijs maiorem*; nempe angulo C, aut angulo B. Et priùs probat de angulo C, & ad id prestandum ex docum. 3. propos. detruncetur latus in D tali modo; vt recta BD æqualis sit lateri BA; ducaturque recta AD.

Probatur. Quia AB est æqualis BD, anguli ad basim A D, vt pote trianguli Isoscelis, quales sunt ad D nigerrimus, & ad A albus stellula notatus erunt inuicem æquales ex 14. prop. Sed angulus nigerrimus ad D ex Coroll. I. prop. 17. vtpote externus trianguli ADC est maior interno, & opposito C: Quamobrem, & angulus albus A stellula notatus; cùm sit æqualis nigerrimo ad D; erit maior angulo C; Sed iste est pars totius anguli A albo, nigroque constantis; Ergo iste angulus niger, albusque maior est angulo C.



Sed, vt probetur, angulum A esse quoque maiorem angulo B, replicetur idem triangulum, & à CB latere maiori detrũcetur æqualis lateri CA sitque CG, trahaturque AG: eodemq; genere argumenti ostendetur, angulum nigrum, albumque A esse maiorem angolo B.

Probatur itaque. Nam angulus niger A, nigerrimusque G sunt æquales ex propos. 14. eo quod triãgulum ACG Isosceles sit. Vnde & anguli ad basim, quales sunt nigerrimus G, nigerque A, sunt æquales. Sed angulus nigerrimus externus respectu trianguli ACB est maior opposito, & interno B. Quare etiam niger A æqualis nigerrimo G maior erit ipso angulo B: Sed angulus niger A est pars anguli A nigri albique totius trianguli ACB: Ergo erit multò maior angulo B. *Et ecce tibi ostensum angulum A, album nigrumque esse maiorẽ alijs angulis, cui maius latus BC subtensum est.*



COROLLARIVM.

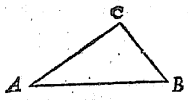
SEquitur hinc omnes tres angulos trianguli Scaleni esse inæquales. Triangulum enim Scalenum est illud, quod habet tria latera inæqualia, vt est suppositum ACB. Si autem maius latus maiorem angulum subtendit sequitur, vt angulus A sit maior reliquis C, vel B. Iterumq; quia latus AC est maius, quàm AB, erit quoque maior angulus B angulo C: Vnde omnes erunt inæquales, maximus quidem A, minor verò B, minimus tandem C.

THEOR. XII. PROP. XIX. Euc. 19.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur.

PRopositio conuertit precedentem; Tunc autem angulus maiori lateri subtenditur, cùm è regione illius est, & super eo aperitur; ita vt ei maius latus deseruiat pro basi, eiusque latera nectat. Sit itaque triangulum ABC, cuius angulus maior C subtensus sit lateri AB, *dicit latus AB necessariò omnibus alijs debere esse maius.*

Prob. Nam si AB non est maius, aut latus AC, aut latus CB ei, aut æquales erunt, aut eo maiora: Hoc verò esse non potest; & primò ostendemus id de latere AC, quòd silicet, nec æquale lateri AB, nec eo maius esse possit. Nam si dicatur æquale etiam angulus B cui subtenditur, erit æqualis angulo C ex demonstratis in precedenti propositione, in quâ ostendimus *latus maius, maiorem angulum subtendere*, & per consequens æquale, æqualem. Iam verò in hypothesi, & propos. supposuimus angulum C omnibus alijs esse maiorem. Quòd si dicas latus AC esse maius latere AB; tantò magis vrgebit argumentum. Nam angulus B consequenter erit maior angulo C, ex 18. propos. eo quod presumas AC latus subtensum esse maius; & tamen in hypothesi supponimus non angulum B, sed C esse maiorem.

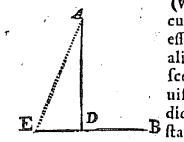


Sed modo probemus latus AC esse quoque maius latere CB, & eodem modo argumentandi vtemur. Nam si CB non est minus, sequetur vel esse maius, vel esse æquale. Sed posito BC latere maiori, vel æquali, angulus A, cui subtenditur, ex propos. antec. erit quoque angulo C, aut maior, aut æqualis contra presuppositum, & hypothesim. *Maior itaque angulus in sua apertione maiorem lineam requirit; cui subtendatur, & è regione sit.*

COROLLARIVM.

SEquitur ex hac propositione lineam perpendicularem esse breuissimam inter omnes, quę à dato puncto ad subiectam lineam deducuntur.

Ducatur ex A perpendicularis, quæ vnica, (vt ex Prop. 17. Coroll. 8 cum Proclo deduximus) esse potest; & postmodum alię ab eodem puncto descendant super EB. Breuissima omnium perpendicularis erit AD: Nam si statuatur, aliam esse, V.g. AE. In triangulo itaque ADE, cum angulus D sit rectus, alius E erit acutus, cùm duo anguli in nullo triãgulo possint esse duobus rectis æquales,



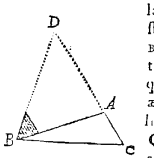
ex Coroll. 6. Propoſ. 17. Quare ex hac Prop. 19. cùm angulus rectus D ſit maior, quàm E, obtinebit quoque latus, cui ſubtenditur, nempe AE maius, quàm latus, cui ſubtenditur angulus E acutus, quod latus eſt perpendicularis AD: Ergo hęc perpẽdicula ris minor eſt crure EA: quòd ſemper eodem pacto concludes poſitis alijs, alijſque lineis ab A cadentibus ſuper EB, vt manifeſtum eſt.

THEOR. XIII. PROP. XX. Euc.20.

Omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora quomodocumque ſumpta.

DIcit, quod ſi ſumãtur ſimul *duo latera* trianguli cuiuſcumque; ſiue hęc, ſiue illa aſſumas, vt tibi placet, *comparata cum reliquo ſemper eſſe eo maiora*.

Ad quod oſtendendum Euclides facit triangulum quodcumque ABC: Prolungatque vnum ex lateribus, quod libuerit, V.g. AC in D, & quod ex documentis 6. propoſ. perficit, AD æqualem facit lineę AB, coniungitque rectâ DB: Ita quod triangulum conſtituatur ADB duo latera habens æqualia AB, & AD.



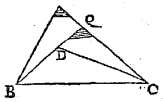
Probatur. Nam cùm in triangulo ABD duo latera ex conſtructione conſtituta ſint æqualia; nempe BA, & DA ſit (vt ex probatis in 14. propoſit. conſtat) quòd anguli B niger, & D ſint æquales, vt ſunt in Iſoſcelibus anguli ſuper baſim: Quamobrem, cùm B niger angulus ſit pars anguli nigri, albique B, trianguli DBC, fiet, vt angulus B niger albuſque ſua parte nigra maior, erit quoque maior angulo D, huic parti nigrę æquali. Hinc verò enaſcetur, quod latus DC, vtpote oppoſitum maiori angulo B albo, nigroque, erit maius, quàm latus BC oppoſitum minori angulo D (vt ex probatis in anteced. prop. conſtat) at tota DC eſt æqualis duobus lateribus trianguli ABC, nempe, quod pars CA ſit vnum latus, & pars AD ex cõſtructione ſit æqualis lateri AB. Quamobrem ſi tota DC eſt maior latere BC, etiam malus erit latus BA, & AC eodem latere BC. Et eodem modo argumentum contexes de quibuſcunque alijs duobus lateribus reſpectu tertij reliqui. *Quapropter omnis trianguli duo latera reliquo erunt maiora*, &c.

THEOR. XIV. PROP. XXI. Euc.21.

Si ſuper trianguli vno latere ab extremitatibus duæ rectæ lineæ interiùs conſtitutæ fuerint: Hæ conſtitutæ reliquis trianguli duobus lateribus minores quidem erunt; maiorem verò angulum continebunt.

DVas partes hęc propoſitio habet: Prima, quę depẽdet in Probatione ab anteced. dicit. Quod ſi ab extremitatibus vnius lateris, puta BC duę lineę ducantur in angulum D intra triãgulum ABC cõuenientes. *Illæ erunt minores exteroribus lateribus* AB, & AC. Dicit autem ab extremitatibus vnius lateris eſſe trahẽdas predictas lineas interiores, quia poteſt eſſe, ſi trahatur à medio EC vna earum (vt in triangulo, rectangulo, vel amblygonio) quod lineę interiores ſimul ſumptę, ſint maiores, vt prob. Proclus. Secunda verò pars eſt, quæ in Coroll. 6. prop. 14. fundatur; quod angulus D, quem conuenientes in apice lineę ab extremitatibus lateris vnius BC protractę, efficiunt, erit maior angulo exterioribus comprehenſo, vt eſt angulus A in triangulo ABC. Debent autem, & hîc lineę protrahi ab extremitatibus; quia angulus tunc, quem conſtituunt lineę non ab extremis ductę, ſed ab intermedijs partibus, vt idem Proclus oſtendit, poteſt eſſe maior, aut æqualis angulo exteribus cruribus effecto.

Ad oſtendendũ verò id, quod propoſitio proponit. Altera earum, V.g. BD continuanda eſt, vſque ad latus alterum ad Q. Quo facto, ita primum aſſertum in propoſitione oſtendetur:



Quoniam ex propoſ. antecedenti duo latera AB, & AQ trianguli BAQ maiora ſunt latere BQ. Si addamus vtriſque latus QC, remanebunt latera BA, & AQ cum QC adhuc maiora; quàm duo BQ, & QC. Rurſus. Si vertamus conſiderationem ad aliud triangulum DQC ex eadem propoſ. anteced. concludemus duo latera DQ, & QC eſſe maiora latere DC, & ſi addamus huic DC ſicut, & duobus DQ, & QC, latus DB: Maiora adhuc erunt hęc duo DQ, & QC cum addito DB; quàm DC, cum addito eodem BD. Modò reaſumamus id, quod probatum eſt primò, nempe duo latera BA, & AC eſſe maiora, quàm BQ, & QC. Quod ſi verum eſt; cùm & BQ, & QC ſint maiora, quàm BD, & DC ſequitur illa, nempe BA, & AC eſſe latera multò maiora: *Nempe externa, internis ab eiſdem extremitatibus ductis*.

Secunda verò pars oſtenditur quoque: Nimirum, quòd ſit maior angulus D, quàm angulus A. Nam angulus niger Q externus reſpectu triãguli ABQ eſt maior; quàm eius internus niger A ſibi oppoſitus: ſed angulus D externus reſpectu alterius trianguli DQC, eſt maior interno, & oppoſito nigro Q in eodem triangulo DQC; *Ergo angulus* D *erit multò maior, quàm angulus niger* A, *ſiquidem ſuperat nigrum* Q *ſuperantem nigerrimum* A.

EXPENSIO V.

De comparatione triangulorum ad inuicem.

COmparantur hîc triangula prout, aut lateribus, aut angulis talibus conſtant, propterque euadant æqualia (Nam infra, vt partes parallelogrammorum comparationem quoque ſubibunt) & demonſtratur quod datis aliquibus lateribus, aut angulis æqualibus, ſequitur deinde, totum triangulum toti eſſe æquale.

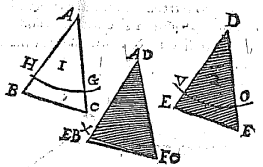
THEOR.

THEOR. I. PROP. XXII. Euc.4.

Si duo triangula habent crus vnum vni, & alterum alteri æquale, & angulum ijs comprehenſum æqualem; baſim quoq; habebunt æqualem.
Et totum triangulum toti erit æquale.

SIt triangulũ DEF nigrum, cuius angulus niger D ſit æqualis albo A trianguli BAC cruſque vnum ED vni AB, alterum DF alteri AC ſit æquale. *Dicit, quòd baſis EF quoque baſi BC erit æqualis; & totum triangulum toti albo æquabitur.*

Probat Euclides ſuperpoſitione. Nam ſi intelligantur vnum alteri ſuperponi: vt EB, AD, FC, trianguli angulus D angulo A congruet, & fiet vnus angulus AD, crus verò vnum DE æquale vni AB congruet quoque, & in idem punctum finiet in EB; Sic & alterũ latus DF alteri AC equale finiet in idem punctum FC. Ergo baſis, tum vnius, tum alterius in eadem duo puncta EB, & FC, finiet. Ergo ex 10. Axiomate erit eadem linea; Quia duę lineę in eadem puncta terminantes latitudinem non faciunt, qualis eſſet, ſi terminaret altera ex ipſis ad x.



THEOR. II. PROP. XXIII. Euc.8.

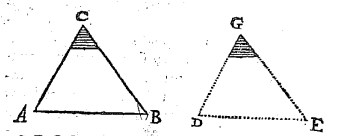
Si duo triangula, dua latera, duobus lateribus æqualia habuerint, vnum vni, alterum alteri; habuerint verò & baſim baſi æqualem. Angulum quoque ſub æqualibus rectis lineis contentum angulo æqualem habebunt; Totumque triangulum toti æquale erit.

HÆc propoſitio conuertit antecedentem: Nam ibi ab æqualitate vnius angull, & duorum crurum concluſimus æqualitatem baſis, & ideò totius trianguli, hîc ab æqualitate baſis, & duorum crurum concludimus æqualitatẽ anguli.

Sit itaque datum triangulum, cuius baſis AB baſi DE alterius, & crus vnum AC vni DG, alterum BC alteri GE ſit æquale. *Dico angulum C nigrum nigro G eſſe æqualẽ* lateribus AC, & GD æqualibus, atque CB, & GE item æqualibus contentos.

Probatur baſis æqualis AB baſi equali DE ſuperponatur; Tunc ab eodem puncto extremo baſis D, & etiam A duo latera exient æqualia DG, & ſuperpoſitum AC. Sic à puncto E, idemque B duo crura æqualia prodibunt versùs eaſdem partes ſ. crus EG, & ſuperpoſitum BC. Ergo ex prop. 16. in idem punctum terminabunt C, & G erit idem, ac G. Ergo eundem angulum conſtituent; & ideò totum triangulum toti erit æquale.

Poſſent autem hæ duę propoſitiones colligi ex dictis: hęc ex Coroll. propoſ. 3. illa ex propoſ. 4. Verùm euidentiùs, & vniuerſaliùs hîc rem concludimus.



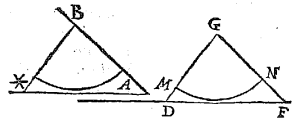
PROB. I. PROP. XXIV. Euc.23.

Ad datam rectam lineam; datumque in ea punctum conſtituere æqualem angulum, atque etiam triangulum alicui dato angulo rectilineo, ſiue triangulo.

HOc Problema parum difert à prop. 3. Tantùmque in eo aliquod diſcrimen patitur, quod præſuponat datas duas lineas angulum facientes, & tertiam, quæ debeat trahi, aut tractam triangulum complentem, quę tres lineę in illa dantur, vt partes vnius lineę, & abſque eo quod faciant triangulum.

Sit itaque Angulus B comprehenſus lineis AB, & A* ,compleatur (ſi non ſit completum) triangulum, & trahatur B* /, & poſtmodum tracta linea indefinita diuidatur in tres partes, ſingulę ſingulis cruribus æquales, ex prop. 6. & ex prop. 2. ſuper eam conſtituatur triangulum, quod obtineat latera tribus trianguli iam facti lateribus æqualia, nempe GD lateri B* , & DF alteri *A, & tandem FG poſtremo AB. Nam hoc præſtito *angulus* F *erit æqualis angulo* A.

Ratio eſt, quia ex propoſ. anteced. hęc triangula duo latera duobus lateribus vtrunque, vtrique ſibi correſpondenti, vt baſim baſi æqualem adipiſcuntur. Quare & omnes angulos correſpondentes æquales habebunt, & ideò angulus A erit æqualis angulo F.



Verùm faciliùs praxis hęc fiet, ſi in B, & G poſito centro fiat ad interuallum quodlibet circulus, ſumaturq; in dato *BA portio circuli, quę intercipitur inter B* , & BA, & transferatur in altera portione circuli MN; Nam, ſi per puncta M, N trahas GD, & GF, à G habebis angulum G æqualem angulo B. Docet Clauius hîc.

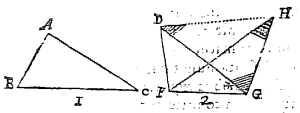
THEOR. XV. PROP. XXV. Euc.24.

Si triangula, duo latera duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunque, vtrique: Angulum verò angulo maiorem ſub æqualibus rectis lineis contentum: & baſim baſi maiorem habebunt.

SIt triangulum ABC, cuius angulus A, cum angulo D trianguli alterius DFG comparatus dignoſcatur maior, cùm tamen latera ambientia

bientia hunc angulum, qualia sunt AB, & AC, ita lateribus alterum angulum D claudentibus correspondeant, vt vnum sit æquale vni, V.g. AB, & DF, & alterum alteri; vt AC, & DG. Concludit Euclides, *quod hoc triangulum* ABC, *basim quoque suam* BC *maiorem consequatur, quam alterius basis sit, nempe* FG, *quod vt probetur.*

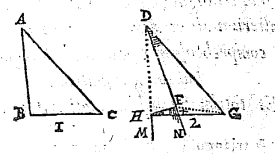
Fiat ex antecedenti propos. angulus D æqualis præfato angulo maiori A trianguli ABC trahendo latus punctatum DH. Hoc autem latus semper cadet extra triangulum, quia angulus ad D fit maior. Sitque hic angulus maior ad D albus, & niger; Longitudo autem huius lateris punctati DH sit æqualis lateri DC: Trahaturque FH, quæ triplicem occupare situm potest secundùm diuersitatem triangulorum, quæ fiunt, nimirum supra FG, vt est in proposito triangulo; In ipsam FG, ità vt vna linea fiat. Vel infra FG ad partes exteriores, qui tres casus diuersam probationem requirunt. Vnde in tres partes probatio diuidenda est. Primò itaque ponimus cadere supra versùs ipsum triangulum, vt est FH. Coniungenda itaque sunt extrema H, & G lineâ HG. Quò posito sic Euclides contexit argumentum.



Probatur. Quoniam enim latus DF est æquale lateri AB, sicut & DH punctatum lateri AC angulus quoque D ex albo nigroque integratus angulo A prioris trianguli. Sequitur secundùm documenta 22 propos. quod & basis punctata FH sit æqualis basi BC prioris trianguli. Rursus oportet considerare, quòd & latus DG, vt præsuponimus est æquale lateri punctato DH; Quare anguli ad basim niger G, & seminiger H, ex doct. 14. prop. erunt æquales. At pars nigra huius anguli H, ex 6. pron. est minor, quàm totum ipsum nimirum, quàm pars nigra simul cum alba. Ergo, & angulus niger G toti H æqualis, est maior, quàm eius pars nigra: Sed si addatur angulo nigro G altera pars alba stellulâ notata, multò maior euadet eadem parte nigra, anguli eiusdem H. Igitur ex doct prop. 19. subtendet maius latus, quod est FH, quàm pars nigra anguli ad H, cuius latus subtensum est GF. Linea verò FH æqualis est, vt in principio ostendimus basi BC prioris trianguli. *Igitur* FG *basis posterioris trianguli erit minor ipsa* BC, quod probare oportebat.

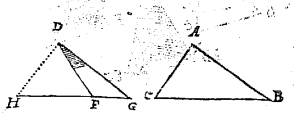
Casus secundus. Sit triangulũ primũ ABC acutangulum, aliudq; DFG secundum, habens angulũ D nigrum minorem angulo A, huic verò angulo D nigro addatur talis pars, vt fiat æqualis angulo A, ex anteced. propos. trahendo latus punctatum DH vsque ad M. Abscindaturque æqualis ex 6. prop. lateri DF, & sit DH. Coniungantur deinde simul H, & G linea, quę cadet infra basim FG. Rursus coniungatur HF, & tandem prolungetur latus DF vsque ad N.

Patet itaque in primis HG basi BC æqualem esse, ex prop. 22. quod angulus D albus, nigerque sit æqualis angulo A, & latera secundi, lateribus primi trianguli sibi correspondentibus æqualia, nimirum DH lateri AB, & DG lateri AC. Cùmque, & latus DF, prout supponimus, sit æquale lateri punctato DH, ex 14. prop. fit, quòd anguli infra basim, quales sunt H niger, & albus, &



angulus alter HFN totus niger sint æquales. Vnde hic totus niger F erit maior parte nigerrima anguli H: Angulus verò idem F niger, est pars anguli totius comprehensi lineis HF, & FGD, & altera eius compars cruce notata est, quare totus F nimirũ pars nigra, & altera cruce notata simul, erunt multò maiores, quàm pars nigerrima anguli H. Quamobrem totus angulus F, ex documentis 19. propos. habebit subtensum maius latus, nempe HG lineam, quàm pars nigerrima H cui subtenditur FG: Sed iam in principio dictum est HG esse æqualem basi BC. Igitur FG basis trianguli DFG, est minor, quàm basis BC.

At si tertius casus detur, nimirum. Quod FH neque cadat infra, neque supra FG, sed in ipsam, vt fiat vna linea. Facilis est probatio. Nam cum angulus niger ad D sit minor angulo A, si fiat æqualis addendo partem albam, & trahendo DH. Patet ex doct. propos. 22. quòd subtendet basim HG æqualem basi CB, & consequenter maiorem, quàm FG.

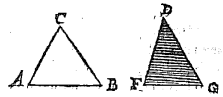


THEOR. XVI. PROP. XXVI. Euc.25.

Si duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habuerint, vtrunq; vtriq; basim verò basi maiorem: & angulum sub æqualibus rectis lineis contentum angulo maiorem habebunt.

DVo latera AC, & CD trianguli albi sint æqualia duobus trianguli nigri DF, & DG quodlibet suo correspõdenti: basis autem AB triãguli albi maior sit, quàm nigri FG. Dicit, & angulum C albi trianguli, qui clauditur inter lineas CA, & CB esse maiorem angulo D, qui lineis DF, & DG cõtinetur.

Probatur autem faciliter. Nam si angulus C non est maior angulo D; erit, aut æqualis, aut minor ipso. Sed si est æqualis, sequitur ex doctr. 22. prop. quòd basis quoque AB sit æqualis basi FG contra præsuppositum. Quia iam quoque præsupponimus latera, quodlibet suo correspondenti esse æqualia; tum nigri, tum albi trianguli; Quod si dicatur angulũ C esse minorem angulo



lo D, tantò magis absurdum sequitur; Nempe, quòd & basis AB sit minor basi FG. Cum asseramus esse maiorem; quia cùm præsupponamus quoque latera sibi correspondentia, tum albi, tum nigri trianguli esse æqualia, sequitur ex propos. antecedenti, basim etiam AB esse minorem basi FG; sicut angulo D minorem fingunt angulum C. Quare cùm non possit esse angulus C aut minor, aut æqualis angulo D; necessariò eum debebimus fateri maiorem.

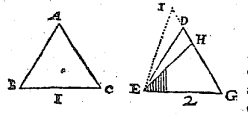
THEOR. XVII. PROPOS. XXVII. Euc.26.

Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habuerint, vtrumque vtrique, vnumque quodlibet latus alteri lateri æquale; & reliqua latera reliquis, vtrumque vtriq; correspondenti æqualia consequuntur.

DEntur duo triangula. Primum ABC. Secundum DEG. Primum habeat angulum C æqualem angulo G, & allum quoque angulum, V.g. B æquale alteri sibi correspõdenti seminigro DEG. Insuper, & latus obtineat, siue quod æqualibus angulis adiacet, siue quod alicui ex eis subtenditur. Et fit, quod adiacet BC æquale alteri GE adiacenti (vt priùs propositionem ostendamus de hoc.) Dicit igitur, datis omnibus istis conditionibus fore quoque æqualia reliqua latera; quodlibet nempe suo correspondenti, scilicet BA primi trianguli lateri DE alterius, & latus CA lateri GD exæquari.

* Neget igitur aliquis, quod res ita se habeat; tunc iste debebit assignare latus, V. g. GD, quòd sit, vel maius, vel minus latere AC. Si dicat esse maius; detruncetur per propos. 6. GH portio æqualis, & ducatur recta EH.

Probatur itaque propositio. Quoniam iam habemus ex hypothesi angulum C æqualem angulo G, & B æqualem angulo DEB, etiam ex Cor. 2. propos. 17. angulus reliquus A erit æqualis reliquo D. Sed BC latus ex hypothesi æquat latus EG, & GH æquat latus AC iuxta id quod effecimus ex aduersariorum sententia: quare ex 22. h. cum hęc latera singula singulis correspondentibus æqualia stringant angulos C, & G æquales etiam angulus I æquabitur angulo A, sed angulus A æquatur angulo D, ergo etiam angulus H æquabitur angulo D contra prop. 21. huius, nam linea EH interior facit maiorem angulum H, quam D. Quod si dicatur latus GD esse minus latere AC addatur punctata DI, vt tota GI æqualis sit ipsi AC. Et idem absurdum sequetur dum totus angulus punctato latero IE, & EG clausus esset æqualis angulo D, quia æquatur angulo A, vt dixi, eo quod sit I angulus ad basim trianguli, cuius latus IG æquatur lateri AC iuxta aduersarios, & EG ipsi BC ex hypothesi, & G angulus angulo C, ideoque etiam angulus I æquaretur angulo D contra prop. 21. h. At faciamus, quod latus æquale datum sit ex illis, quæ subtenduntur vni ex angulis æqualibus V.g. sit EG æquale lateri BC, & oppositus ei angulus A



æquetur angulo D, & C angulus angulo G, tunc etiam tertius angulus B æquabitur ex Coroll. 2. propos. 17. angulo DEG; si ergo sit latus aliquod DG maius, quam CA detruncetur GH crus æquale cruri CA, & ducatur FH. Tunc sequetur idem absurdum H. Quia enim EG crus æquatur cruri BC, & GH crus cruri AC ex aduersarijs, & angulus G angulo C esset angulus H æqualis angulo A, & ideo ipsi æquali ex hypothesi angulo D contr. propos. 21. huius.

Quod si ex aduersarijs sit minus, tunc addatur ID punctata portio, ita vt latus GI æquetur cruri CA, & ducatur EI. Quia itaque G æquatur angulo C, & crus EG oppositũ angulo vni æqualiũ D æquatur ex hypothesi cruri BC, & IG latus ex aduersarijs fecimus æquale lateri AC etiam angulus H ad basim ex prop. 22. huius æquabitur angulo A, & ideo ipsi A æquali ex hypothesi angulo I contra 21. prop. huius.

Posset etiam probari propositio demonstrando secuturum illud absurdum, quòd pars HEG anguli DEG esset æqualis toti ipsi DEG si dicatur aliquod latus DG esse maius, quàm CA, vel anguli IEG pars DEG esset æqualis ipsi IEG toti. Si latus GD ab aduersarijs dicatur minùs. Nam angulus DEG esset æqualis angulo ABC, cui æquaretur: & angulus HEG, vel IEG ex aduersaris ob latus BC æquale lateri EG, & latus GH, vel GI assertum ab ipsis æquale lateri CA claudentia angulos C, & G æquales.

COROLLARIVM.

SEquitur ex demonstratione huius Theorematis, tota etiam triangula quoad areas esse æqualia; Nam si latera AB, & BC lateribus DF, & FG æqualia sunt; continuentque ex hypothesi angulos æquales B, & F, ex propos. 22. huius erunt quoque tota triangula æqualia inuicem.

EXPENSIO VI.

De situ linearum se mutuò, nec secantium, nec tangentium.

CVm iam visa triangulorum comparatione velit triangula ipsa parallelogrammis comparare Euclides; necesse est, vt hanc comparationum cognitionem, duæ notiones procedant; Prima est de parallelis lineis, quomodo se habeant ad inuicem, & deinde ex hac parallelogrammorum hauriat cognitionem; quibus cognitis, inde possit parallelogramma triangulis comparare, vel vt eorum partes dignoscere.

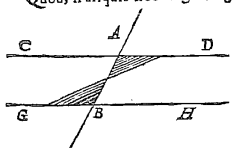
THEOR. I. PROP. XXVIII. Euc. 27.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea alternatim angulos æquales inter se fecerit: parallelæ erunt lineæ.

IN duas rectas, quę sint in eodem plano (hoc enim libro, vt notat Clauius, agitur de planis) incidat linea; nempe eas ambas secet, vt facit incidens AB in lineas CD, & GH: Et hæc faciat angulos alternos, nempe hinc inde, vnus adiaceat parallelæ C D niger, & inde alter adiaceat alteri lineę parallelę GH, vt est nigerrimus, faciat

Faciat inquam hos angulos æquales ; *Dicit illas lineas esse parallelas, & semper æquidistantes.*

Quod, si aliquis hoc neget ; Igitur adinuicem semper fient propiquiores V. g. versùs H, & D : quare tandem cõueniẽt ; quod si cõueniẽt ; facient triãgulum, cuius vertex erit vbi conueniunt ; basis verò erit AB, & angulus B nigerrimus erit externus ; angulus verò niger oppositus A, & internus, qui ex hypothesi inueniuntur æquales contra probata in Coroll. 1. propos. 17. vbi ostendimus in omni triangulo externum angulum quolibet opposito, & interno esse maiorem.



Quare maior debebit esse angulus nigerrimus ad B, vtpote externus, & oppositus ; quam niger apud A eo casu, quò conueniant : Cùm itaque sint æquales anguli ; lineæ CD, & GH non conuenient. Quod autem lineæ rectæ ; quæ sibi inuicem appropinquãt, tandem sint coiturę in communem verticem ; inter principia posuimus, cum Euclide, & verè principium censendum est, cùm nulla in oppositum hęsitatio animum pulset, si de approximatione per partes æquales agatur, vt ibi declarauimus. Licet Proclus, & Clauius nimis scrupulosè dubitent, & ostensionem astruant ad id probandum.

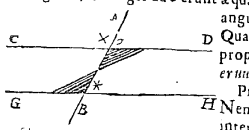
THEOR. II. PROPOS. XXIX. Euc. 26.

Si in duas rectas lineas recta incidens linea externum angulum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem efficit, aut internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales, Parallelæ inter se erunt ipsæ rectæ lineæ.

SIt angulus externus factus ab incidente AB, & linea CD cruce signatus ; Angulus internus, & oppositus, scd ad easdem partes, non autẽ, vt in anteced. prop. hinc, inde, qui est niger apud B factus ab incidente AB, & lineâ alterâ GH. Dicit. *Quod, si ii anguli sunt æquales ; & lineas æquidistantes, & parallelas futuras esse.*

Dicit quoque. Quòd si eadem AB cadens super rectas CD, & GH fecerit angulos internos, & ad easdem partes, vt est angulus niger, & angulus albus asterismo notatus, duobus rectis æquales ; adhuc illæ parallelæ erunt.

Prob. verò 1. pars. Cùm namque angulus nigerrimus apud B sit æqualis angulo cruce notato ex hypothesi ; isq ; cruce notatus sit æqualis angulo nigro, ex documentis prop. 12. (Namque linea AB secat CD ; vnde anguli ad verticem, vt est niger, & cruce notatus æquales sunt.) Internus angulus niger ad B, & niger ad O erunt æquales, qui sunt anguli alterni : Quare ex præced. prop. *lineæ* CD, GH *erunt parallelæ*.



Prob. 2. pars. Nempe, si faciat internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales, incidens linea AB super duas CD, & GH ; eas etiam esse parallelas : Sint itaq ; angulus internus niger O, & alter asterismo insignitus duobus rectis æquales. Sunt quoque ex 10 propos. angulus niger O, & alter comprehensus lineis AO, & DO duobus rectis æquales ; quòd linea DO insistat super AB. Quamobrem ablato angulo nigro communi, qui cum angulo O duos rectos æquat, & item cum angulo asterismo notato (vt præsupponimus) remanebunt angulus externus AOD, internusque, & oppositus asterismatus, æquales. Quarę ex præcedenti propositione *lineæ* CD, & GH *erunt parallelæ*.

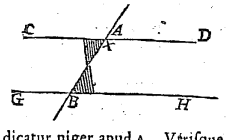
THEOR. III. PROPOS. XXX. Euc. 29.

Si in parallelas rectas lineas recta incidat linea, alternatim angulos inter se æquales efficit, etiã externum interno, & opposito, & ad easdem partes æqualem.

Et internos, & ad easdem partes duobus rectis æquales facit.

HÆc propositio duas antecedentes conuertit, vt perspicuum est ; tresque partes habet. Namque intendit probare primò. Quod si in duas parallelas CD, & GH incidat linea AB *angulos alternos nigrum apud* A, *& nigrum apud* B *æquales efficiat*.

Prob. sic per reductionem ad impossibile. Si isti duo anguli niger, & nigerrimus non sunt æquales, maior cõsequenter erit vnus illorum. Is itaque, V. g. dicatur niger apud A. Vtrisque per imaginationem addatur angulus cruce impressus, eruntque niger apud A, & cruce notatus simul maiores nigro apud B cum eodem angulo cruce signato. Sed niger A, & cruce signatus ex 10. propos. sunt æquales duobus rectis ; Quare niger apud B, & cruce signatus erunt minores duobus rectis. Vnde ex propos. 28. coibunt illæ lineę ; quia tunc interni nigri æquales non essent duobus rectis. Quod est absurdum, cùm CD, & GH ponantur parallelæ.



Secunda pars intendit ostendere ; angulum A externum æqualem esse interno, & ad easdẽ partes, vt est niger apud B, qui sunt ad eandem partem dextram. Si lineę CD, & GH sint parallelæ.

Probatur ex modo demonstratis. Nam angulus niger apud A est æqualis angulo nigro apud B, idemque ex propos. 12. est æqualis angulo A externo : Ergo angulus A externus est æqualis angulo interno opposito, & ad easdem partes nigro apud B.

Tertio intendit demonstrare angulum internum cruce notatum, & angulum nigrum B esse æquales duobus rectis. Si CD, & GH parallelæ constitutæ sint.

Nam angulus externus A, & cruce signatus internus sunt æquales, ex 10. propos. duobus rectis. Quòd linea AD cadat, & insistat super lineam AB ; Sed iam ostensum est, angulum A externum esse æqualem angulo nigro apud B opposito, & ad easdem partes lineæ AB. Quare angulus cruce signatus, & niger apud B duobus rectis remanebunt æquales.

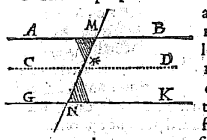
THEOR.

THEOR. IV. PROP. XXXI. Euc. 30.

Quæ eidem rectæ lineæ parallelæ sunt, & inter se sunt parallelæ.

PRęsupponatur, quod lineę AB, & GK in eodem plano existentes sint alteri, vt punctatę CD, parallelę. *Dicit. Illas inter se debere esse parallelas.* Quòd, vt ostendat, super eas trahit lineam, vtcunque, quæ sit MN.

Probatur propos. Nam anguli alterni niger apud M, & stellula notatus sunt æquales, siquidem lineę AB, & CD ex constructione presupponũtur parallelę, & ideò facientes angulos alternos æquales, ex propositione antecedenti. Secundò angulus niger ad N est æqualis angulo eidem stellula notato : Quia CD, & GK ex constructione presupponuntur parallelę. Quare ex propos. antecedenti angulus internus niger ad N erit æqualis ei angulo stellulâ notato, externo, & opposito, vt patet.



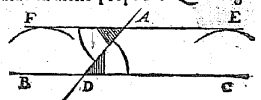
Quare concluditur, quod, cũ duo anguli nigerrimus ad M, & niger ad N sint æquales tertio, sint quoque inter se æquales : sed sunt quoq ; alterni. Quapropter ex propos. 28. erunt AB, & GK lineę inuicem parallelę.

PROBLEMA V. PROPOS. XXXII. Euc. 31.

A dato puncto parallelam lineam ducere datæ rectæ lineæ.

A Puncto A ducenda sit parallela lineę BC. Ducatur ex A ad BC recta AD, faciens angulum quemcunque, V. g. nigrum, huicque angulo æqualis constituatur alternus niger, ex documentis propos. 24. trahendo lineam FE : *Dicit. Lineas esse parallelas.* Vbi aduerte punctum A debere esse extra lineam BC, vt ad eam linea duci possit.

Probatur ex dictis prop. 28. Quia anguli alterni niger apud A, & niger apud D per constructionem æquales sunt. Nota parallelas facilliùs duci. Si tracta linea BC eodem interuallo, & aperitione circini super duo puncta quæcumque distantia, vt sunt B, & C facto centro ducantur duę portiones circulorum æqualium, vt sunt F, & E. Et postea ducatur linea eas portiones tangens, vt linea FE. Hęc enim erit parallela ; Quia puncta C, & E distant eodem interuallo, vt puncta B, & F ob radios circulorum equales.

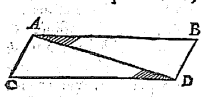


PROB. VI. PROP. XXXIII.

Rectæ lineæ, quæ æquales, & parallelas ad easdem partes coniungunt ; Et ipsæ æquales, & parallelæ sunt.

SInt rectę lineę AB, & CD æquales, atque parallelę, quę coniungantur ad easdem partes rectis ; ita vt, quę à sinistrâ parte discedit lineę CD, coniungat sinistram partem lineę AB ; sicut, & quę à dextra discedit lineæ CD, annectat quoque dextrâ partem alterius AB ; vt faciunt AC, & BD. *Dicit. Has lineas coniungentes, & esse æquales, & esse parallelas.* Quod, vt probet, oportet trahere diametrum AD ab A in D, incidetque lineis AB, CD, & AC, BD.

Probatur itaque. Nam, cùm AD incidat in parallelas AB, & CD ; ex probatis in 30. propos. angulus niger ad A, & angulus niger ad D erunt æquales. Quoniam sunt alterni, qui, vt ibi demonstratum est, æquales sunt : Quapropter triangula ABD, & CDA æqualia erunt. Quoniam ex 22. propos. ea sunt triangula æqualia, quę habent vnum angulum alteri æqualem, vt est angulus niger A, & niger D, & latera eiusdem anguli sibi correspondentia æqualia ; vt hìc euenit ; nam ex hypothesi AB, & DC sunt æquales rectæ ; diameter verò AD est idem latus, quod deseruit vtrisque. Hęc inquam triangula basim quoque basi æqualem possident. *Quamobrem* AC, *&* BD *erunt æquales* ; Quod erat primo probandum.



Probatur itaque. Quod etiam sint parallelæ ex eadem propos. 22. In dictis triangulis ACD, & ABD habentibus angulum angulo, & latera lateribus vtrunq ; vtriq ; suo correspondẽti equalia, etiam totum triangulum est toti triangulo æquale. Quare angulus albus ad D, & angulus albus ad A erunt æquales. Sed hi sunt alterni respectu linearum AC, & BD, ergo *hæ lineæ* AC, & BD *erunt quoque parallelæ*, ex propos. 28.

EXPENSIO VII.

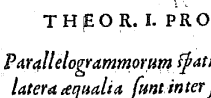
De Parallelogrammis, & Trapezijs.

HÆc Expensio diuiditur in tres partes. Prima agit de proprietatibus parallelogrammorum, tum in se, tum diametro diuiforum. Secunda comparat Inuicem parallelogramma. Tertia docet quadratum constituere præcipuam inter parallelogramma figuram.

THEOR. I. PROP. XXXIV.

Parallelogrammorum spatiorum anguli, & latera æqualia sunt inter se ; quæ ex aduersò sibi sunt ; illa verò spatia diameter bifariam secat.

SIt Parallelogrammum ABCD habens quatuor latera, quorum duo sibi aduersa sint parallela, vt sunt latera AB, & CD. Item AC, & BD. Dicit primò. Quod hęc figura possidet quoque *hæc latera, quæ sibi ex aduersò sunt æqualia*, nempe æqualia esse AC, & BD ; sicut AB, & CD. Deinde dicit quoque *angulos sibi ex aduersò existentes esse æquales*, nempe B, & C sicut & A, & D albus nigerque. Postremò diametrum quoque, si ducatur, vt AD, diuidere spatium contentum



à paral-

à parallelogrammo in duas partes æquales; & hęc vno, eodemque argumento ostendit.

Probatur. Quoniam diameter inter parallelas AB, & DC reperitur, erunt angulus niger ad A, nigerque ad D æquales, ex prop. 30. vtpotè alterni. Et quia AD est etiã inter parallelas AC, & BD eodem modo angulus albus ad A, & angulus albus ad D, ex propos. eâdem 30., quia sunt alterni, erunt æquales. Quapropter trianguli ABD, & ACD duos angulos æquales duobus angulis, quilibet suo correspondenti; insuper, & latus idem possident; nempe diametrum AD, & hinc ex demonstratis in 27. propos. latera correspondentia ad inuicem æqualia quoque erunt, nempe AB, & CD opposita ad inuicem; sicut AC, & FD opposita inuicem. Quod est primum.

Probatur secunda pars. Nam angulus B, & angulus C oppositi erunt æquales, ex eadem propos. 27. Et quia supra niger apud A nigro apud D, & albus apud A albo apud D ostensi sunt equales, si simul componãtur niger albusque apud A erit æqualis angulo apud D nigro, & albo, quod est secundum propositum.

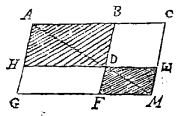
Prob. tertia pars. Nam sequitur quoque ex Coroll. propos. 27. totum triangulum ABD toti ACD esse æquale. Quare spatium parallelogrammi diuisum est bifariam à diametro AD; nempe in duo triangula æqualia ABD, & ACD.

THEOR. II. PROP. XXXV. Euc.43.

In omni Parallelogrammo complementa eorum, quæ circa diametrum sunt inter se sunt æqualia.

VIde in definit. 37. Quid sint consistentia circa diametrum, & complementa.

Dicit ergo propositio. Quod complementa nimirum in parallelogrammo AGMC parallelogramma alba HF, & DC sint æqualia.



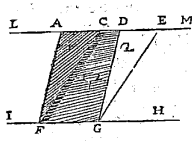
Probatur. Quoniam ex propos. præced. triangula ACM, & AGM, quę diuidit diameter sunt æqualia. Eademque ratione in parallelogrãmo nigro maiori HB duo triangula ABD, & AHD sunt æqualia; vtpote à diametro bisecta. Sic etiam in parellelogrammo minori nigriori DM duo triangula DFM, & DEM sunt æquplia. Deme ergo à triangulis totis maximis ACM, & AGM partes æquales, nempe huic ACM triangulum nigrum, & nigrius, & deme deinde alteri triangulum quoque nigrũ, & nigrius, quę primò demptis æquiualent, & residua HF, & DC complemẽta remanebunt æqualia, vt in 2. pronunt.

THEOR. III. PROP. XXXVI. Euc.35.

Parallelogramma super eadem basi, in iisdem parallelis constituta inter se sunt æqualia.

DIcitur. Aliquod parallelogramum esse cum alio inter easdem parallelas, quando duo latera opposita partes sunt parallelarum; vt latus AD, & CE partes sunt parallelę LM, sicut, & FG est pars parallelę IH. Dicitur verò esse super eandem basim, cùm latus alternum in parallela commune vtrisque est, vt FG. Dicit itaque hæc parallelogramma inter se esse æqualia, non quoad latera, & angulos, sed quoad capacitatem, & aream: Propositio verò habet tres casus. Quare requirit tres probationes.

Probatur. Sint duo parallelogramma super basi FG eadem, & inter parallelas LM, & IH, nimirum ADFG, & CEFG, cadatque latus FC secundi suo extremo C inter latera primi inter puncta A, & D.

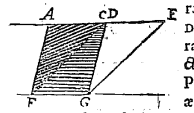


Nam cùm latus AD primi, & CE secundi sint æqualia sue basi communi, laterique opposito FG, ex preced. propos. sit vt sint æqualia inter se. Auferatque mente lineam CD; que vtrisque deseruit, eisque est communis, remanebunt adhuc æqualia AC, & DE segmenta.

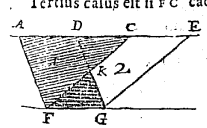
Progress. 2. Similiter iam constat ex prop. 34. latus AF nigerrimi trianguli esse æquale lateri DG albi trianguli 2; vtpote latera parallelogrammi seminigri nigerrimique.

Progr. 3. Angulus verò A nigerrimus est equalis angulo albo D ex propos. 30. quòd vnus sit externus, alter internus inter parallelas AF, & DG. Cùm itaque habeamus duo latera, quodlibet suo sibi correspondenti æqualia, nimirum AC, & DE inuicem ex 1. Prog. Sicut AF, & GD ad inuicẽ, ex 2. Prog. Angulumque A nigerrimum angulo D albo æqualem, ex 3. Prog. Ex 22. propos. duo triangula nigerrimum ACF, & secundum album DEG erunt æqualia, quibus vtrisque si addatur commune Trapezium nigrum CDFG, cum vtrisque idem addatur; adhuc erunt æqualia. Quare triangulum nigerrimum, & trapezium integrantes parallelogrammũ ADFG Trapezio, aeq; triãgulo albo integrãtibus parallelogrammũ secundũ CFGE equabũtur, quod demõstrare oportebat.

Secundus casus est. Si FC latus secundi parallelogrammi cadat in D. Tunc enim ex eadem ratione AD, & DE rectæ erunt (vt primo Prog. ostensum est) æquales sicut & AF, & GD, (vt secundo) Et angulus A nigerrimus angulo D albo æqualis. Quare duo triangula nigerrimum DAF, & EDG album æqualia erunt. Addito itaque, tãm vni, quàm alteri commune triãgulum nigrum DFG complens, tãm cum nigerrimo, quàm cum albo triangulo parallelogramma nigrum, & semialbum; Ea remanebunt adsue æqualia, nimirum ADFG, & EDFG parallelogramma.



Tertius casus est si FC cadant extra punctum D, ita vt secet latus GD in K. Cùm itaque rectę AD, & CE ex supradicta ratione 1. Prog. æquales sint. Si vtrisque addatur DC inter eas medians. Linea AD cum addita DC, & CE cum eâdem additâ DC erunt æquales. Sicut & FA, & GD ex prop. 34. Et etiam, supradicta ratione 3. Prog. angulus D niger



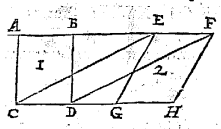
niger, s. CDK externus, & angulus A niger internus æquales erunt. Quare triangulum EDG, & CAF erunt æqualia. Auferatque itaque triangulum nigrum DCK per imaginationem commune vtrisque, remanebuntque duo trapezia primum subnigrum ADFK, & secundum album CEKG adinuicem æqualia. Vt itaque fiant parallelogramma æqualia, adde vtrisque mente commune triangulum nigerrimum FGK, & habebis ea æqualia, nempe ADFG, & CEFG; quod demonstrandum erat.

THEOR. IV. PROP. XXXVII. Euc.36.

Parallelogramma super æqualibus basibus, & in eisdem parallelas constituta inter se sunt æqualia.

SInt duo parallelogramma. Primum ABCD. Secundum verò FEGH inter parallelas AF, & HC constituta, & super æqualibus basibus CD, & FE sita. *Dicit hæc esse æqualia.* Quod, vt probet, coniungit basim primi cum latere basi oppositi secundi, nimirum puncta extrema ad eandem partem, V. g. sinistram, vt sunt E, & C recta CE. Simliterque duo puncta terminatiua ad partem dextram F, & D rectã DF.

Probat verò ostendendo prius, has lineas postremò tractas CE, & DF cum basi primi parallelogrammi CD, & basi secundi FE facere parallelogrammum, ex 34. propos. Nam cum EF basis secundi, & CD basis primi sint parallelę, & æquales sit, vt ibi diximus. Quod CE, & FD postremò tractæ sint parallelæ, & æquales, & ideò, quod CDFE sit parallelogrammum, cùm eius definitio requirat tales prorsus conditiones. Quo posito sic astruitur intentum. Que eidem sunt æqualia, & inter se sunt æqualia: Sed parallelogrammum primum ABCD, ex preced. propos. est æquale parallelogrãmo postremò facto CDEF; Eidemque est æquale ex eadẽ parallelogrammum secundum EFGH, ob basim eãdẽ EF; ergo hęc nẽpe primum, & secundum erunt inter se æqualia.



COROLLARIVM.

COlligitur trapezia quoque, quorum oppositę bases inter se æquales, sint inter parallelas, inter se æqualia esse; nam trapeziũ AEGC est æquale trapezio BDFH siquidem duo parallelogramma 1, & 2 sunt inuicem æqualia. Trapezium verò BDEG vtrisque commune: Vnde etiam idem dicendum erit si alterum latus alteri sit idem, & opposita latera sint æqualia.

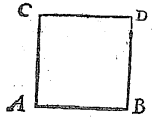
PROB. V. PROP. XXXVIII. Euc.46.

A data recta linea quadratum describere.

SIt data recta linea AB, super quam quadratum describere necesse sit.

E duobus punctis A, & B ipsi AB geminę perpendiculares erigantur, per 8. propos. & sint æquales per propos. 6. ipsi AB, & puncta CD connectantur, *& quadratum erit constitutum.*

Probatur, quia illud erit quadratum. Quod æquiangulum, & æquilaterum est, sed figura ex facto habet æqualia latera duo nempe AC, & BD ipsi AB; Tertium verò nimirũ DC, quod reperiatur inter perpendiculares AC, & BD, & ideò parallelas, ex prop. 29. quòd anguli A, & B sint duo recti. Quamobrem DC, vtpote parallelas coniungens, & æquales erit æqualis ipsi AB, & parallela, ex propos. 33. Omnia itaque latera sunt æqualia, & parallelá.



Probatur secundò de angulis, nam iam duo A, & B sunt recti; quare & alij duo, D, & C, vtpote oppositi istis, ex propos. 34. erunt recti; cùm constitutum, sit quoque parallelogrammum.

EXPENSIO VIII.

De triangulorum cum parallelogrammis trapeziisque parallelis constantibus comparatione.

PArallelogramma in triangulà diuiduntur. Vnde iam incipit comparare triangula; cum toto, quòd primò, & immediatè componunt; Cæterę enim figurę, licet, ex triangulis componantur; plura tamen ea componunt: Trapezia verò, & parallelogramma tantùm duo.

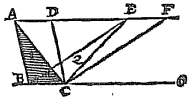
THEOR. I. PROP. XXXIX. Euc.41.

Triangulum parallelogrammi inter easdem parallelas, & eâdem basi constituti, dimidium est.

SIt Parallelogrammum seminigrum BADC, & triangulum BCE inter parallelas AE, & BO & super eandem basim BC constitutum. *Dico esse triangulum* BEC *dimidium parallelogrammi seminigri* ADBC.

Quod vt probetur ex propos. 32. à dato puncto C ducatur parallela ipsi BE lateri trianguli, & erit factum parallelogrammum BCEF, cuius diameter CE. Diuidatur deinde parallelogrammum seminigrum bifariam ducto diametro AC. Quo posito sic propositio probatur.

Nam, cùm parallelogramma album, & semialbum sint super eamdem basim, & inter easdem parallelas, ex prop. 36. sunt inter se equalia; Sed illorum parallelogrammorum æqualium dimidia sut triãgula nigrum 1, & 2, ex prop. 34 Eo quia latera eorum AC primi, & EC secundi sint parallelogrammorum diametri. Quæ verò æqualium sunt dimidium, ex pronunc. 7. inter se necessariò æqualia sunt. Quapropter triangula primum nigrum, & secundum album inter se æqualia erũt. Sed nigrum est parallelogrammi seminigri dimidium. Ergo etiam triangulum album 2 erit ciusdem parallelogrammi dimidium.



COROLLARIVM I.

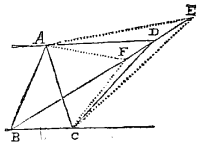
HInc patet quod triangula super eandem basim, & inter easdem parallelas constituta sint inuicem æqualia : Nam sunt triangula nigrum 1, & album 2 dimidia æqualium parallelogrammorum A C seminigri, & alterius albi B F, vt in serie demonstrationis ostensum est.

COROLLARIVM II.

ETiam esse veram propositionem conuersam, nempe *triangula æqualia super eádem basim, & ad eosdem partes constituta esse inter parallelas*.

Nam sint triangula B A C, & B D C æqualia super eandem basim constituta B C, & ducta per eorum vertices A D linea, non sit parallela basi B C: Ducatur parallela; hæc cadet, vel infra, vel supra lineam vertices coniungentem A D.

Cadat primum supra, & sit A E, & producta B D, in E coniungatur C E. Itaque triangulum B C E; quod inter parallelas exaduersarijs sit, erit æquale triangulo B C A. Sed eidé ex hypothesi est æquale triangulum B D C: Ergo triangulum B E C maius effet æquale minori B D C, vtpote quod sint vni tertio B A C æqualia, quod est absurdum.



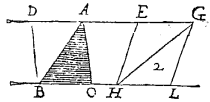
Quod si cadat infra ad F, vbi incidit, ducatur C F, & erit triangulum B C F æquale triangulo B A C eo quod ex aduersarijs sint parallelæ A F, & B C, & consequenter minus B F C, æquale triangulo B C D maiori; quod esse nequit.

THEOR. II. PROP. XXXX.

Triangulum parallelogrammi inter easdem parallelas, & æquali basi constituti dimidium est,

SIt triangulum L H G notatum numero 2, & parallelogrammũ seminigrum D B A C inter parallelas D G, & B L, & constituta super æquales bases B C, & H L; Dico triangulum 2 esse dimidium parallelogrammi seminigri.

Trahatur H E parallela lateri trianguli L G à puncto H, ex propos. 32., & erunt duo parallelogramma, ex 37. prop. æqualia, & erit H G parallelogrammi albi diameter. Trahatur quoque diameter B A in seminigro parallelogrammo.



Quo facto probatur propos. Triangula nigrũ, & album 2, vtpote dimidia æqualium parallelogrammorum semialbi, & albi inuicem sunt æqualia. Ergo triangulum 2 erit etiam medietas parallelogrammi semialbi,

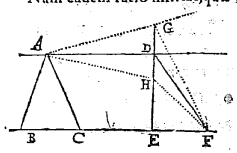
COROLLARIVM I.

COlligitur hinc, triangula super æqualem basim, & inter easdem parallelas esse inuicem æqualia. Quia sunt dimidia æqualium parallelogrammorum seminigri, & albi.

COROLLARIVM II.

ESse quoq; veram propositionem conuersam præced. Coroll. *Nempe triangula æqualia super æqualem basim ad easdem partes constituta esse inter parallelas*.

Nam eadem ratio militat, quæ superiori 2. Coroll. præceden. propos. Nam si A D ducta per vertices triangulorum B A C, & E D F æqualium non est parallela lineæ B F; erit altera, quę si cadet super A D, vt A G, ducta F G, fiet triãgulũ E F G, quod ex dictis per aduersarios æquabitur triangulo A B C, & cõsequenter sibi ex hypothesi æquali E F, maius minori; quod esse nequit; Et si cadat infrà, vt A H. Efficietur triangulum E H F, quod vtpote inter parallelas A H, & B F erit æquale triangulo B A C, & ideò sibi æquali triangulo E D F; minus maiori; Quod esse nequit.

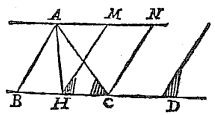


PROB. I. PROP. XXXXI. Euc.42.

Dato triangulo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

DAtum triangulum sit A B C, & datus angulus rectilineus D. Oporteat autem facere parallelogrammum, quod sit æquale triangulo: Sed quod obtineat angulum internum aliquem æqualem angulo D. Sic efficere oportebit. Trianguli dati aliquod latus, V. g. B C diuidatur per medium in H, ex propos. 7. & per doct. propos. 24. à puncto dato H fiat angulus æqualis angulo D; trahaturque H M, vt lubet, siue ad dextram, vt in exemplo, siue ad sinistram, si commoditas postulet. Deinde per propos. 32. trahatur parallela A M ad B C à puncto dato A. Rursusque per eandem propos. 32. ducatur à puncto dato C parallela ad H M; quę occurrat parallelæ primo tractę A M, & prolungatę si oportuerit in N. Eritque factum *parallelogrammum* M N H C *æquale triangulo* A B C; quòd vt probetur linea A H coniungatur punctum H cum vertice trianguli A.

Probatur. Nam parallelogrammum H C M N duplum est trianguli A H C, propos. 39., siquidem est super eandem basim H C; & inter parallelas A N, & B C. Sed triangulum A H C est dimidium triãguli totius B A C, eo quod duo triangula, in quę diuisum est, sint æqualia, vtpote super æquales bases B H, & H C, & inter easdem parallelas A N, & B C constituta, ergo totum triangulum A B C erit æquale parallelogrammo M N H C, vtpote ambo eiusdem trianguli A H C dupla.



CO-

COROLLARIVM.

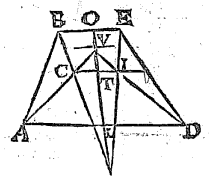
COlligitur ex Pelletario; quòd eodem pacto potest constitui triangulum in dato angulo, quod sit æquale dato alicui parallelogrammo, vt in figura huius propos. datum parallelogrammum sit M N H C, ex C puncto dato fiat angulus nigerrimus, in quo postulatur, vt fiat triangulum. Trahendo A C, & prolungato latere parallelogrammi M N, vsque dùm occurrat in A lineæ anguli dati nigerrimi A C; assumatur in linea B G, B H æqualis lineæ H C, trahaturq; à puncto B linea A B, quę compleat triangulum B A C, quòd est duplum parallelogrammi M N H C, vtpote ex probatione superioris propositionis constat.

THEOR. III. PROP. XXXXII.

Triangula Trapezijs bipartitis, duobusque lateribus parallelis clausa inter se sunt æqualia.

SInt duo triangula A B C, & I E D clausa Trapezijs bipartitis, & parallelis duobus lateribus, vt sunt A C I D, & B C E I, & A B E D, quæ habent latera A D, & C I, & B E parallela, & bipartita linea L O. *Dico hæc triangula esse æqualia*.

Probatur Trapezium A C I D linea T L latera bipartiente est diuisũ in duas partes æquales. Nam productis lateribus I, vt conueniant in V, erit triangulum A V L triangulo V I D æquale; quòd sit inter easdẽ parallelas, & super æqualem basim; sic dicas de triangulo C T V, & V T I. Ablatis ergo triangulis istis C T V, ab A V L, & T V I à triangulo V I D trapezium residuum A C T L erit æquale residuo T L I D. Et idem dicendum de parte C T B O, quòd sit æqualis parti T O E I in trapezio B I; & de parte A B O L; quòd sit æqualis parti L O E D, in trapezio B D; Si ergo ab istis partibus æqualibus trapezij magni auferãtur partes æquales trapeziorum C O, & C A L T, hinc ab A O; inde T E, & L T I D ab O D, remanebunt residua triangula æqualia A B C, & I E D, quod erat ostendendum.

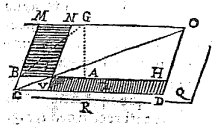


PROB. II. PROP. XXXXIII. Euc.44.

Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

SIt triangulum datum punctatum B A C; angulus verò datus Q; linea verò data R. Iam nosti ex propos. 41. facere parallelogrammum æquale triangulo dato B A C, quod parallelogrammum angulum æqualem angulo dato obtineat. Fiat igitur, & sit parallelogrammum nigrum M N B L, habens angulum L equalẽ dato Q; ipsum verò totum secundùm aream æquale sit triangulo dato punctato B A C. Extendetur ita que B L in H, ita vt L H sit æqualis datæ R. Deinde per punctum H extremum ducta parallela H O ad B M occurrat rectę M N parallelę B H, in O: Eritq; factum parallelogrammũ album N H, quod diametro O L bifariam diuidatur, & producatur vltra L in C, donec occurrat lateri B M nigri parallelogrammi producto in C, deinde ex C ducatur parallela ad B H, vsque ad latus O H, productum in D. Postremò producatur latus N L parallelogr. N L nigri in V. Eritque alterum parallelogrammum nigrum longius, cuius latus L H, vel V D est æquale datæ R. Probandum verò est quod & angulus nigerrimus ad L sit æqualis dato Q, & ipsum V H triangulo dato punctato B G A.

Probatur itaque primò de angulo. Nam ex prop. 12. angulus ad L nigerrimus secundi parallelogrammi nigri lõgioris est æqualis angulo L alterius nigri primi parallelogrammi, quod sint anguli ad verticem. Sed angulus L est æqualis ex constructione angulo dato Q: Ergo & angulus L nigerrimus secundi V H est æqualis eidem Q.

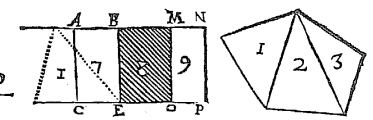


Probatur secundò, quod totum parallelogrãmum nigrũ secundum V H sit quoad aream æquale triangulo dato G B A; nam cùm sit vnum ex complementis eorum parallelogrammorum, quę circa diametrum sunt, fit, quòd ex propos. 35. sit æquale parallelogrãmo primo nigro B N: At illud est æquale ex constructione dato triangulo B G A. Ergo & parallelogrammum secundum nigrum eidem æquale erit, quod oportebat demonstrare.

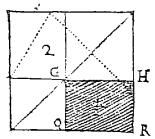
PROB. III. PROP. XXXXIV. Euc.45.

Dato rectilineo æquale parallelogrammum constituere in dato angulo rectilineo.

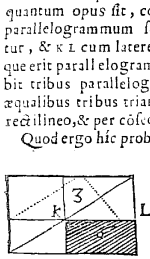
VIt hic Euclides docere modum, quo quælibet figura rectilinea etiam si triangularis, & inæqualis, tum angulis, tum lateribus possit ad figuram parallelam reuocari. Sit itaque figura quæcunque rectilinea 1, 2, 3, quę in totidem triangula resoluenda est, per lineas ad vnum angulum protractas; Ex inde fit angulus D iuxta quem parallelogrammum æquale ijs triangulis 1, 2, & 3 oporteat costituere: ad id verò efficiendum obseruanda est primò regula, & praxis, quam in 41. propos. docuimus, & constituendum est parallelogrammum A B C E album habens angulum C æqualem dato angulo D, secundò triangulum 2 reducendum est ad parallelogrammum nigrum per regulas propos. antecedentis, vt vides factum in sequenti figura signata numero 2, quod angulum nigerrimum ad G dato angulo D æqualem possideat, & latus insuper G H æqnale lateri

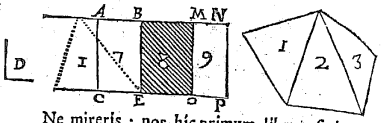


BE consequatur: Hocque transferendum est ad 3 figuram inter AB, & CE parallelas prolungatas, ita vt GH conueniat, & idem fiat cum latere BE: quod autem hoc effici possit, ex probatione constabit; Tertiò de 3 triangulo idem efficiendum est, reducendo illud ex institutione præcedentis Prop. ad parallelogrammum nigrum, vt in tertia figurâ factum est, faciendo angulum nigrū ad K æqualem angulo dato D, & latus KL æquale lateri BE; deinde inter parallelas AB, & CE prolungatas quantum opus sit, constituendum; ita vt apud parallelogrammum secundum nigrum collocetur, & KL cum latere MO idem fiat. Factumque erit parallelogrammum ANCP quod constabit tribus parallelogrammis 7, 8, nigro, & 9 æqualibus tribus triangulis, quodque nempe suo rectilineo, & per cõsequens toti rectilineo 1, 2, 3.



Quod ergo hic probationem reposcit est, quod parallelogrammum secundæ figuræ nigrum possit transferri inter parallelas AN, & CP, illud simul adaptando, vt præcepimus lateri BE. Et priùs quod latus GH parallelogrammi nigri in secunda figura possit adaptari lateri BE patet; quia huic BE per constructionem fecimus æquale latus GH: Quare cum eo congruet. At quia angulus G nigerrimus est æqualis angulo dato D, cui quoque æqualem fecimus angulum C, & per consequens, & angulum externũ E nigrum in 1. fig. ex prop. 30. angulus G niger secundę figuræ capiet prorsus, & se æquabit cum angulo E nigro, & latus GQ incedet super EO. Sic angulus H nigerrimus secundę figuræ capiet adamussim, & conueniet prorsus cum angulo nigro B primæ figuræ, eo quia angulus B sit complementum anguli E ad æquandos duos rectos, siquidem ambo simul, vtpote ambo interni inter parallelas, & ad easdem partes sunt, ex prop 30. æquales duobus rectis. Et hanc eandem conditionem habet respectu anguli nigri G, & consequenter respectu anguli sibi equalis E in alterâ figura, angulus H nigerr. in hac figura secunda in parallelogrãmo GR cũ sint inter parallelas QG, & HR. Quare & etiam ipse erit complementum anguli E ad duos rectos æquandos, & ideò ipsi B æqualis. Vnde angulus H conueniet, & idem spatium æquabit, ac angulus B, & HR incedet cum parallela BM. Quare si fiat EO æqualis HR tracto parallelo latere MO erit BEO parallelogrammum æquale nigro GR figuræ secundę. Eademque probatio applicabitur parallelogrammo nigro 3. figuræ ostendendo KL ex constructione conuenire cum MO: Angulum nigerrimum K bene collocari, & occupare idem spatium, ac angulus O exterior albus in prima figura, & angulum L nigerũ in fig. 3. benè conuenire, & esse æqualẽ angulo M albo in prima figura; Quia tàm vnus, quàm alius compleant æquales angulos, nępe nigrum K, & album O, ad duos rectos. Vnde euenit, quod parallelogrammo 8 nigro possit superaddi perallelogr. 9 album inter parallelas AN, & CP, & fieri totum parallelogrãmum ANCP æquale rectilineo 1, 2, 3.





Ne mireris; nos hic primum librum finire; necesse enim fuit, vt Propositionem 47. Euclidis cum alijs eiusdem generis ponneremus in fine secundi Libri.

TRACTATVS V.

In secundum Librum Euclidis de æquipotentia linearum.

IN hoc secundo libro agit Euclides de linearum æquipotentium diuersis generibus. Dicuntur autem lineæ æqualiter posse; Cùm super ipsas potest fieri quadratum æquale alteri, vel quadrato, vel parallelogrammo à duobus lineis effecto; Quando autem duę lineę dicuntur æqualiter posse, de quadratis intelligitur. Quoniam, quando non intelligitur de quadratis, tunc exprimitur, quòd possit æquè, ac rectangulum tale, vel tale. In quatuor verò expensiones tantum hunc tractatum secabimus. In prima agemus de principijs. Secunda potentias linearum, vt sunt latera quadratorum ostendet. Tertia quatenus sunt latera triangulorum. Et tandem ducere lineas æquipotentes, vel eas secare docebimus. Superfluum verò est texere huius libri laudes, & vtilitates enumerare. Cùm experimentum demonstraturum sit, nihil ferè sine hac doctrina in Mathematicis posse probari.

EXPENSIO I.

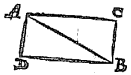
De principijs huic libro inseruientibus.

NE laboremus in singulis propositionibus ostendendo parallelogramma parua, quæ in rectangulo maiori à parallelis ad ipsius latera fiunt esse rectangula. Hic id duximus ostendendum semel; vt hęc vnica demonstratio singulis demonstrationibus infra ponendis deseruiat. Aduerte autem parallelogrãmum rectangulũ solo nomine rectanguli ab Euclide appellari.

THEOR. I. PROPOS. I.

In parallelogrammo omnes anguli recti sunt, si vnus sit rectus.

PRobatur eo quod omnia latera parallelogrammi sint parallela ex eius definit. Posito itaq; A angulo recto; cùm AC incidat parallelis AD, & CB, ex prop. 30. l. 1. anguli interni erunt duobus rectis æquales: Sed A est rectus, ex hypothesi; Ergo etiam C, Quòd si A, & C recti sunt: Ergo etiam oppositi D, & B anguli, ex propos. 34. primi.

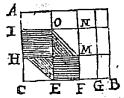


THEOR. II. PROPOS. II.

Si sit rectangulum, & intra ipsum ad latera parallelæ ducantur, quæ se intersecando faciunt sunt rectangula parallelogramma.

SIt rectangulũ AB magnum contentum lateribus AC, & CB: *Dico, quod si ad latera hæc ducantur parallelæ* IN, & HM; & rursus EO, & FN, *se intersecando efficere rectangula.*

Probatur primò, quòd habeat latera æqualia parallelogrammum quodlibet inclusum, V.g. NE. Nam latus OE, est æquale lateri FN, quod sit inter parallelas ON, & EF. Sic ON, & EF sunt æquales; quòd sint inter parallelas EO, & FN, ex prop. 33. primi.



Erunt quoque omnes anguli recti: Dùm C angulus albus rectus est ex hypothesi: Ergo etiam angulus E niger, quòd ex propos. 30 sint æquales, vtpote internus, & externus. Quare ex prop. anteced. etiam omnes reliqui O, N, F. Idcircò, cùm latera omnia probata sint æqualia, & anguli ostensi sint æquales; erit OENF parallelogrammum rectangulum. Quod autem dicitur de hoc parallelogrammo; dicatur etiam de alijs, cùm par sit ratio.

COROLLARIVM I.

SEquitur ex hac propos. Duas parallelas, quæ ab æqualibus partibus laterum angulum rectum comprehendentium, hinc, inde proueniunt, se decussare in segmenta æqualia: quia ab æqualibus segmentis procedunt, & ideò efficere quadrata. Talis est figura seminigra MO, quia enim EF, & HI sunt æquales; MN, & ON sunt quoque æquales, & ideò est quadrata.

DEFINITIO.

OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur sub rectis duobus lineis angulum rectum comprehendentibus.

Sit parallelogrãmũ rectangulũ ACBD prop. I.

Dicitur

Dicitur hoc parallelogrãmũ duobus rectis cõtineri; Namq; licet quatuor lineis verè cõprehẽdatur, duę tamen sunt, quę inæquales inuicem; Illud à quadrato distinguunt. Sic, & vnum angulum, licet sint quatuor, sufficit nominare; quia per rectum angulum secernitur à Rhombis, & à Rhomboidibus, quę nullum angulum rectum obtinent. Patet autem definitio ex propos. 4. in quâ demonstrauimus, quòd in parallelogrammo, si vnus angulus sit rectus, omnes alij tres sint recti quoque.

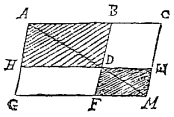
COROLLARIVM II.

SEquitur autẽ ex hac antecedẽti definitione, & propositione omnia parallelogramma, à parallelis ad latera in parallelogrammo maiori illa continente facta, contineri, vel sub ipsis segmentis, vel sub æqualibus ad ipsa segmenta à quibus illę parallelę ductę sunt. V. g. rectangulum seminigrũ HE dicitur cõcludi sub segmentis CH, & CE; Patet, ex definit. quia angulum C rectum concludunt; quòd verò MO seminigerrimum concludatur sub æqualibus HI, & EF, patet; quia latus ON æquatur EF, cùm sit inter parallelas; & NM latus lateri HI eâdem ratione.

DEFINITIO II.

IN omni parallelogrammo vnumquodque eorum, quæ circa diametrum sunt parallelogrammorum, cum duobus complementis, Gnomon vocetur.

Dicit in parallelogrammo AGCM, vnum parallelogrammum diametrum AM ambiens, V. g. nigrum cum duobus complementis albis DC, & DG vocandum esse *Gnomonem*; Vel alterum ni-



gerrimum minus, cum duobus complementis ijsdem *Gnomonem* appellari. Igitur tolle mente à parallelogrammo toto AGCM vtrumlibeat parallelogrammorum nigrorum diametrum ambientium, & reliqua remanens figura Gnomon vocabitur. Sic deme parallelogrammum nigrum AD, reliquum erit Gnomon HMB, vel nigerrimum DM, & reliquum erit Gnomon EAF.

EXPENSIO II.

De potentijs linearum diuersimodè sectarum ad æquanda suorum segmentorum rectangula.

POtentię linearum sumuntur, vel totæ, vt eorum quadrata, & rectangula æquè possint, ac segmentorũ quadrata, atq; rectangula, vel totę cũ aliquo segmenti, vel quadrato, vel rectangulo, vel non totę; sed partis alicuius potentia, nimirum eius quadratum, dicitur æquale, vel solum, vel cum aliquo rectangulo, alijs segmentorum rectangulis. De istis ergo potentijs, ideſt quadratis, quę lineę possunt efficere, iuxta tres assignatas comparationes agemus in hac expensione.

THEOR. I. PROP. III. Euc.1.

Si fuerint duæ rectæ lineæ, secenturque ipsarum altera, in quotcumque segmenta: Rectangulum comprehensum sub duobus illis rectis lineis æquale est omnibus rectangulis, quæ sub non secta, & quolibet segmentorum comprehenduntur.

SInt duę rectę A, & BC, quarum BC in segmenta aliqua diuidatur, vt libuerit, V. g. in partes BD, & DE, & EC. Dico, quòd si ex omnibus istis partibus fiant rectangula, à singulis, & non secta lineâ A comprehensa: Hæc omnia erunt æqualia rectangulo, quod sub linea A non secta, & lineâ rectâ sectâ BC continetur.

Praxis 1. Constitue itaque parallelogrammum rectangulum erigẽdo duas



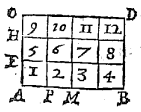
perpendiculares æquales lineæ A ab extremis B, C, & rectarum extremitates G, & E rectâ coniũgantur. Nam, vt probatum est propos. 38. primi de quadrato, omnia latera opposita erunt parallela, & æqualla, & omnes anguli recti. Quare erit factum rectangulum sub A non sectâ, & sectâ BC totâ comprehensum.

Praxis 2. Deinde ex diuisionibus D, & E trahe parallelas alteri perpendicularium vsque ad alterum latus oppositum GF. Nam ex propos. 33. primi erunt æquales perpendicularibus, vel GB, vel CF, & consequenter lineæ A non sectæ: Vnde erunt constituta rectangula super partes rectę BC, album; nigrum medium, & alterum nigrum EF, ex partibus BD, DE, EC, & lineis æqualibus datæ lineæ A.

Quare facili ostensione, quæ ex ipsa effectione eruitur, ostenditur propositio. Rectangula album, nigrum medium, & alterũ EF sunt constituta ex partibus lineę sectę BC, & linea A non secta, vt 2. praxi ostensum est; Sed hæc omnia integrant rectangulum à totâ rectâ BC, & non secta A comprehensum, & idem spatium occupant. Quare ei erunt æqualia.

COROLLARIVM.

HInc colligit Commandinus. Idem sequi, etiam si altera linearum in quotcumque segmenta diuidatur. Nam rectangula facta à partibus, segmentisque, tum vnius, tum alterius, æquatur toti rectangulo à lineis illis duabus integris consurgente. Id verò patet. Nam



diuisa AO in quotcumque segmenta, & AB pariter; & à singulis diuisionum partibus ductis parallelis se insecabunt, & illis intersectionibus se diuident in partes illis segmentis æquales, à quibus ducuntur, erũtq; rectangula, ex pr. 2. Quare, cũ omnia ea rectangula, vt 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. à rectangulo toto, lineis AB, & AO comprehẽso, cõcludantur, illi erunt æqualia.

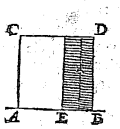
THEO-

THEOR. II. PROPOS. IV. Euc.2.

Si recta linea secta sit vtcumque, rectangula, quæ sub tota, & quolibet segmentorum comprehenduntur, æqualia sunt illi, quod à tota fit, quadrato.

SIt recta AB diuisa vtcunque in E, & super eam constituatur quadratum ABCD. Dicit *hoc quadratum fore æquale rectangulis à tota* BA, *& parte* AE, *& à tota* BA, *& altera parte* EB *comprehensis.*

Trahatur à diuisione E parallela ad alterum laterum; factaque erunt duo rectangula, de quibus fermo est, nigrum, & album; quæ ex 2. propos. 2. Coroll. continebuntur nigrum sub segmento EB, & tota AB, vel æquali BD, & album sub tota AB, vel æquali AC, & segmento AE.



Quapropter cum hæc rectangula album, & nigrum in quadrato CB contineantur, eiq; commensurentur; patet esse æqualia. Vel prob. ex preced. quia AB secta est, vtcumque, & AC data æqualis ipsi AB, vnde rectangula nigrum, & album, ex tota, & segmentis AB, erunt æqualia rectangulo BC à secta, & non secta comprehenso.

COROLLARIVM.

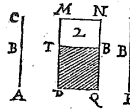
ELicies. Quod licet propositio de vnica sectione loquatur; adhuc tamen verificatur de pluribus sectionibus, ne dum vnius lineæ, sed vtriusque; eadem enim hæc prop. quæ 3, est, nisi quòd ambæ lineæ, quæ dantur, hîc ponuntur æquales, quæ comprehendunt angulum rectum, & ideò hîc faciunt quadratum, ibi verò inæquales, & faciunt rectangulum. Vnde quæ verificantur de præcedenti, etiam de hac vera sunt.

THEOR. III. PROP. V. Euc.3.

Si recta linea secta sit, vtcumque; rectangulum sub tota, & vno segmentorum comprehensum, est æquale rectangulo, quod sub ambobus segmentis continetur, & quadrato, quod ab ipso segmento efficitur.

DIuidatur linea AC vtcumque in B, & eligatur, quæ pars magis placuerit, V. g. BC; fiatque rectangulum comprehẽsum à tota CA, & segmento BC; quod sit I semialbum. Deinde à puncto diuisionis B mensurato in PM ducatur parallela BT. Nam, quia BP est æqualis parti BA, & PQ parti BC erit rectangulum album I illud sub segmentis contentum, de quo loquitur propos. Pariter cùm BM, & MN sint æqualia segmento BC, rectangulum nigrum MT erit quadratum illius segmenti, sub quo, & tota, rectangulum continetur nimirum MQ. *Dico itaq; rectangulum* BQ *ex segmentis, & quadrato* MT *ex segmento, esse æqualia rectangulo* MQ *contento ab ipso segmento* MN; *nimirum æquali* BC, *& tota* PM *æquali lineæ* CA.

Probat ex 3. propos. Quia linea PM secta est, vt nobis placuit, iuxta mensuram CB, & data est altera non secta æqualis, vt placet ipsi CB, nimirum MN. Vnde rectangula album, & nigrum ex non secta MN, & segmentis PB, & BM contenta æqualia erunt ex 3. huius rectangulo ex tota secta PM, & non secta MN comprehenso; Probatur etiam alio modo. Quia rectangulum I ex segmentis, & quadratum nigrum ex segmento BC ex constructione continentur in rectangulo MQ. Et idem erit, si eligas alterum segmentorum, & fiat eodem modo rectangulum MQ, quod est 2.



COROLLARIVM.

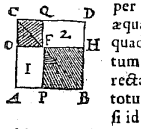
HInc est, si totum rectangulum 1, & rectangulum 2 componerentur; quòd facerent quadratum, dummodo secundùm latera longiora NQ, vel PM fieret compositio. Patet, quia latera longiora, V. g. PM constant ex duobus segmentis maiori AB, & minori BC. Sed minora latera sunt duo eadem segmenta maius rectangulo 2, minus rectanguli 1. Quare, si componatur facient totum latus PM; Vnde latera erunt æqualia totius compositi, & ideò totum compositum ex duobus rectangulis 1, & 2, integratum erit quadratum.

THEOR. IV. PROP. VI. Euc.4.

Si recta linea secta sit vtcumque, Quadratum, quod à tota describitur, æquale est illis quadratis, quæ describuntur à partibus, & insuper duobus rectangulis, quæ à partibus comprehenduntur.

SI linea AB, vt libet, diuidatur in P. Dico; quòd, si ex parte AP fiat quadratum, & aliud ex alia parte PB, & ex ijsdem partibus AP, & PB duo rectangula fiant; *hæc omnia fore æqualia quadrato, quod à tota describitur.*

* Probatur ex præceden. propos. Nam si fiat ex tota AB, & parte PB rectangulum QB, & in eo

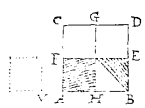


per parallelam HF à puncto H æquali segmento PB describatur quadratum, habebimus quadratum nigrum ex segmento, & rectangulum 2 ex segmentis, & totum QB ea continens. Item, si id fiat ex parte minori AP, habebimus quadratum nigrum, & rectangulum 1, ex segmentis, & hæc continens QA. Quæ rectangula 1, 2, & quadrata nigra æquant comprehensa sub tota, & partibus, vt sunt rectangula ea continentia QB, & QA: Sed, & Coroll. propos. anteced. ea si coniungantur, faciunt quadratum æquale quadrato ex tota AB descripto; Ergo duo quadrata ex partibus descripta, & duo rectangula ab ijs comprehensa æquantur quadrato ex tota AB descripto.

CO-

COROLLARIVM.

HInc elicitur, lineas duplas facere quadrata sua quadruplicia. Nam si detur linea v, & dupla AB, super quam fiat quadratum ABCD; & diuisis lateribus singulis per medium, trahãtur parallelæ ad latera FE, & HG; quæ se intercipiendo ex 2. huius propos. Cor. æqualia efficient segmenta, quod sint dimidia æqualium laterum quadrati magni CB. Sequitur omnia quadrata esse, & æqualia inuicem, & consequenter quadratum v punctato, cui ob lateris AH, quod sit dimidium AB, æqualitatem, ex eis vnum, V. g. nigram quadratum æquatur; Ergo & omnia: Sed hæc quadrata sunt quatuor. Ergo quadratum illi continens CF quadruplum est quadrati puncti v.

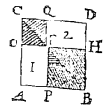


COROLLARIVM II.

FLicitur quoque è contra; quòd si quadratum sit quadruplum alteri; latus maioris esse duplum minoris lateri: Quia, cùm quadratum nigrum in minori quadrato sit æquale minori puncto v, sequitur; vt latera quoque sint ei æqualia: Quare AH æquale erit lineæ v. Sed AH est æquale lineæ HB; quòd quadratum eius semínigrum sit æquale ex hypothesi nigro. Ergo etiã latus HB est æquale lateri v. Quaderè totum latus AB erit duplum lateris v.

COROLLARIVM III.

HInc quoque manifestatur. Parallelogramma circa diametrum quadrati esse quadrata: Quia demonstrabitur ductam diametrum in figura propositionis, CF, & FB in quadratis nigris esse vnam, & eandem lineam; si rectangula CD, & QB componantur, ita vt partes æque commensurentur. Nam tunc latus PF rectanguli, & QF alterius coincident, & eandem lineam fiet cum lateribus rectangulorum nigrorum; Vnde quadrata nigra se tangent in puncto F, quare, & diameter CF, & FB se tangent in eodem puncto. Fiunt etiam in directum, quia anguli apud F recti à diametro bifariam diuiduntur, ex propos. 34. & latera subtensa sunt æqualia, vtpote latera quadratorũ. Cum itaq; anguli CFQ, & HFB nigri sint semirecti, & angulus F rectus; Ergo lineæ CF, & FB incidentes in lineam, V. g. QF faciunt angulos semirectum nigrum, & album cum altero semirecto ad eandem partem nigro duobus rectis æquales; Quare illi ex prop. 14. lib. 1. diametri CF, & FB in directum erunt, & erit vna linea; & ideò diameter quadrati CB maioris. Ergo parallelogramma nigra circa diametrum quadrati CB magni erunt quadrata.

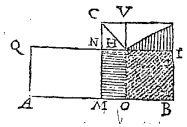


THEOR. V. PROP. VII. Euc.5.

Si recta linea secetur in partes æquales, & inæquales, rectangulum sub inæqualibus segmentis totius comprehensum, vnà cum quadrato, quod nascitur ab intermedia sectionum, æquale est ei quadrato, quod à dimidia describitur.

DIuidatur linea AB in partes æquales, vt in M, & non æquales in O: Superque medietatem MB fiat quadratum; tractoque diametro BC, ab o puncto inæqualium partium, excitetur parallela OV lateri quadrati, V. g. CM, & vbi secat diametrum in H ducatur QI parallela ad AB, & ducta ab A ei perpendiculari AQ, erit rectangulum OQ ex parte nigrum segmentis inæqualibus AO, & OB contentum, *de quo dico; quòd cum quadrato ex MO inter media sectionum s. quadrato CH, sit æquale quadrato à medietate descripto CB.*

Probatur. Nam pro Progress. primò ex Coll. 3. anteced. prop. Rectangula nigrius, & album sunt quadrata, vtpote circa diametrum CB consistentia. Quadratum verò paruum album, ex prop. 2. Coroll. 1. huius factum super NH, dicitur etiam factum super MO intermedia sectionum; & latus OH rectãguli QO ex parte nigri æquatur ipsi OB: Vnde habemus rectangulum QO, & quadratum paruũ CH, de quibus loquitur propositio, & dicit esse æqualia quadrato BC ex dimidiâ.



Progress. 2. Considerandum deinde complementa nigrum, & seminigrum, ex propos. 35. primi inuicem esse æqualia, quibus vtrisque, si addas quadratum nigerrimum per imaginationem adhuc remanebunt æqualia.

Progress. 3. Complementum autem alterum nigrum NO, cum quadrato nigro addito æquatur rectangulo albo MQ, vtpote ex propos. 37. primi inter parallelas, & super æquales bases AM, & MB posita.

Progress. 4. Idcircò concluditur, quod si complementum semialbum, cum quadrato nigro, ex 2. Progress. æquatur complemento nigro, & eidé quadrato nigro: At huic tertio, ex 3. Progr. æquatur rectangulum album; quod etiam sint æqualia inuicem rectangulum videlicet album, quadrato nigro, cùm complemento semialbo.

Progress. 5. Adde itaque vtrisque æqualia, nempe rectangulo albo complementum nigrum, & fit rectangulum ex segmentis inæqualibus OQ, & quadrato nigro, complementoque seminigro idem complementum nigrum, vt fiat Gnomon NBV: Eritque rectangulum ex segmentis inæqualibus QO æquale Gnomoni NBV: Adde rursus vtrisque quadratum album CH, *eritque rectangulum QO cum quadrato CH, æquale Gnomoni NBV cum quadrato eodem CH complente quadratum, nimirum CB, ex dimidia,* quod erat probandum.

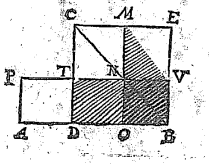
THEO-

THEOR. VI. PROPOS. VIII. Euc.6.

Si recta linea data bifariam secetur, & illi recta quædam linea in rectum adijciatur; rectangulum comprehensum à totâ datâ, & additâ, tamquam vno latere, & adiectâ solùm, tamquam alio, vnà cum quadrato, quod describitur à dimidia; æquale est quadrato, quod à medietate, & adiuncta; tamquam vnâ lineâ, describitur.

SI data linea AO diuisa per medium in D, & ei alia addita sit OB. Dicit propositio, quòd si à dimidia, & addita simul, nimirum DB, fiat quadratum CB, & ex tota AO data, cum adiecta tamquam vnâ lineâ AB, & adiectâ solùm pro alio OB; vel æquali BV, fiat rectangulum PB; *Quod hoc rectangulum sit æquale illi quadrato CB, non tamen se solum; sed cum quadrato NC, quod fieret ex DO dimidia.*

Progress. 1. Ductâ lineâ OM, & diametro CB per N. Rectangulum AV habet latus BV æquale adiectæ OB, ex hypothesi; Ergo nigerrimum rectangulum, ex Coroll. 3. propos. 6. est circa diametrum, & ideò quadratum: Ergo latus OB est æquale lateri BV: Alterum verò latus AB est tota data AO, cum adiecta OB, ideò est rectangulum, de quo loquitur propos.



Sic CN est quoque quadratum, quòd sit circa diametrum, & ex Coroll. 2. propos. 2. dicitur contineri à linea DO dimidiâ; Ergo est quadratum, quod cum rectangulo predicto æquale probandum est quadrato CB ex dimidia DO, & adiecta OB, tamquam vno latere confecto, vt vult propositio.

Progress. 2. Nunc considerandum est complementa inuicem, ex propos. 35. primi esse æqualia nigrum TO, & seminigrum. Sed complemento nigro est æquale rectangulum album PD, vtpote in parallelis, & super æquales bases AD, & DO, ex propos. 37. primi. Ergo rectangulum album, erit æquale complemento seminigro.

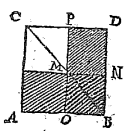
Progress. 3. Addamus complementum nigrum TO, & quadratum nigrum rectangulo albo, & fiet rectangulum PB de quo loquitur propositio: Addamus quoque eadem, nigrum complementum, & quadratum nigrum complemento semialbo, & fiet Gnomon TBM: Vnde additis vtrinque ijsdem, rectangulum PD æquale prius, ex 2. Progress. complemento seminigro, erit æquale Gnomoni TBM.

Adde rursus quadratum CN album, ex dimidia; ipsi Gnomoni fiet quadratum CB: Adde quoque rectangulo PB etiam hoc quadratum album CN; & erit æquale, quadrato CB, quemadmodum prius erit æquale Gnomoni; quod volebat propositio.

THEOR. VII. PROP. IX. Euc.7.

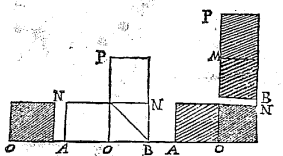
Si recta linea secetur vtcumque; quod à tota, quodq; ab vno segmentorum vtraque simul quadrata fiunt æqualia sunt illi, quod bis sub tota, & dicto segmento comprehenditur rectangulo, & illi, quod à reliquo segmento fit quadrato.

SIt data AB, quæ vtcumque secta sit in O. Dico, quod, si fiant duo quadrata, vnum minus ex segmento, quod eligeris, vt BO; alterum maius CB ex tota: Deinde fiant duo rectangula, vt AN, & BP sub tota, & eodem segmento comprehensa, *erunt illis quadratis æqualia addito tamen rectangulis quadrato alterius segmenti* AO.



Progress. 1. Si rectangula AN, & PB superponantur, & latus maius ponatur super minus efficietur pars ON quadrata, cùm OB, & BN sint æquales parti minori OB; & ideò inter se, quare efficietur Gnomon ABP æquale duobus rectangulis non solùm tamen; sed addito quadrato nigro ON, cùm causâ superpositionis illud quadratum ON nigrum, quod in duplici rectangulo erat duplex, in Gnomone factum sit vnicum.

Progress. 2. Adde deinde Gnomoni ABP quadratum ex reliquo segmento, ex prop. 2. Coroll. 2. complebit quadratum magnum CB, nam ex eo Coroll. quadratum CM est idem, ac quadratum ex AO: Itaque quadratum CB magnum cum quadrato nigro ON ex segmento est æquale duobus rectangulis AN, & PB nigris; sed non solis; verùm addito illis ipso quadrato CM ex AO altero segmento. Quod vult propositio.



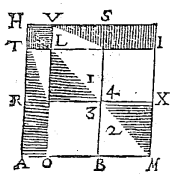
THEOR. VIII. PROP. X. Euc.8.

Si recta linea secetur vtcumq; rectangulum quater comprehensum sub tota, & vno segmentorum cum eo, quod à reliquo segmento fit quadrato, æquale est ei, quod à tota, & dicto segmento, tamquam ab vna linea, describitur quadrato.

SIt linea AB secta vtcumque in O. Dicit, quòd si fiant quatuor rectangula comprehensa à tota AB, & altera portionum, quam volueris, V. g. OB; & postea ex reliqua portione AO fiat quadratum: hæc omnia fore æqualia quadrato ex tota AB, & portione, quæ pro rectangulis comprehendendis electa est. Nimirum OB,

si lineę toti hęc pars insuper adderetur, & fieret AM.

Facto quadrato super AM, quod sit MH, ab extremo datę B, & sectionis puncto O excitentur perpendiculares OV, & BS; perque puncta 4, & L in quibus secant diametrum agantur parallelę RX, & TI.



Probatur modo propositio, ex ipsa constructione.

Progress. 1. Itaque in primis rectangula HL nigrum, & semialbum 1, & 2 sunt quadrata, vtpote circa diametrum existentia, ex propos. 6. Coroll. 3. Et ex Coroll. 2. propos. 2. sunt facta ex OB: Ergo etiam reliqua duo alba, ex defin. 1. quia eorum angulus 3, & 4, continetur æqualibus lateribus seminigrorum quadratorum, erunt quadrata.

Progress. 2. Rectangula quoque nigra, & seminigra, vt OR, & alia tria sunt æqualia inuicē; siquidem æqualibus duobus lateribus comprehenduntur AO. & OB, ex Coroll. 2. prop. 2. huius, vt per se patet: Nam LV est æqualis TL, &c. Sic AR æquatur lateri VS, &c.

Progr. 3. Adde itaque rectangulum OR, quadrato O 3 eritq; rectāgulum RAB 3 cōprehensum sub tota AB, & segmēto OB; & si reliquis singulis quadratis addas singula rectangula quadratis semialbis semialba rectangula, & albis quadratis nigra rectangula, erunt quatuor rectangula; de quibus loquitur propositio sub tota AB, & segmento OB comprehensa, quæ cum quadrato HL nigro alterius segmenti AO integrant quadratum magnum ex tota AM confectum, & ei adæquantur, quod erat ostendendum.

EXPENSIO III.

De potentiâ laterum Triangulorum.

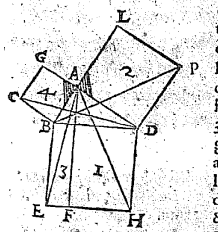
EXcerpsimus propositionem 47. & 48. à primo libro; & hic sub suo titulo apposuimus; vt ordo seruaretur materiarum, spretis numeris: Vnde audacię venia dabitur, quę in melius cesserit. Eximiam autem hęc Expensio consequitur vtilitatem; quòd in ipsâ mensura triangulorum, quoad areas fundetur, & ferè vniuersa Mathematica maximè in hac inixa sit; vt vllus tractatus in ea vix reperiatur; qui multas ex hac Expensione probationes, principiaque non desumat.

THEOR. I. PROP. XI. Euc. 47. Primi.

In triangulis rectangulis quadratum, quod à latere rectum angulum subtendente describitur, æquale est duobus quadratis, quæ à lateribus angulum rectum continentibus describuntur.

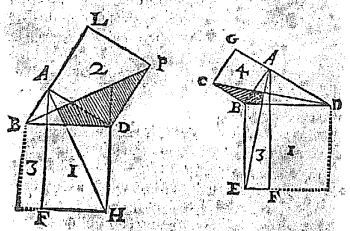
FIat rectangulum habens rectum angulum Ā; duo verò latera quomodocumque, seu æqualia, seu inæqualia AB, & AD angulum A claudentia, basisque subtensa angulo recto A sit BD. Fiat itaque ex propos. 38. primi, quadratum 4 super AB, & aliud 2 super AD, & ex basi BD fiat aliud quadratum 13. *Dicit itaque propositio; Quod quadratum 13 basis sit æquale quadratis 2, & 4. latera rum angulum rectum stipantium.*

Quod, vt probet, secundùm documenta propos. 32. à puncto dato A: nempe vertice anguli recti ducit parallelam AE lineę BE; quę diuidat quadratum 13 in duas partes 1, & 3. Deinde ab angulis quadratorum ad angulos trianguli oppositos rectæ ducuntur, vt CD, & DP, & etiam EA, & HA. ab angulis quadrati basis ad angulum rectum A. Quæ ductæ faciunt triangula hinc quidem CBD, & EBA: Inde verò ADH, & BDP infra consideranda.



Probatio autem in tres considerationes secernitur. Vnde Progressus 1. intendit probare latera quadratorum ex cruribus, quæ angulo recto adiunguntur in vnam eandemque lineam conuenire; cum cruribus ipsis trianguli angulum rectum claudentibus, quale est latus CA quadrati 4, & AL quadrati 2; nimirum vnicam lineam esse BA, & AL sicut AD, & AG. Hoc autem sic ostenditur. Crus AB incidens in crus AD angulum rectum A trianguli efficit, & latus quoque quadrati AL incidens in idem crus AD angulum rectum nigrum efficit quadrati. Ergo hæ duę lineę incidentes in eandem; & facientes duos angulos rectos in directum erunt, ex prop. 11. pr. & vnam rectam BL efficient. Et idem erit de linea CA respectu lineę AD, quę incidentes in lineam BA angulos rectos efficiunt quadrati nigrum, & trianguli A. Vnde CA, & AD erit vna recta linea CD.

Progress. 2. Vergit ad probandum triangula

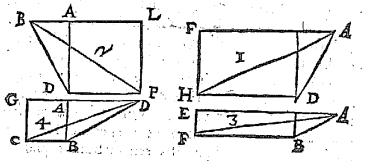


CBD, & ABE esse æqualia. Similiterque BDP, & ADH: quę claritatis gratiâ in duas figuras diuisimus: Itaque in maiori figurâ 2. habemus triangulum ADH, & DBP, de quibus dico. Equalia esse. Si quidem illa triangula sunt inuicem æqualia, ex propos. 22. Primi; quorum vnum crus vni, & alterum alteri est, & angulū conclusum æqualem obtinent; quod de triangulis BDP, & ADH propositis verificatur. Quoniam latus DP vnius est æquale lateri AD alterius, cùm sint eiusdem quadrati 2, & latus BD prioris lateri DH alterius posterioris; quod sint latera eiusdem quadrati 13. Angulus quoque ADP niger, est alteri angulo albo BDH equalis, vtpote recti ambo, & spatium BAD nigrius commune vtrisque, quare totus angulus niger apud D addito spatio BDA æquabit totum angulum album apud D, addito illo spatio eodem BDA, qui sunt anguli triangulorum æqualibus cruribus concluſi: Quare ipsa triangula erunt quoq; æqualia BDP, & ADH.

Hæc autem eadem probatio ostendit etiam æqualitatem triangulorum CDB, & ABE in altera figura minori 4. Quoniam latera AB vnius, & BC alterius sunt æqualia, vtpote latera eiusdem quadrati 4. Item latera EB vnius, & BD alterius, quod sint latera quadrati 13. Duo quoque anguli ABD æquales; quoniam, quidem angulus trianguli ad B nigrior communis vtrisque reliquus verò niger, in quo hic non occupat alterum album apud B angulus rectus est, sicut & albus. Quare triangula CBD, & EBA erunt æqualia.

Progress. 3. Comparat triangula cum quadratis; & intendit ostendere quadrata quoad continentiam, & aream eis esse duplicia: Pro quo reminiscendum est id, quod diximus in primo Progress. nimirum GA, & DA, & similiter AL, & AB esse lineas in directum positas, & vnam lineam rectam conficere. Deinde reducendum est ad memoriam. Quod fecerimus lineam AF parallelam lateribus BE, & DH quadrati 13, & ideò diuidere illud in duo parallelogramma 1, & 3.

Quo posito consideremus priùs parallelogrammum 1 comparando illud ad triangulum HDA, & videbimus ambo super basim HD, & esse inter parallelas FA, & HD: Quare concludemus ex propos. 39. Lib. 1. parallelogrammum 1 esse duplum trianguli DHA. Eodemqiargumento vtemur ad probandum paruum parallelogrammum 3 esse duplo malus, quam suum triangulum FBA.



Eodemque methodo probabimus de quadratis, nimirum esse dupla suorum triangulorum. Sic quadratum maius 2 est inter parallelas DP, & BL (BL enim est vna recta, vt ostendimus Progress. 1.) & super eandem basim DP. Vnde quadratum 2 erit duplo maius trianguli BDP.

Idem quoque argumentum vrgebit de quadrato 4 respectu sui trianguli CBD: Nam inter parallelas GD, & CB, & super eandem basi CB collocatum, duplum erit trianguli CBD.

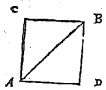
Progress. 4. Quibus omnibus ostensis argumentum clauditur ostendendo parallelogramma quadratis, quod libet suo correspondenti, & ad eandem partem rectanguli cōstituto æquari. V.g. Parallelogrammum 1 cum quadrato 2, & parallelogrammum 3 quadrato 4.

Hoc verò deducitur à Progress. 3. Nam, cum triangula facta super basim parallelogrammi 1, & quadrati 2, scilicet BDP, & ADH, sint probata æqualia: Ergo etiam parallelogrammum 1, & quadratum 2, vtpote dupla triangulorum erunt æqualia ad inuicem. Et tale erit parallelogrammum 3, & quadratum 4, vtpote dupla suorum triangulorum æqualium.

Quoniam itaque quadrata 4, & 2 sunt æqualia parallelogrammis 3, & 1, quæ integrant totum quadratum 13 factum ex basi BD; Ergo *quadratum ex* BD *angulum rectū subtendente æquatur duobus quadratis factis ex lateribus* BA, & AD *angulum rectum concludentibus*.

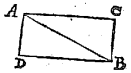
COROLLARIVM I.

EX hac propositione, quadratum diametri duplum quadrati lateris, arguitur. Quoniam angulus, cui diameter AB subtenditur, qui V.g. est C, rectus est, & triangulum ACB rectangulum est; Quare quadratum diametri est æquale quadrato duorum laterum; sed illa laterum quadrata sunt inuicem æqualia; Ergo quadratum diametri erit duplum vnius eorū seorsim sumpti.



COROLLARIVM II.

ELicitur quoque quadratum diametri figuræ altera parte longioris æquale esse duobus quadratis laterum AC, & CB: Quia diameter AB subtendit angulum rectum C.



THEOR. II. PROP. XII. (Euc. 48. 1. 1.

Si quadratum, quod ab vno laterum trianguli describitur æquale est eis, quæ à reliquis lateribus trianguli describuntur, quadratis, angulus comprehensus sub reliquis trianguli lateribus rectus est.

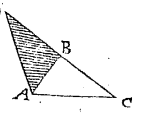
COnuertit hęc propos. antecedentem ad hoc, vt ostendat securum fore argumentum ab æqualitate quadrati basis, & laterum ad rectitudinem anguli.

Sit itaq; triangulum ABC. Dicit, quòd si quadratum confectum super latus maius AC, sit æquale quadratis simul sumptis crurum AB, & BC, *angulum* B *fore rectum*.

Vt autem id ostendat erigit super vtrumlibet laterum, V.g. AB à puncto B anguli, qui maiori lateri opponitur, versus partes exteriores perpendiculare BD æqualem reliquo lateri eiusdem anguli BC: Postea coniungit extremum D cum extremo lateris BA, super quod perpendicularis erecta est.

Prob. Progr. 1. Basis AD trianguli nigri describit quadratum æquale duobus quadratis, quę describuntur à lateribus AB, & BD angulum rectum A, ex effectione, claudentibus; vt preced. propos. ostensum est.

Itaque quadrato eidem ex basi erunt æqualia quadrata ex cruribus AB, & BC albi trianguli; quòd crus BC sit ex effectione æquale crui BD, & crus AB commune.



Idcirco etiam quadratum ex basi CA æquale quadratis crurum albi trianguli, ex hypothesi, consequenter æquabitur

quadrato ex basi nigri trianguli, vtpote æquali æqualibus quadratis crurum.

Progress. 2. Cùm itaque quadrata basium AC, & AD sint æqualia; ipsę quoque lineę erunt equales AD, & AC, quòd quadrata æqualia æqualibus etiam constent lateribus.

Quadere ex propos. 23. lib. I. angulus apud B albus erit æqualis nigro. Quia crura cruribus singula singulis, & basis basi ostensa est æqualis; Sed angulus niger apud B rectus est ex effect., ergo etiam albus B erit rectus.

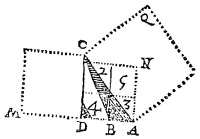
THEOR. III. PROP. XIII. Euc.12.

In Amblygonijs triangulis quadratum, quod fit à basi angulum obtusum subtendente, maius est quadratis, quæ fiunt à cruribus eundem angulum comprehendentibus rectangulo basis comprehenso sub altero ex istis cruribus, in quod perpendicularis à vertice cadat, & sub adiuncta linea, quæ inter perpendicularem, & crus alterum intercipitur.

SIt triangulum Amblygonium ABC, & angulus apud B niger, obtusus, & perpendicularis CD cadat extra triangulum in crus AB prolungatum in D; nempe ad partem anguli acuti, vt Coroll. 10. prop. 17. (posset etiam cadere in latus BC ab A, si placeret.) Dico, quod quadratum descriptum ab AC basi angulo obtuso subtensâ *est maius, quàm duo simul, quæ describuntur iuxta mensuram laterum* AB, & BC angulum obtusum ambientium; & *excedit illa rectangulis duobus*, quę fiunt à crure AB, in quod productum perpendicularis ducta est, & à segmento exteriori DB, quod est inter CB crus alterum, & CD perpendicularem.

Progress. 1. Probatur itaque, cùm enim recta AD diuisa sit vtcumque in B, ex propos. 6. erit quadratum rectæ totius AD, æquale quadratis segmentorum 2, & 3, & rectangulis duobus 4, & & 5 in segmentis comprehensis: Ex preced. verò propos. quadratum AQ ex basi obtusum angulum subtendente punctatum, est æquale duobus punctatis CM, & DN crurum perpendicularium CD, & DA; quòd angulus niger D sit rectus. Quapropter quadratum AQ ex basi erit æquale quadrato CM perpendicularis CD, & duobus quadratis 3, & 2 ex segmentis, simul cum rectangulis duobus 4, & 5 segmentorum ipsorum.

Progress. 2. Quadratum verò cruris CB angulum obtusum B amblentis (quòd tibi mente supplendũ est) erit æquale duobus quadratis CM ex perpendiculari DC, & quadrato ex BD, nimirum quadrato 2 ex eadem antecedenti propositione, quòd sit subtentum latus angulo nigro D recto. Pone itaque illud mente conceptum ex CB pro istis duobus ex DB, & CD adhuc quadratum maximum punctatum AQ ex latere AC erit æquale quadrato imaginato ex CB quadratoq; 3 ex BA duobusque rectangulis 4, & 5 ex segmentis. Quapropter *quadratum* AQ *basis erit maius quadratis Crurum angulum obtusum claudentium* CB, & BA, *duobus rectangulis* 4, & 5, *quæ sub segmentis* DB, & BA *continentur*, quod erat ostendendũ.

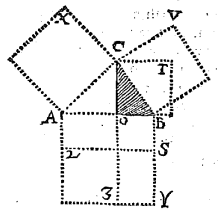


THEOR. IV. PROP. XIV. Euc.13.

In omni triangulo Oxigonio Quadratum lateris angulum acutum subtendentis, minus est quadratis, quæ fiunt à lateribus illum acutum comprehendentibus rectangulis duobus comprehensis ab eo latere, in quod perpendicularis cadit, & segmento eiusdem inter perpendicularem, & angulum acutum intercepto.

SIt triangulum ABC, quod crus, V. g. AC oppositum angulo dato acuto B nigro habeat. Dico quod hæc basis describit quadratum AX minus quadratis BV, & AY crurum illum angulum ambientium AB, & BC; Quantitas autem, quâ inuenitur minus, sunt duo rectangula, quę comprehenduntur pro vno latere à toto crure ex ijs, quę acutum angulum ambiunt, V.g. AB, in quod perpendicularis cadat, & pro allo latere claudatur ab eo segmento, quod intercipitur inter punctum O, & verticem B; Nimirum inter punctum illud, in quod cadit perpendicularis, & acutum angulum. Itaque quadratum punctatum AX minus est quadratis AY, & BV punctatis rectangulis AS, & OY.

Progess. 1. Deductâ perpendiculari ad alterum crurum ex ambientibus, puta AB: Latus AB erit sectum vtcumque in O. Quamobrem ex propos. 9. huius rectangula duo punctata AS, & OY comprehensa à crure toto AB, & portione OB, vel æquali BS, & quadratum 3 2 ex AO sunt simul æqualla quadrato toti AY, sed non soli, verùm simul cum quadrato OS. Quamobrem addito quadrato OT punctato ex perpendiculari OC vtrinque, adhuc hęc illis remanebunt æqualia; nempe rectangula AS, & OY qudratum 3 2, & OT nuper additum æquabuntur eidem OT, & quadrato AY, & quadrato OS.



Progress. 2. Quadratum factum super crus CB alterum ambientium angulũ nigrum acutum B, nempe BV, ex propos. 11. huius est æquale duobus; nempe ei OT, quod à perpendiculari fit, & alteri minimo OS propter angulum nigrũ rectum O, cui subtenditur. Quapropter BV poterit substitui loco horum duorum, quibus æquatur. Et hinc emerget quod rectangula illa duo AS, & OY, quæ cum quadratis OT, & 23 erant æqualia tribus quadratis in Progr. 1. nimirum AY, & OS, & OT sic nunc cũ ijs sint æqualia duobus; nimirũ quadrato BV ex crure, & quadrato AY ex altero crure angulum acutum B ambientibus.

Pro-

Progress 3. Quadratum AX ex basi AC subtensa angulo acuto B, ex propos. 11. æquale est quadrato 23, & quadrato OT ex perpendiculari. Quaderi si ei adderentur rectangula AS, & OY quadratum AX esset quoque equale quadrato maximo AY ex crure, & BV quadrato ex altero crure ambientiũ angulum acutum B: Quoniam ex 2. Progress. illa duo quadrata 23, & OT cum rectangulis istis duobus, quadratis AY, & BV ex cruribus erant æqualia: Vnde vice quadratum 23, & OT posito quadrato AX ex basi AC cũ rectãgulis ijsdem, quadratis ex cruribus æquabitur, & propterea quadratũ AX ex AC basi erit minus quadratis crurum AB, & BC duobus rectangulis AS, & OY, quod erat probandum.

EXPENSIO IV.

De reperiendis æquipotentibus lineis.

LIcet ad plenam huius inquisitionis cognitionem particularis tractatus institutus sit; vt infra. Hic tamen illius primę bases iaciuntur, & docet Euclides dato aliquo rectilineo reperire lineam, quę possit efficere quadratum illi æquale; Vel etiam ita fecare lineam, vt segmenta æquè possint. Quod fuit necessarium pręcognoscere maximè ob 10. Libri plenam cognitionem.

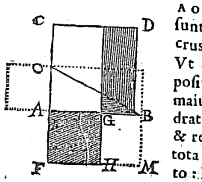
PROB. I. PROP. XV. Euc.11.

DAtam lineam rectam ita secare, vt rectangulum sub tota, & altero segmentorum minori comprehensum, æquale sit quadrato, quod fit à reliquo segmento.

Data sit recta AB, quam ita oporteat secare, vt tota cum segmento minori possit comprehendere rectangulum æquale quadrato, quod à maiori segmento describitur.

Describatur ex AB quadratum AD, & illud latus, quod cum data AB angulum rectum claudit, vt est CA diuidatur in duas partes æquales in O. Trahaturque recta OB ab angulo B ad illud dimidium O, Et æquale ipsi OB prolungetur latus bifariam diuisum CA ab O medietate vsque in F. Et excedet medietatem OA portione AF: Huic ergo portioni AF detruncetur æqualis ex AB datâ portio AG, & iam id fecimus, quod postulat propositio, *Siquidem quadratum ex* AG *maiori portione erit æquale rectangulo ex* AB *&* GB *tota, & minori portione.*

Quòd verò AG possit detruncari patet, quia AO, & AB duo crura sunt maiora, quam OB crus tertiũ ex prop. 20. Vt autẽ probetur propositio, fiat super AG maius segmentum quadratum AH à puncto G, & rectangulum GD, ex tota, & minori segmento: Et dico hoc quadratum nigrum rectangulo nigro esse æquale.



Progress. 1. Quòniam ex 8. propos. huius rectangulum, quod à tota cum adiecta pro vno latere, & ab adiecta solùm pro alio vnà cum quadrato dimidię totius æqualia sunt quadrato, quod describitur à dimidia simul cum adiuncta: hinc est, quòd quadratum punctatum ex medietate AO cum rectangulo CH ex tota CA cum adiecta AF, pro vno latere, & alio latere ab adiecta AF, vel FH comprehenso erit æquale quadrato OM ex dimidiâ OA, & adiectâ AF, vt vna, constituto.

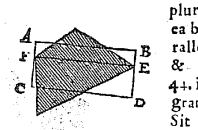
Progress. 2. Quadratum verò OM est illud, quod fieret super OB; quia latus eius OF æquatur ex constructione lateri OB. At quadratum ex OB ob rectum angulum apud A album, ex propos. 11. æquatur quadrato ex AO dimidiâ, & quadrato CB ex AB tota, ergo etiam æqualibus rectangulo CH, & ipsi quadrato AO, æquabitur ipsum AO quadratum, & CB, ex AB datâ quadratum.

Progress. 3. Abijce itaque mente ab vtrisque quadratum AO nimirum à rectangulo CH, & quadrato CB, & adhuc remanebunt æqualia, vt prius erant associata cum illo. Rursus demẽ à rectangulo eodem CH, & quadrato eodem CB commune spatium album CG, *& quadratum nigrum*, ex AG segmento *rectangulumque nigrum*, ex tota BD, & altero segmento GB *restabunt æqualia*, quod erat ostendendum.

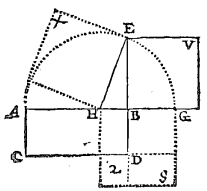
PROB. II. PROP. XVI. Euc.14.

Dato rectilineo æquale quadratum constituere.

SIt Trapezium nigrum: quod ex documentis propos. 44. primi reducatur ad rectangulum ABCD. Quod facilimè efficies si eũ diuidas in duo triangula recta FE; quorum diuiso bifariam latere, per eam diuisionem agantur parallelę ad FE; nempe AB, & CD, & eas perpendicularibus cõiungas ab extremis F, E. Verùm si in rectilineo plura capiant triangula ea bina, & bina ad parallelogramma reduces, & inde per propositi. 44. in vnicum parallelogrammum ea compones. Sit ergo latus huius rectanguli AB: quod prolungetur in G; itaut BG pars prolungata alteri lateri BD æqualis sit. Deinde diuidatur per medium tota AG. Si medietas reperitur in puncto B erunt æqualia latera AB, & BG. Vnde rectangulum erit quadratum: nec aliud hoc casu faciendum erit. Quod si punctum B non sit medium, per medium diuidatur linea AG in H, & centro H fiat semicirculus AEG, ad interuallum medietatis. Postea prolungetur alterum latus BD, in quo centrum non est vsque ad E circuli circumferentiam, eritque linea BE perpendicularis, & hęc erit illa, quę quęritur, ex qua si fiat *quadratum* BV *hoc erit æquale rectangulo* AD.

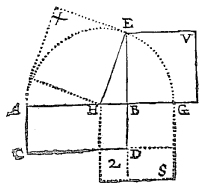


Ad quod ostendendum à centro ad E elus extremitatem ducatur HE, eritque triangulum HEB habens angulum rectum B.



Pro-

Progress. 1. Linea A C diuisa est in æqualia in H, & non æqualia in B. Vnde ex propos. 7. huius rectangulum comprehensum sub segmẽtis inæqualibus, vt est A D, cuius latus B D æquatur ipsi B G, ex effectione, hoc, inquam, rectangulum, & quadratum ex intermedia H B, quod est punctatum paruum 2 simul, est æquale quadrato magno punctato H S ex dimidia.



Progress. 2. Quadratum quoque H X erectum super H E basi æquatur quadrato 2 ex intermedia, & quadrato B V ex perpendiculari, ex prop. 11. huius: Sed hoc quadratum H X est æquale quadrato H S; Quia scilicet eorum latera H E, & H G sunt æqualia, vtpote radij eiusdem circuli: Ergo quadratum H X ex basi erit æquale quadrato 2 ex intermedia, & rectangulo A D siquidem ex 1. Progressu quadrato H S ea ostensa sunt æqualia.

Progress. 3. Cum itaque quadratum 2 ex intermedia, & B V ex perpendiculari sint æqualia quadrato H X; Rursusque idem quadratum 2 ex rectangulum A D sint æqualia quadrato H X. Ergo inter se erunt æqualia quadratum B V cum quadrato 2, & rectangulum A D cum quadrato item 2 Aufer itaque commune quadratum 2, *& rectangulum* AD *restabit æquale quadrato ex* BV, quod erat ostendendum.

TRACTATVS VI.

In Euclidis Librum tertium de Circulis.

EGIT in duobus primis Libris Euclides de primo genere superficierum; nimirum de rectilineis, & non quidem de omnibus; sed solùm de præcipuis, & quæ alias figuras planas integrant, & componunt, vt sunt triangula, & quadrangula, nimirum, vt eas solùm, quæ erant elementares attingeret: In hoc verò tertio Libro agit de circulis, quæ figura est origo, & principium omnium linearum flexarum, puta Hyperbolæ, Parabolæ, Ellipsis, aliarumque similium, vt sicuti rectilineorum Elementa, & flexorum quoque doceat, his enim principijs ferè omnia fundantur, quæ tum de sphæra, tum de sectionibus conicis ostenduntur. Obiectum verò huius Libri est idem, quod primi, & secundi, nempe de sola circulorum æqualitate, vel actuali, vel potentiali, vel linearum in ipso descriptarum, peragere.

EXPENSIO I.

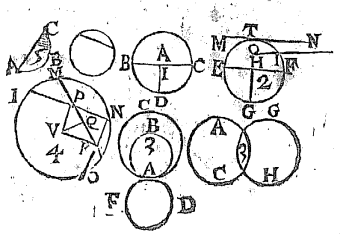
De Principijs.

LIcet aliquę Definitiones ad initium primi Libri traditæ sint ad circulum spectantes, vt diametri, semicirculi, &c. Illæ tamen tantùm exhibitę sunt, quę ad illum Librum pertinebant: Modò superadduntur alię, quę propriè huius loci sunt.

DEFINITIO I.

ÆQuales circuli sunt, quorum diametri sunt æquales, vel quorum radij sunt æquales.

Cùm enim ex ductu lineę, E. g. A D altero extremo A manente, tanquam clauo affixo, dùm extremum alterum se mouet vsque ad illud punctum, à quo discessit, circulus consurgat, & ab hoc ductu efficiatur, patet circulos fore æquales; quorum radius, vel semidiameter A D alteri G H fuerit æqualis, vel quorum diameter nimirum B E fuerit æqualis, ipsi E F, quod faciliter potest ostendi ex superpositione, Nam omnia puncta circumferẽtiarum, si circuli 1, 2 superponerentur, itaut centrum centro conueniret, & idem fieret, sibi inuicem incidèrent, & eandem circumferentiam integrarent ob æqualem distantiam ab eodem puncto medio.



DEFINITIO II.

REcta linea circulum tangere dicitur, quæ cùm circulum tangat producta illum non secat.

Vt recta M N circulum 2. E G F T tangit in T, quia producta vltra T in alteram partem non secat circulum, vt eum tangit N I, quę producta vltra I in O secat ipsum circulum, & ideò non dicitur tangens, quia tangeret solùm actu in I, potentia tamen eum secaret in sui productione.

DEFINITIO III.

CIrculi se mutuò tangere dicuntur, qui se se mutuò tangentes se se mutuò non secant.

Vt est circulus 3. B A interiùs tãgens, vel D F exteriùs tangens circulum C A, qui illum non secat, vt facit circulus H G, qui secat circulum A C.

DEFINITIO IV.

IN circulo æqualiter distare à centro rectæ lineæ dicuntur, cùm perpendiculares ad ipsas à centro ducuntur æquales, & magis distare illa dicitur, in quam maior perpendicularis cadit.

Sic quia in duas I N, & M Q perpendiculares P V, & V Q cadentes à centro V sunt æquales, lineę prędictę I N, & M Q sunt æquali distantiâ à centro remotę: At linea O N magis distabit; quam Q M; quia perpendicularis V R in eam cadens maior est, perpendiculari V Q, vt in 4. fig.

DEFINITIO V.

CIrculi segmentum est figura, quæ sub recta linea, & parte peripheriæ comprehenditur.

DE-

DEFINITIO VI.

Segmenti verò angulus est, qui sub recta linea, & circuli peripheria comprehenditur.

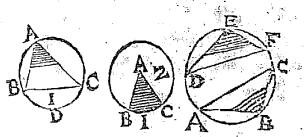
Segmẽtum itaque circuli est fig.5.portio circuli ABC. Angulus verò, niger est C: Quia tùm figura, tùm angulus circuli peripherię portione ABC, & linea recta AC concluduntur.

DEFINITIO VII.

In segmento anguli sunt, cùm crura claudentia circumferentiam, vertice attingunt, & basim habent, rectam segmentum efficiens.

Illi verò peripherię insistere dicuntur, quam crura angulum claudentia intercipiunt.

Angulus itaque niger apud A, est in segmento BAC, quòd eius vertex sit in circumferentia in A, & pro basi BC lineã, quę segmentũ BAC facit, obtineat: At angulus idem niger insistere dicitur in peripheria BDC, quam crura se se aperientia AB, & AC concludunt.



DEFINITIO VIII.

Sector circuli est figura comprehensa à duobus radijs angulum facientibus, & peripheria ab illis comprehensa.

Sector itaque circuli est ABC duobus radijs BA, & AC, & peripheriâ BIC comprehensus.

DEFINITIO IX.

Similia circuli segmenta sunt, quæ angulos capiunt æquales; aut in quibus anguli inter se sunt æquales.

Videtur aliquibus; quòd hîc Euclides anticipauerit, & definitionem ponat, quę ostensione indigeret à 6. Libro dependente. Verùm, quia definitiones à Mathematicis non ostenduntur; sed accipiuntur tamquam nominum explicationes: hinc est, quòd hęc Definitio, licet quoad probationem dependeret à 6. Libro, si proponeretur tamquam propositio. Quia tamen tamquam Definitio exhibetur, à nullo dependet: nisi à sola explicatione: Sint itaque duo circulorum segmenta ABC, & DEF, quę exciplant angulos nigros æquales B, & E. Dicit quod illa segmenta debebunt appellari similia. Nec tamen hîc intendit Euclides agere de similitudine, vel proportione siue circulorum, seu segmentorum; sed tantùm de æqualitate, ad quam ostendendum erat necessaria hęc Definitio.

EXPENSIO I.

De punctis, tum centri, tum contactuum.

PVnctũm duplici modo potest sumi, aut in medio circuli, aut in circumferentia. Si in medio, & sic aut erit centrum, aut extra centrũ. Si in peripheria, & tunc erit aut contactus, aut sectionis. In hac itaque expensione agemus de punctis, tum meditulij, tum circumferentiæ quatenus tamen referuntur ad circulos: Nam de punctis contactuum, aut sectionum rectę lineę cum circulo sequenti expensione peragemus.

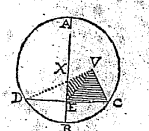
PROBL. I. PROP. I. Euc.1.

Dati circuli centrum reperire.

SIt datus circulus ABCD, cuius centrum oporteat inuenire.

Ducatur linea vtcumque DC, ex prop7.lib.1. diuidatur bifariam in E, & ab eo puncto eleuetur perpendicularis, quę extremis suis punctis circumferentiam attingat, & sit BA. Postea hęc quoque bifariam diuidatur in X. *Nam illud punctum diuisionis, erit centrum, quod quæritur.*

Probatur. Nam si punctum X centrum non est. Assignetur ab aduersarijs. Assignabiturque, vel in ipsâ linea BA, vel alibi.



Non in ipsa linea BA; Quia omne aliud pũctum diuidit eam inæqualiter, & consequenter, contra Definitionem centri, non vtrinquè à circumferentia distaret æqualiter. Sed nec assignabitur extrà lineam prædictam. Nam si potest, assignetur, & sit punctum V. Ducantur itaque ad illud ab extremis D, & C, & medio E lineę CD primo ductę, alię tres DV, & CV, & EV; Quo facto ita exordiemur probationem per reductionem ad impossibile.

Progress. 1. Trianguli EVC nigri, & DEV seminigri duo crura ex effectione sunt inuicem æqualia, nempe medietates DE, & EC. Crus verò EV commune, & deseruit vtrique: Reliqua verò crura DV, & VC licet verè inæqualia; Aduersarij tamen debent ea dicere æqualia, vtpote radij ob centrum positum in V. Quamobrem ex propos. 23. primi anguli apud E niger, & semialbus, quę prędictis radijs DV, & VC insistunt, deberent esse æquales. Quare illi anguli erunt recti, ex 10. defin.

Progress. 2. Cum itaque angulus seminiger DEV dicatur rectus: Et eiusdem pars alba apud E sit quoque angulus rectus ex effectione, erunt æquales anguli albus, & semialbus, pars & totũ, quod esse nequit. Idem verò semper potest ostendi de omnibus punctis, quæ alibi assignarentur: Quaderè, cùm non possit esse alibi, quam in medio lineę BA; punctum X erit centrum circuli.

COROLLARIVM.

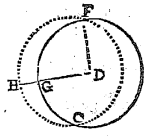
HInc manifestum est; si in circulo aliqua recta linea bifariam simulque ad angulos rectos secet aliquam aliam rectam in secante esse centrum circuli. Nam ex eo, quod AB recta rectam DC; bifariam, & rectangulè secet ostensum fuit punctum eius medium esse circuli centrum.

THEOR. I. PROP. II. Euc.5.

Si duo circuli se se mutuo secant, non erit illorum idem centrum.

SEcent se mutuo duo circuli punctatus, & non punctatus; Dico *eos idem centrum non possidere*, & ostenditur per reductionem ad impossibile. Assignetur itaque punctum aliquod ab aduersarijs, quod sit centrum commune vtriusque circuli, & sit D. Ducatur itaque ab hoc centro D ad intersectionem circulorum F linea punctata DF & ad peripheriam punctatam HD; quæ secet alteram in G.

Probatur itaq; propositio D centrum est commune vtrique circulo, vt mendaciter affirmatur. Ergo radius circuli nõ punctati GD erit æqualis radio FD pũctato, & ita HD eidẽ radio FD æqualis cũ punctatus sit radius vtriusque in F intersectionẽ circulorum pertingens. Ergo HD, & DG essent æquales, pars, & totum, quod esse nequit. Ideoque centrum D non erit vtriusque centrum, & sic probabis de quolibet alio puncto. Vnde *non poterit esse vllum punctum centrum vtriusque commune*,

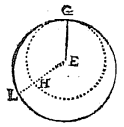


THEOR. II. PROPOS. III. Euc.6.

Si duo circuli se se mutuo interiùs tangant, non erit illorum idem centrum.

HÆc Propositio præcedenti similis omninò est. Sit ergo circulus punctatus, qui tangat continuum in G. Dico quod non possit obtinere idem centrum; quod ostendetur per reductionem ad impossibile.

Ostendatur itaque ab aduersarijs, quodnam centrum sit commune vtrique circulo. Sit V. g. E. Ducaturq; ad contactum G recta EG, & ad peripheriam circuli continui punctata linea LE, quæ secet in H circulum punctatum; quo facto.



Prob. propos. EG est radius vtriusque circuli punctati, & non punctati, vtpote pertingens ad commune punctum G in peripheria ipsorum. Quapropter HE radius punctati, ei radio communi EG erit æqualis, rursusque LE radius continui circuli eidem radio communi EG erit æqualis; ergo inter se LE, & HE essent æquales, pars, & totum, quod repugnat; Ergo assignatum E centrum non erit circulorum commune. Quod dicas de quocumque alio assignabili.

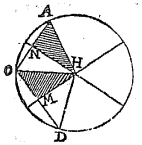
THEOR. III. PROP. IV. Euc.9.

Si in circulo acceptum fuerit punctum aliquod, & à circumferentia ad illud cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, acceptum punctum centrum est ipsius circuli.

SI punctum datum H, ad quod à circumferentiâ AOD sint tractæ plures; quam duę rectæ lineę æquales. V.g. tres AH, & OH, & DH. Dico, quod illud erit centrum circuli.

Quod; vt demonstret, connectit puncta rectis AO, & OD, quas medias diuidit in M, & N, super punctum diuidens erigit perpendiculares punctatas MH, & NH quo præstito.

Prob. Nam ex constructione. Crus AN nigri trianguli est æquale cruri correspondenti NO albi, crus verò aliud NH vtrisque deseruit. Bases quoque HA, & HO præsupponũtur æquales. Quare angulus ad N niger huius, & albus illius trianguli erunt æquales, nempe recti, ex propos. 10. primi.



Eodem modo constabit angulũ ad M nigrum, & album tum huius albi, tum alterius nigri esse æquales; Quare rectę NH, MH, quę rectangulè, & bifariã diuidunt AO, & OD transibunt per centrũ. *Vnde H erit centrum.* Si enim esset aliud punctum nõ transiret vtraque per centrum, vt prop.1. vult, cùm vnicum solùm sit, & duæ rectæ non nisi in puncto H conuenire possint.

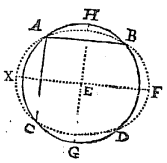
THEOR. IV. PROP. V. Euc.10.

Circulus circulum in pluribus punctis, quàm duobus non secat.

SIt circumferentia punctata, quæ secet circulum continuum in punctis pluribus, quàm duobus A, B, C, D. *Dico eam circumferentiam, circulum esse non posse.*

Quod, vt ostendatur tres ex ijs intersectionibus connectendæ sunt nimirum A, & B, & C rectis AC, & AB, Quæ diuidendæ bifariam, & per diuisiones agendæ punctate, perpendiculares, HG, & XE, quæ ostendent centrum esse in E, ex propos. præced.

Probatur propositio. Quia si E centrum est, deseruiet pro cẽtro vtrique tum punctatæ peripheriæ, tum circulo, cùm tria puncta A, B, & C sint vtrisque communia. Sed circuli se secantes, propos. 3. huius non habẽt idem centrum; ergo non possunt esse ambo simul circuli, sed alter eorum circulus non erit, V. g. circumferentia punctata.



THEOR. V. PROP. VI. Euc.11.

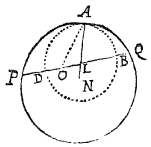
Si duo circuli intùs se se contingant, atque accepta fuerint eorum centra. Ad eorum centra adiuncta recta linea, & producta in contactum circulorum cadet.

SI duo circuli continuum, & punctatum se tangant in A interiùs existendo vnus intra alium, & ducta sit linea LN, quæ connectat eorum centra L, & N. Dico, quòd si hæc producatur vsque ad circumferentiam in contactum terminabit.

Quod per reductionem ad impossibile ostenditur. Si enim ita non est. Sit aliud pũctum centrũ circuli continui, quodcumque eligant aduersarij, V. g. O, per quod transiens recta PQ, & per centrum L non cadat in contactum, sed alibi,

puta in Q, vel in P. Ducantur ergo à centro L, & à centro mendaciter ſtatuto o ad contactum A duæ rectæ, eritq; conſtitutum triangulum AOL. Quo exhibito Propoſ.

Probatur. Nam ſi O eſt centrum circuli non punctati AO baſis, & rectæ OQ debebunt eſſe æquales vtpote radij à ſuo centro ad ſuam peripheriam ducti. Hoc autem eſſe non poteſt; quòd OB, quæ eſt elus pars, deberet eſſe maior, quàm AO baſis: Quare OQ eſſet minor, quàm ſua pars OB.



Quod autem OB debeat eſſe maior; quam AO baſis punctata, patet: Nam eius pars OL eſt crus trianguli, aliud verò crus AL eſt æquale reliquæ portioni LB, cum L ſit centrum circuli punctati; eò quòd ducatur à ſuo centro L, quare tota OB deberet eſſe maior baſi OA ſicut latera OL, & LA, ex 20. propoſ. 1. ſunt baſi punctata OA maiora. Quamobrem OB pars eſſet maior, quàm OA, & conſequenter, quàm OQ tota, eidem baſi punctatæ æqualis (vt dictum eſt) Et ſemper eodem modo argumentabitur, quibuſcumque punctis aſſignatis, quæ non ſint LN. Ergo per LN ducta NA in contactum A cadit.

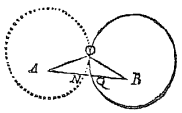
THEOR. VI. PROP. VII. Euc.12.

Si duo circuli ſe ſe exteriùs contingant linea recta, quæ ad centra eorum adiungitur per contactum tranſibit.

PRobatur hæc Propoſitio per reductionem ad impoſſibile tali modo.

Nam datis duobus circulis ſe tangentibus pũctatum, & continuum, & recta AB, quæ centra prout volunt aduerſarij A, & B nectat, & tamen per contactum O non tranſeat, ſed inferiùs. Ad hoc vt oſtendatur, id eſſe falſum; ad contactum à centris præſumptis A, & B trahantur rectæ AO, & BO, & ecce tibi abſurdum, quod ſequitur.

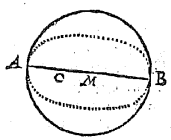
Namque AOB triangulum eſt, & conſequẽter ex propoſ. 20. primi duo crura AO, & BO debent eſſe maiora, quàm baſis AB. Hæc verò ex alio capite debet eſſe maior. Nã cum B mendaciter dicatur cẽtrum, pars eius PQ vtpote à cẽtro ad peripheriam ducta eſſet æqualis cruri OB. Sicque alia pars AN, vt radius à centro A, vt falſo aſſeritur, ad ambitum ductus æqualis eſſet cruri AO. Quare nedum tota AB non eſſet dictis cruribus minor; ſed potius maior. Quoniam portio quoque inter circumferentias intercepta NQ ſuperadderetur.



THEOR. VII. PROP. VIII. Euc.13.

Circulus circulum non tangit in pluribus punctis, quàm vno ſiue intùs, ſiue extrà tangat.

REducitur quoque hæc propoſitio ad impoſſibile, duaſque partes poſſidet. Prima enim loquitur de contactu interiori, ſecunda de exteriori. Ponamus itaque circumferentiam punctatam tangere circulum in duobus punctis A, & B, & trahatur recta per duo centra O, & M.



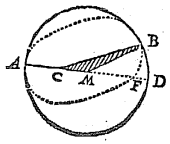
Vel ergo hæc recta tranſiens per centra, tum punctati circuli, vt mendaciter præſupponitur, tum cõtinui trãſit per ambos contactus, vel per neutrum, vel per alterum eorum, & ſic tres caſus habet iſta propoſitio; de quorum ſingulis intexere oportet probationem.

Caſus 1. Itaque dicatur rectam AB contactus ipſos coniungere, & hoc non poteſt eſſe, quia ſic eadem linea diuideretur per medium in duobus punctis; quòd eſt abſurdum; cùm enim puncta contactus; quia ſunt communia, diſtent æqualiter à ſuis centris, clarum eſt, quòd quodlibet centrum aſſignatum diuideret eam æqualiter, & bifariam. Vnde duo centra in quatuor meditates eam ſecarent AO, & OB. AM, & MB.

Caſus 2. At ſi velit aduerſarius, quòd linea tranſiens per centra, vt eſt punctata in contactus non cadat, hoc eſt contra 6. propoſ. huius, quare ſaltem in vnum contactum incidet, eligatur itaque quod vis.

Caſus 3. Si eligis contactum A. Ad alterum contactum B duo centra copulabis, lineis CB, & BM, & eadem forma argumenti valebit ad oſtendendam impoſſibilitatem, ac vſi ſumus in 6. propoſ. huius.

Nam ſequeretur, quòd MA deberet eſſe maior, quàm MB; quæ tamen eſt ei æqualis, vtpote, quòd ſint radij à centro M ducti ad circumferentiam circuli nõ pũctati in A, & B; Quod verò AM deberet eſſe maior, quàm MB patet. Quoniam CM, & CB ſimul ſunt maiores, quàm MB, ex 20. propoſ. primi; ſed CB, & AC, vtpote radij ſpurij circuli punctati ſunt æquales ex aduerſarijs. Adde CM ipſi AC: Fietque tota AM maior; quàm MB, vtpote, quod ſit ſecundùm ſui partem CM crus, & ſecundùm alterã partem AC æqualis cruri CB ſimul maioribus, quã MB baſis trianguli nigri.



Quod & concluditur per idem argumentum etiam ſi duo contactus ponantur vicinius, quã in ſecunda figura punctum A, & punctum B, vt probauimus Expenſ. 2. Tractatus Præliminaris de Quantitate Continua.

2. Pars probatur. Quod ſi exteriùs ſe tangant, non ſe tangant in duobus punctis. Nã ſi tangunt in puncto O ex 6. huius linea recta coniungens centra MN per contactũ O tranſibit. Quod, & ſi ſe quoque tangunt in Q. Coniungatur ille cõtactus ad centra per rectas NQ, & MQ. Eritque triangulum MQN, cuius duo crura ſimul, erunt radijs in baſi NO, OM æqualia, vtpote, quia sũt radij, à cẽtris in punctum Q vtriuſque circumferentię deſinentes, & eadem



& eadem ipſi NO, OM debebũt eſſe maiora; quia ex propoſ. 20. primi duo latera cuiuſcunque trianguli quomodocumque ſumpta reliquo maiora ſunt; Vnde implicantia admitteretur.

EXPENSIO II.

De ſegmentis Circulorum.

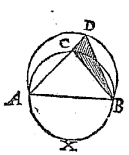
PAtebit hic traditam fuiſſe inter principia ſegmentorum ſimilium definitionem, non ad hoc, vt eorum conſideratio circa ſimilitudinem, eorumque proportionem verſaretur, ſed tantùm, vt ea ſimilitudo mediante definitione ſatis declaratâ præberet fundamenta ad oſtendendas ſegmentorum longè diuerſas affectiones à proportione.

Fuit verò neceſſarium agere de ſegmentis, quòd poſſemus ex ſegmentis ipſos circulos agnoſcere; & angulos quoque in ſegmentis, aut efficere, aut eorum proprietates agnoſcere.

THEOR. I. PROP. IX. Euc.23.

Super eãdem rectã lineã duo circulorum ſegmenta ſimilia, & inæqualia non conſtituentur ad eaſdem partes.

REducit hic Euclides demonſtrationem ad impoſſibile demonſtrando fore, & non fore ſimilia ſegmenta ſimilia, & inæqualia ſuper eãdem rectã effecta: Quod vt oſtendat fiant (inquit) ſuper datam AB duę portiones circulorum ſimiles ACB, & ADB (ſi tamen id fieri poteſt) Manifeſtum eſt ex dictis 5. propoſ. huius, quod ſolùm ſe interſecabunt in duobus punctis, vt in A, & B; Quoniam circuli, nonniſi in duobus punctis ſe interſecant. Quare peripheria vnius erit extra peripheriam alterius. Quo poſito trahatur recta AD ſecans vtraſque circumferentias in C, & D, & ex ijs punctis duæ rectæ deducantur, nimirum CB, & DB: Habemuſque triangulum nigrum cuius angulus D neceſſariò, ex propoſ. 17. Coroll. 1. primi, minor eſt externo albo C.



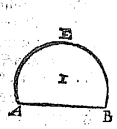
Probatur autem. Nam ſegmenta ſimilia ſunt illa, quæ capiunt angulos æquales, ex definitione 9. huius; Sed angulus niger D internus eſt maior albo C externo. Ergo ACB, & ADB ſimilia nõ sũt; alioquin angulus D niger eſſet angulo C æqualis, vt volunt, & minor, vt eſt oſtenſum, quod eſt impoſſibile.

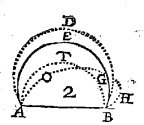
Quare colligit Clauius, & ſi anguli non fiant ad eaſdem partes, idem ſequi, quòd æquali ſegmento el, V. g. AXB, quod eſt ad alteram partem, ad eandem partem conſtituto; idem abſurdum ſequatur.

THEOR. II. PROP. X. Euc.24.

Super æqualibus rectis lineis ſimilia circulorum ſegmenta ſunt inter ſe æqualia.

HÆc propoſitio oſtenditur facilitèr ſuper poſitione; nempe imaginando, vel ponendo vnum ſuper aliud ſegmentum panyro deſcriptum. Sint ergo duo circuli ſegmenta ſimilia ABE primum, & ABE ſecundum.





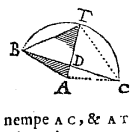
Et ad probandum ponatur vnum ſuper aliud per imaginationem, vel propriè deſcribendo alterum eorum, & circùm reciſa charta ſuper aliud realiter ponatur, vel congruet, itaut curuitas vnius eodem loco inexiſtat, & feratur, ac curuitas alterius, vel non. Si non, vel intra curuabitur, vt punctatum ſegmentum ATB, vel ſupra, & extra, vt aliud punctatum ADB, & ſic incidemus in abſurdum propoſ. antecedentis. Quod ſimilia ſegmenta caperent angulos inæquales contra defin. 9.; Vel partim ſupra partim infra, vt facit circũferentia pũctata AOGHB, & ſic contra 5. propoſ. huius circulus ſecaret circulum in pluribus punctis; quàm duobus, nempe in A, G, B.

PROB. I. PROP. XI. Euc.25.

Circuli ſegmento dato deſcribere circulum, cuius eſt ſegmentum.

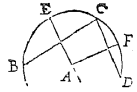
SIt ſegmentum quodcumque BTC, vel maius, vel minus, vel æquale ſemicirculo: conneãturque puncta BC rectâ, cui diuiſæ per medium in D: in punctoD erigatur perpendicularis DT, & indefinitè prolungetur verſus A. Deinde trahatur à puncto, vel B, vel C, quæ rectâ copulauimus, ad punctum T, vbi perpẽdicularis modo ducta circumferentiam ſecat recta BT, quæ angulum faciet nigrum ad T. Huic itaque angulo nigro alius angulus ad B niger, & albus conſtituatur æqualis, ducendo lineam BA, quæ, vel cadet extra lineam BC, & adiunget partem nigram, vt hîc vbi portio data ſemicirculo eſt minor, vel intra, vt cum ſemicirculo maius eſt ſegmentum datum, & ideò portione nigra diminuit angulum B, vel ſupra ipſam BC cùm ſemicirculus eſt ſegmentum datum, & ſic nec diminuit, nec addit. Sed quomodocumque id accidat ſemper angulus B fiat æqualis angulo T, ex 24. prop. & A erit centrum oſtendam trahatur linea AC.

Probatur. Nam tres lineæ BA, nimirum AC, & AT ſunt æquales, quare ex propoſ. 4. huius A erit centrum circuli. Quia illud eſt centrum, vt ibi probatur in quod plures, quàm duæ lineæ æquales cadunt. Quòd verò tres lineæ dictæ BA, nempe AC, & AT ſint æquales conſtat: Nam in triangulo BTA angulus niger ad T, & angulus B ſeminiger ex cõſtructione ſunt æquales; Ergo ſubtendunt baſes æquales TA, & AB, vt ex propoſ. 15. Deinde punctata AC eſt æqualis rectæ BA quia ſunt æquales duo trianguli niger, & albus, ſiquidem anguli ad D niger, & albus recti ſunt ob perpendicularem DA: Idèo æquales, & quia habent DA crus commune, & alterum crus DC, alteri DB ex conſtructione æquale; eaderè, &

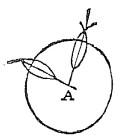


bases BA, & AC erunt æquales. Vnde tres lineæ AB, scilicet AG, & AT radij erunt, & A centrum.

Sed expeditiùs datam circumferentiæ portionem circularem, vtcumque in B, C, D diuide, & rectis BC, & CD puncta diuisionis cum extremis punctis, vel quibuslibet alijs B, & D coniunge; diuisisque rectis bifariam trahe perpendiculares FA, & EA per puncta diuisionis, & in A erit centrum. Probatur, quia ex Coroll. propos. primæ duæ perpendiculares transeunt necessariò per centrum, quòd cùm sit vnicum necessariò in eo conuenire debebunt; quare punctum A, in quo conueniunt erit centrum circuli.



Sufficit quoque excitare perpendicularem sine tractione linearum BC, & CD si ex punctis C, B, D trahantur portiones circulorum se decussantes, & per eas duæ rectæ ducantur; quia non aliter fieret: Si super lineas iam tractas essent perpendiculares erigendæ, vtpote ex prop. 8. primi; Vnde licet non ducantur CD, & CB eadem operatio valebit.



EXPENSIO III.

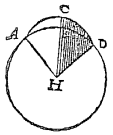
De lineis intra circulum ductis.

COgnitio linearum intra circulum ductarum deseruit tũ ad cognitionem sinuũ, tum ad cognitionem Parallaxium, tum ad cognitionem Excẽtricitatũ, & ad multa alia, quare in Elementis aliquas primas cognitiones haurire oportet, vt facilior ad ea sublimiora pateat aditus.

THEOR. I. PROP. XII. Euc.2.

Si in circuli peripheriam duo quælibet puncta electa fuerint. Recta linea, quæ ad ipsa puncta adiungitur tota intra circulum cadet.

HÆc propositio, quasi est principium, & per se nota. Vnde breuiùs eam probabimus. In circulo AOB sumantur duo puncta, quæ recta copulentur, *hæc recta intra circulum cadet*. Quod si non cadit, cadet in ipsam, vel extra ipsam circumferentiam. Quod si dicatur, aut idem erit cum circumferentia ACD, aut magis flexa, quàm ipsa, vt ACD. Quod si adhuc obstinatiùs asseratur recta, vt eos ita dicentes conuincamus, ducantur ad extrema huius lineæ ACD, rectæ à centro HA, & HD, & ducatur inter ipsas HC eis vtrique, aut æqualis, aut maior, cum vel exeat, vel terminet ad circumferentiam; sed hæc eadem necessariò est minor, si ACD, vt mendaciter asseritur, est recta. Ergo recta, & non recta, quòd est absurdum.



Probandum est itaque, quod debeat esse minor. Id verò à prop. 14. primi eruitur. Nam ibi habemus angulos ad basim Isosceliũ esse æquales, vt niger D, & albus A in triangulo æquicruri ADH, cùm basis curua ab aduersarijs dicatur absurdè recta.

Secundò angulus albus ad C, vtpote externus est maior angulo interno, & opposito D nigro, ex Coroll. 1. prop. 17. primi. Quare, & erit maior angulo huic æquali ad A. Sed ex propos. 19. primi, maior angulus malus etiam latus subtendit. Ergo AH erit maior, vtpote subtensa angulo maiori albo apud C, quàm HC, quæ subtenditur angulo minori ad A. Quare HC, eâ AH erit minor, sed supra dictum est, quod esset maior, aut æqualis, quod est absurdum.

THEOR. II. PROP. XIII. Euc.3.

Si in circulo quædam recta linea per cẽtrum extensa, quamdam non per centrum bifariam secet, eam quoque ad angulos rectos secabit, & si secet ad angulos rectos bifariam quoque eam secabit.

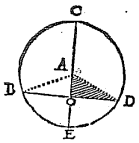
PEr centrum A circuli BCD transeat CE, secetque aliam quamcunque in circulo existentem BD non transeuntem per centrum, per medium; Dicit propositio, quòd & ad angulos rectos secabit, & hæc est prima pars huius propositionis.

Ad quod demonstrandum à punctis circumferentię extremisque lineę BD, trahantur ad centrum A rectę AD, & AB punctatę; quo facto.

Probatur prop. Latus DO trianguli nigri est ex hypothesi æquale albi trianguli cruri OB; bases quoque punctatæ BA, & AD vtpote radij sunt æquales. Crus verò OA commune: Ergo ex propos. 23. primi, angulus ad O niger erit æqualis albo, item ad O: Ergo erunt anguli recti.

Secunda pars est, quod si linea per centrum ducta CE alteri non per centrum ductæ, vt BD ad angulos rectos sit; quod BD etiam secta erit bifariam.

Probatur. Nam crura punctata, vtpote radij sunt æqualia. Quare totum triangulum semialbum BAD habebit angulos B, & D ad basim æquales; sunt quoque ex hypothesi niger ad O, & albus ad O æquales; Ergo in duobus triangulis habemus duo crura punctata æqualia, & anguli D niger, & B albus æquales, & rursus angulI ad O niger, & albus æquales; Ergo ex 27. propos. primi, reliqua quoque latera reliquis lateribus erunt æqualia, nempe BO, & OD.



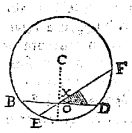
THEOR. III. PROP. XIV. Euc.4.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se mutuò secent non per centrum deductæ, se se mutuò bifariam non secabunt.

DVæ rectæ lineæ se mutuo secent, V.g. BD, & EF in circulo BDF, quæ per centrum non sint deductæ; dicit numquam posse euenire, vt se in duas partes æquales diuidant. Licet enim vna ex ipsis possit esse bifariam diuisa, altera tamen nequaquam in partes æquales remanebit diuisa.

Probatur. Et si vna ex istis transeat per centrum alia non, clarum est, quod transiens per centrum bifariam non secatur: Eò, quia in centro solùm bifariam diuidatur, ex prop. 1.

At si neutra transeat per centrum. Tunc ad eam sectionem ducatur perpendicularis à centro inuento, ex prop. 1. huius, quod si nequeat deduci; est clarum, ex prop. anteced., neutram secari bifariam, cùm ad nullam ex ipsis transiens per centrum perpendicularis duci queat. Quod si ducatur ad alteram ipsarum, vt BD. Tunc dico alteram BF bifariam non esse sectam: Nam si secta EF bifariam est; Ergo etiam cum EF à centro cadens CO faciet angulos rectos, ex prop. anteced. Quare angulus X albus rectus erit æqualis recto seminigro COD; quod esse nequit, cùm angulus albus X sit pars anguli seminigri COD.



THEOR. IV. PROP. XV. Euc.7.

Si in circuli diametro sumatur punctum, quodcumq; quod circuli centrum non sit, & ab eo in peripheriam lineæ rectæ cadant; maxima erit ea quæ per centrum ducitur.

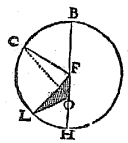
Minima verò reliqua, quæ in directum ad oppositam partem tendit.

Aliarum verò semper maior est, quæ propinquior est maximæ.

Et illi duæ æquè propinquæ, tantummodò æquales erunt.

QVatuor partes enumerat hæc propositio. Prima est illa, quæ ait; quòd si eligatur aliquod punctum in diametro, quod nõ sit centrum, V. g. O, & ex eo ducatur per centrum F ad circomferentiam B recta OB, illam fore maximam omnium. Ad quod probandum ducatur quælibet alia, quæ placuerit, V. g. OC punctata. Et puncta C, & F rectâ iungantur. Nam ostenditur OB esse maiorem, quàm OC, quam elegisti.

Prob. In triangulo COF duo crura CF, & FO sunt maiora basi punctata, ex propos. 20. primi, Sed hæc duo latera sunt æqualia rectæ per centrum ductæ OB; cùm crus OF sit eius pars, & FC sit æquale reliquæ FB, vtpote radij. Ergo tota OB, vtpote æqualis duobus cruribus est maior basi punctata OC.



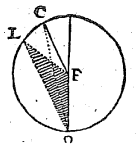
Secunda pars est. Quòd OH sit omnibus alijs minor, quæ ab O indirectũ maximæ OB ducitur, & sit vna cum illâ. Ad quod ostẽdendum ducatur OL, & coniungatur LF, & probabitur OL esse maiorem, quàm OH.

Prob. Nam basis LF est minor cruribus LO, & FO, ex propos. 20. primi in triangulo nigro; sed tota basis LF est æqualis FH, vtpote radius; Et FO est crus parsque lineæ FH, ergo reliquum OH erit minus crure LO.

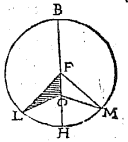
Tertia pars est. Quòd ex lineis ab O ductis, quæ sunt propinquiores maximæ, reliquis remotioribus sint maiores. Sic OC erit maior, quàm LO, quod sit propinquior maximæ OB.

Prob. Nam duo crura FC, & FL, quæ ducuntur à centro ad circumferentiam sunt æqualia, vtpote radij. Crus verò OF idem pro ambobus triangulis deseruit albo, & nigro. Sed angulus ad F seminiger maior est angulo ad F nigro; cùm sit niger eius pars: Ergo ex prop. 25. primi maior erit basis CO, quàm OL. Quod & verificatur etiam si punctum O, sit in circumferentiâ ipsâ, vtpote in figurâ appositâ LCO.

Dicit tandem ab eodem puncto duci posse tantummodo duas lineas æquales ad inuicem, hinc inde. Quod, vt demonstret, ad idem punctum F faciendus est angulus albus æqualis nigro; & sit OFM ducendo crus FM, & postea crus OM. Nam ostendetur OM esse æqualem lineę OL.



Probatur verò sic. Quia crura nigri trianguli, & albi sunt æqualia vnum quidem commune FO, aliud verò LF, alteri MF, vtpote radij, æquale, angulus quoque albus ex effectione æqualis nigro est. Ergo ex propos. 22. primi, bases quoque LO, & OM erunt æquales. Quod verò nulla alia præter istas possit esse istis equalis colligitur ex probatis. Nam quælibet alia erit, vel ijs maximæ propinquior, vel remotior, & ideò nulla istis LO, & OM erit æqualis. Cùm istæ sint æquidistantes ob æqualem angulum nigrum, & album; quæ ab æquali circumferentia subtenditur LH, & HM.



THEOR. V. PROP. XVI. Euc.14.

In circulo æquales rectæ lineæ æqualiter distant à centro, & quæ æqualiter distant à centro æquales sunt inter se.

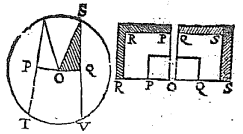
SInt intra circulũ BSTV, cuius centrum O duæ rectæ æquales TR, & SV. Dicit prima pars propos. æqualiter à centro distare.

Et ad hoc, vt assumptum probetur; ducantur duæ perpendiculares PO, QO à centro O ad prędictas rectas RT, & SV, quæ ex propos. 13 secabuntur ab ipsis in duas partes æquales. Deinde à punctis peripherię, & extremis datarum rectarum R, & S recte ad centrum ducantur, & erunt facta triangula duo album, & nigrum.

Probatur autem ex propos. 11. secundi. Nam cùm hæc duo triangula sint rectangula, quadrata facta super basim subtensam angulo recto erunt æqualia duobus quadratis factis à lateribus angulum rectum continentibus, quapropter quadratum ex OR basi, quod seorsim delineauimus, erit æquale duobus in ipsis descriptis à cruribus PR mediocri, & minimo PO. Et idem asseras de allo quadrato facto super basim OS, quod est æquale duobus inclusis ex cruribus QS, & OQ.

Secundò. Duo quadrata maiora inter se sunt æqualia ob æqualitatem basium à centro ad circum-

eumferentiam ductarum OS, & OR. Sed & duo quadrata mediocria ſunt æqualia inuicem, vtpote ſuper medietates PR, & SQ, æqualium datarum in praxi facta. Siquidem RT, & SV præſuppoſitæ ſunt æquales.



Quamobrem, ſi quadrata minima ex PO, & OQ cùm mediocribus iuncta erant æqualia maximis, & per conſequens inter ſe, ijs mediocribus ablatis per imaginationem; quę erant inuicem æqualia, adhuc quadrata minima remanebunt æqualia, & conſequenter eorum latera PO, & OQ, quæ, cùm ſint perpendicularia, menſurant diſtantiam linearum datarum RT, & SV à centro, vt conſtat ex Defin. 4. huius Libri, & ideò æquales rectæ RT, & SV æqualiter diſtabunt à centro.

Dicit quoque inuertendo primam partem. Quod datis rectis, V. g. RT, & SV; quę æquidiſtent à centro; quòd hæ lineę inter ſe erunt æquales. Ad quod oſtendendum ducendę rurſus ſũt perpẽdiculares PO, & OQ, quę ex Def. 4. huius erunt æquales inſuper, & rectas datas RT, & SV bifariam diuident, quòd perpendiculariter ducantur à centro, vt ex 13. propoſ. huius, deinde trahendę RO, & OS. Quò poſito.

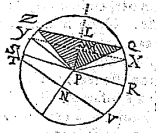
Probatur propoſ. eodem tenore, ac pars antecedens probata eſt. Nam baſes RO, & OS, vtpote æquales radij, dant quadrata æqualia maxima quæ ſunt RO, & OS; quę etiam ſunt æqualia ijs, quę includunt mediocribus RP, & QS, & minimis OQ, & OP; ſi tamen vnà mediocre, & minimum ad maximum includens referantur, & hoc, quia proueniunt à cruribus triangulorum nigri, & albi angulum rectum Q, & P concludentibus, vt ex propoſ. 11. ſecundi conſtat; maxima verò à baſi. Minima autem quadrata æqualia ſunt inuicem; Quia deſcribuntur à perpendicularibus æqualibus OP, & OQ. Ergo ſublatis iſtis minimis per imaginationem quadrata mediocria inter ſe æqualia remanebunt, & per conſequens latera eorum æqualia. Hæc verò ſunt crura in triangulis albo PR, & nigro SQ, quæ, &, vt diximus, ſunt quoque medietates datarum RT, & SQ. Vnde ſi medietates ſunt æquales; ſequitur etiam; quòd integrę lineę datę æquidiſtantes à centro RT, & SV ſint æquales, quod oportebat oſtendere.

THEOR. VI. PROP. XVII. Euc. 15.

In circulo maxima quidem linea eſt diameter; aliarum autem propinquior centro remotiore, ſemper maior.

SIt datus circulus, in quo dentur duę protractę quomodocumq; V. g. ZQ, & TV, & quę tranſeat per centrum SR. Omnium maximam dicit eſſe SR, quę per centrum tranſit, reliquas, quò ei propinquiores, eò maiores. Quod vt probetur ad datas non tranſeuntes per centrum ZQ, & TV deducãtur perpendiculares ab ipſo centro, quæ ſint PL, & PN, quę enim remotior eſt, vt ZQ, ex Defin. quarta huius maiorem perpendicularem habebit. Detruncabis itaque alteri minori perpendiculari ab hac maiori æqualem portionem, quæ erit PM, & per hoc punctum M, ages aliam perpendicularem YX huic PL, & puncta, in quibus circumferentiam tangit rectis YP, & PX cum centro P connectes. Idemque fiat de remotiori data ZQ connectendo puncta extrema in circumferentiam deſinentia, cum centro P rectis PZ, & PQ.

Probatur primo, quod data per centrum tranſiens SR ſit maior quacunque aſſignetur, & ſit aſſignata ZQ. Crura trianguli nigri in centrum deſinentia PZ, & PQ ſimul ſunt æqualia, vtpote radij medietatibus SP, & PR diametri, & per centrum tranſeuntis SR, quæ, & radij ſunt. Sed duo crura cuiuſcumque trianguli, ex propoſ. 20. primi ſunt maiora baſi; ergo, & diameter æqualis cruribus iſtis erit maior, quàm baſis ZQ, & ita probabitur de omni alia linea aſſignabili, quæ tamen per centrum non tranſeat, vt patet.



Probatur quoque; quod propinquiores centro ſint maiores diſtantioribus.

Duę lineę CTV aſſignata eſt æqualis protractę punctatę YX; quia æqualiter diſtant à centro ob perpendiculares æquales protractas PM, & PN: & ex propoſ. anteced. quę æquidiſtant à centro æquales ſunt inuicē. Sed aſſignata remotior ZQ eſt minor, quàm punctata YX: Ergo, & minor quàm aſſignata TV. Quod verò ſit minor, patet ex propoſ. 25. primi. Nam crura trianguli nigri, & alterius YXP, vtpote, quod omnes ſint radij ſunt æqualia. Angulus verò ad centrum P niger minor ſe comprehendente YPX. Ergo, & baſis ZQ, quę eſt aſſignata remotior eſt minor, quàm punctata YX, & conſequenter minor, quàm altera aſſignata huic æqualis TV.

EXPENSIO IV.

De lineis circulum tangentibus exteriùs.

VIſis proprietatibus linearum intra circulum, remanent exteriorum proprietates examinandę verè mirabiles propter angulum cõtactus; qui, cũ ſit in infinitũ augumẽtabilis, non tamen minimum angulum acutum rectilineum ſuperare poteſt, nec angulus rectilineus quantumlibet diminutus, eo poteſt eſſe minor.

THEOR. I. PROP. XVIII. Euc. 16.

Quæ ab extremo cuiuſcumque diametri ad angulos rectos ducitur, extra ipſum circulum ducetur.

Et in locum inter ipſam rectam lineam, & peripheriam comprehenſum altera recta linea duci non poterit.

Et ſemicirculi quidem angulus quouis angulo acuto rectilineo maior eſt.

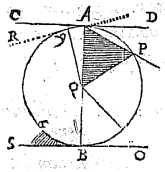
Reliquus verò minor.

MVltas partes complectitur propoſitio, quas ſingulis declarationibus illuſtrare opus eſt prima

prima eſt, quod ſi adſit diameter AB ad cuius extremum A ducatur perpendicularis DAC. Dicit hanc extra circulum cadere. Et probatur per reductionem ad impoſſibile.

Si namque poſſibile exiſtimatur, quod intra circulum trahi queat. Trahatur AP coniungaturque eius extremum centro rectа PQ.

Probatur. Nam angulus niger ad A per aduerſarios, cùm mendaciter aſſerant AP eſſe perpendicularem, eſt rectus; Sed angulus ad P eſt ei æqualis, vtpote æquicruri trianguli anguli ad baſim, ex propoſ. 14. primi propter æquales radios, cruraque QP, & QA. Ergo triangulum APQ duos angulos A, & P rectos haberet, quod eſt impoſſibile, quia ex propoſ. 17. primi, omne triangulum omnes ſuos tres angulos duobus tantùm rectis æquales obtinet.



Prob. etiam hęc pars poſitiuè hoc pacto. Nam aſſumpto in perpendiculari BO quolibet puncto, V.g. O iunguntur OQ, cùm ergo huius trianguli albi angulus ad B rectus ſit erit angulus ad O minor recto, ex propoſ. 17. primi, quare erit maior QO baſis, vtpote ſubtenſa angulo maiori recto, ex propoſ. 19. primi, quàm BQ angulo O ſubtenſa, & conſequenter punctum O extra circulum erit, & idem erit de quolibet alio puncto aſſignabili.

In ſecundâ hac parte aſſerit inter circũferentiã AP, & perpendicularem ad extremum diametri, AD, rectam aliam non poſſe trahi à puncto A, quę circumferentiam non ingrediatur ex parte. Et probatur per reductionem ad impoſſibile. Nam ſi hoc euenire poteſt ducatur, & ſit punctata AR, ad quam à puncto Q ducatur perpendicularis QY ad quodlibet eius punctum Y.

Probatur angulus ad Y rectus eſt, quia QY facta eſt perpendicularis; ergo angulus ad A erit minor, ex propoſ. 17. primi. Sed ex propoſ. 19. primi, maiori angulo maius latus ſubtenditur. Ergo recta AQ ſubtenſa angulo maiori Y erit maior quàm YQ ſubtenſa angulo minori A. Sed illa eſt ſemidiameter; ergo QY minor ſemidiametro, & tamen ſi punctaa R non intra circulũ caderet, ſed extra deberet eſſe maior ſemidiametro ad hoc, vt punctum Y, quod eſſet extra, copularet; quãobrem punctum Y intra erit.

Tertia pars affirmat quoque angulum interiorem factum à circumferentia, & diametro, vt eſt angulus QBT eſſe maiorem quolibet acuto rectilineo.

Probatur. Nam linea faciens quemlibet acutum angulum, nempe minorem recto, eſſet veluti punctata AR, vel quælibet alia ſimilis ei, quę à puncto A inter perpendicularem, & circulum, iſtis minorem angulum efficeret. Sed iam oſtenſum eſt AR, & quamlibet aliã intra circumferentiam cadere, ergo portio circumferentię remanet foras, V.g. YA. Sed hæc portio circuli facit angulum internum dictum circumferentia diametroque concluſum. Ergo híc angulus erit maior quàm acutus ad A à punctata diametroque concluſus.

Dicit tandem angulum contingentiæ, qui dicitur, & angulus Reliquus, qualis eſt angulus niger TBS circumferentia BT, & linea circumferentiam tangente in B comprehenſus, qui eſt reliquus anguli interni à peripheriâ diametroque concluſi. Dicit inquam hunc angulum contingentiæ, & reliquum, omni acuto rectilineo eſſe minorem.

Probatur. Nam ſequitur ex dictis. Etenim angulus internus eſt maior omni acuto angulo, ſed híc eſt reliquus eius ad complendum rectum. Ergo minor omni acuto angulo, qui poſſit vſque ad rectum, alium acutum rectilineum complere.

COROLLARIVM.

HInc manifeſtum eſt rectam à diametri extremitate orthogonaliter ductam ipſum circulũ tangere. Oſtenſum enim eſt cadere extra circulum, quare in ſolo illo extremo diametri circulum attingit, & ſi prolungetur, cum & prolungata orthogonalis ſit ad diametrum, cadet extra circulum. Vnde non ſecabit. Quare tangentem ad quodcumque punctu m circumferentię ducemus, ſi tracto ad illud diametro, perpendicularem ad eius extremum excitabimus.

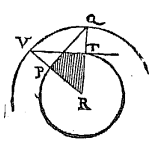
PROB. I. PROP. XIX. Euc. 17.

A dato puncto extrinſeco rectam lineam ducere, quæ datum tangat circulum.

TAngens linea ea dicitur ex 2. Def. huius, quæ circulũ tangens, etiam producta, non ſecat, quod ſcilicet exteriorem circumferentiam radat, vt in anteced. propoſ. eſſet SO; intendit ergo híc docere modum quo hęc trahatur.

Sit itaque circulus, cuius centrum R, & ſit punctum datum V, à quo hęc tangens deducenda ſit. Connectatur centrum R, cum puncto dato V ſecante VR, & à puncto vbi ſecat P excitetur perpendicularis PQ. Deinde centro R ad interuallum RV portio ſufficiens circuli ducatur, ad cuius circumferentiam prolũgetur perpendicularis PQ vſque dum ſecet, & à puncto, vbi ſecat Q ad centrum R recta ducatur QR. Quę ſecabit circulum datum minorem in T. A puncto igitur dato V ad hoc punctum ſectionis T, recta ducatur: & hæc erit tangens quæſita, quę tanget circulum datum in T.

Probatur angulus ad T niger rectus eſt; ergo quę expoſcitur TV ad angulos rectos ad diametrum TR incidit. Itaque eſt tangens.



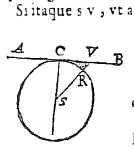
Quod verò angulus niger ad T ſit rectus probatur. Nam angulus ad P niger rectus eſt. Sed hi anguli ſunt æquales; ergo, & angulus T eſt rectus. Quod verò ſint æquales, patet ex 22. prop. 1. Nam triangula VTR, & aliud QPR habent crus vnum minus PR æquale alteri RT, vtpote ſemidiametri circuli minoris, & aliud VR alteri RQ, vtpote ſemidiametri circuli maioris. Angulus verò niger ad centrũ R, eſt vtriſq; communis. Ergo ſecundùm eam propoſitiné 22. primi triangula tota erunt æqualia, & anguli quoque, qui ſibi correſpondent, æquales, vt eſt angulus niger P, & angulus niger T. Quare erunt recti, cùm niger P vnus eorũ talis ſit, ex effect. Vnde TV perpendicularis erit, & ideò tangens.

THEO-

THEOR. II. PROP. XX. Euc.18.

Si circulum tangat recta quæpiam linea; à centro verò ad contactum adiungatur recta quædam linea, quæ adiuncta fuerit ad ipsam contingentem perpendicularis erit.

TAngat recta AB circulum in C, & ab hoc puncto contactus, ducatur ad centrum, CS. Dicit esse perpendicularem ipsi AV. Quòd probabitur per reductionem ad impossibile. Nam ducatur quelibet alia, quę sit perpendicularis, & hęc V.g. sit SV.

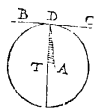


Si itaque SV, vt aduersarij fabulantur perpendicularis est, erit angulus niger ad V rectus, reliqui verò ad C, & ad S oportebit, quod sint minores recto, cũ 2. Coroll. prop. 17. primi in omni triãgulo 3. anguli, solùm duobus rectis æquẽtur. Sed quia omnis trianguli maior angulus maiorem basim, latusq; subtendit, ex 19. primi. Erit itaque SC angulo nigro, quem rectum appellant, basis subtensa maior, quam SV minori angulo C subtensa, at CS est, vt semidiameter, æqualis semidiametro SR, quæ est pars totius SV. Ergo pars esset totâ maior; quod est absurdum.

THEOR. III. PROP. XXI. Euc.19.

Si circulum tetigerit recta quæpiam linea: à contactu verò ad angulos rectos recta linea ipsi tangenti excitetur, in excitata erit centrum circuli.

SIt circulus, quem tangat recta BC in puncto D, & ab eo puncto erigatur perpendicularis DT. Dicit in hac centrum reperiri. Quod si aliquis negauerit, ostendetur quodlibet punctum ab eo assignatum pro centro impossibilitatem inuoluere. Assignetur itaque, & sit punctum A, ad quod ducatur à contactu D recta AD, quę ex eis, quę ostendimus in præcedenti propos. erit quoque perpendicularis.



Probatur itaque facilitèr. Quia cùm DA ad centrum A ficũm ducta sit, perpendicularis erit, facietque angulos hinc inde rectos. Sed etiam DT ducta est ad angulos rectos. Quare, cùm omnes recti sint æquales, angulus lineis DC, & DA clausus albus esset æqualis angulo cruribus DC, & DT seminigro comprehenso. Qui albo CDA parte nigrâ maior est. Quadere totum esset suę parti æquale, quod repugnat.

THEOR. IV. PROP. XXII. Euc.8.

Si extra circulum sumatur punctum quodpiam, & ab eo ducantur rectæ, vna per centrum transiens, reliquæ aliæ in cauam peripheriam, vel conuexam.

Earum, quæ in cauam protenduntur transiens per centrum, maxima; cæteræ, quò viciniores sunt lineæ transeunti per centrum eò, maiores.

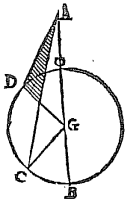
Earum autem, quæ in conuexam terminant, minima est illa, quæ inter punctum exterius assumptum, & peripheriam conuexam interponitur tendendo ad centrũ.

Reliquæ, quò huic viciniores, eò minores.

Duæ verò æquales solùm in peripheriam cadunt vtrinque maximæ, vel minimæ.

HÆc Propositio quinque partes habet, & in omnibus, vt 15. propos. eisdem principijs innititur, excepta 4. probatione, & eodem modo argumentandi procedit, vnde ex ea facilis, & expedita euadit. Dicit primò itaque; quod si eligatur aliquod punctum, V.g. A extra circulum, & ex eo in concauam peripheriam cadens recta transeat per centrum G: Hæc erit maior omnibus, quę possint in dictam concauam peripheriam cadere.

Quod, si negetur, trahatur quęcumque linea à puncto A in cauam peripheriam, & sit AC. De hac enim, & de qualibet alia, quę assignetur, probabitur esse minorem linea per centrum ductâ AB. Ad quod ostendendum ducatur à puncto C peripherię, quę ab ea tangitur ad centrum recta GC.



Probatur duo crura sunt maiora reliquo nimirum basi CA in triangulo albo ACG, ex prop. 20. primi. Sed crus à cẽtro ad circumferentiam terminans CG est æquale portioni GB lineę AB per cẽtrum transeuntis: Crus verò allud est idem, ac AG alia portione eiusdem per centrum transeuntis lineę. Ergo tota AB per centrum transiens est maior, quia AC, quę per centrum non transit, & sic probabitur de omni aliâ, quę posset assignari.

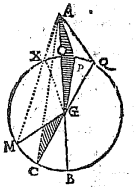
Secunda pars est; quòd portio AO, quę cadit in peripheriam conuexam, & si protendatur, in centrum caderet, sit omnium minima, quę in circumferentiam conuexam cadunt. Quod si nõ credatur, assignetur quęcumque, & sit AD. Coniungaturque punctum D, vbi peripheriam tangit, ad centrum linea GD, habemusque triangulum seminigrum DAG.

Probatur itaq; In hoc triangulo basis GA est minor ex propos. 20. cruribus simul sumptis GD, & AD. Sed GD est æqualis portioni GO, cùm vtraque à centro ad circumferentiam pertingat. Ergo OA est minor, quàm AD; quod volebam ostendere,

ostendere, & valebit in qualibet aliâ lineâ, quæ assignetur, idem argumentum.

Tertia pars est. Quod si alię rectę prętęr AB transeuntem per centrum, in cauam peripheriam protendantur, vt AC, & AM, illam esse maiorem, quę magis propinquat transeunti per centrum AB. Quod, vt ostendatur coniungatur CG, & GM, eruntque duo triangula seminigrum AGC, & totum album AGM.

Probatur autem. Nam crus trianguli seminigri CG est æquale cruri triãguli albi MG: Sunt enim ambo radij; nimirum ducti à centro ad peripheriam: Crus verò aliud AG in ambobus triangulis idem est. Sed angulus ad G trianguli albi, cùm sit pars, est minor angulo ad G trianguli seminigri; quod insuper addat portionem nigram: Ergo ex propos. 19. primi basis AM erit minor, quàm AC.



Quarta pars asserit insuper. Quod, quę sunt viciniores portioni linęę transeuntis per centrũ extra circulum AO sint minores remotioribus; quę à dicto puncto A in conuexam peripheriam cadunt, vt sunt AP, & AQ. Nam linea AP erit brevior, quàm AQ; quod ostendetur de quibuscunque alijs, quę possent duci.

Probatur. Nam ductis à centro ad circumferentiam rectis GP, & GQ ad puncta, vbi prędictę AP, & AQ eam contingunt; erunt æquales. Sed intra triangulum maius AQG ab extremis A, & G duę rectę cadũt GP, & PA, quę ex prop. 21. sunt minores duabus AQ, & GQ cruribus trianguli AQG. At iam duo radij GP, & GQ sunt æquales: Si itaque auferantur, remanebit AP minor, quàm AQ. Et sic ostendetur de quibuscunque alijs, quę possent duci.

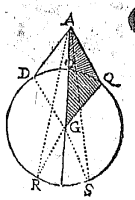
Quinta pars est tandem. Quòd duę rectę lineę, hinc, & inde duci possint ad lineam transeuntem per centrum æquidistantes, quæ sint æquales. Inspice figuram Coroll. sequen.

Quod, vt demonstretur, fiat angulo ad centrum G albo, angulus æqualis niger, item ad G, & trahatur AQ. Et probatur sic propositio.

Nam duo crura GD albi, & QG nigri trianguli, vtpote radij, sunt æqualia. Anguli verò ad G, tum niger, tum albus sunt æquales, & crus GA commune; Ergo ex prop. 22. primi, bases AQ, & AD erunt æquales.

Quòd verò nulla alia possit esse istis æqualis; patet ex eo, quia deberet trahi, vel remotiùs, vel propinquiùs ad lineam centralem GA, & iam probatum est lineas rectę transeunti per centrũ propinquiores esse minores; remotiores verò maiores.

COROLLARIVM.



COllige, quod licet Euclides solùm demonstrarit de lineis cadentibus in circumferentiam conuexam, eadem tamen demonstratio valet in lineis cadentibus in concauam, vt patet de lineis BA, & SA.

COROLLARIVM II.

COlligitur 2. Quod licet Euclides demonstrarit de lineis cadentibus ad vnam partem; verificatur tamen etiam de lineis cadentibus hinc, & inde; cùm sit par argumenti ratio; dummodo vna sit remotior alterâ.

EXPENSIO V.

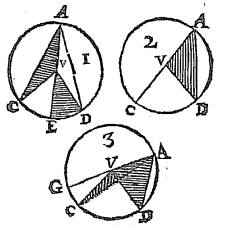
De Angulis in circulis inexistentibus.

DVplex est angulus rectilineus in circulo inexistens, alius est ad centrum, alius est ad circumferentiam. Comparat verò istos angulos, tum inter se, tum prout sunt in segmentis, tum in peripherijs, quibus insistunt, tum angulis, quos facit contingens cùm aliquâ lineâ intrinsecâ, & omnes istę propositiones verè fundamentales sunt; cùm ex ipsis multa, multaque deducantur ad Parallaxes præcipuè spectantia, & ad figuras describendas, ad sinus inueniendos, &c.

THEOR. I. PROP. XXIII. Euc.20.

In circulo angulus ad centrum duplex est anguli ad circumferentiam, cùm fuerit eadem circuli circumferentia basis angulorum.

TRibus modis potest accidere; quòd eadem circumferentia sit basis angulorum duorum, quorum vertex vnius ad centrum terminet, alius verò vsq; ad circumferentiam extendatur. Nam potest euenire, quòd crura incipientia ab ijsdem punctis peripherię, V.g. CD exterius, ferantur, vt in prima figura crura AC, & AD anguli ad peripheriam CAD cadunt extra angulum ad centrum CVD. Vel potest euenire, quòd vnum crus feratur super aliud, vt in secunda figura CA ducitur super CV, eãdemque lineam facit. Vel tandem potest euenire; quòd vnum crus anguli ad circumferentiam fecet aliud anguli ad centrum, vt in tertia figura CA secat crus VD. Sed quomodocumque id eueniat, affirmat Euclides; quod semper angulus ad centrum: nempe CVD est duplus anguli ad circumferentiam CAD.



Probatur primò quoad primum casum trahendo lineam AE, quę per vtrumque verticem V, & A transeat, & diuidat vtrosque in duas partes: Et primò probabimus de vna parte.

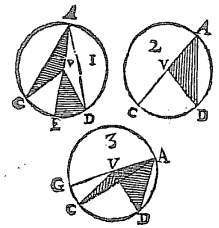
Triangulum itaq; nigrum AVC habet ex prop. 14. primi angulos ad A, & C inuicẽ æquales, cùm

sit triangulum Isosceles ob crura duo V A, & V C, quæ sunt semidiametri. Sed ipsi ijdem anguli C, & A ex propos. 17 primi sunt æquales externo albo ad centrum V: Ergo angulus V albus ad cẽtrum est duplus angulo nigro A; qui est ad circumferentiam.

Deinde idem quoque ostendetur de aliâ parte simili prorsus argumentatione. Triangulum album A V D Isosceles ob crura, & radios æquales A V, & V D habet angulos A, & D æquales. Sed angulus externus ad V niger est æqualis istis duobus: Ergo est duplus vni eorum, V. g. angulo albo A: Sed angulus niger, & albus ad A angulum totum integrant ad peripheriam; sicut angulus niger, & albus ad V integrãt angulum ad centrum: igitur si partes anguli V erant duplæ partibus anguli A; & totum erit duplum toti.

Probatur in secundo casu eodem prorsus argumento. Nam triangulum nigrum A V D in 2. figura est Isosceles. Quare anguli ad basim æquales sunt; sed angulus V albus ad centrum, vtpote externus est æqualis illis duobus, ex propos. 17. primi. Ergo est duplus vni eorum; nimirum angulo A.

Progress. 1. Probatur quoque in tertio casu. Nam tracta à puncto A per centrum V recta A c. Fient duo anguli, vnus ad centrum G V D, alius ad peripheriam G A D, super eandem circumferentiam G D. Et eadem prorsus, quæ in secundâ figurâ de hac dicemus. Nam crus G A deseruit pro vtrisque. Vnde idem argumentum valebit, & angulo nigro ad D, seminigerrimoq; ad A erit æqualis angulus ad centrum semialbus C V D, & ideo duplus ipsi A.



Progress. 2. Trianguli quoque, partes dictorum maiorum sunt eiusdem rationis, ac in secundo casu, nempe albus G V C, & nigerrimus V A C. Nam crus G A deseruit vtrisque; Quare albus ad centrum V est duplus nigerrimi ad peripheriã A.

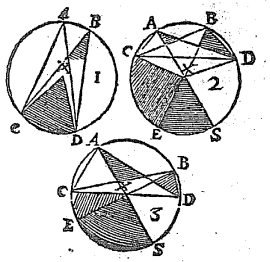
Cum itaque hæc pars alba externa apud V sit dupla parti nigerrimę apud A internę in triangulo C V A, & ex Progr. 1. totus quoq; angulus G V D externus sit duplus angulo toti interno G A D in triangulo V A D; si auferatur, tum ab angulo toto ad centrum G V D externo pars alba, tum ab angulo toto ad C rcumferentiam interno nigro apud A nigerrima pars: quod residuum erit angulus niger C V D ad centrum erit, & restabit duplus quoque anguli nigri C A D ad circumferentiam.

THEOR. II. PROP. XXIV. Euc. 21.

In circulo, qui in eodem segmento sunt anguli, sunt inuicem æquales.

HÆc propositio tres casus potest habere. Segmentũ enim circumferentiæ, vel potest esse malus semicirculo, vt in prima figura segmentum C A B D. Vel minus. vt in secunda C A B D. Vel ei æquale, vt in tertia figura segmentũ C A B D.

Sit itaque hoc segmentum semicirculo maius vt in prima, in quo sint duo anguli A albus, & B niger ad circumferentiam. Superque eam circumferentiam, super quam inexistunt, vt C D iuxta propos. antecedentem fiat angulus X ad centrum totus niger trahendo crura C X & X D.



Probaturque propositio. Angulus A albus ad circumferentiam iuxta preced. propos. est semissis anguli nigri X ad centrum: Sed eiusdem nigri X ad centrum est quoque semissis angulus B niger ad circumferentiam. Ergo cùm B niger, & albus A sint medietas eiusdẽ, inter se erunt ęquales.

Ad probandam secundam, & tertiam partem simul necesse est diuidere angulos A, & B per lineas transeuntes per centrum A S, & B E quemlibet in duas partes nigram, & albam. Insuper & trahere semidiametros C X, & X D, & iam vides angulum partialem ad A album, tàm secundę, quàm tertię figurę habere angulum ad centrum ex nigro, nigerrimoque integratum C X S. Sed eundem nigerrimum, & album E X D obtinere quoq; alteram portionem nigram anguli B. Portionem verò albam anguli B in vtraque figura habere pro angulo ad centrum angulum nigrum C X E: Sicut & anguli A portio nigra obtinet pro angulo ad centrum angulum album D X S. His perceptis.

Probatur sic. Duo anguli ad centrum niger, & nigerrimus C X S sunt dupli, ex preced. propositione portioni albę anguli A. Angulus verò albus ad centrum D X S est portioni nigrę ad A duplus. Ergo niger nigerrimus, & albus simul est duplus toti angulo nigro alboque ad circumferentiam A. Sed hi tres albus niger nigerrimusque ad centrum sunt dupli quoque totius anguli B ad circumferentiam: Siquidem niger est duplus eiusdem B portionis albę; nigerrimus, & albus E X D ad cẽtrum portionis nigrę ad B. Quare angulus B niger albusque totus, & angulus A albus nigerque totus sunt semissis anguli totius portionibus alba, nigerrima, nigraque constantis ad centrum. Quare inter se erunt æquales.

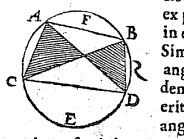
THEO-

THEOR. III. PROP. XXV. Euc. 22.

Quadrilaterorum in circulis descriptorum anguli, qui ex aduerso, duobus rectis sunt æquales.

DIcit; quod si quadrilaterum quodcumque circulo inscribatur C A B D illius anguli oppositi, quales sunt B, & C, aut A, & D sunt duobus rectis æquales. Quod, vt probet, trahit duas diagonales lineas A D, & C B, quę angulos in duas portiones diuidunt.

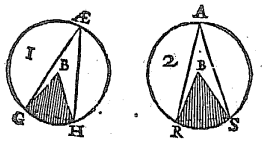
Probatur. Nam anguli A pars nigra est æqualis parti nigrę anguli B, ex prec. propos. quòd sint in eodẽ segmento C A B D. Similiter etiam pars alba anguli A, quòd sit in eodem segmento B A C E D, erit æqualis parti albę anguli C. Igitur totus angulus A seminiger æquatur duabus portionibus nigrę B, & albę C. Sed addamus istis portionibus albę C, & nigrę B angulum D seminigrum totum erunt isti, ex propos. 17. primi duobus rectis æquales; Siquidẽ sunt interni triangulo C B D. Quamobrem angulus totus A niger, albusque vice harum portionum, quibus æquatur, nigræ B, & albę C substitutus, cum angulo D seminigro. Faciet duos angulos duobus rectis æquales: Eodem modo procedet demonstratio in oppositis B, & C. Quare patet propositio.



THEOR. IV. PROP. XXVI.

In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus peripherijs insistunt, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

SI sint duo circuli æquales, quibus fiant duo anguli ęqui, vel ad centra, vt sunt nigri, vel ad circumferentias, vt albi. Dico illos angulos subtendere portiones circulorum æquales, vel eis insistere. Quod est idem.



Probatur primò de angulis æqualibus ad centrum. Nam segmentum primi G Æ H æquale est segmento secundi R A S; & toti circuli præsupponuntur æquales. Ablatis ergo à circulis æqualibus segmentis æqualibus portiones æquales remanebunt; nimirum G H, & R S.

Quod verò segmenta G Æ H, & R A S sint æqualia probatur. Quia ex defin. 9. ea segmenta sunt æqualia, quæ angulos æquales includunt: Sed Æ, & A sunt æquales. Siquidem dimidij sunt, ex propos. 23. huius æqualium angulorum nigrorum ad centrum. Quamobrem circulorum portiones G Æ H, & R A S, in quibus insunt, erunt æquales.

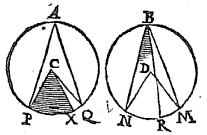
Quare sequitur quoque secunda pars. Nam si fiant anguli ad peripherias æquales Æ, & A insistent æqualibus segmentis ex eadem defin. 10. Quare ijs segmentis à circulis æqualibus ablatis portiones circulorum G H, & R S remanebunt æquales.

THEOR. V. PROPOS. XXVII.

In æqualibus circulis, anguli qui æqualibus peripherijs insistunt, sunt inter se æquales, siue ad centra, siue ad peripherias constituti insistant.

HÆc propositio conuertit antecedentem. Sed alio pacto ostenditur. Nempe per reductionem ad impossibile. Dẽtur itaque duo circuli æquales, & anguli in illis A, & B, vel ad centrum C, & D, qui insistant peripherijs æqualibus P Q, & M N. Dicit *eos angulos fore æquales*.

Nam si non sunt, ducatur punctata C X, quę faciat angulum nigrum ad centrum C primi circuli æqualem angulo albo ad D centrum secundi circuli, prout volunt aduersarij.

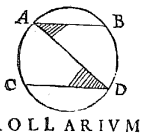


Tunc probatur angulus niger ad C centrum, vt falso mentiuntur aduersarij est æqualis angulo D albo secundi circuli. Ergo insistant peripherijs æqualibus, ex propos. anteced. Quare portio peripherię P X est æqualis portioni M N secundi circuli. Sed eidem ex suppositione est æqualis portio P Q. Ergo portio P Q erit æqualis suę parti P X. Quod est impossibile.

Eodem modo probatur de angulis ad peripheriam A, & B. Nam, si non sunt æquales. Aduersarius faciat eos æquales tracta linea B R: Eritque angulus niger ad B, ęqualis angulo albo ad A. Quare peripherię portiones, quibus insistunt, N R, & P Q erunt æquales. Sed quoque portio M N est æqualis eidem P Q. Ergo portio minor N R esset æqualis maiori N M. Quod est absurdum.

COROLLARIVM I.

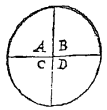
COlligitur hinc primo. Quod si duę lineę in circulo, vt A B, & C D intercipiant duas æquales portiones circuli, vt C A, & B D fore inuicem parallelas, quia tracta A D incidente anguli nigri alterni sunt æquales ob portiones æquales, quibus insistunt ex premissâ: Quando verò anguli alterni fiunt ab incidente, vt est A D æquales, duæ super quas cadit, parallelę sunt, ex propos. 28. primi.



COROLLARIVM II.

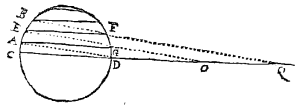
FLlicitur rursus duarum linearum se rectangulè decussantium, & per centrum transeuntium. Angulos ad centrum quartę circuli insistre. Nam, cùm faciant quatuor rectos A B C D,

& omnes recti æquales sint, oportebit, etiam circumferentias, quibus insistunt esse æquales: Et ideò circumferentiam in quatuor portiones esse diuisam, quę dicuntur quadrantes. Quare quoq; euidens est; omnem angulum acutum insistere minori portioni quadrantis; quia est minor recto: Obtusum verò maiori circumferentię, quàm quadrans sit; quia est maior recto.



COROLLARIVM III.

COlligitur item. Quod illę, quę in circulo coniungunt parallelas æquales arcus intercipiętes ad partes oppositas, vt sunt AD, EG, & EF punctatę coniungentes parallelas arcus æquos intercipientes CD ad AG, & AG ad EF, adhuc esse parallelas. Ratio est, quia, cùm AC sit incidens in punctatas, & anguli alterni sint æquales ob æqualitatem portionum circuli GD, & AC, quibus insistunt, ex propos. 30. primi, punctatæ quoque æquidistantes erunt.



COROLLARIVM IV.

DEducitur etiam. Quod si EC punctata protendatur, & similiter diameter vsque dum occurrant in O, æqualem futurâ diametri portionem, quę extra circulum prolungatur, vt est DO, & lineam AG in circulo ei æquidistantem. Ratio est, quia EO, & AD punctatę sunt parallelę; similiter, & OD, & AG. Quare AOGD erit parallelogrammum, ex def. 35 primi. Quare ex propos. 34. primi, latera aduersa erunt inter se æqualia. Vnde OD erit æqualis rectę AG, & si alias protendas eodem modo idem sequetur. Quare diameter productum extra circulum æquabitur omnibus in circulo existentibus sibi parallelis, vt est CQ, quę æquatur tribus in circulo existentibus, & sibi parallelis CD, & AG, & EF.

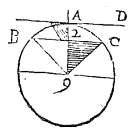
COROLLARIVM V.

COlligitur quoque rectę BC portionę circuli subtendenti esse parallelam lineam AD tăgentem punctum medium peripherię subtensę BAC, quale est A. Quia illę sunt parallelę, super quas recta cadens angulum facit externum. & internum oppositum, & ad easdem partes æqualem. Sed angulus A niger, & B 29. albus sunt æquales, cùm recti sint, vt dictum est.

Ergo sunt tangens AD, & subtendens BC parallelę, vt figura sequenti.

COROLLARIVM VI.

COlligitur tandem. Quod si BC secetur per medium per aliquam lineam à centro proeuentem, & portionem circuli, quam subtendit secari per medium, & viceuersa.



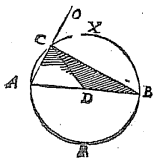
Nam anguli ad centrum æquales æqualium triangulorum, qualia sunt ostensa album, & nigrum ad 9 habent etiam bases æquales, ex 22. primi 2 B, & 2 C, & æqualibus peripherijs insistunt, vt AC, & AB, ex preced. & ideò erunt æquales portiones BA, & CA.

THEOR. VI. PROP. XXVIII. Euc. 31.

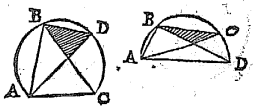
In circulo angulus, qui in semicirculo rectus est, qui autem in maiore segmento, minor recto: qui autem in minore maior est recto, Insuper angulus maioris segmenti, recto quidem maior est, minoris verò segmenti angulus minor est recto.

HÆc propositio quinque partes habet. Sed quę, primâ ostensâ cęterę faciles euadant. Primam itaque partem primò declarabimus. Dicit itaque, quod angulus in semicirculo, vt est C, niger nigerrimusque simul, cuius vertex in circumferentia est, basis verò illum subtendens totus diameter AB, rectus est. Quod, vt ostendatur, ducenda est recta CD, & prolungandum latus CA in O.

Probatur angulus externus albus C est æqualis angulis internis, & oppositis A, & B totius trianguli ACB, ex propos. 17. primi. Ergo est etiam equalis angulo interno ad C, qui nigerrimus nigerque simul.



Probatur. Nam angulus A, & angulus B sunt æquales eius duobus portionibus, & A quidem nigrę, angulus verò B portioni nigerrimę: Ergo & eędem portiones sũt æquales angulo externo albo C. Quod verò angulus A sit æqualis portioni nigrę, patet ex propos. 14 primi. Nam sunt anguli ad basim in triangulo Isoscele ACD, cùm duo crura sint semidiametri AD, & CD. Quod verò B sit æqualis portioni, & angulo nigerrimo C, eodem argumento probatur. Nam triangulum totum nigrum ob crura, quę sunt semidiametri est Isosceles, vnde B, & C nigriores, vt anguli ad basim sunt æquales.



Dicit quoque. Quod si in maiori segmento sit ABC angulus erit minor recto, & si angulus ABO, sit in minori segmento erit recto maior. Quod, vt probetur, trahatur à puncto A diameter in vtrisque segmentis AD. Trahaturque eius BD faciens, ex preced. probat angulum rectum BAD. Nam angulo in maiori segmento ABC, addit partem nigrã; vnde ABC minor erit recto, at angulo in minori ABO parte nigra minor est idem rectus, quare ABO maior erit recto.

Dicit tandem circumferentiam maioris segmenti facere cum recta subtensa, angulũ recto maiorem: At minoris segmenti recto minorem, ad

Ad quod ostendendum inspiciatur prima figura. Nam CB erit subtensa, & peripheria segmenti maioris CRB, minoris verò CXB, cùm ergo angulus C rectus sit, & recta CA intra circulum cadat: Patet; quòd circumferentia extra cadens CA faciat suum angulum, cùm recta CB maiorem recto. At in minori segmento peripheria CX lineam CO foras relinquit: Quare facit cum CB angulum recto minorem; quia angulus OCB maior rectus est, vt prima parte huius propos. est ostensum.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Quod si fiat triangulum rectangulum quodcumque, & maior eius basis bifariam diuisa assumatur pro centro interuallũ medietate eius prębente, circulum necessariò per tres vertices extremos angulorum rectanguli esse transiturum. Quoniam, si non transiret, vel secaret, vel supra, se fleteret: Si secaret, ergo iam intra illud rectangulum triangulum equale ei posset constitui contrà propos. 21. primi: Si super transiret, posset constitui triangulum angulum rectum comprehendens, & tunc angulus rectus rectanguli, vtpote comprehensus, ex propos. 21. primi esset maior.

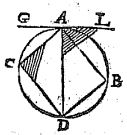
THEOR. VII. PROP. XXIX. Euc. 32.

Si circulum tetigerit aliqua recta linea. A contactu verò producatur aliqua recta linea circulum secans; Anguli, quos ad contingentem facit, æquales sunt illis angulis, qui in alterni circuli segmentis consistunt.

SIt tangens circulum GL in puncto A, à quo recta educatur, quę secet circulum in duo segmenta, vt est AD, Hęc vel per centrum transibit, vel non. Si transibit per centrum, erit primus casus, de quo primò demonstratio erit.

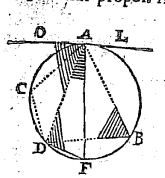
Casus 1. Asserit itaque, quòd hęc transiens per centrum AD faciet angulum, cum tangente æqualem angulo, qui comprehenditur ab alterno segmento; nempe angulum nigrum ad A dextrũ angulo C nigro sinistri segmenti: Angulum verò sinistrum ad A album angulo segmenti dextri B albo.

Probatur verò. Omnes recti anguli sunt equales. Sed anguli segmentorum C, & B recti sunt, ex prędced. & anguli GAD, & LAD, quos perpendicularis per centrum transiens facit, cum tangente sunt, ex propos. 20. huius recti: Ergo omnes sunt æquales.



Casus 2. Dicit quoque idem esse, & euenire. Si linea à puncto A egrediens non transeat per centrum, vt in hac secunda figura. Nam angulus dexter albus nigerrimusque ad A à secante AD tangenteque OL factus est æqualis angulo C segmenti sinistro, sicut & allus niger ad A est æqualis alteri nigro B. Quod, vt probetur trahenda est AF, quę transeat per centrum, & tracto crure DF constituendum est rectangulum triangulum ADF.

Probatur propos. Angulus niger OAD est æqualis angulo apud F in triangulo ADF. Sed iste angulus F est æqualis angulo nigro B. Ergo angulus B niger, & niger apud A sunt inuicem æquales. Probatur ex propos. 24. huius, quòd angulus F in triãgulo ADF sit æqualis nigro B: Quia est in eodem segmento ABFD, Probatur quoq; quod idem angulus F, sit æqualis nigro A: Quia niger D ex anteced. rectus est, quare ex propos. 17. primi, reliqui nigerrimus apud A, & apud F vni recto erunt æquales: Sed angulus niger, nigerrimusque apud A rectus est: Ergo ablato angulo nigerrimo, cum quo angulus apud F, & niger apud A æquantur vni recto, restabunt inuicem anguli F, & A niger æquales. Quamobrem angulus B angulo F æqualis, æquabit quoque angulum nigrum apud A.



Sic probatur de angulo dextro LAD, quod sit æqualis angulo sinistro ACD in segmento: Nam B niger, & C albus in quadrilatero CADB, ex propos. 25. huius æquantur duobus rectis, & similiter anguli niger, & LAD apud A æquantur duobus rectis; Sed iam ostensum est angulum B nigrum esse æqualem angulo A nigro. Ergo reliquum nigerrimum, & album ipsius erit æquale angulo albo C in triangulo ACD segmenti.

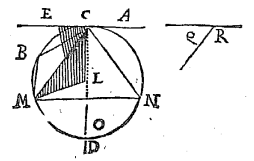
PROB. V. PROP. XXX. Euc. 33.

Super data recta linea describere segmentum circuli; quod capiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

DOcet híc constituere quodlibet segmentum super quamlibet rectam, quodcapiat angulum æqualem dato angulo rectilineo.

Et quidem si angulus rectus datus sit, non oportebit, nisi diuidere lineam, V.g CD bifariam, & ibi centro posito in L describere semicirculum. Nam ex dictis propos. 28. capiet angulum rectum, qui erit equalis dato; cùm omnes recti sint equales. Sed si non sit rectus, at acutus, vt Q, tunc magis operis requiritur.

Sit itaque angulus datus Q acutus, cui æqualis capax super lineã CM facere oporteat aliquòd segmentum circuli. Ducatur ad initium eius C linea EA, quę faciat angulum acutum nigrum equalem angulo dato Q, & ad eam erigatur perpendicularis, exiens à puncto C, quę sit OC, & portione nigerrima compleat angulum rectum, & ab altero extremo M punctata alia ducatur



versus perpendicularem, quæ faciat angulum ad M nigrum equalem angulo nigerrimo ad C. Hę namque punctatę CL, & LM, vt subtensę angulis equalibus

æqualibus, ex propos.15. primi erunt æquales. Quare facto centro in L interuallo L C describi poterit circulus, qui transibit per M, vtpote per semidiametrũ æqualem. Si itaque in hoc segmento C N M super lineam C M constituatur angulus N. *Iste erit æqualis angulo acuto nigro ad* C. Qui est æqualis angulo Q dato.

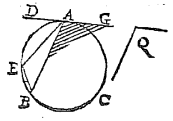
Probatur autem ex præmissa propositione faciliter. Nam angulus ad C niger E C M est angulus ad contingentem. Ergo erit æqualis angulo alterni segmenti, qui est angulus N.

Quòd si velimus facere angulum obtusum, V. g. R. Fiat angulus eodem pacto, quo supra A C M ei angulo R æqualis, & facto circulo è centro L in segmento C B M fiat angulus B. Nam, cùm sit ex præcedenti propos. in segmento alterno C B M erit æqualis angulo obtuso A C M, & R.

PROB. VIII. PROP. XXXI. Euc.34.

A dato circulo segmentum abscindere capiens angulum æqualem dato angulo rectilineo.

SIt datus angulus Q, & oporteat à circulo dato A B C abscindere portionem, quæ capiat angulum æqualem dato angulo Q. Ducatur recta D C tangens circulum in puncto A, & à puncto A ducatur recta A B, quæ faciat cum tangente D C angulum æqualem angulo Q, prout docet propos. 24. primi, & segmentum alternum A E B capiet angulum E æqualem angulo Q.



Probatur. Nam ex 29. propos. huius angulus in segmẽto alterno A E B capiens est æqualis angulo nigro ad A. Sed angulus niger ad A factus est æqualis angulo dato Q. Ergo segmentum A E B capit angulum æqualem dato angulo Q.

EXPENSIO VI.

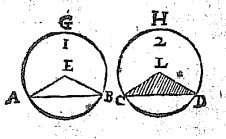
De Peripherijs.

HIc agimus de Peripherijs eas comparando ad inuicem, & ostendendo quales sint æquales, qualesque non subeant æqualitatem. Docemus etiam peripheriam, atque adeò circulũ bifariam secare: Et, licet hæc expensio sit facilior præcedenti, oportuit tamen posponere, cùm dependeat in aliquibus à demonstrationibus angulorum præhabitis.

THEOR. I. PROP. XXXII. Euc.28.

In æqualibus circulis, æquales rectæ lineæ, æquales peripherias auferunt maiorem quidem peripheriam æqualem maiori alterius, minorem verò vnius æqualem minori alterius.

DIcit lineas æquales in circulis æqualibus (quòd etiam intelligitur de eodem, vt notat Clauius,) vt sunt A B, & C D in æqualibus circulis primò, & secundò auferte segmenta æqualia scilicet diuidere qualibet suum circulũ in duas portiones, quæ & si non sint æquales, inuicẽ illæ, quæ sunt eiusdem circuli, comparanda est maior primi circuli, cum maiore secundi, & hæ circuli portiones erunt inuicem æquales; sicut & minor primi comparata minori secundi.



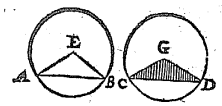
Probatur. Nam anguli ad centrum E, & L triangulorum albi, & nigri sunt æquales. Ergo insistunt segmentis, & peripherijs æqualibus minoribus A B, & C D, ex propos. 26. huius, quæ albatæ ab æqualibus circulis per imaginationem relinquent portiones peripheriæ maiores A G B, & C H D æquales.

Probatur verò; quod anguli E albus, & L niger ad centrum sunt æquales, quoniam bases A B, & C D, ex præsuppositione sint æquales: Latera verò, vt semidiametri æqualium circulorum æquales sunt, totum igitur triangulum nigrum, toti albo æquale est. Quare & angulus ad centrum, ex prop.23. primi E albus erit æqualis nigro L.

THEOR. II. PROP. XXXIII. Euc.29.

In æqualibus circulis rectæ lineæ, quæ æquales peripherias subtendunt, sunt æquales.

ESt conuersa precedentis, & sequitur à 27. huius, quę & ipsa conuertit 26. Sint itaque peripheriæ æquales A B, & C D, quę rectis subtendantur, fiantque anguli ad centrum E, & G tractis semidiametris A E, & E B conficientibus trilãgulum album, & alijs G C, & G D nigrum delineantibus.



Probatur. Quia peripheriæ C D, & A B, V.g. minores præsupponũtur æquales, anguli E albus, & G niger ad centrum, ex 27. propos. huius sunt æquales; Sed & crura sunt æqualia; Quia omnia sunt semidiametri. Ergo ex propos.22. primi, & bases æquales erunt quales sunt A B, & C D.

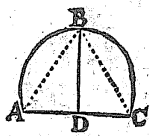
THEOR. III. PROP. XXXIV. Euc.30.

Datam peripheriam bifariam secare.

AD hoc vt peripheria A B C bifariam secetur. Ducatur recta subtendens A C, & diuidatur bifariam in D, & ab ea diuisione D erigatur perpendicularis D B vsq; ad peripheriã protensa; hæc namque diuidet eam in duas partes æquales, ad quod probandum ducendæ sunt duæ lineæ nimirum A B, & B C.

Probatur

Probatur lineę modò tractę sunt æquales. Ergo ex prop. 32. huius, & peripherię, quas subtendunt A B, & B C æquales sunt.



Probatur, quòd subtensę sint æquales. Nam bases sunt triangulorum æqualium A B D, & B D C. Hęc verò triangula probantur æqualia, ex prop. 22. primi: Quia crus B D est commune: alterum verò crus D C ex constructione fecimus æquale D A alteri cruri: At anguli ad D, A D B, & B D C recti sunt. Quare & bases A B, & B C æquales.

EXPENSIO VII.

De Rectis circulo inscriptis, & circumscriptis.

QVemadmodum egit Euclides Libro secundo de potentijs laterum trianguli, tum rectanguli, tum obtusanguli ad æqualia quadrata, & rectangula constituenda.

Sic hic agit de potentijs linearum, aut in circulo se secantium, aut circulum tangentium ad æqualia quadrata, rectangulaque describenda. Vtilissima omnium cognitio; quippe qui conducis maximè deseruiat, tangentibusque reperiendis, & secantibus maximè profit, & solidis ipsis sphæricis, conicisque ad inueniendam eorum soliditatem aditum sternat.

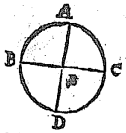
THEOR. I. PROP. XXXV.

Si in circulo duæ rectæ lineæ se se mutuò secuerint rectangulum comprehensum sub segmentis vnius æquale est ei rectangulo, quod sub segmentis alterius comprehenditur.

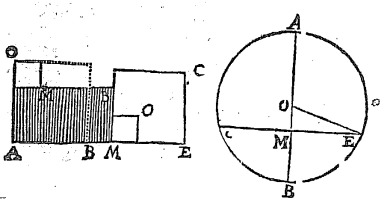
QVatuor casus propositio hęc enumerat. Nam vel ambę lineę, quę se in circulo secant sunt diametri, & est primus casus. Vel vna earum; sed se inuicem secant ad angulos rectos; & ecce secundus. Vel vna earum diameter est; sed non se secant ad angulos rectos; & erit tertius. Vel tandem neutra earum transit per centrum, siue ad angulos rectos, seu ad non rectos secet, & erit quartus casus: Qui singuli diuersas probationes expoſcunt.

Primus casus. Sit igitur circulus A B C D, in quo duo diametri A D, & B C se secent in E dicit rectangula, ex segmentis B E, & E C vnius, & ex segmentis alterius A E, & D E facta inuicem esse æqualia.

Patet, quia cùm segmenta sint semidiametri sunt omnia æqualia. Vnde & æqualia rectangula constituent.

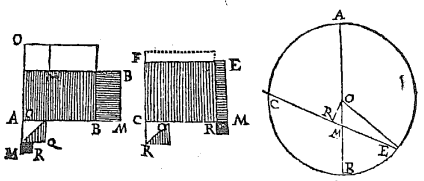


Casus 2. Sit in circulo C E B, linea, quę rectè secet diametrũ in M. Dicit, quòd *quadratum* factum ex M E, & M C, *est æquale rectangulo* facto, ex A M portione diametri, & M B alia diametri portione. Quod vt demonstretur trahendus est semidiameter O E.



Probatur verò ex propos. 7. secundi rectangulum nigrum factum ex A M, & M B vna cum quadrato paruo O M ex intermedia O M est æquale quadrato ex dimidia, quale est punctatum B O; quòd diameter A B sectus sit in æqualia in O, & non æqualia in M. Sed huic eidem quadrato ex dimidiâ æquale est quadratum ex dimidia M E; quale est M C iuncto tamen eidem quadrato M O. Ergo si hoc quadratum M O, tum à rectangulo nigro, tum à quadrato M C auferatur remanebunt quadratum rectangulumque nigrum inter se æqualia. Remanet probanda minor, quod duo quadrata M C, & M O paruum æquentur quadrato punctato B O, hoc autem patet. Nam quadratum O B est æquale quadrato O E cùm sint semidiametri, & lineę æquales, sed quadratum ex O E cùm sit basis subtensa angulo recto M, ex propos. 11. secundi est æquale quadratis ex M E, quod est M C, & M O paruo. Ergo eisdem quoque est æquale quadratum punctatum ex O B. *Quare rectangulum nigrum erit æquale quadrato* M C, quod probandum erat.

Casus 3. Dicit tertiò. Quòd si linea C E secuerit A B diametrum, & non ad angulos rectos, adhuc vera erit propositio; Et quod rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, V. g. sub C M, & M E erit æquale rectangulo comprehenso sub segmentis alterius, nẽpe diametri M B, & M A. Quod, vt probet, trahit perpendicularem à medietate lineę C E; nempe à puncto R, quę cadet ex propos. 1. huius Coroll. in centrum O. Deinde coniungit centrum cum extremo E rectâ O E.



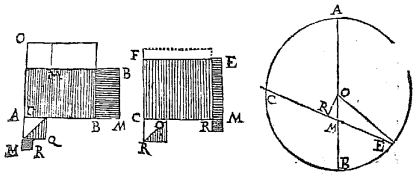
Probatur paulò operosiùs, quam precedens propositionis pars. Diameter A B est sectus in O, in æqualia, & in M in non æqualia: Quapropter rectangulum sub partibus inæqualibus A M, & M B contentum, quale est nigrum M A B, & quadratũ A Q ex intermedia M O seminigrum simul sunt æqualia quadrato ex medietate diametri O B, ex propos. 7. secundi, quale est O B, & quod idem est propter æqualitatẽ linearum quadrato ex O E. Sed hoc quadratum ex O E, vel O B est quoque æquale propter propos. 11. secundi quadratis C R & O R hoc est, seminigro, & ex R E punctato F R.

Ergo quadratum hoc R F punctatum vna cum quadrato seminigro annexo erit æquale rectãgulo nigro

nigro AMB ex ſegmentis diametris iuncto cum quadrato QA ex OM.

Sed modò hoc quadratum QA, ex propoſ. 11. ſecundi eſt æquale duobus OR ſeminigro, & MR minimo nigerrimo ob angulum rectum R.

Quapropter poterimus ſubſtituere loco illius QA hęc duo, ſeminigrum ex OR, & MR minimum nigerrimum. Quare quadratum punctatum RF, vt diximus, cum quadrato ſeminigro erit æquale huic rectangulo nigro AMB aſſociato cum quadrato eodem ſeminigro OR, & minimo nigerrimo MR.

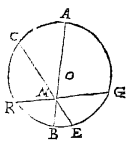


Abijciatur itaque ab vtriſque comes iſte ſeminiger OR, & remanebũt adhuc æqualia rectangulum nigrum AMB cum minimo nigerrimo quadrato, quod remanſit, & quadratum punctatum RF factum ex dimidia RE.

Sed huic quadrato punctato RF facto ex dimidia RE eſt æquale rectangulum nigrum factum ex ſegmentis inæqualibus CM, & ME lineę CE, nimirum CE vnà, cum quadrato ex intermedia RM facto, quod eſt minimum nigerrimum RM, ex propoſ. 7. ſecundi; Siquidem linea CE eſt diuiſa in æqualia in R, & non æqualia in M. Quare duo rectangula nigra AB M nimirum ex ſegmentis diametri, & CE ex ſegmentis alterius aſſociata duobus quadratis minimis nigerrimis ſunt æqualia vni tertio; nempe quadrato RF ex RE. Vnde erunt æqualia inuicem. Tolle itaque illa quadrata minima nigerrima, cùm ſint eiuſdem quantitatis, vtpote eiuſdem intermediæ RM, *& remanebunt æqualia rectangulum nigrum, ex ſegmentis diametri* AMB; *& ex ſegmentis alterius nigrum rectangulum* CE.

Caſus 4. Sint tandem duę rectę, quę in circulo quomodocumque ſe ſecent CE, & GR in M. Ducaturque per punctum M ad centrum diametr AB. Dicit; quòd *rectangulum* ex ſegmentis lineę CE *æquale eſt rectangulo* ex ſegmentis lineę RG.

Probatur. Nam ex precedenti tertia parte rectangulum ex ſegmentis CM, & ME lineę CE eſt æquale rectangulo ex ſegmentis diametri AM, & MB. Sed ex eãdem rectangulum ex ſegmentis GM, & MR lineę GR eſt eidem rectangulo ex ſegmentis diametri AM, & MB æquale. Ergo rectangulum ex ſegmentis lineę CE, & rectangulum ex ſegmentis lineę RG ſunt æqualia inuicem.



COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Quomodo datis duobus lineis inæqualibus poterimus eas ita ſecare, vt ex earum ſegmentis rectangula componantur æqualia. Nam ſi eas in circulo accomodamus, ita ut ſe inuicem ſecent; certum erit, quòd rectangula ex ſegmentis ijs confecta æquabuntur ad inuicem.

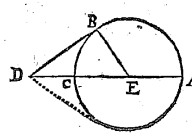
THEOR. II. PROP. XXXVI.

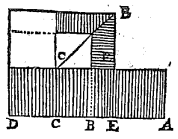
Si extrà circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum tangat, altera ſecet. Rectangulum, quod ſub tota ſecante, & portione exteriùs inter punctum aſſumptum, & conuexam peripheriam intercepta comprehenditur, æquale eſt ei quadrato, quod deſcribitur à tangente.

DVos caſus hæc propoſitio enumerat. Nam ſecans, vel per centrum tranſit, vel non. Si per centrum tranſeat, vt eſt in appoſita figura DA.

Primus caſus erit, & intendit demonſtrare rectangulum ſub tota DA, & ſub portione DC, quę inter peripheriam conuexam, & punctum aſſumptum mediat, comprehenſum nigrum eſſe æquale quadrato rectę tangenti DB; Quod, vt perficiat, à puncto contactus ad centrum ducit BE, quæ ex 20. tertij perpendicularis etit.

Ex propoſ. 8. ſecundi cùm diameter ſectus ſit in E in partes æquales, & ei adiecta fuerit recta exteriùs DC, rectangulũ, quod eſt nigrũ DA com prehenſum à tota DA, & adiecta DC, cum quadrato ex dimidia CE nimirum radio, quod eſt CB, cuius Gnomon niger eſt æquale quadrato ex DE dimidia, & adiecta confecto, nimirum maximo DB.



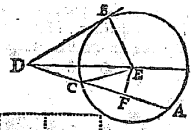


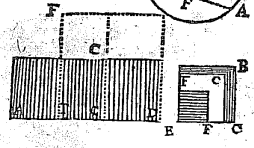
Sed huic quoque maximo DB; ex propoſ. 11. ſecundi ſunt æqualia duo quadrata punctatũ ex DB, & alterum ex radio BE, quod eſt idem, ac illud, cuius Gnomon niger CEB.

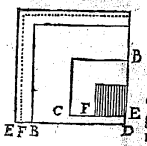
Ergo rectangulum nigrum DA iuncto eodem quadrato CEB, cuius Gnomon niger eſt, æquale inuenitur iſtis duobus, punctato nimirum iuncto eodem CEB. Quare, ſi hoc CEB auferatur ab vtriſque *remanebunt rectangulum nigrum* DA, *& quadratum punctatum ex* DB *tangente æqualia*.

Dicit quoq; hanc propoſitionem verificari quando *recta ſecans per centrum non tranſeat*, vt eſt in ſeq. figura DA. Nam tota DA, & portio DC exterius intercepta faciet rectangulum æquale quadrato tangentis BD. Vt verò probet. In primis trahit à puncto contactus ad centrum perpendicularem BE, ex 20. huius. Rurſuſque diuisa CA bifariam in F, ab eo ducit perpendicularem ad centrum E, ex 13. huius. Deinde ducit radium CE.

Prob. Quadratum punctatum ex DF dimidiâ, & adiectâ eſt æquale rectangulo nigro ex tota AD, & adiecta DC, comite quadrato ex dimidia CF ex propoſ. 8. ſecundi, & addito vtrinque quadrato minimo EF, quadratum EF cum punctato FD, & rectangulum nigrum cum eodem EF, & alio quadrato CE iam ſibi comite remanebunt æqualia.







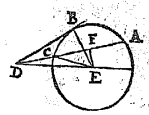
Hęc autem duo quadrata comitantia rectangulum nigrum, vtpote ex cruribus CF, & FE æquantur quadrato ex ſemidiametro quale eſt CEB, cuius Gnomon niger, ob rectum angulum F, ex propoſ. 11. ſecundi.

Ergo poſſumus ſubſtituere hoc pro illis, & ſic rectangulum nigrum quadrato hoc ECB comite æquatur quadrato DF punctato, & addito minimo nigro FE.

At hęc duo punctatum, & nigrum minimum æqualia ſunt maximo quadrato DE, vtpote facto ex baſi, & ſubtenſa angulo recto F, ex prop. 11. ſecundi. Quamobrem, & rectangulum nigrum comite quadrato ECB ex radio EC nuper ſubſtituto æquabitur ipſi maximo ED. Sed & huic idẽ eſt æquale quadratum ex tangente DB, & quadratum ECB ex radio EB, ex propoſ. 11. ob rectum angulum B. Ergo & rectangulo nigro vna cum quadrato ECB erunt æqualia.

Tolle itaque ab vtriſque quadratum ECB ex radio BE, aut EC, quod idem eſt; *remanebuntque æqualia quadratum* DB, *& rectangulum nigrum ex* DA, *&* DC.

Quod & verificabitur ſi linea DA non cadat ad alteram partem, ſed ad eaſdem partes, vt in figura ſecunda videre licet.



COROLLARIVM I.

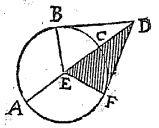
HInc manifeſtatur; Quod ſi plurimę lineę cadant ſecantes circulum, omnia rectangula à totis ijs lineis, & earum partibus extra circulum remanentibus inter ſe eſſe æqualia; quoniam ſuut æqualia omnia vni tangentis alicuius ab eodem puncto exeuntis quadrato.

COROLLARIVM II.

MAnifeſtum quoq; eſt tangentes ab eodem puncto ductas inuicem æquales exiſtere. Ratio eſt; quia omnes lineę, quæ tangunt, faciunt ſuum quadratum rectangulo alicui ſecantis æquale; Propterea, & quadrata debebunt eſſe æqualia. Quare & latera eorum quadratorum æqualia eſſe debebunt.

COROLLARIVM III.

COnſtat quoque ab eodem puncto extra circulum aſſumpto non; niſi duas, tangentes duci poſſe: Alioquin; ſi alia duceretur, aut infra BD, aut ſupra caderet, & ſic ducta BE



elus contactum coniungente eſſet maior, vel minor, quòd eſſe nequit, & angulus ad B eſſet maior, vel minor recto, quod, nec eſſe poteſt.

COROLLARIVM IV.

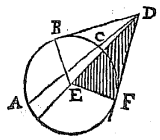
COnſtat quoque, quòd ſi duę rectę æquales à quolibet puncto exteriùs aſſumpto in conuexam peripheriam incidant, & vna earum ſit tangens, alteram quoque tangere; Quia ſi non tangeret, ſecaret. Quare ad alteram partem punctata tangens duci poſſet, quę, & eſſet æqualis tangenti alteri, V. g. DB. Quare in circumferentiam ab eodem puncto inciderent tres æquales, contra documenta propoſ. 22. huius.

THEOR. III. PROP. XXXVII.

Si extra circulum ſumatur punctum aliquod, ab eoque puncto in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera circulum ſecet, altera in eum incidat. Sit autem, quod ſub totâ ſecante, & exteriùs inter punctum, & conuexam peripheriam aſſumpta comprehenditur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente deſcribitur quadrato, incidens ipſa circulum tanget.

EXtra circulum datum ſumatur punctum D, & ex puncto duæ rectæ in circulum cadant, quarũ vna ſecet, & faciat rectangulũ ſub ſuo ſegmento DC, & tota AD comprehenſum æquale quadrato ex tota alterius incidentis, V.g. ex BD. Dicit *eam* BD *circulum tangere in* B. Quod, vt demonſtretur, ducenda eſt tangens aliqua, V.g. DF, & coniungenda ſunt cum centro punctum contactus huius rectæ EF, & punctum B incidentię alterius lineę rectâ BE; Et ſi non tranſeat ſecans DA per centrum, ducenda eſt altera ſecans, quę per centrum tranſeat, quę ſit DE.

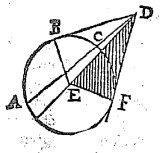
Probatur. Nam triangula album, & nigerũ æqualia ſunt lateribus ſibi correſpondentibus: Quare ex 23. primi anguli F, & B erunt æquales; Sed angulus F rectus eſt, ex propoſ. 20. quod DF circulum tangat. Ergo & angulus B rectus erit, & cõſequẽter ex Coroll. prop. 18. DB *circulum tanget.*

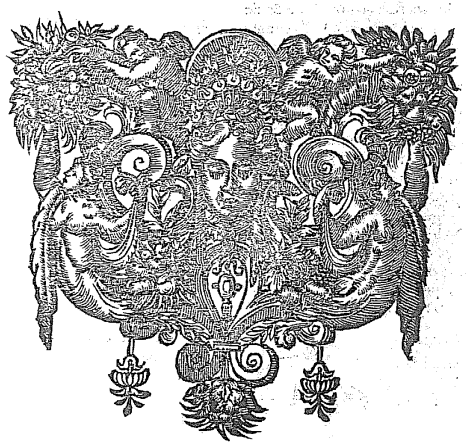


Remanet probandum. Quòd triangula latera habeant correſpondentia æqualia. Nam baſis DB

communis est, crus BE; & EF radius est: Quare remanet probandum de altero crure DE, & DF, id verò ostenditur. Nam quadratum factum ex DF est equale rectangulo facto ex tota AD, & segmento exterius inter peripheriam, punctumque assumptum intercepto DC. Sed & huic eidem rectangulo ponitur in propos. hac ex suppositione equale quadratum ex BD: Sed quadrata equalia facta sunt ex equalibus lateribus. Ergo, & latus, cruſque DB est equale cruri DF.

Collige hinc lineam à puncto exterius assumpto per centrum ductam diuidere angulum BDF comprehensum à tangentibus ab eodem puncto nascentibus bifariam. Ratio est, quia probata sunt duo triangula hinc, inde equalia. Quare, & è conuersò recta diuidens bifariam angulum DBF necessariò per centrum transibit; Quòd si non transiret per centrum alibi transiret. Vnde ducta, quę transiret per centrum, DE, angulum DBF bifariam diuideret: Est autem impossibile, quòd angulus in duobus locis bifariam diuidatur.





TRA-

TRACTATVS VII.

In Librum quartum Elementorum. De inscriptione, & circumscriptione figurarum in circulo.

LIBER quartus agit de descriptione figurarum respectiuè ad circulum; licet enim triangula, & quadrata possint sine circulo describi, commodiùs tamen cum reliquis figuris, aut intra circulum, aut circa circulum describuntur. Vsus verò huius Libri perneceſſarius est, tum solidis in sphæra inscribendis, & circumscribendis, tum ad comparationem externæ figuræ solidæ, cum interna, ex qua Archimedes soliditatem sphæræ adinuenit, tum ad lineas, chordasque arcuum inueniendas, & tandem ad Militares delineationes fortalitiorum.

EXPENSIO I.

De Principijs.

ANtequam propositiones ipsas aggrediamur aliqua principia, definitionesque ad hunc librum, spetialiter spectantes oportet agnoscere; istæ verò sunt.

DEFINITIO I.

FIgura rectilinea in figura rectilinea inscribi dicitur, cùm singuli eius figuræ, quæ inscribitur anguli singula latera eius, in qua inscribitur tangunt.

Cùm debeat agere Euclides de figurarum inscriptionibus, & circumscriptionibus paucis declarat, quid sit figura inscribi, & circumscribi: Quare dicit; quòd, si sit triangulum ABC, cuius vertices omnes angulorum tangant latera alterius, vt tangit triangulum prædictum latera figuræ EFG in punctis A, B, & C; quòd figura tangens in verticibus suis erit inscripta, altera tacta in lateribus vocabitur circumscripta.

DEFINITIO II.

SImiliter etiam figura circumscribi figuræ dicitur cum circumscriptæ latera singula tangunt angulos singulos inscriptæ.

Hæc Definitio est oppositа precedenti; definitque circumscriptam EFG, quę dicitur talis eò quod latera eius tangant angulos A, B, & C alterius inscriptæ.

DEFINITIO III.

FIgura rectilinea in circulo inscribi dicitur, cum figuræ inscriptæ singuli anguli tangunt circuli peripheriam.

Sic triangulum ABC circulo inscribi dicetur; quia extremi apices angulorum CBA eũ tangunt.

DEFINITIO IV.

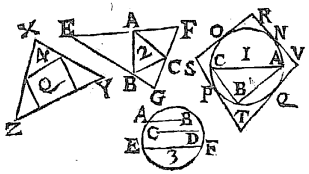
FIgura verò rectilinea circulo circumscribi dicitur; cùm singula eius, quæ circumscribitur, latera tangunt circuli peripheriam.

Sic quadrilaterum RVST circumscribitur circulo; quia eius latera circulum tangunt in punctis NOPQ, vt fig. 1.

Quare patet; quòd quadratum in triangulo, nec quęlibet figura possit inscribi in alia; cùm aliquod latus inscriptę, est idem cum circumscribentis latere, vt quadratum Q tangit circumscriptam figuram XZY: Hanc tamen inscriptionem licet impropriam admittit Claulus in fine Lib. 6. num 16.

DEFINITIO V.

SImiliter circulus in figura rectilinea inscribi dicitur, cum circuli peripheria singula latera figuræ circumscriptæ contingit.



DEFINITIO VI.

CIrculus autem circa figuram rectilineam describi cum circuli peripheria tangit singulos angulos figuræ inscriptæ.

Sic circulus NOPQ erit circumscriptus triangulo; quòd apices eius tangat in ABC: At inscriptus quadrilatero RVST; quòd eius latera tangat in punctis NOPQ.

DEFINITIO VII.

REcta linea circulo accommodari, seu coaptari dicitur; cùm eius extrema in circuli peripheria fuerint.

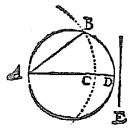
Ita nec recta AB, nec CD est coaptata circulo; quòd eius duo extrema non tangant circu-

lum ; ſed ſolùm E F ; quòd eius duo extrema circulum tangant , & in circulo ſint vt fig. 3.

LEMMA PROBLEMATICVM PROP. I.

In dato circulo rectam lineam accomodare , quæ circuli diametro non ſit maior.

COaptanda ſit in circulo A B D recta æqualis rectæ E, quæ eſſe debet nõ maior diametro; quia diameter eſt maxima linearum , quæ in circulo capere poſſunt, vt docuit 17. propoſ. tertij. Ducatur itaque diameter A C D. Et ſi fuerit diametro æqualis data E, factum erit quod quæritur. Nam coaptatus , & accomodatus diameter equalis rectæ eſt. Si verò E minor fuerit ; Ex diametro abſcindatur ei æqualis, vt A C , & centro A , interuallo verò C , circulus punctatus deſcribatur ſecans circulum priorem B: *Nam ducta recta* A B *accomodata circulo* A B D *æqualis erit datæ* E.



Probatur, quia eſt equalis , ipſi portioni diametri A C , quàm detruncauimus; ſunt enim & A C, & A B radij , & ſemidiametri.

EXPENSIO II.

De mutua circuli , & trianguli inſcriptione , & circumſcriptione.

HÆc Expenſio vtilis admodum eſt præcipuè quod 5. propoſ. aperuerit ianuam , datis tribus punctis peripheriam , quæ tranſit per illa, Inuenlendi; & data portione circuli centrum reperiendi , quæ inuentio immenſos vſus habet.

PROBL. I. PROP. II.

In dato circulo triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

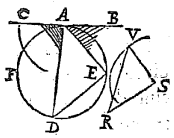
SIt deſcribendum in circulo A D E triangulum A E D æquiangulum dato triangulo cuicumq; V. g. V S R.

Ducatur recta tangens circulum in A , quę ſit C B , & à puncto A contactus recta ducatur A D faciens angulum nigerrimum apud A cum tangẽte æqualem angulo S ; ducatur quoque alia ab eodem puncto contactus , quę ſit A E , quę faciat cum tangente angulum n grum æqualem angulo R , coniungaturque E D ; *Erit que triangulum conſtitutum æquiangulum rriangulo* V S R.

Dices. Lineas A E, & A D poſſe cadere vnã ſuper aliam , aut vnã vltra aliam ; itaut non cadat in E; ſed ad alteram partem, V. g. F. Reſpondetur enim id non poſſe euenire. Quia duo anguli nigerrimus , & niger ſunt minores duobus rectis , quod ſint æquales duobus angulis R , & S , qui in quocumque triangulo ſunt minores duobus rectis , cum omnes tres anguli ſint æquales duobus rectis, ex propoſ. 17. primi . Deberent autem eſſe duobus rectis æquales , ſi vna linea caderet ſuper aliam, ex propoſ. 10. primi , quia tunc inſiſteret tangenti C B , quamobrem maiores eſſe quoque deberent , ſi altera , V. g. A E in alterius partem tranſiret , puta inter A C, & A D in E. Soluto hoc ſcrupulo, propoſitio

Probatur. Quæ ſunt æqualia vni tertio, ſunt æqualia inuicem. Sed angulus S ex conſtructione eſt æqualis angulo nigerrimo apud A , & eidem nigerrimo eſt quoque æqualis angulus albus E in alterno ſegmento A E D , ex prop. 29. Lib. 3. Ergo inter ſe anguli S , & E erunt æquales.

Eodem modo angulo nigro apud A eſt æqualis ex conſtructione angulus R , eidemque nigro apud A eſt æqualis angulus apud D in ſegmẽto A F D E alterno, ergo R, & D anguli inter ſe erunt æquales.



Sed inſuper anguli trianguli cuiuſcumq; ſunt æquales duobus rectis. Quare etiam horum duorum triangulorum A E D , & V S R anguli duobus rectis æquabuntur. Ablatis itaque à quolibet duobus æqualibus , à dato V R S anguls R , & S , & ab inſcripto A E D angulis E , & D correſpondenter æqualibus , reliqui albus apud A , & V erunt inuicem æquales. Quamobrem omnes anguli A, E, & D trianguli inſcripti erunt æquales omnibus angulis V, S, & R trianguli dati, prout oportebat oſtendere.

PROBL. II. PROP. III.

Circa datum circulum triangulum deſcribere dato triangulo æquiangulum.

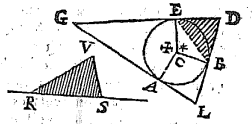
SIt datum triangulum nigrum , & circulus E A B; oporteatque circa hunc circulum deſcribere triangulum æquiangulum triangulo nigro dato.

Prolungetur baſis R S , vt eueniant duo anguli exteriores albi R, & S ; Repertoque iuxta 23. prop. tertij centro C , ducatur vtcumque recta E C ; Et deinde alia, nempe A C è centro C educatur ; quæ cùm primo ducta caplat angulum ad cẽtrum cruce notatum æqualem angulo externo albo R dati trianguli nigri . Rurſuſque alia ducta C B cum hac alium angulum C efficiat ad centrum æqualem alteri angulo exteriori albo dati trianguli nigri ad S . Quibus tribus ſemidiametris ducantur perpendiculares , quę ex Coroll. propoſ. 18. tertij erunt quoque tangentes , quę productæ conuenient inuicem in punctis G, D, L, *& conſtituent triangulum* G D L *circumſcriptum dato triangulo nigro* æquiangulum.

Dices. Lineas G E , & L B non coiturας in D. Reſpondetur enim ſpatium ad centrum clauſum rectis C B , & G E ſtellula notatum eſſe angulum , & conſequenter tractam rectam punctatam F E. (Debet enim, ſi ſic videbitur, trahi) incidentem in dictas rectas G E , & B D facere angulos ad E , & E nigros minores duobus rectis; cũ radij C B, & C E angulos rectos conſtituant ijs maiores , vt vides : Quare ex def. 12. primi neceſſariò conuenient in D lineę G E, & B L ; quod idem poterit oſtendi de linea G A , & B D A. Quæ conuenient in L , propter quod ſpatium C ad centrum ſit angulus ex conſtructione , & de linea L A , & D E ; quę conueniet in G ; quòd ſpatiũ cruce ſignatũ ex cõſtructione angulus factus fuerit.

Quod

Quod verò etiam ſpatium ſtellula notatum angulus ſit , quod præſuppoſui , ſic oſtenditur . Nam Coroll. 2. propoſ. 12 ; primi , totum ſpatium circa centrum , quod litera C , cruce , ſtellula notatum eſt , quatuor rectis æquale eſt. Item anguli ad R. albus externus , nigerque internus ſunt æquales duobus rectis , ex propoſ. 10. ſicut & anguli ad S externus albus , & internus niger ſunt æquales duobus rectis , qui duo, & duo ſimul ſunt quatuor . Quamobrem , cùm angulus ad centrum cruce ſignatus , & alius litera C notatus facti ſint æquales albis, & externis ad S , & R; ſpatium ſtellula notatum erit æquale duobus nigris internis ad S , & R. Sed illi duo interni ſunt minores, ex prop. 17. duobus rectis ; Ergo & ſpatium ſtellula notatum minus erit duobus rectis . Quare lineę E C, & C B à puncto centri ductę non erunt in directum , ex propoſ. 11. primi ; Sed facient angulum , & quidem non verſus crucem . vel C illi enim anguli maiores ſunt duobus rectis . Quare angulum efficient verſus ſtellulam lineis E C, & C B concluſum.



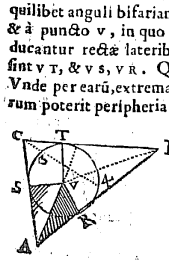
Probatur modò . Quòd hoc triangulum ſit æquiangulum. Nam quadrilineum G E A C , quatuor angulos habet æquales 4. rectis vt 17. pr. . Quare ablatis duobus rectis A ; & E per imaginationem, reliqui duo remanebunt duobus rectis æquales . Sed & anguli dati trianguli ad R externus albus internus niger ſunt duobus rectis æquales ; Ergo erunt æquales inuicem ſimul ſumpti . Sed angulus cruce notatus eſt æqualis , quòd ita fecerimus angulo externo ad R dati trianguli ; Ergo oppoſitus G erit æqualis nigro ad R interno. Eodem modo probabitur de angulo L ; quòd ſit æqualis angulo nigro ad S.

Sed omnes anguli cuiuſcumque trianguli ſunt duobus rectis æquales . Ergo , cùm duo interni S, & R ſint æquales duobus G , & L ; *Reliquus* D. *circumſcripti* angulo reliquo V dati trianguli remanebit æqualis . *Quare anguli* G L D *æquabuntur angulis* R V S. Quod , &c.

PROBL. III. PROP. IV.

In dato triangulo Circulum deſcribere.

SIt deſcribendus Circulus in dato triangulo A B C. Diuidantur per punctatas A V, & B duo quilibet anguli bifariam angulus A, & angulus B, & à puncto V , in quo ſe interſecant punctatæ ducantur rectæ lateribus perpendiculares , quæ ſint V T, & V S, V R. Quæ probabuntur æquales. Vnde per earũ,extrema tamquam ſemidiametrorum poterit peripheria tranſire S T R.



Probatur itaque lineas perpendiculares ad latera V R, & V S, primò eſſe æquales . Anguli ad A albus , & niger per diuiſionem, quam linea punctata facit, ſunt æquales, angulus quoque niger R, & niger S ſunt æquales ; cum rectl ſint , baſis vero A V eadem in vtriſque triangulis nigro, & ſemialbo.

Sed ſi duo triangula habeãt duos angulos equales inſuper , & alios duos item æquales, latuſq; aliquod æquale, æqualis quoque eſſe , quoad reliquos angulos, & latera ex propoſ. 27. primi conſtat.

Ergo latera V R, & V S equalla erunt inuicem. Idemque demonſtrabitur de V R, & V T. Quare tres lineæ S V, & T V, & R V erunt æquales; poteruntq; deſeruire pro ſemidiametris , & V in quo conueniunt pro centro . Quare deſcriptus ex V circulus tanget puncta S T R laterum trianguli. Vnde triangulo erit inſcriptus.

COROLLARIVM I.

COllige ex Io. Baptiſta Benedicto duo latera ſuperare reliquum lineis, & ſegmentis ſuis tangentibus circulum v. g. duo latera C B, & A C, alterum A B ſuperare ſegmentis tangentibus C T, & C S. Nam demonſtratum eſt baſim A R eſſe æqualem baſi A S ob æqualitatem ſuorum triangulorũ, & quia ſunt tangentes, vt ex Corol. 2. prop. 36. tertij, & idem dicas de baſi T B, & B R. Quare hæc duo ſegmẽta A S, & B T reliquum crus A B integrabunt , & reſidua remanebunt, quibus excedunt S C, & C T, quæ etiam ſunt tangentes, & conſequenter æquales, & ſi angulus C rectus eſſet, quod hic non eſt, equales etiam ſemidiametris S V, & V T.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoque quòd, cùm ſegmenta exceſſus huius C S, & C T ſint tangentes ; eorum quadratum , ſi quodlibet ſegmentum ſumatur ſeorſim , erit æquale ex propoſ. 36. tertij rectangulo facto, & tota ſecante C 4. & ſegmento extra circulum remanente C 3. etiamſi C 4. tranſiret per centrum . Quare ſequitur quoque ſi ſuper duo ſegmenta exceſus , tamquam vna linea fiat quadratum . Illud fit eidem rectangulo quadruplum : Quoniam eſt quadruplum quadrati ex vnico ſegmento facti vt colleg. ad propoſ. 6. ſecundi . Quod ſi angulus C rectus ſit, erit hoc quadratum ex duobus ſegmentis factum æquale quadrato ex diametro deſcripto . Quoniam hæc duo ſegmenta ei diametro æquantur ea ratione , vt dixi in primo Corol. quod æquantur duobus ſemidiametris .

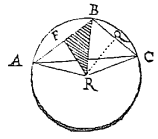
PROBL. IV. PROPOS. V.

Circa datum triangulum circulum deſcribere.

SIt triangulum A B, & B C, circa quod debeat circulus duci . Diuidantur bifariam quælibet duo eius latera, & (non quod ſit neceſſarium, ſed facilitatis gratia) aſſumantur duo latera, quæ maiorem angulum claudant, vt A B, & B C, à punctiſque diuiſionis duæ perpendiculares excitentur P R, & R Q quæ conuenient in R ; vt patet , ſi duceretur recta ab R in Q. Nam faceret, cum punctatis perpendicularibus angulos minores rectis. Quare ex prop. 18. pr conuenient Coniungantur itaque vertices trianguli rectis A R, & B R, &

ER, & CR. *Nam cum hæ sint omnes æquales poterunt describi circulus per tria puncta, semidiametris peripheriæ* ABC, *& punctum* R *pro centro. Pro circulo circa vertices extremos trianguli* ABC *transeunte.*

Probandum itaque primò est; quod rectæ AR, & RB sint æquales.



Triangula nigrum, & album sunt æqualia. Quare, & bases AR, & BR erunt æquales. Quòd verò triangula sint æqualia, probatur. Nam vnum crus AF nempe albi est æquale alteri FB nigro sibi correspondenti. Crus autem FR punctatum commune. Anguli quoq; ad F niger & albus æquales, eo quod recti. Ergo ex propos. 22. primi tota triangula nigrum nempe, & album erunt æqualia.

Probatur deinde, quòd etiam linea RC sit æqualis lineæ RB, & ideo æqualis quoque lineæ RA. Quoniã triangula RBQ, & RQC habent crus BQ, & QC; æqualia; crus verò RQ commune angulosque ad Q rectos. Vnde bases subtensæ RB, & RC erunt æquales. *Et sic circulus centro* R *per* ABC *transibit*, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

HInc ellicitur. Quod si cẽtrũ intra triangulũ cadat, omnes anguli triãguli dati sint acuti. Quia sunt in maiori circuli segmento. Si verò centrum cadat in aliquo laterum angulum oppositum huic lateri esse rectum. Quod sit in semicirculo. & latus in quo centrũ sit diameter. Si verò cadat intra triãgulũ, angulũ lateri, cui cẽtrũ prope, est oppositũ, esse obtusũ: quia est in minori segmento, quæ omnia patent ex propos. 28. l. 3.

COROLLARIVM II.

HInc quoque sequitur, id quod supra diximus propos. 11 l. 3. quomodo datis tribus punctis non in directum positis inueniatur circumferentia, quæ transeat per ea puncta: nam si cogites apices trianguli ABC esse tria puncta data, & ea iungas lateribus BC, & BA, & cætera præstes vt in propos. propositum exequeris, & eadem probatio militabit. Vide quæ citata prop. 11. l. 3. diximus.

EXPENSIO III.

De mutua quadrati, & circuli inscriptione, & circumscriptione.

SIcut facilis est hęc quæstio; ita non admodum vtilitatibus abundat: vnde in illa immorandum non est.

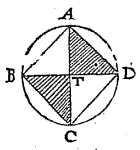
PROBL. I. PROPOS. VI.

In dato circulo quadratum describere.

SIt datus circulus ABCD, cuius centrum T, in quo describendum sit quadratum. Ducantur duo diametri secantes se ad angulos rectos AC, & BD iunganturque extrema eorum quatuor lineis, vt AB, & BC, & CD, & DA.

faciantque quadratum in dicto circulo inscriptum.

Probatur triangula alba, & nigra sunt æqualia ex 14. propos. primi propter æqualitatem laterũ, qui sunt semidiametri, & angulorum ad centrum T albi, & nigri æqualitatem cum omnes fecerimus rectos; quare, & bases BA, & AD, sic BC, & CD erunt æquales.



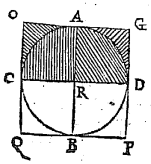
Aut breuiùs anguli ad centrum sunt omnes æquales. Quare ex 26. tertij arcus quibus insistunt, & subtentæ ijs erunt æquales. Insuper, & anguli omnes A, & B, & C, & D sunt æquales; cum sint in semicirculis. Ergo figura ABCD erit quadratum.

PROB. II. PROPOS. VII.

Circa datum circulum quadratum describere.

IN circulo ducantur duo diametri ad rectos angulos AB, & CD; ad quorum extrema ducantur perpendiculares OG, & GP, & PQ, & QO, quæ conuenient in quatuor punctis, *& constituent quadratum* OGQP *circumscriptũ circulo* ACBD.

Probatur latera postremò tracta sunt lineæ perpendiculares diametris, pro vt fecimus, sicuti, & illi sibi inuicem sunt perpendiculares. Quare latera erunt diametris parallela ex 28. primi, cum anguli interni v. g. nigri B, & D sint recti. Propterea ex prop. 31 inuicem quoq; erunt parallela hæc latera, & spatium nigrum; erit parallelogramum sicut, & album.



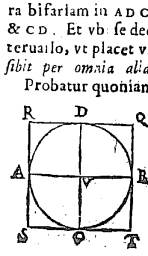
Sed omne parallelogramum ex propos. 34. primi habet angulos oppositos æquales: Ergo anguli O, & G nigri Q, & P albi sunt recti. Quoniam anguli oppositi nigri ad C, & D, ac albi ad D, & C eis oppositi sunt recti. Insuper ex eadem propos. & latera opposita æqualia. Quare latera OG, & QP, sicut vt OQ, & GP æqualia erunt diametris, & ideo inter se. Vnde figura OGQP erit quadratum circulo circumscriptum.

PROBL. III. PROPOS. VIII.

In dato quadrato circulum describere.

SIt quadratum RQST, in quo necesse sit describere circulum. Diuidantur singula latera bifariam in ADCB, rectæque ducantur AB, & CD. Et vb se decussant in V fiat centrum interuallo, vt placet v. g. VB. *Nam circulus transibit per omnia alia puncta* D, A, C *ea lambendo.*

Probatur quoniam VB lineæ VA, VC, & VD. sunt æquales: Ergo pro diametris deseruire possunt. Quod verò sint æquales, patet, sunt enim inter parallelas æquales, & simul sunt parallelæ æqualium, cùm de medietate in medietatem ductæ sint

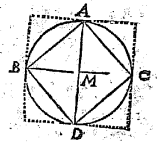


sint: Quapropter sicut sunt æquales dimidio laterum, ita erunt æquales inter se. Nam ex propos. 33. primi, quæ pararellas, & æquales ad easdem partes coniungunt, inter se æquales, & parallelæ sunt.

PROB. IV. PROPOS. IX.

Circa datum quadratum circulum describere

TRahantur in quadrato dato ABCD duo diametri ad angulos rectos, AD, & BC: Et puncto M, in quo se secant facto *centro* interuallo MC ducatur circulus. Iste enim per vertices B, & A, & D transibit, & ideo erit circa datum quadratum, circulus circumscriptus.



Probatur Angulus BAC rectus, & latera BA & AC æqualia. Ergo anguli ad basim B, & C æquales in triangulo BAC. Ideo semirecti ex propos. 17 Cor. 3 primi. Idem ostendetur de alijs angulis BAM, &c. Quaderè lineæ BM, & MC, sicut, & AM, & MD erunt æquales, vtpote bases æqualium angulorum habentium angulos æquales, nimirum semirectos: Ergo centro M circulus ductus per ABCD vertices transibit: Vnde erit circumscriptus circulus quadrato BACD.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc. Quadratum circumscriptũ esse duplum quadrati inscripti; Eo quod latera inscripti sint diagonales quatuor quadratorum, in quæ diuisum est circumscriptum punctatum. Vnde illa ex prop. 34. lib. 1. diuiduntur bifariam. Cum ergo quadratum inscriptum occupet quatuor medietates circumscripti solummodo: Circumscriptum erit quatuor medietatibus maius, Propterea erit duplum.

EXPENSIO IV.

De Pentagoni, circuliq; mutua inscriptione, & circumscriptione.

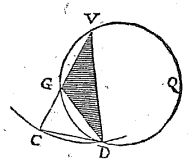
DIfficilior est hæc quæstio, quam præcedens: sed cum maiori vtilitate coniuncta est, si quidem fundamentum est Icosaedri sphęra inscribendi, & inueniendi chordas, quamplurimas, vt suo loco docebimus, in trigonometria necessarias.

LEMMA. PROPOS. X.

Isosceles triangulum constituere, quod habeat vtrumque eorum, quæ ad basim sunt, angulorum duplum reliqui.

LInea quæcumque mediâ, & extremâ ratione secetur, vt docet 35. prop. secundi; ita vt rectangulum sub segmento, & tota cõprehensum CG, & CV æquale sit quadrato ex maiori segmento facto, nimirum GV. In hoc itaque extremo maioris segmenti V facto centro describatur circulus ad interuallum totius VC, & ab extremo C accomodetur in hoc circulo æqualis linea maiori segmento VG, quæ sit CD coniunganturq; extrema V, & D crure VD. Factumque erit *triangulũ, cuius duo anguli ad basim* C, & D *reliquo* V *ei insistenti erunt duplicia.* Quod reposcit propositio.

Quod vt ostendatur ducenda est DG punctata, & per tria puncta V nimirum G, & D ducendus est circulus, ex 5. propos. huius.



Probatur anguli ad basim C, & D in omni triangulo æquicruro sunt æquales ex 14. propos. primi, Sed vnus ex istis, nimirum D est duplus anguli V. Ergo, & alter.

Probatur minor. Quod D sit duplus anguli V. Siquidem angulus V est æqualis parti albæ anguli D. Sed pars alba est medietas anguli totius D: Ergo angulus V est minor dimidio angulo toto, vtpote eius medietati æqualis.

Si neges maiorem propositionem. Nempe angulũ V esse æqualem parti albę D anguli; ita ostendetur.

Linea CD tangens est. Quare angulus albus ad D à tangente CD, & secante GD factus ex propos. 29. tertij æquabitur angulo V. alterni segmenti GVQD (siquidem DG peripheria remanet pro alio segmento) Quare erit æqualis ei. Quod verò CD tangens sit, non est dubitandum ex propos. 37. tertij. Quoniam rectangulum sub tota secante VC, & segmento exterius assumpto GC est æquale quadrato facto, ex CD. Nam DC fecimus æquales lineę GV, quę talis est, vt eius quadratum sit æquale rectangulo sub tota VC, & portione CG comprehensum.

Si vero neges minorem; nimirum albam partem esse medietatem totius anguli D.

Probatur. Triangulum nigrum est æquicrurum; Ergo anguli nigri V, & D ad basim sunt æquales. Sed angulus ad D albus est æqualis angulo V, vt diximus. Ergo est medietas totius anguli D; & pars nigra alia medietas: Cùm tum pars alba, tum nigra anguli D ipsi angulo V æquentur, & ideo inter se.

Quod verò triangulum nigrum sit æquicrurum; probatur. Angulus C est æqualis angulo D, vt diximus, ãgulus D est æqualis suę parti nigrę & angulo nigro V, vt probauimus. Sed angulus albus G vtpote exterior, est æqualis ex propos. 17. primi istis duobus nigris interioribus, & oppositis ad V, & ad D. Ergo est etiam æqualis angulo C quamobrem, ex prop. 15. primi, angulus C, & angulus G, tanquam æquales, habebunt bases æquales CD, & GD. Sed CD est æqualis cruri VG ex effectione; Ergo, & GD erit crus eidem æquale.

CO-

COROLLARIVM

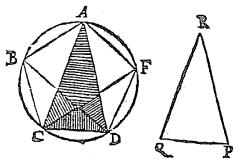
QVare si partiamur duos rectos angulos in 10. partes angulus v duas partes sibi vsurpabit. Reliqui verò ad basim quilibet ex eis continebit quatuor partes. Quia omnis trianguli tres anguli duobus rectis sunt æquales, ex prop. 17. primi. Quare cum C, & D ad basim contineant duplum, vt ostensum est; si angulus ad A assumat duas partes; reliqui, vt 10. duorum rectorum compleant, quilibet quatuor partes sibi vsurpare debebit.

PROB. I. PROP. XI.

In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum inscribere.

AD describendum in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituatur triangulum Isosceles R Q P habens duos angulos ad basim duplos rel qui iuxta præcedentem propos. & in circulo A B C D E dato triangulum fiat habens angulos omnes ei æquales, vt ex propos. 2. huius efficere potes, & secundum documenta propos. 4. primi diuide angulos C, & D bifariã rectis C F, & D B coniungeque puncta rectis A B, & B C, & rursus alia rectis A F, & F D. *Erit q; hæc figura pentagonum æquilaterum, & æquiangulum.*

Pars 1. Probatur, nempe quod sit æquilaterum.



Duæ partes anguli D nigra, & nigerrima, sicut, & aliæ duæ anguli C nigra, & nigerrima sunt æquales nigro angulo ad A: Siquidem ambæ sumptę simul duplę ei sunt. Ergo ex propos. 26. tertij, & arcus, super quos insistunt. Vnde, & rectæ hos arcus subtendentes, nempe latera pentagoni A B, & B C & cæt. sunt inuicem æquales.

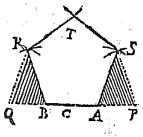
Probatur 2. Pars de angulis. Nam æqualibus quoque perisphærijs insistunt. Ergo ex propos. 27. tertij inter se sunt æquales. v. g. angulus pentagoni A clausus laterib⁹ A B, & A F insistit perisphæriæ constanti tribus partibus F D, & B C, & C D, quæ est æqualis perisphæriæ A B C D; cui insistit angulus pentagoni F quoniam æqualibus circuli portionibus A B, B C, D C, vt dictum est in prob. primæ partis insistit.

COROLLARIVM I.

COlligitur angulum pentagoni æquilateri, & æquianguli complecti sex partes ex decem, in quas duo anguli recti diuiderentur. Nam tres anguli ad D niger nigerrimus, & albus æquales sunt inuicem, vt æqualibus arcubus insistentes. Quare cum ex coroll. propos. præced. duo nigerrimus, & niger quatuor ex decem partibus occupent, albus additus duas superadd et, vt fiant sex: vnde totus sex partes occupabit, in quas anguli duo recti diuiderentur.

COROLLARIVM II.

SI quis tamen velit construere pentagonum ⁊ facilius super datam rectam A B; diuidatur, vt superius in C iuxta documenta propos. 15. secundi, deinde prolungetur, & sit ista additio æqualis maiori segmento A C, ita vt punctatæ additæ ei sint æquales; Interuallo denique datæ A B facto centro in punctis extremis Q, & B, duo arcus describantur; qui se interfecent in R; sic eodem interuallo facto centro in A, & P duo alij arcus se interfecent in S; factoque centro in ijs interfectionibus R, & S eodem interuallo manente describantur duo alij arcus, qui se interfecent in T; coniunganturque rectis puncta interfectionum T, S, R, B, & A. Eritque constitutum pentagonum.



Quod erit quidem æquilaterum, eo quod omnia latera sint protracta eodem interuallo B A, Insuper, cum duo triangula A P S, & Q R B sint æquicrura, & A P, vel Q B basis sit maius segmentum iuxta 10. propos. huius angulus P, V.g. continebit duplum, quam angulus S. Quare angulus exterior A, albus, qui est pentagoni continebit ex propos. 17. primi duos internos, & oppositos S P. Propterea continebit 6. partes ex decem, in quas duo recti diuisi essent, quibus 6. partibus æquantur, vt in corolli dictum est, duo anguli P, & S. Quare A angulus erit angulus pentagoni. Et si hic est, reliqui quoq; erunt, quod debeant istis æquales esse. Nam si non essent, possent fieri; Et si fierent, latera eorum, vel caderent supra, vel infra lineas R T, & T S. Quamobrem, ex propos. 21. primi, essent maiora, vel minora lineis R T, & T S: Vnde deinde pentagonum non esset equilaterum.

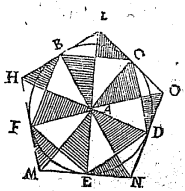
PROB. II. PROPOS. XII.

Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

NOn potest circumscribi circulo pentagonum; N si prius in eo inscribatur: Quare dato circulo C E B D, in quo sit, ex antecedenti propos. inscriptum pentagonum, poterit deinde circa illum ita pentagonum circumscribi.

Reperto eius centro A ad angulos pentagoni ducantur semidiametri A B, A C, A E, A D &, A F, & eis ducantur perpendiculares circulum tangentes. Nam hæ productæ hinc inde se mutuò occurrent ex defin. 12. primi, cum anguli albus F & niger E, &c. sint rectis minores, quos facit linea V. g F B incidens in duas H L, & H M, & sic de cæteris. *Quæ re constituent pentagonum requisitum æquilaterum, & æquiangulum*; vt autem id probetur ducendæ sunt rectæ à centro ad puncta H, & L, &c. in quæ postremò ductæ conueniunt.

Probatur itaq; prima pars, quòd sit æquilaterum. Nam quadratum factum super A H est ex prop. 11. l. 2. æquale duobus quadratis factis ex F A, & F H; similiter quadratis A B, & H B propter angulos rectos nimirum B, & F semialbos. Sed quadrata semidiametrorum B A, & F A sunt æqualia inuicem. Ergo, & quadrata ex H B, & H F, & consequenter ipsę quoque lineæ B H, & H F. Et hoc pro prima parte probationis.



Nam modo ostendendum est, has lineas B H, & H F esse medietates laterum, quorum portiones sunt, & consequenter omnia latera H L, & H M, & cętera esse æqualia, vtpote ex medietatibus æqualibus confecta.

Triangula tota seminigra H B A, & H F A habent æqualia latera, quæ sibi correspondent, ergo ex prop. 8. primi, & anguli correspondentes æquales sunt. Ideo anguli in eis albus, & niger ad centrum A erunt æquales, sicut, & anguli albus, & niger ad H, & sic in omnibus alijs. Angulus autem ad centrum A totus albâ, nigrâque portione integratus est ex propos. 27. l. 3. æqualis omnibus quatuor alijs ad centrum; cum insistant æqualibus basibus, & peripherijs F B, & B C, & cæt. pentagoni inscripti. Quare, & eorum portiones inuicem æquales tum nigræ, tum albæ erunt. Propterea que angulus V. g. ad centrum H A F niger, qui probatus est æqualis angulo albo ad centrum H A B, est æqualis etiam angulo albo ad centrum F A M. Sed anguli quoque ad F in triangulis H F A, & M F A, vtpote recti à radio tangente quæ effecti sunt æquales; radiusque A F est crus commune ambobus triangulis adiacens. Ergo ex propos. 27. primi, etiam latus M F erit æquale lateri F H.

Idem quoq; argumentum valebit in triangulo B L A, cuius latus B L erit æquale lateri B H. Quare totum latus H L erit æquale toti H M; Sicq; probabitur de alijs succesiuè, quapropter pentagonum circumscriptum erit æquilaterum.

Probatur quoq; esse æquales angulos. Ablatis æqualibus, quę remanẽt, sunt æqualia: sed in triãgulis quibuscunque H F A, & F A M, & cęt. omnes anguli ad centrum A tum albi, tum nigri ostensi sunt æquales in probatione primę partis. Anguli quoque F, & B, & C facti à radio A F tangenteque F H, & cęt. sunt recti, & ideo æquales: ergo ablatis istis, reliqui ad M, H, &c. tum albi, tum nigri sunt æquales. Quoniam omnes trianguli tres anguli sunt inuicem æquales, cùm omnes ex prop. 17. pr. sint duobus rectis æquales. Et ideo cum omnes anguli H, & L, & O, &c. sint compositi ex medietatibus albis, nigrisque æqualibus, omnes inuicem erunt æquales.

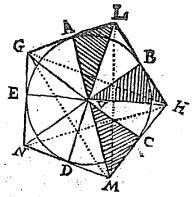
COROLLARIVM.

SEquitur hinc illud. Si in circulo quæcunque figura æquilatera, & æquiangula descripta sit, & semidiametri de centro ad angulos singulos protrahantur, hisque perpendiculares ducantur circulum tangentes describi figuram similem inscriptæ æquilateram, & equiangulam. Siquidem probabitur ductis ad earum mutuum concursum à centro rectis, vt in pentagono factum est eius angulos, & latera inter se esse æqualia.

PROB. III. PROPOS. XIII.

In dato pentagono æquilatero, & æquiangulo circulum describere.

* PEntagoni dati duo latera bifariam diuidantur in A, & B, & à punctis perpendiculares rectę trahantur, quæ se mutuo interfecabunt in V. Ibi ergo facto centro, si vsque ad intercapedinẽ perpẽdicularium V. g. V B, extendatur interuallum, & describatur eo interuallo circulus: Is circulus erit inscriptus, & tanget latera in punctis A B C D E.



Quod vt probetur cæteræ quoq; à dimidijs lateribus C, D, E ducendæ ad centrum, vt C V, D V, & deinde ad angulos G V, & V L, &c. Et rursus punctatæ G H, & L M, &c.

Pro probatione obseruandum est, nos hic adhibuisse eandem regulam: quam suprà dedimus propos. 5. huius ad circumscribendum circulum triangulo, velut triangulo G L H. Ideoque tres ductę G V, & V L, & V H erunt ex probatione propos. 5. æquales. Latera quoque A L, & B H sunt æqualia, vtpote dimidia æqualium laterum pentagoni, anguli vero adiacentes nigri A, & B æquales, quòd recti sint: Ergo triangula nigra A L V, & V H B erunt æqualia ex propos. 22. lib. 1. & crus V A cruri V B.

Idem argumentum valebit in triangulo L H M. Quare V C erit æqualis lineæ V B, & consequenter æqualis, vt ostensum est lineæ V A, Idem quæ argumentum in alijs vrgebit. Cum ergo omnes lineę, quas fecimus perpendiculares, nimirum V D, & V E, & prædictæ inuicem sint æquales poterit fieri centrum in V, & interuallo vna earum V. g. V B circulus circumduci, qui lambat puncta A B C D E.

COROLLARIVM I.

* COllige primò: quomodo etiam circulus possit circũscribi, Nam cum ex 5. prop. lineę V G, & V L, & V H sint æquales ad apices trianguli G L H ductę, & eadem ratione M V, & H V, & V L ductę ad apices trianguli L H M, sequitur; vt omnes sint æquales, & consequenter; quòd facto centro in V interuallo vna earum V. g. V H transeat circulus ductus per vertices L, H, & alios.

COROLLARIVM II.

* COlligitur secundo hoc valere, ne dum in pentagono; sed etiam in qualibet alia figurâ equilaterâ, & equiangulâ; quod valeat idem argumentum in omnibus facta eadem operatione ob latera æqualia, & angulos æquales, quę

constituunt omnia triangula, in quę per operationem diuiditur, æqualia.

PROB. IV. PROPOS. XIV.

Circa datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulum describere.

INspice figuram præcedentis propositionis. Si reperiatur pentagonum, circa quod necesse sit describere circulum. Diuidemus omnes eius angulos bifariam rectis HV, & MV, &c. quas dicimus futuras esse æquales. *Quare facto centro in V interuallo* VH *poterit describi circulus, qui transiens per apices* H, L, G, N, M, *pentagonum circumscribet.*

Probatur vero, quod GV, & cæteræ ductæ debeant esse æquales alio modo, ac in coroll. præcedenti. Nam anguli niger ad L est æqualis nigro ad H; cùm sit dimidium æqualium angulorum pentagoni, angulus verò A, & B sunt recti; Crus autem AL cruri BH æquale cum sint dimidium æqualium laterum: Ergo ex propos. 27. lib. 1. triangula ad A, & B nigra æqualia erunt, & erit VÆquale crus cruri VH. Idem dicetur de triangulo nigro VMC, quod erit æquale eadem ratione triangulo VBH, & crus VM cruri VH, & ideo cruri VL, & sic de alijs NV, & GV: cum ergo sint omnes æquales VL, &c. ad angulos pentagoni pertingentes, circulus per earum extrema duci poterit.

COROLLARIVM

HInc ellicies idem valere in qualibet alia figura æquilatera, & æquiangula. Vnde eadem arte circa eam circulus describetur.

EXPENSIO V.

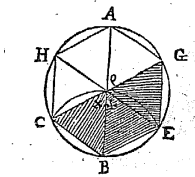
De Exagoni, & Quindecagoni in circulo inscriptione.

CIrcumscriptionem exagoni circulo, & circuli inscriptionem, & circumscriptionem prætermitit Euclides, & per accidens agit de quindecagono, vtpote de figura consurgente, ex triangulo æquilatero, & Pétagono: de alijs autem figuris plurium laterum non agit: Nam quæ vtiles sunt, ex prædictis facile colliguntur; quæ vero difficiles, aut fortè inuentu impossibiles, aut inutiles, vt figura septem laterum, prætermittuntur; sed de istis cum de sinubus ampliora agemus: sufficit Euclidi rudimenta primarum figurarum tradere.

PROB. I. PROPOS. XV.

In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

OPorteat in dato circulo hexagonum describere. Ducto diametro AB eodem interuallo, quo descriptus est circulus facto centro in circumferentia in B portio circuli ducatur, quæ in C, & E circumferentiam secet, à quibus punctis per centrum transeuntes duo diametri ducantur. *Si ergo extrema horum diametrorum rectis coniungas, vt sunt* BE, & BC, *&c. erit hexagonum inscriptum æquiangulum, & æquilaterum.*



Prob. Primo, Q omnia latera sint æqualia. Tres anguli nigri ad Q centrum, ab insistentibus QB, & QB super diametrum CG effecti, sunt inuicem æquales. Ergo ex propos. 26. tertij circumferentię, quibus insistunt sunt inuicem æquales: Vnde ex propos. 33. tertij subtentæ CB, & BE, & EG sunt inuicem æquales. Sed istis, quælibet suæ oppositæ, lineæ AG, & AH, & HC sunt æquales. Ergo omnes æquales, & æquilaterum est hexagonum. Id autem ostenditur, quia insistunt arcubus æqualibus. Et arcus æquales sunt. Quia super eos ascendunt anguli tres albi ad centrum Q æquales, Sunt autem æquales: Quia æqualibus nigris æquantur, quilibet suo, cui est ad verticem ex prop. 12. primi. Remanet itaque ostendendum, quod tres anguli nigri æquales sint. Id autem

Probatur. Nam sunt facti super diametrum CG ab insistentibus QB; & QE, & ideo ex propos. 13. primi æquantur omnes duobus rectis, sed duo ex istis nimirum ✠ notati quilibet occupat tertiam partem duorum rectorum, ergo tertius reliquus tertiam partem reliquam, quare omnes æquales erunt.

Quod verò duo cruce insigniti tertiam partem duorum rectorum occupent ostenditur. Quia quodlibet triangulum CQB, nempe, & EQE est æquilaterum, vtpote quorum latera sunt semidiametri. Ideoque ex propos. 14. primi, & æquiangulum. Sed omnes tres anguli cuiuscunq; trianguli sunt duobus rectis æquales; Ergo quilibet angulus tertiam partem duorum rectorum occupabit, & sic anguli cruce notati quilibet erit tertia pars duorum rectorum.

COROLLARIVM I.

HInc manifestum est hexagoni latus æquale esse semidiametro. Nam CB latus est semidiameter circuli CQE; & ideo æquale semidiametro QB.

COROLLARIVM II.

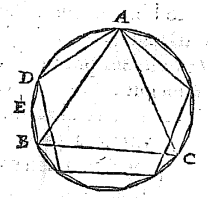
COllige quomodo possit inscribi triangulum æquilaterum, & æquiangulum in dato circulo. Nam si coniungas vertices C, A, E, id erit factum; erit enim æqualis quilibet angulus, & latus. Quia circunferentijs æqualibus ille insistit, hoc subtentitur, vt sunt CBE, & EGA, &c.

PROB. II. PROPOS. XVI.

In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum describere.

DEscribatur in circulo triangulum æquilaterum, & æquiangulum ABC, vel ex Coroll. præcedenti, vel ex 2. huius propos.

Rursusque describatur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ex propos. 11. huius applicando eius angulum aliquem vertici trianguli cui placuerit, V. g. A. Deinde arcus interceptus inter primum latus pentagoni incipiendo ab A; & primum latus trianguli, nempe inter AD, & AB, qui est arcus BD, diuidatur in duas partes æquales. Ducanturque rectę DE, & EB, *& duo latera quindecagoni habebimus; quorum alios 13. capiet circumferentia, vt 15. latera compleantur.*



Probatur tres arcus, quibus anguli trianguli insistunt, vel quibus latera æqualia subtenduntur, ex propos. 26. vel 32. tertij sunt æquales. Ergo si circumferentia tota sit diuisa in quindecim partes quilibet arcus, vt AB quinque earum comprehendet, vtpote eius tertia pars.

Sed, & arcus quibus quinque latera pentagoni subtenduntur sunt æquales, ergo ex ijsdem partibus 15. tres quilibet arcus comprehendet, vtpote quinta pars totius circuli; quapropter arcus AD tres partes totius peripheriæ continebit, at AE quinque. Vnde arcus AE intermedius duas continebit. Quare eius medietas vna ex quindecim partibus erit. Recta, itaque DE subtendet decimam quintam partem totius circumferentię. Propterea que cętere quoque applicatę quęlibet decimam partem subtędet, & anguli omnes erunt æquales, vtpote in æquali segmento, insistentes, nempe in segmento DEB, qui duas totius peripherię partes æquales comprehendit.

COROLLARIVM.

COllige hic cum Clauio. Quod tali modo possumus reperire figuras multilateras, æquilateras, & æquiangulas; Quia enim AB denominatur à ternario, quod sit latus trianguli, & AD à quinario, quod sit latus pentagoni possumus describere figuram 15. laterum; nimirum consurgentem ex multiplicatione ternarij cum quinario; Et quia ternarius exceditur à quinario duabus vnitatibus, ideo arcus interceptus inter extremum lateris trianguli dat duo latera quindecagoni. Tali quoque ratione in alijs lateribus aliarum figurarum idem eueniet.

Nam latera pentagoni, & hexagoni facient figuram 30. laterum; nimirum consurgentem, ex multiplicatione 5. cum 6. & quia sexagonus excedit quinarium vnitate, ideo arcus interceptus inter extremum lateris pentagoni, & hexagoni subtendet lineã, quę erit latus figurę laterum 30.

Sic latus quadrati, & sexagoni relinquet arcum, qui subtendet duo latera figurę 24. Quoniam 4. multiplicatus cum 6. reddit 24. & differentia inter 4. & 6. est 2. Sic latus quadrati, & pentagoni relinquet inter sui extrema arcum, cui subtendetur vnicum latus figurę 20. laterum, & sic de cęteris.

TRACTATVS VIII.

ARITHMETICA SIMPLEX,

& Generalis integrorum numerorum.



VM iam de quantitatis continuæ æqualitate satis cognitionis, quæ ad elementum sufficere possit, ediderit Euclides in 1.2. & 3. libro, & Lineas æquales, Angulos æquales, Triangula æqualia, Parallelogramma æqualia, Linearum quoque potentias æquales, tum laterum parallelogrammorum, tum triangulorum tradiderit; Insuper ex quarto libro docuerit figurarum inscriptionem, quæ pluribus, quàm duobus triangulis constabant. Iam aliam prouinciam aggreditur, & *Proportionem Inæqualitatis* præcipuè considerare, vel saltem iam ab æqualitate præscindere incipit.

Verùm; quia Arithmetica ita miscetur Geometriæ, vt altera sine altera claudicet, & manca euadat; ideo antequam ad vlteriora progrediamur, Arithmeticam generalem tradere oportuit, quòd proportiones inæqualitatis rationales meliùs explicentur numeris, quàm quantitate continua: Vnde; quia adhibendi erant numeri in proportionibus declarandis; proinde hic de Arithmetica generali primùm agere oportuit, tanquam primus aditus ad proportiones quascumque benè cognoscendas; cum ipsa faciliùs proportiones explicet, & maximè si de numeris integris agitur.

EXPENSIO I.

De principijs.

QVod sit numerus vidimus, & ipsius essentiam iam speculati sumus Tract. 2 præliminari. Vnde hic solùm numerorum Definitiones sunt explicandæ, & illæ sunt, quas Euclides 7. libro exponit; siquidem, cum ad præsentem tractatum deseruiant, hic transcribere oportuit.

DEFINITIO I.

VNitas est, secundum quam vnumquodque eorum, quæ sunt, vnum dicitur.

In qua aduertendum, quòd, sicut punctum abstractum est indiuisible, sic vnitas abstractiuè sumpta vnum est. Nam quodlibet, quod dicitur vnum, semper consideratur abstractè, vt vnum in se, & diuisum à quocumque allo: alioquid, si acciperetur, vt à parte rei, iam, cùm nihil sit plures, seu partes, seu rationes non obtinens, plurificatum esset.

DEFINITIO II.

NVmerus est ex vnitatibus composita multitudo.

Hinc euenit; quòd omnis numerus sit commensurabilis; cùm habeat partes assignabiles, secundùm quas vnumquodq; numerus dicitur; V. g. 8. componitur ex octo vnitatibus, & 7. ex septem. Vnde vnitas omniũ numerorum erit communis mensura, quâ omnes mensurari poterunt.

DEFINITIO III.

PArs est numerus minor ipsius maioris numeri, qui metitur ipsum maiorem.

Significat, quòd minor numerus sit appellandus pars numeri maioris, qui multiplicatus totum metitur; ita vt nihil supersit, neque deficiat. Sed ex æquo illi commensuretur. Sic 6. metitur numerum 18. quia multiplicatus per 3. euadit in numerũ eundem, nihil addendo, vel diminuendo. Omnis verò pars assumit nomen ab eo numero, per quem multiplicata metitur maiorem, vt 6. dicitur tertia pars numeri 18. quia 6. multiplicatus per 3. metitur numerum 18.

DE-

DEFINITIO IV.

PArtes autem; cùm non metitur.

Numerus, qui alium maiorem adamusim non metitur; sed aliquid remanet, dicitur non pars, sed partes; quia scilicet saltem comprehendit tot vnitates ipsius, quæ sunt omnium numerorum communes partes, V. g. 5. erit non pars, sed partes numeri 18. quia comprehendit quinque vnitates, quarum quelibet est decima octaua pars numeri 18. Partes verò nomen accipiunt ab eis numeris, qui, & partes, & totum adamusim metiuntur per eundẽ numerum, V.g. 6. est partes numeri 10. &, quia 2. metitur 6. per 3. & totum per 5. indè 6. dicetur esse tres quintas partes numeri 10. quia tres metiuntur 6. numerum, & quinque numerum 10. per eandem mensuram, quæ est 2.

DEFINITIO V.

MVltiplex autem maior minoris, cum minor metitur maiorem.

Sicut numerus minor dicitur pars maioris; sic maior dicitur multiplex minoris. Sed tantùm, cùm minor fuerit maioris pars, non verò partes. Sic 18. dicitur multiplex numeri 6. quòd ex æquo mensuretur ab eo: Non autem numeri 5. quia, licet illius vnitates, quæ numeri 5. partes sunt contineat, non tamen à numero 5. adamusim mensuratur.

DEFINITIO VI.

NVmerus par est, qui bifariam diuidi potest.

Vt numerus 2. 4. 6. 8. sunt pares, quia in duas partes æquales diuidi queunt.

DEFINITIO VII.

IMpar verò, qui bifariam non diuiditur, vel qui vnitate differt à pari.

Vt numeri 11. 13. 17. 7. quia non possunt diuidi bifariam, vel quia differunt à paribus 10. 12. 18. 6. solâ vnitate, dicuntur impares.

DEFINITIO VIII.

PAriter par numerus est, quem par numerus metitur per numerum parem.

V. G. 8. quia 2. & 4. metiantur, ipsum 8. dicitur pariter par: Nam 4. est par, qui paribus vicibus acceptus, nempe duabus, facit 8. ideoq; dicitur numerus 8. pariter par.

DEFINITIO IX.

PAriter impar numerus est, quem impar numerus metitur per numerum parem.

Numerus 30. quem 15. Impar numerus metitur multiplicatus per 2. numerum parem dicetur pariter impar. Aduertendum est autem, quòd idem numerus potest esse pariter par, & pariter impar, vt 12. Nam metitur, & numero 6. multiplicatus per 2. & sic est pariter par, & numero 3. multiplicatus per 4. & sic est pariter impar.

DEFINITIO X.

IMpariter autem numerus impar est, quem impar numerus metitur per numerum imparem.

Vt numerus 15. quem metitur 3. & 5. ambo impares numeri dicitur impariter impar.

DEFINITIO XI.

PRimus numerus est, quem vnitas sola metitur.

Si detur namque numerus, qui neque à pari, neque ab impari patiatur dimensionem, sed à sola vnitate ille numerus dicetur primus, vt 2. 3. 7. 11.

DEFINITIO XII.

PRimi numeri inter se sunt, quos vnitas sola metitur.

Licet enim quilibet possit dimetiri per parem, seu imparem, nisi ille numerus mensurans sit communis dimensor vtriusque, dicentur illi numeri inter se primi, V. g. 8. & 9. Quamuis etenim 2. multiplicans 4 numerum 8. mensuret, & 3. multiplicans 3. mensuret 9. quia tamen, nec 4. nec 2. mensurat alterum 9. nec 3. huius numeri 9. mensura, illum numerum 8. mensuret: ideo illi numeri primi inter se dicendi.

DEFINITO XIII.

COmpositus numerus est, quem numerus quispiam metitur.

Silicet exceptâ vnitate, quam Euclides non voeat numerum. Perspicuum autem est omnes numeros pares præter binarium esse compositos; quia saltem binarius eos metitur, ex quò etiam euenit omnes numeros primos, rempto binario, esse impares. Nam ex paribus binarius solus est primus.

DEFINITIO XIV.

COmpositi numeri inter se sunt, quos numerus aliquis communis mensura metitur.

Igitur sunt compositi inter se illi numeri, qui ad differentiam primorum inter se, aliquam habent communem mensuram, vt 24. & 18. pro communi mensura sortiuntur numerum 6.

DEFINITIO XV.

NVmerus numerum multiplicare dicitur; cùm toties compositus fuerit is, qui multiplicatur, quot sunt in ipso multiplicante vnitates, & procreatus fuerit aliquis alius.

Vt

Vt numerus 5. dicetur multiplicare numerum 6. cum toties sumitur numerus 6. quot sunt vnitates in numero 5. & 6. quinquies acceptus producat alium, nempe 30.

DEFINITIO XVI.

NVmerus numerum diuidere dicitur, cùm numerus alius acceptus fuerit, indicans suis vnitatibus vices, penes quas diuidens numerus in diuiso continetur.

Vt Numerus 6. dicetur diuidere numerum 18. cum accipitur alius numerus, V. g. 3. indicans suis vnitatibus vices iuxta, quas 6. continetur in 18. nempe tribus vicibus.

DEFINITIO XVII.

RAtio est duorum numerorum mutua in ratione mensurantis, & mensurati relatio.

V. g. quia 4. metitur 4. vnica vice acceptus, & 2. metitur 4. gemina vice, & 3. vnica vice, & $\frac{1}{3}$, ideo dicuntur numeri isti Rationem habere. Omnis autem numerus obtinet Rationem cum quocunque alio, etiam rationalem; quia, vt diximus, alium saltem per vnitates, quæ in ipso sunt, metitur.

DEFINITIO XVIII.

PRoportio similis, seu ratio inter numeros est, cum primus ad secundum in simili mensura sunt, ac tertius respectu quarti.

Proportio similis, & Ratio est quædam similitudo, non numerorum; sed ipsarum Rationum in ratione continentis, & contenti, seu metti, & mensurantis. Si ergo duo numeri sint; qui se contineant, vel mensurentur, vt duo alij. Eg. 2. metiatur 4. vt numerus 3. metitur 6. dicetur ita 3. ad 6. in proportione, ac 2. ad 4. quia sicuti 4. dualitatem gemina vice continet, sic, & 6. ternarium gemina vice complectitur.

Vnde hinc colligas; quòd numerus multiplicans habet eam proportionem ad vnitatem; quã genitus habet ad multiplicatum, V. g. multiplicati 2. per 4. faciunt 8. numerus itaque multiplicans 2 ita se habet ad vnitatem, vt 8. genitus ad 4. multiplicatum; quia ex def. 15. tot vicibus genitus continet multiplicatum, quod multiplicans vnitatem.

Secundo, quod numerus diuisus habet ad diuidentem eam proportionem, quam quotiens, seu diuidens habet ad vnitatem, quia quot vicibus diuidens continet vnitatem, tot quoque diuisus diuidentem complectitur ex definitione 16.

DEFINITIO XIX.

NVmerus numerum metiri dicetur per illum numerum, quem multiplicans, vel à quo multiplicatus illum metitum producit.

Postponitur ista definitio prædictis; cùm debuisset anteponi, quia definiuimus multa per mutuam commensurabilitatem; sed quia, & hæc illas supponebat; nempe definitionem multiplicationis saltem, ideo postposita est, cùm hoc liceat in Mathematicis definitionibus, quæ non probantur.

POSTVLATA.

Postuletur cuilibet numero, quoslibet posse sumi æquales, vel multiplices.

Secundò quolibet numero posse sumi maiorem.

AXIOMATA.

I.

Qui numeri, vel æqualium numerorum, vel eiusdem æquè multiplices sunt, inter se sunt æquales.

II.

Quorum idem numerus æquè multiplex est, vel quorum duo multiplices sunt æquales, illi inter se quoque sunt æquales.

III.

Qui numeri, æqualium numerorum, vel eiusdem, eadem pars, vel eædem partes fuerint, inter se sunt æquales.

IIII.

Quorum idem numerus, vel numeri æquales fuerint pars, vel partes eædem, illi inter se æquales sunt.

V. g. quia 5. est eadem pars numeri 10. ac numeri cuiusdam Equorum, numerus Equorum erit æqualis numero 10. Quod si 5. numerus sit dimidia pars, tum numeri 10. tum numeri Equorum, numeri Equorum, & 10. erunt æquales. Sic si 5. & numerus quidam Ouium, sit tertia pars numeri 15. numerus Ouium, & 5. sunt æquales numeri. Et si numerus 10. & numerus Ouium sint eædem partes nempe 2. ex tribus partibus numeri 15. numerus Ouium, & 10. erunt æquales.

V.

Vnitas omnem numerum per vnitates, quæ in ipso numero sunt metitur.

VI.

Omnis numerus seipsum metitur per vnitatem.

VII.

Si numerus numerum multiplicans aliquem produxerit, metietur multiplicans productum per multiplicatum; multiplicatus autem eundem per multiplicantem.

Si namque 4. multiplicet 3. producet 12. & 4. per 3. nempe tribus vicibus acceptus, & 3. similiter per 4. idest quatuor vicibus acceptus producet 12.

VIII.

Si numerus numerum metiatur, numerus vices numerans, eundem quoque mensuratum numerum metietur, & numerus metiens, vices huius numerabit per suas vnitates.

Sic si 4. mensuret 20. vices numerabit numerus 5. quinquies enim numerus 4. continetur in numero 20. & hoc per suas vnitates nempe per 5. vnitates. Et iste numerus 5. vices numerans mensurabit quoque ipsum 20. sed alter primo metiens nempe 4. numerabit vices huius, iuxta quas continetur in 20. quia quater capit 5. in numero 20; Et hoc per suas vnitates, quæ in numero 4. quatuor sunt.

IX.

Numerus numeros metiens, compositum quoque ex ipsis metietur.

V. g. si 2. mensuret 4. & 6. mensurabit quoq; 10. qui componitur ex 4. & 6.

X.

Numerus numerum metiens metitur, quoque omnem numerum, quem ille metitur.

V. g. si 2. mensuret 4. mensurabit quoque numerum 12. 16. & 20. quos 4. metitur.

XI.

Si numerus numerum metiens, eum per quem metitur multiplicet, vel ab eo multiplicetur, producet eum, quem mensurat.

Sit Eg. 4. qui mensuret 24. per 6. dicit, quod si 4. multiplicet 6. vel à numero 6. multiplicetur, producet 24. quem mensurat per numerum 6.

EXPENSIO I.

De integrorum numeratione.

EXprimere quantitatem numerorum multorum, non quilibet sine aliqua regula facilè potest: Vnde de hoc primo agendum.

THEOR. I. PROP. I.

Omnes numeri procedunt, & continuantur per proportionem decuplam.

PRobatur ea est proportio numeri; quando tot vicibus sumitur, quot in numero proportionem denominante sunt vnitates, V. g. illa est proportio; quam habet 3. ad 1., quæ assumit alium numerum, V. g. 4. toties, quot in 3. sunt vnitates, vt est numerus 12. vt ex 18. definit. collegimus: sed in dispositione numerorum assumitur toties 1. quot vnitates sunt in 10. & faciunt 10. Iterũ assumitur 10. toties quot vnitates sunt in 10. & faciunt 100. Iterumque assumitur 100. toties, quot vnitates sunt in 10. & fiunt 1000. Iterum assumitur tot vicibus 1000. quot vnitates reperiuntur in 10. & faciunt decem millia: Ergo crescit, & propagatur per proportionem decuplam omnis numerus naturalis.

PROBL. I. PROP. II.

Cognitis vicibus proportionum, & nominibus earum, facilè quilibet numerus exprimi potest.

PRæsuponendum est *locum*, in quo numerus est, vices proportionum ex instituto hominum significare, V. g. si sint 124. numerus 4. primo loco existens (dexter enim apud Arithmeticos primus locus est) significat vices vnitatum, quę acceptæ sunt. Nempe vnitates quatuor esse acceptas. Secundus locus n. 2. significat vices decimarum; nempe pro vnitatibus acceptas fuisse decimas vnitatum, ita vt 2; quia est secundo loco non duas vnitates, sed duas decimas vnitatum exprimat. Tertius verò locus numeri 1. est centũ multiplicati per 10. idest significat, non Iam acceptas fuisse pro vnitatibus decimas; sed centesimas vnitatum; ita vt 100. vnitates pro vna vnitate accipiantur. Numerus autem ipse significat vices, quo vnitates, vel decimæ, vel decimæ decimarum, idest centesimæ acceptæ fuerint, Quod si sola zifra adsit, significat nullas proportionum vices illi loco cõueniẽtes exprimẽdas reperiri, sic si adsit numerus 200. nihil erit vnitatum, nec decimarum; sed solum numerus erit centesimarum, & quia est 2. duæ erunt centesimæ.

Secundò nomina proportionum cognoscere necesse est; hoc autem ex hac serie cognoscetur.

Si vnitas accipiatur decies, decem vocatur.
Si decem accipiatur decies, centum vocatur.
Si centum accipiatur decies mille vocatur.
Si mille decies assumantur, decẽ millia dicitur.
Si mille centies sumatur, centũ millia dicitur.
Si mille millies sumatur, millio vocatur.

Deinde assumuntur iterum milliones, tanquã vnitates, & incipimus iterum à capite.

Si millio decies sumatur, decẽ milliones dicunt
Si millio centies sumatur, centum milliones.
Si millies assumatur, mille milliones.

Si millio sumatur decem vicibus millies, decem millia millionum dicuntur.

Si millio centum vicibus millies, decem millia millionum dicuntur.

Si millio sumatur mille vicibus millies, duellio vocatur, & ita duelliones, triliones, quadriliones incipiẽdo rursus ab vnitate in infinitum.

Ita ergo legendus est numerus 10000. quia 1. est in quinto loco, & cæteri omnes non sunt numeri, sed zifræ; ideo non significant, nisi locum numeri; & hoc deseruit, vt numerus suo loco positus significet vices proportionum, quæ illi loco conueniunt. Igitur 1. quinto loco positus significat 4. ordines proportionum præcedere primus numerorum simplicium in primo 0. secundus decimarum in secunda zifra, tertius centesimarum in tertia zifra, quartus decimarum cẽtesimarum nempe milliarum in quarta zifra quibus locis licet numeri non adsint, adest tamen zifra, quę locum seruat, & operatur, quòd 1. vim quinti loci obtineat, & ideo, quòd 1. significet decimas milliariorũ, nempe decẽ millia, quòd si esset 2. essent viginti millia, si 3. triginta millia.

Et quia, vt dictum est, primus locus in quo numerus existit, significat vnitates ad decimas ascendentes. Secundus verò numerus significat decimas vnitatum acceptas tanquam, si essent

vnitates

vnitates ascendentes ad centesimas, & quia, vt potest videri à serie superposita, placuit hominibus ad quamlibet proportionē tricies acceptam, mutare nomina proportionum; ideo facillorem regulam ad legendum reddere possumus, dispositis per ordinem numeris, primo incipiendo ad dextram, & ad omnes tertios duobus intermissis applicare punctum, vt vides in hoc exemplo

2 1
. . . . . .
345648010490071 2. & deinde super quodlibet secundum punctum incipiendo ab vnitate applicare numerum tali ratione, vt primo nihil apponatur, neque secundo puncto, tertio apponatur vnitas, & vno intermisso puncto, quinto apponatur 2. & sic consequenter. Nam hoc modo scimus, vbi primum punctum reperitur esse numerum simplicem. Vbi secundum esse milliaria accepta tanquam vnitates. Vbi numerus esse milliones accepti tanquam vnitates, & vbi duo esse duelliones, & sic consequenter augendo in infinitum. Et ita numerus superpositus pronuntiabitur. Nimirum

3 4 5 6
Tria millia, & quatercentum quinquaginta sex duel-
4 80 10
liones; quatercentum octuaginta millia, & centum
4 500 7
quatuor milliones, nongenta millia, & septingenta
12
duodecim vnitates.

Vbi iterum aduertendum, quòd nullum nomen zifris attribuitur; quia non significant; nisi locū numeri, vt numerus suo loco positus vices proportionū significet, quibus vnitas est assumpta. Vt in hoc numero 100. duæ zifræ, quæ vnitatem præcedunt, solùm demonstrant illam vnitatem non significare vnitatem simplicem; sed neque significare vnitatem decimarum, sed vnitatem centesimarum expromere, nempe proportionem 10. gemina vice acceptam. Nam si vnitatem multiplico per 10. facit 10. quam decimam, si adhuc multiplico per 10. facit centum. Ecce gemina vice assumpta proportio. Quare, si omnes numeri præcedentes essent 0 nihil significarent, at si ante sequeretur eos solæ vnitas ad sinistram significaret iuxta locum, in quo reperitur. V. g.

2 1
. . . . . .
100000000000. iste numerus significat duellionem, quia nimirum zifræ antecedentes reliquunt illam vnitatem ad decimum tertium locum, qui est locus duellionis: & hæc de numeratione.

EXPENSIO II.

De integrorum collectione;

QVatuor præcipuæ operationes, & vniuersalissimæ circa numeros integros, & naturales exercentur, quæ omnes sub vno nomine *Algorythmi* cōprehenduntur; atque istæ sunt *additio, subtractio, multiplicatio, & diuisio*. Hic agimus de additione, quæ datis pluribus numeris eos in vnam summam redigit, atque aliàs appellatur *collectum*, & *totum*.

THEOR. I. PROP. III.

Cuilibet numero quilibet alius numerus competens addi potest.

* PRob. Nam iam concessum est in postulato secundo numerum posse sumi alio numero maiorem sint ergo numeri simul addendi 3. & 4. summo ergo numerum æqualem istis duobus simul nimirum 7. & iam facta est additio, namque 7. continet 4. & 3. Probatur vero, me duobus numeris posse sumere æqualē, nā ex 2. Post posū sumere vni illorū vtlibet maiorem, & ex 1. Post cuilibet æqualem, ergo possum sumere maiorem tribus vnitatibus, ita vt hæc maioritas sit æqualis numero 3. & iam duobus numeris 3. & 4. sumpsi æqualem.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Numeri dissimiles dissimilibus nō addendi.

* SInt numeri decimas significantes 40. & sint significantes numeros simplices 5. Dico 5. numero 40. addi non posse; Nam si fieri potest, addatur: Erit ergo vel 9. vel 90. zifra appositа, sed nec 9. nec 90. esse potest; ergo neque addi potest, quod verò neque 90. neque 9. esse possit probatur. Nam non 90. quia quinque vnitates super quadraginta vnitates non addunt, nisi id quod sunt; nempe quinque, ergo erit 45. & non 90. Sed nec 9. quia quatuor decimæ sunt magis, quam quatuor numeri simplices, sed quatuor simplices, additi 5. simplicibus faciunt nouem: ergo quatuor decimæ magis, quam nouem.

PROB. I. PROPOS. V.

Si similes numeri, & eandem proportionem significantes addantur similibus numeris, eandem proportionem significantibus erit optimè facta additio.

CVm ergo certum sit ex præced. addendos numeros accipiendos esse eiusdem proportionis; iuxta eorum proportionem ita disponendi sunt, vt singulæ proportiones addendæ loco correspondeant, & dignitate vt videre est in hoc exemplo.

1945
7329
405
9679

Nam omnes, qui sunt in primo loco ad inuicem sibi, & per rectam lineam respondent, & ita, qui in cæteris locis. Quo facto lineola subducta distinguendi sunt numeri addendi à numeris additis supponendis. Postea addantur simul tres primi ordinis 5. 9. & 5. Incipiendo ab inferiori, & faciunt 19. & quia habes duos numeros, quorum primus 9. est eiusdem speciei, cum illis, qui erant addendi; ideo sub ipsis recta pono 9. tanquam ad primum collectum ordinem pertinens; & trasfero 1. qui est decimarum, tanquam ad secundum ordinem spectans; & addo simul hoc 1. & deinde cæteri secundi ordinis 0. 2. 4. & faciunt 7. (nam 0. nihil addit,) & quia est numerus simplex decimarum, pono sub hoc secundo ordine, spectans ad

ad decimas. Deinde assumo 4. 3. 9. tertij ordinis, qui simul additi faciunt 16. & quia obtinui duos numeros, primum 6. eiusdem ordinis, quare illum pono apud 7. sub tertio, ad quem spectat, ordine; & trasfero secundum 1. ad ordinem altiorem, & sequentem: addo igitur simul 171. & faciunt 9. apud 6. ponendum. Habeoque numerum collectum 9679. æquiualentem illis tribus ordine positis. Quod promissum est in problemate, & ex antecedentibus Theorematibus sequitur.

EXPENSIO III.

De subductione numerorum integrorum.

SVbductio, aut subtractio est, cùm duobus numeris datis minor aufertur à maiore ad obtinendum residuum, qui numerus etiam appellatur *Quæsitus*, & *Reliquus*.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Quilibet numerus minor à quolibet maiori correspondenti extrahi potest.

CVm namq; ex defin. omnē numerū vnitates mensurent; in numero maiori erunt tot vnitates, quot in numero minori; & ampliùs. Sed ex 1. post. cuilibet numero licet accipere æqualem. Sumam igitur ex numero maiori æqualem alicui numero minori, V. g. à 5. possum sumere numerum æqualem numero 4. quo ablato, quod residuum erit, numerus à subtractione residuus erit, qui exquiritur.

COROLLARIVM I.

QVòd, si simul addantur 4. & 1. efficent, quod erat; cum sint partes ipsius 5.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Numerus à numero similis proportionis subducendus est.

* PRobatur. Nam si possunt diuersę proportionis numeri auferri, minor à maiori auferantur, V. g. 15. à 70. Quia ergo abstuli à 70. residuus erit numerus 20. Sed addantur simul rursus iuxta dicta prop. 5. anteced. 20. & 5. faciūt 25. Sed debebant efficere, quod priùs erat, nempe numerum 70. ex Coroll. præced. Ergo non potest fieri subductio numerorum: nisi sint eiusdem dignitatis.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Si à numeris maioribus, & eandem proportionem habentibus numeri minores, & eandem proportionem habentes, ac ipsi, demantur, fiet optimè subtractio.

SIt subtrahendus numerus æqualis huic 678. à numero 1257. Quia proportionales à proportionalibus sunt auferendi, ita collocandi sunt vt loco, ideoque proportione respondeant, vt in hoc exemplo. Et subducta lineola distinctionis gratiâ, deinde assumatur à superiore numerus æqualis numero primo 8. & si non possit id fieri, quòd 7. minor sit; à numero secundo proximo accipiatur vnitas decimarum, & sint 17. deducaturq; ab eo numero 8 æqualis, & residuus erit 9. Qui, vt numerus vnitatum, sub vnitatibus scribendus. Iamque accedimus ad secundum numerum subducendum, & quia substulimus à 5. vnitatem decimarum; ideo euasit 4. Videatur ergo an 7. secundus subducendus à numero 4. auferri queat, & cum non possit, iterum à præcedenti assumatur vnitas decimarum, & sint 14. ex quibus 7. ablatus relinquit 7. igitur subscribo 7. numeris secundi ordinis apud 9.

1257
678
579

Et quia à præcedenti 2. abstuli 1. ideo remanserē 1. à quo 6. auferri nequeunt; igitur vnitas præcedens, quæ est centesimarum addatur, & fiant 11. ablatus 6. restituit 5. Itaque residuus erit 579. subducto 678. à maiore numero 1257.

Quòd si in præcedenti non reperiretur, nec quidem vnitas, sed zifra tunc accipienda est adhuc vnitas, non quidem ab illo loco, sed à superiori saltem virtualiter, vt in istis terminis.

100
8
92

Si enim volo subducere 8. à primo 0. nequeo; quia numerus non est, accipio itaque vnitatem decimarum ab antecedenti; sed nequeo; quia est 0. Accipio ergo ab antecedenti; qui licet sit 1. est tamen numerus vnius decimæ decimarum, idest centesimarum; ideoque subduco 8. à 10. residuus erit 2. at verò 10. iam non erit 10. sed 9. quod vna decima ablata sit; Ideoque residuus erit 92.

Poterit quoque facilitatis gratia vnitas ablata numero sequenti restitui, V. g. si 1000
sic fiat 2. à 0. nequit fieri, sed mutuo accepta vnitate à maiori fiet, 72
10. à quo subductus 2. residuus 928
erit 8. sed quia ab antecedenti abstuli vnitatem, ideo secundo 7. ei addo, & fient 8. demo itaque 8. à 10. eodem modo, & fiunt 2. & quia abstuli vnitatem, ideo eam subduco à residuo 10. & fiunt 9. & sic habetur residuus 928. Illud enim augmentum, quod subtrahendo numero fit, æquiualet diminutioni factæ in numero, à quo aufertur. Nam ita est, si auferantur 8. à 10. quam si auferantur 7. à 9. In prima verò regula cogitauimus numerum, à quo subducitur diminutum; hic verò numerum subtrahendum augemus vnitate; vt idem relinquat; ibi cogitatur iam ablata vnitas; hic tanquam, si non esset ablata, cum numero subducendo aufertur.

Potest etiam fieri alio modo, vt si auferendi sint à numero 2081. numeri 479. dispono, vt supra, & quia 9. ex 1. auferri nequit, ideo differentiam, quæ est inter 9. & 10.; nimirum 1. assumo, & eam addo numero superiori silicet numero 1. & fiunt 2. quos subscribo. Ita 7. secundum 2081
aufero à 7. & numero superiori (est 479
enim 7. non 8. ob vnitatem ablatam)
& nihil remanet: Vnde scribo 0. ad 1602
hoc, vt seruetur locus. Deinde quia 4. nequit deduci à 0. assumo differentiam inter 4. & 10. remanent 6. quam numero superiori non addo, cùm zifræ non possit fieri additio, & ideo scribo 6. & deinde scribo 1. ita enim remansit, quòd vnitas ablata sit à numero 2. propter 10. mutuò assumptos priùs. Qui omnes modi in idem recidunt.

EXPENSIO IV.

De numeris multiplicandis.

MVltiplicatio est duplex, alia simplex, alia composita. Simplex est, cùm vnus simplex numerus per alium multiplicatur, composita verò, cùm vel plures numeri per vnum multiplicantur, vel plures per plures. Agemus priùs de prima, vtpote de faciliori.

THEOR. I. PROP. VIIII.

Quilibet numerus potest multiplicari.

PRobatur multiplicare est sumere toties alium numerum, quot numerus multiplicans habet vnitates; cumque liceat alteri numero addere quantum quisque vult ex post 1: si V. g. assumam 4. licebit mihi addere, quantum volo. Addam ergo ei rursus 4. & rursus 4. toties quot vnitates sunt in 3. & sic habebo 4. ter acceptos. Quod est multiplicare ex definit. 15.

THEOR. II. PROPOS. X.

Si sit numerus, vel medietas decimæ, vel medietatem decimæ excedens, multiplicetur; per alium excedentem vnitatem, cum fuerit multiplicatus, vel æquabit decimam, vel decimam superabit:

PRobatur facilè; quia minus, quàm 2. assumi nequit; nec minus 5. pro numero multiplicando, quæ faciunt 10. Quare, si alij assumantur, patet decimam superaturos.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Si sint duo numeri se se mutuo multiplicantes; quorum vnius medietas simul cum toto alio posita sit magis, quam medietas decimæ, illi numeri multiplicati decimam superabunt.

PRobatur facilè. Nam, iste numerus 4. adiunctus numeri multiplicantis 3. medietati quę sit 1. $\frac{1}{2}$ facit 5. $\frac{1}{2}$. Quare si tantùm addatur iterum 4. & 1. $\frac{1}{2}$ multiplicando per 2. facient magis, quam 10. Quia gemina vice accipientur. Ergo tanto magis si multiplicatur 4. per 3. aut quemlibet alium maiorem.

COROLLARIVM

HInc habes numeros tales generare numeros ad duas proportiones pertinentes, vel ad vnam tantùm; sed semper superiorem. Sic 3. & 4. generant duos numeros 12. quorum primus 2. est eiusdem proportionis, ac multiplicati, secundus verò 1. proportionis immediatè sequentis decimarum. Sic si 5, multiplicentur per 6. generabunt numerum 30. qui ternarius non erit numerus simplex: sed ternarius decimarum, nempe ordinis immediatè sequentis.

THEOR. IV. PROPOS. XII.

Numerus simplex multiplicans numerum simplicem non potest generare numerum, nisi proportionis altioris immediatè sequentis.

PRob. Quia numerus maximus simplicium est 9. qui multiplicatus per 9. maximum item simplicium producet numerum, nouies numerum 9. continentem; sed proportio altioris ordinis, quá proportionis immediatè sequentis numeros simplices continet decimas decies. Maior autem est numerus continens partes plures, & maiores, quàm qui continet pauciores, & minores. Ergo erit minor numerus continens nouies nouem; quàm decies decem. Ergo non poterit efficere proportionem istâ tertiam. Quod si maximus simplicium id nequit. Ergo nec cæteri.

COROLLARIVM

HInc est, quòd, etiam si numerus multiplicans alium significet decimas, vel decimas decimarum; quòd eadem ratio erit, & producere nequibunt numerum pertinentem; nisi ad proportionē immediatè sequentem, vt patet, quià eadem ratio sit de numeris, vel sumptis, vt vnitates simplices, seu, vt vnitates decimarum, seu vt centesimarum, &c.

THOR. V. PROPOS. XIII.

Omnes numeri sē se multiplicantes faciunt numerum, qui comprehendit, tum vnius, tum alterius partes.

PRobatur. Quia id vnumquodque continet, ex quo componitur: Ergo cùm numerus sit compositus ex multiplicatione, tum vnius, tum alterius, debet eorum partes in se habere.

THEOR. VI. PROPOS. XIV.

Si numerus simplex multiplicet non simplicem, numeri geniti simplices non erunt: sed eius proportionis, cuius est multiplicatus, vel immediatè sequentis.

SIt 3. numerus, qui multiplicet 5. numeri 250. Dico, quòd in genito 15. numerus 5. non est simplex; sed eius proportionis, cuius est 5. in numero 250.

Prob. Nam in numero 150. numerus 5. qualibet vnitate decimam significat. Ergo quælibet eius vnitas tricies accepta decimarum erit. Igitur etiam, si toties 5. simul sumatur genitus decimarum erit ex propos. 12. Coroll. numerus uero 1. in genito 15. ex propos. 11. Coroll. significabit proportionem immediatè sequentem.

THEO-

THEOR. VII. PROPOS. XV.

Si numerus non simplex multiplicet non simplicem producet eam proportionem, quæ tum vnius, tum alterius ab vnitate distantiâ conficitur.

SIt numerus 7. in numero 70. & numerus 5. in numero 50. qui se inuicem multiplicent. Dico quod numerus genitus erit eius proportionis, quæ ex distantiâ, tum unius, tum alterius à primo numero uersùs siniſtram recedit; & quia loca per zifras notata sunt. Ideo dico recedere zifris, tum huius, tum alterius numeri nimirum duabus zifris, eritque 3500.

Probatur. Quia ex antecedenti numerus simplex primus multiplicans secundum generat numerum secundo loco ponendum. Ergo secundus multiplicans secundum generabit numerum tertio loco ponendum, & ideo secundus multiplicans tertium generabit numerum quarto loco ponendum; & hinc tertius multiplicans tertium generabit numerum quinto loco ponendum, & sic de cæt. ABC

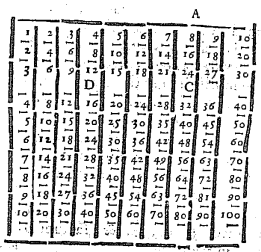
Quod, ut magis pateat, sit numerus 323. & DEF 222. Quia 3. A est tertio loco, si illum multiplicet 2. F numerum A 3. eundem, significabit tres centesimas non iam bis acceptas, sed dualitate decimarum, idest uigesies acceptas. Ergo genitus non iam significat unitates centesimarum; sed decimas centesimarum. Ideo secundo loco post primum collocandus, idest quarto loco ponendus; Et si illum D 2. multiplicat; iam non erunt decimæ centesimarū. Sed centesimæ centesimarum, ideo numerus genitus tertio loco ponendus post primum, idest quinto loco collocandus; & sic, si alij adsint argumentabitur.

PROB. I. PROPOS. XVI.

Si omnes numeri simplices in quadratam seriem ita disponantur, vt prima series sit continua additio vnitatum, secunda dualitatum, & sic consequenter vsque ad 10. Tabula talis ordinata erit, quæ numerorum simplicium multiplicationem exibebit.

DVcantur lineæ æquidistantes undecim, & istas decussantes aliæ undecim. Deinde ascribantur numeri in prima serie ponendo unitates sibi inuicem additas; in secunda dualitates sibi superadiunctas; in tertia triadas, & sic de cæteris. Nam tabula erit confecta, quæ à Pythagora primò inuenta est, & ab eius nomine Pythagorica uocatur: Quam dico numerorum simplicium exibere multiplicationem.

Probatur multiplicare est sumere numeros multiplicandos tot uicibus, quot sunt in numero multiplicante unitates: cum ergo quilibet numerus simplex additus sit alteri tot uicibus, quot numeros habet ipsa decima, V. g. unitas unitati 10. uicibus addita est, dualitasque dualitati, trias triadi, &c hæc erit numerorum simplicium multiplicatio.



Vsus etiam clarus est. Nam, si reperio à latere siniſtro numerum multiplicantem, & in superiore parte multiplicatum in eo quadrangulo, ubi series inuicem concurrunt, erit numerus genitus. Sic 8. per 3. multiplicatus erit 24. ubi series A; & B occurrunt in C. Obseruaque ex propos. 11. numerum tabulati D excedere simplices numeros, & proportionem sequentem induere.

* Verum quia non semper hæc tabula in promptu est, & quandoque in multiplicationibus numerorū maiorum potest suboriri difficultas; ideo hæc regula poterit obseruari ad facilitatem sectandam.

Volo Eg. cognoscere 8. multiplicatum per 9. quem numerum gignat: Video, quot numeris distet minor numerus 8. à 10. & video esse 2. differentiam. Accipio ergo 9. gemina vice, & subduco à 9. addito 0. nempe à 90. & residuum 72. est numerus quæsitus; Sic 7. per 6. differentia est 4. quam multiplico per 7. & faciunt 28. subduco à 70. & dant 42. numerum genitum ex multiplicatione 7. in 6. Et ratio est; quia 70. est 7. decies acceptus. Quòd, si auferatur ab eo 7. quater acceptus, clarum est, quòd remanet 7. sexties acceptus, nempe per 6. multiplicatus: hęc autem regula comodior est in magnis numeris: cum differentiæ à 10. paruæ sunt, & in illis deseruit.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datis duobus numeris non simplicibus inuicem multiplicandis, si quilibet numerus per alium multiplicetur, & seruetur proportionum locus vbique, & summa cuiuslibet multiplicationis colligatur, erit facta multiplicatio compositorum numerorum.

VIsa facili multiplicatione numerorum simplicium, videndum est quomodo ex eis numeri maiores multiplicentur. Sint ergo multiplicandi 254. per 43. cùm sit seruandus proportionis locus, debet minor sub maiore subscribi tali modo,

254
vt numerus vnitatum sub vnitatibus, 43

decimarum ſub decimis, & omnes alij numeri correſpondenter collocentur. Et quia quilibet per alium multiplicari debet, & iam cognoſco quomodo multiplicentur numeri ſimplices. Ideo multiplico 3. per 4. & faciunt 12. ſilicet ex propoſ. 10. & 11. numeros geminę proportionis, primum ſimplicium vnitatum, ſecundum numerorum decimarum, & proportionis immediatè ſequentis: ideo 2. vnitatibus ſubſcribo, at 1. decimis. Poſtea 3. per 5. ſequentem numerum multiplico, & faciunt 15. quorum primus 5. locum ex propoſ. 14. proportionis eiuſdem, quæ eſt numeri 5. debet occupare nempe ſecundum. Vnde numero 1. ſubſcribendus, vt vides, & 1. numeri 15. ad tertium locum pertinebit, cum ſit proportionis immediatè ſequentis. Deinde multiplico 3. per 2. & faciunt 6. numerum tertij loci.

	254
	43
	12
	15
	6
	16
	20
	8

Itaque iam prima figura inferioris numeri multiplicata eſt per omnes figuras numeri ſuperioris: Modo multiplicanda eſt ſecunda figura; ideoque accipio 4. & multiplico per 4. & faciunt 16. & quia 4. eſt ſecundi ordinis in numero 43. ideo genitus ad eundem locum ſpectat ex propoſ. 14. nempe ſecundum. Quare ipſius 1. ad tertium deuenit ex propoſ. 15. Poſtmodum iterum multiplico 5. per 4. & faciunt 20. cuius primus 0. ex propoſ. 15. debet occupare tertium locum, & ideo ſubſcribo tertio loco 0. & 2. quarto. Deinde 2. per 4. & faciunt 8. qaarto loco ponendus. Tandem congrego omnes ſimul, eritque ſumma numeri ex multiplicatione geniti 10922.

Practici tamen breuitatis gratia non omnes numeros diſtinctè ſcribunt; ſed transferunt ad alios anteriores, V. g. in præcedenti exemplo, non ſcribent numerum 12. ſed 2. quidem ſcilicet numerum verò 1. mente retinebunt, donec multiplicent ſequentem 5. per 3. & producant 15. cuius numero 5. addent illam vnitatem mente retentam, & ſcribent 6. & alterum 1. mente conſeruabunt, donec iterum per 3. multiplicent 2. & faciunt 6. cui addent 1. mente ſeruatum, & ſic ſcribent 7. & ſic in ſecunda multiplicatione numeri 4. efficiunt vt hic videre licet

	254
	43
	762
	1016

Nam ſolum ſcribēt 6. & 1. coniungent cum 20. vt ſint 21. & ſcribent 1. & 2. coniungent cum numero 8. vt ſint 10. quem tandem ſcribent. Deinde, vt priùs, ſumma colligitur

Si quando numerus zifris conſtat, 10922 ſufficit ponere tot zifras, quot ſunt in numero, tum multiplicato, tum multiplicante, & deinde vltimum numerum multiplicare inferioris, cum ſuperiori, & erit facta multiplicatio, V. g. ſint multiplicandi 20000. per 300. Quia ſunt 6. zifræ in vtroque eas omnes ſcribo, deinde multiplico 6000000 3. cum 2. & vltimo loco pono 6, & erit ſine ſumma confecta multiplicatio.

Quod ſi numerus alter conſtet zifris, at alter nequaquam; alter per alterum multiplicandus eſt: Et confecta multiplicatione ſummæ eius addendæ ſunt tot nullæ, quot ſunt in altero ipſorum, vt vides in exemplo.

	3000
	35
	165
	99
	1155000

EXPENSIO V.

De numerorum integrorum diuiſione.

Diuiſio eſt inuentio numeri, qui ſuis vnitatibus demonſtret, quoties numerus minor continetur in maiore; & metiatur maiorem. Duplex eſt autem, alia enim eſt numeri ſimplicis quemcunque alium diuidentis, alia numeri compoſiti alium pariter diuidentis.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Quilibet numerus maior cuiuslibet proportionis per quemlibet alium numerum partiri poteſt.

Sit numerus proportionis decimarum 80. Dico quod per quemlibet alium numerum minorem, ſeu æqualem diuidi queat.

Probatur primò de minori, qui ſit V. g. 4. Vtique ego poſſum aſſumere huic numero 4. quòd multiplicem, vt mihi placet, ex poſt. 2. Accipiam ergo numerum multiplicem, qui 80. non excedat proximè, ita vt, ſi ſemel adhuc multiplicem, excedat; Iterum poſſum exprimere numerum multiplicitatis, ideſt quot vicibus aſſumpſerim. Si enim aſſumo multiplicem, etiam quot vicibus aſſumpſerim ignorare non debeo. Si ergo exprimam, expreſſus numerus erit ille, qui quæritur, & appellabitur Quotiens, ideſt indicans, quot vicibus contineatur 4. in 80. qui numerus vicium erit 20.

Probatur etiam de æquali; quia, ſi eſt æqualis cōmenſuratur ipſi, ergo vnica vice caplet in ipſo.

Quare patet. Quod numerus cuiuslibet proportionis per quemlibet diuidi poſſit, cum per minorem, & æqualem, vt libet diuidatur.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Quilibet numerus minor, vt minor, per maiorem partiri nequit.

Probatur ex definitione 16. Minor nullis vicibus continet maiorem; Ergo vices ſecundum quas continet, exprimi nequeunt. Quare nec diuidi.

Dixi autem, *numerus minor*, *vt minor*, quia numeri minoris, vtpote quantitatis in partes deſignabiles plures ſecari poterit quælibet vnitas, & ſic augeri numero. Quare auctus numero, diuidi poterit.

THEOR. III. PROPOS. XX.

In qualibet figura numerica, non poteſt eiuſdem proportionis maior numerus capere, quam 9.

Probat. Nam capiat maior numerus. Iam euadit 10. ideſt alterius proportionis, nempe vnitas decimarum.

THEO-

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Non omnis numerus per alium, ita diuidi poteſt manendo eiuſdem rationis, vt non ſuperſit aliquid.

Probatur diuidere eſt cognoſcere, quot vicibus numerus datus contineatur in diuidendo: ſed non omnis numerus ex æquo omnem numerum metitur, cum non ſit eius pars, ſed multoties partes ex defin. 4. Ergo tunc aliquid remanere debet.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Illud, quod remanet, ſemper eſt aliqua pars numeri diuidentis.

Probatur. Nam ex Axiom. 6. omnis numerus ſeipſum per vnitatem metitur: Ergo quemlibet alium ex Axiomate 9. per vnitatem metietur, quia numerus quemcūq; numerū metiēs metitur etiam omnem numerum, quem ille metitur: Quare, cùm vnitas metiatur omnem numerum ſaltem per vnitatem, numerus remanens metietur numerum diuiſorem ſaltem per vnitatem. Propterea hoc erit exprimendum.

COROLLARIVM

Quoniam numerus reſiduus à diuiſione eſt pars numeri diuidentis. Ideo erit numerus fractus, ideſt non erit totum; ſed aliqua pars. Vnde hìc neceſſariò docendum erit; quomodo fracti ſcribantur, & quomodo partes eorum nominentur: Numerus itaque fractus neceſſariò exprimendus duobus numeris; quia ex præced. prop. cùm nō ſit numerus abſolutus; ſed relatiuus, & ſe habeat tanquam pars ad totum. Relatiua verò ex Ariſt. ſint ſimul cognitione conſequenter exprimendum erit totum, & pars tali modo $\frac{1}{2}$ cognoſcetur enim 3. numerum ſuperiorem concludere in ſe tres partes numeri 6. Ideoque 3. numerus ſuperior dicetur numerator, quòd numeret partes: at inferior denominator, qui exprimit totum, & indicat, cuius totius partes ſint ſuper lineolam numeri deſcripti, lineola vero interijcitur diſtinctionis gratia. Superior quoque numerus poteſt eſſe maior, & inferior minor; quia aliquando neceſſe eſt exprimere habitudinem, & relationem numeri ſuperioris ad inferiorē, vt $\frac{1}{2}$ vnde more fractorum id fit: quòd in fractis exprimatur relatio totius, & partis.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII.

Reſiduum numeri alicuius vnitatis maioris poteſt habere tot vnitates in minori proportione acceptas, quòd poſſit diuidi per eundem numerum, quo prior diuiſus eſt.

Sit diuidendus numerus 90. per 8. Iam certum eſt 8. in 9. vnica vice capere, & reſiduam eſſe vnitatem, quæ non capit 8: ſed, quia illa eſt vnitas decimarum, ſi decima accipiatur tanquam numerus ſimplex, & proportionis immediatè inferioris, iam habebit numeros 10. capaces ſemel numeri 8. cum reſidua vnitate.

PROB. VII. PROP. XXIV.

Si videatur quoties numerus minor contineatur in numeris maioris cuiuſlibet proportionis: Deinde ſucceſſiuè in alijs minoris proportionis cum reſiduo remanente à diuiſione numeri maioris, & hæ vices ſcribantur per ordinem erit facta diuiſio.

Quoniam, vt dictum eſt propoſ. 18. in hac operatione proportio non eſt ſeruanda. Sed quilibet numerus alium diuidere poteſt, cuiuſcumque proportionis ſit: Ideo ponemus numerū diuidentem. V. g. 34. ſub numero diuidendo 7828. abſque reſpectu loci, & quia reſiduum maioris numeri poteſt iterum diuidi ex prop. 23. in minori ſequenti proportione: ideo ponemus numerum diuidentem ſub maiore numero diuidendo, ad hoc vt ex eo diuiſo remaneat reſiduum iterum diudendum, ſed acceptum in minori proportione tali modo, & ducatur 7828 lineola. Video quot vicibus numerus 34. primus diuiſor 3. capiat in 7. & cognoſco vicem eſſe duplicem, ſimulque etiam aſpicio, ſi eadem gemina vice numerus 4. poſſit capere in numero ſequente 8. cum eo, quod remanet à primo numero 7. Sed hic poteſt capere; ideo ſcribo 2. ſeorſim. Et ad hoc, vt ſciam numerum ſubtrahendum multiplico 2. per 3. & faciunt 6. quos ſubduco à 7. & remanet 1.

Scribo itaque 1. reſiduum ſuper 7. deleoque 7. tali modo, vt poſſit cognoſci, lineolâ ſuper 7. ductâ. Iterumque multiplico 4. per 2. & faciunt 8. quos ſubduco ab 8. & remanet. Quare ſcribo ſuper 8. zifrā, & deleo 8. Deleoque etiam totum numerum 34. vt nihil iam amplius eo loco deſeruiens, quòd numeri illius proportionis iam ſint diuiſi. Quamobrem ſcribo loco immediatè inferiori ſub reſiduo numeri diuiſi ad diuidendam proportionem inferioris ordinis, & conſidero, quot vicibus capiat 3. in reſiduo 10. tanquam numerum inferioris proportionis accepto; & video tricies. Scribo ergo 3. apud 2. ſeorſim, & eodem modo multiplico 3. per 3. & faciunt 9. quos ſubduco à 10. & remanet 1. Deleo igitur 1. in numero 10. & zifræ deletæ ſuperpono 1, quæ cum 2. facit 12. multiplico itaque 4. per 3. rurſus, & faciunt 12. ſubduco itaque 12. à 12. & nihil remanet: Vnde deleo 1. & 2. & ſuperpono 0. eoquòd nihil remaneat. Deleo quoque numerum diuiſorem, tanquam non amplius eo loco deſeruientem, ſed ad vlteriorem locum promouendum. Quare ſcribo ſequenti loco numerum diuiſorem; hac enim mutatione loci fit, vt accedat ad numerum reſiduum acceptum in minori proportione ex præced. propoſ. 23. & ideo diuidi poſſit: Si tamen aliquid remaneat ſufficiens. Hic autem nihil remanet ſufficiens, cùm tantùm relinquatur 8. numerus

primus

primus simplicium vnitatum, in quo numerus 34. capere nequit, & ideo in quotiente apud 3. pono 0. eò quòd In vltimo numero vltimi loci nulla diuisio potuerit fieri, quòd semper seruandum est, quotiescumque occurrerit numerum diuisorem In aliqua proportione non capere: sed diuisorem esse promouendum adhuc ad minorem numerum.

Residuum verò 8. est pars numeri diuidentis ex propos. 22. ideo scribendus est apud alios, sed vt minutia, nempe superiùs 8. & interiecta lineola numerus diuisor 34. quare diuiso numero 7828 per 34. quotiens erit 230. $\frac{8}{1\,2}$ nempe 230. & insuper ex triginta *quater partibus in quibus vnitas diuisa est* 8. *partes*.

Quod si aliquando occurrat in vltimo ipso numero versùs sinistram, qui primus omnium diuidendus est non capere numerum diuisorem, vel vltimum capere: sed non penultimum, vel antepenultimum; tunc ad secundum locum inferiorem prououendus est.

Sit numerus diuidendus 7930. per 794. quia 4. primus diuisoris non capit in 3. ideo assumenda est proportio minor, & prima diuisione non debeo diuidere 793. quia nequit. Sed numerum 7930. Considero itaque quot vicibus capiat 7. in 79. & video; quod nouem vicibus, (neque enim amplius capere potest, vt supra propos. 20. quam 9 in qualibet proportione, licet aliquando minus) ideoque multiplico per 9. diuisorem 794. & fiunt 7146. auferendi à diuidendo 7930. & facta erit diuisio. Quod si iste defectus eueniat non in principio, sed in medio, vt si 7945. diuidantur per 73. Tunc apposita apud quotientem zifra, ad locum inferiorem diuisor promouendus. Sic semel 73. capit in 79. Ideoque quotiens est 1. & residuum est 6. qui cum 4. numero sequentis proportionis facit 64. in quo deberet capere diuisor numerus 73. Cum ergo non capiat, ad aliam proportionem transeundum est, priùs appositâ zifrâ apud quotientem, vt significet 10. Et est deinde diuidendus numerus 646. per 73. Et quia 7. capit in 64. nouem vicibus, & 3. non capit in residuo 16. nouem quoq; vicibus; ideo dico octo vicibus capere. & pono 8. apud quotientem; vt sit 108. & facta multiplicatione eueniunt 584. quos subduco à 646. & fiunt 62. residui pro fractis ponendi. Quare quotiens erit 108. $\frac{6\,2}{7\,3}$.

Alius modus tutissimus diuidendi erit. Multiplicare priùs sensim numeros diuisoris per numeros simplices, vsque quo eorum summa eueniat maior, quam correspondentis figuræ numeri diuidendi: deinde extrahere summam proxime minorem à numero diuidendo.

V. g. sit diuidendus numerus 593470 per 247. Priùs per numeros

simplices multiplico diuisorem 247. hoc modo hic	247	1
lateraliter appositio priùs	494	2
per 1. deinde per 2. &c. vsque	741	3
quo perueniam ad numerum 1235.	988	4
	1235	5

maiorem numero 593. constante tribus vltimis figuris diuidendi, quæ debent primo diuisori correspondere. Quo facto video; an reperiatur 993. in his numeris ita multiplicatis: Et si non reperio, summo proximè minorem; nempe 988. deducoque à 993. & remanent 5. & quia 4. appositi apud 988. notando quod 988. est 247. quater acceptus; Idcirco appono pro quotiente 4. 993 | 4

988

5

Deinde assumo aliam figuram à numero diuidendo, nempe sequentem 4. & pono apud 5. & considero in numeris multiplicatis, & genitis à diuisore per numeros simplices ducto; an adsit hic numerus, & video non adesse, nec quidem proximè minorem, sed omnes maiores, vnde apud 4. quotientem pono zifram, & assumo aliam figuram nempe 7, & video, an in serie numerorum adsit hic numerus 547. & video nec hic quidem reperiri: sed proxime minorem 494. ergo quotienti 40. appono 2. lateralem, & deduco à prædicto 547. numerum 494. & residuum est 53. deinde vltimam figuram assumo, nempe 0. à diuidendo, & appono ad 53. & faciunt 530. Reperioq; numerum proximè minorem esse 494. quem deduco à 530. & apud quotientem, item 2. lateralem appono & facta subtractione residuum est 36. quam more residuorum apud quotientem adscribo. Eritque quotiens 4022. $\frac{3}{5}\frac{6}{7}$.

	547	40
	494	402
	530	4022
	36	

Sed licet tutissima sit hæc regula; Attamen prolixa est. Quare poterit deseruire in aliquo magno numero diuidendo per aliam aliquem magnum numerum; cùm enim ibi error sit maximi dispendij temporis, & laboris; opportunius erit hoc modo operationem contutari; Et noti ex præced. Prop. 20. multiplicationem numeri diuisoris non esse continuandam vltra 9. quia magis, quàm nouem vicibus non potest contineri figura diuidens in diuidenda.

Tertius modus apud Italos vsitatus est talis. Sit diuidendus numerus 4680. per numerum 37. Posito numero diuisore seorsum, trahatur infra ipsum lineola. Deinde video, vt supra feci, quot vicibus 3. capiat in 4. nimirum quòd vnica vice; ideo pono 1. pro quotiete super lineolã, & per illum 1. multiplico diuisorem, & numerum genitum sub duabus vltimis figuris diuidendi subscribo.

Et ex inde subduco, & residuum noto sub lineola.	4680	1
Multiplicatis ergo 37. per 1. generat 37. quos deduco à 46. &	37	37
reliquunt 9. Assumo deinde aliam figuram, nempe 8. à diuidendo, & pono apud 9. Et video, quot vicibus capiat 37. in 98. Cognoscoque capere bis; quia licet 3. capiat ter in 9. non tamen capit 7. in 8. ter: quare dico bis, & sic 7. capit in 8. cum residuo ex 9. etiam bis; & licet capiat magis; nil interest. Ergo apud quotientem 1. appono 2. &	98	
multiplico per diuisorem 37.	4680	12
& faciunt 74. quos deduco à	37	37
98. & residuum est 24. Assumo		
rursus vltimam figuram 0. &	98	
appono apud 24. faciuntq; 240.		
Video igitur, quot vicibus capiat 3. in 24 & cognosco, quod octies: Verùm 7. in 0. nullo	74	
modo capit. Assumo itaque	240	
minus, & dico 3. in 24. capere septies, remanentq; 3 0. in quibus 7. septies non capit. Assumo itaq; rursus minus, & dico capere 3. in 24. sexties, & residuum est 60. in quibus sexties vtique 7. capit; quia 7. multiplicatus per 6. facit solum 42. Ideo	18	

apud

apud quotientem 12 adscribo.	4680	126
numerum 6. significantem sex vicibus numerum diuisorem in diuidendo contineri: multiplicoque per 6. diuisorem 37. & genitus est 222. quos deduco à 240. & residuum est 18. quem numerum more residuorũ apud quotientem scribo. Estque quotiens 126. $\frac{2}{3}\frac{8}{7}$.	37	37
	98	
	74	
	240	
	222	
	18	

EXPENSIO VI.

De Probationibus.

QVoniam in calculandis numeris non rarò euenlunt errores; nunc modus tradendus est, quo in vnaquaque regulâ operationes factæ examinentur.

THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Ablato 9. ex qualibet proportione integra remanet numerus simplex denominans eam proportionem.

* DEtur numerus 70. à quo auferatur 9. quoties auferi potest. Dico quod remanebit numerus denominans eam proportionem, & quia denominabatur à 7. Ideo remanet numerus 7.

Probatur. Nam V. g. 70. significat septem decimas; si autem ex decima qualibet demat 9. in qualibet decima supererit 1. cùmque sint 7. decimæ, erunt residuæ septem vnitates, quę constituunt numerum 7.

COROLLARIVM.

* HInc est, quod siue numeri assumantur, vt significantes decimas, siue decimas decimarum, &c. semper æquali modo idem remansurum simplicem proportionis denominatorem; ac si, vt numeri simplices accepti fuissent. Nam ex qualibet ablatione cuiuscumque proportionis semper remanet vnitas; vt si ex 102. auferatur 9. tot vicibus, quot potest auferri, remanet numerus 12. à quo deductus 9. relinquitur numerus 3. ille ipse; qui restaret, si numerus 1. & 2. tanquam simplices vnitates in numero 102. acceptæ fuissent. Item à numero 730. aufero 9. quoties fieri potest, idest vicibus 80. residuum erit 10. à quo si aufero 9. remanet 1. idem numerus, qui remanet à 7. & 3. vt simplicibus acceptis.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Si numerus decimarum multiplicetur per numerum quemcumque, & à multiplicato auferatur 9. quoties fieri potest, relinquetur numerus, ac si simplices numeri fuerint inuicem multiplicati.

SI numerus 80. multiplicatus per 3. & generet 240. Dico, quòd si à 240. auferatur 9. quantùm fieri potest, relinquetur numerus talis, ac si 8. simpliciter per 9. fuerit multiplicatus.

Probatur. Nam relinquitur numerus denominans eam proportionem, & anteced. ideoq; à 100. auferatur 9. quantũ fieri potest remanet 1. & à 200. restat 2. & à 40. remanet 4. Quare ablato 9. à 240. quantũ fieri poterit remanet 24. nempe numerus ille, qui factus, & genitus fuisset; si 8. fuisset multiplicatũs per 3. Sed sit numerus multiplicans, & multiplicatũs decimarum V. g. 80. & 30. adhuc idem succedet. Nam producet 2400. à quo ablatus 9. relinquit numerum 24. quem produxissent, si fuissent simplices.

COROLLARIVM

HInc est: Quod, si à numero aliquo genito à siuplicibus auferatur 9. quantùm fieri potest; quod relinquetur idem residuũ, ac si fuisset numerus genitus à numeris decimarum; si à 24. relinquitur 6. & à 2400. relinquitur adhuc 6.

Quòd, si sit coniunctus cum aliquo simplici, idem eueniet; si ab eis priùs auferatur 9. quantũ fieri potest; nimirũ à 75. octies remanent 3. & ab 86. nouies, remanent 5. qui simplices numeri inuicem multiplicati generabunt talem numerum, à quo ablatus 9. quantùm fieri potest, idem residuum relinquet; ac si in sua specie, & ab illorum genito ablatus 9. fuisset, quantùm fieri potuisset. Sic 3. & 5. inuicem multiplicati faciunt 19. & ablato 9. relinquũt 6. quod residuum à genito 6450. ex numeris 75. & 86. restat. Ratio est; quia assumptus 7. & 5. vel 8. & 6. vt simplices, idem relinquunt, ac assumpti; vt decimas significantes, sic 7. & 5. faciunt 12. & ablato semel 9. remanet 3. quòd remanet ablato 9. octies à 75. & ab 8. & 6. vt simplices; nempe à 14. Idem residuum remanet ablato semel 9. ac remanet ab 89. nouies ablato 9.

Quare ex præced. multiplicatis inuicem istis residuis 3. & 5. si à genito demetur 9. idem residuum dabit, ac si à genito ab eorum primitiuorũ 75. & 86. mutua multiplicatione 9. quoties fieri potest auferatur. Oportet verò ab illis priùs auferre 9. quantùm fieri potest, alioquin, si semel posset auferri, non essent simplices; sed decimas significantes.

THEOR. II. PROPOS. XXVI.

Si à numero collecto in vnam summam auferatur aliquis numerus, & à colligendo idem numerus auferatur debent residua, tum collecti, tum colligendi remanere æqualia.

		A
Probatur. Nam sit summa B 169. &		42
numerus colligendus sit priùs 42. & 37.		37
& 81. & 9. qui sunt notati litera A, & auferatur idem numerus ab vtrisque, V. g.		81
81. *Dico quod residua erunt æqualia.*		9
Probatur. Nam si ab æqualibus æqualia demas; quæ remanent sunt æqualia, sed numerus colligendus A, & collectus B sunt æquales: Ergo ablato eodem numero 81. ab vtrisque erunt adhuc residua æqualia.		169 B

PROB.

PROB. I. PROPOS. XXVII.

Collectionem ; an sit benè facta, examinare.

AVferatur à numero collecto, & colligendo 9. quantum fieri potest, numeris, vt simplicibus ad sectandam facilitatem assumptis, ex coroll. propos. 4. Nam, si idem numerus remanet, facta, tum à collecto, tum à coll gendo, ablatione, bona erit collectio.

A	39
	51
	15
	19
	124 B

Sit numerus colligendus A, & à primo 39. auferatur 9 quoties potest, remanent 3 qui cum 5. faciunt 8. & cum 1. faciunt 9. qui ab jciatur ; & deinde assumatur 1. cum 5. faciunt 6 & cum 1. faciunt 7. & cum 9. eueniunt 16. à quibus abijcio 9. residuum est 7. quem scribo seorsum.



Deinde ad summam B accedo nimirum 124. & addo 1. ad 2 faciunt 3. & 3 ad 4. & faciunt 7. æqualis nimirum numerus alteri 7. iam scripto. Vnde benè erit facta diuisio.

Dices auferri maior numerus à numero colligendo ab A, quàm à collecto B : nam ex numero A multoties auferetur 9. at à collecto nulla vice : quare non possunt residua remanere æqualia ex propos. 26.

Respondetur posse occurrere quandoque errorem illo solo casu, si error in colligendo commissus sit Intermisso, aut superaddito 9. vt patet in numero C, & eius summa G, quæ falsa est ; eò quia 9. sit intermissus, & tamen idem numerus 7. remanet.

C	49
	51
G	15
	19
	9
	124

Cæterum, cum hic error rarò occurrat, hinc est ; quòd regula sit bona ; quia licet 9. auferatur pluribus vicibus à numero colligendo A, quàm à collecto B, nihil tamen interest ; cùm idem sit auferre 9. à numero A, & non auferri à numero B, vt simplex, dum tamen auferri possit in sua proportione acceptus, vt Corol. prop. 24. Et patet. Nam idem numerus remanet, si auferatur 9. ab 80. octies, ab 8. sumpto, vt 8. nulla vice. Semper enim remanet 8. propter proprietatem numeri 9. quæ ostensa est Propos. 24.



PROB. II. PROPOS. XXVIII.

Subtractionem examinare : vtrum bene fuerit confecta.

AVferatur 9. Quantum fieri potest à subtracto, & residuo, & id quod remanet notetur, & similiter à numero, à quo deducitur, subtrahatur 9 quantum fieri potest. Nam, si residua sint æqualia, bona erit subtractio. Sit numerus in quo facienda est subtractio, numerus subductus B residuum verò sit C. Accipio residuum C ; & aufero 9 quoties fieri potest, dicendo 3. & 2. faciunt 5. & 3. faciunt 8. & 6. faciunt 14. à quibus ablato 9. remanet 5. & scribo seorsum ad latus crucis. Deinde assumo numerum B subductum, nempe 4. cum 3. faciunt 7. & 9. abijcio scribo 7. ad alterum latus crucis. Addo hoc 7. cum numero priori seorsim scripto 5. & faciunt 12. à quibus deductus 9. restant 3. & scribo super crucem. Deinde accedo ad numerum A, & 3. addo numero 6. & faciunt 9. quem abijcio, & 5 & 7 faciunt 12. à quo abijcio, 9. & remanent 3. vt priùs. Ideoque subtractio optima est.

A	3675
B	439
C	3236



Ratio est. Quia numerus subtractus cum residuo æquatur numero, à quo fit subtractio. Vnde 9. ab vtrisque æqualiter deductus debet relinquere idem residuum.

PROB. III. PROPOS. XXIX.

Multiplicationem explorare : an bene sibi constet.

AVferatur 9. tum à numero multiplicante, tum à numero multiplicato, quoties fieri potest, & à residuis quoq; inuicem multiplicatis 9. auferatur quoties fieri potest, & residuum notetur. Iterumque à numero genito auferatur 9. quantùm fieri potest. Si residuum sit æquale residuo præcedenti iam notato, multiplicatio benè se habebit, & absoluta constitet : Pro exemplo sit numerus 3792. multiplicandus per 97. Aufero 9. assumendo priùs 3. & deinde 7. & faciunt 10. abiecto 9. remanet 1. abijcioque sequentem 9. & 2. cum 2. faciunt 3. quem scribo.

	3792
	97
	26544
	34128
	367824

Abijcioque à multiplicatore 97. semel 9. & residuum est 7. multiplico quoque 7. per 3. & faciunt 21. abiectis 9. relinquitur rursus 3. quos scribo, vt vides 7. ad partem crucis, 3. ad alteram partem, & vltimum 3. super crucem.



Deinde accedo ad numerum genitum ; & dico 3. & 6. faciunt 9. quem abijcio ; hinc 7. & 8. faciunt 15. & abiecto 9. sunt 6. & cum 2. sunt 8. & cum 4. faciunt 12. à quo abiecto 9. remanet 3. numerum infra crucem collocãdum quia ergo 3. infra crucẽ cũ 3. supra crucem æquales numeri sunt ; ideo multiplicatio bene se habet.

Probatur. Nam si assumpsimus numerum multiplicatum, & multiplicantem, vt numeri simplices : Numeri verò simplices inuicem multiplicati producunt ex coroll. propos. 25. numerum, à quo ablatus 9. quoties potest demi relinquit numerum æqualem residuo ; quod à genito restat, si ab eo similiter 9. auferatur.

Quòd, si occurreret ipsum 9 relinquit ; abijciatur tamen, & adjatera crucis, & super crucem 0. ponatur. Nam, & 0. infra crucem collocabitur genito, ablato 9. nihil relinquente. Sic 54. & 39 inuicem multiplicatis faciunt 2106. Ablato itaque à 54. 9. remanet 0. & ablato à 39. idem 9. remanet 3. qui multiplicatus cum 0. producit 0. zifrã supra crucem ponendam. Quare, & genitus 2106. ablato 9. relinquit 0.



PROBL. IV. PROP. XXX.

Diuisionem examinare.

EOdé modo fit, ac in multiplicatione, & eadẽ ratio valet. Sit V. g. 7945. diuisus per 35. & quotiens sit 227. Auferatur à 35. numerus 9. quotiens fieri potest, & sunt 8. & à 227. remanent 2. multiplicentur inuicem fiunt 16. à quibus ablatus 9. relinquit 7. Deinde à numero diuidendo 7945. auferatur 9. vt supra dictum est, & relinquet 7. Quare bene stabit diuisio : At si adsint minutiæ V.g. si diuidendus numerus esset 7950. & diuisor 35. & quotiens $227\frac{5}{35}$; tunc numerator 5. cum quotiente sumendus, & ab eo 9. quoties fieri potest demendus, & relinquetur 7. qui multiplicatus cum 8. residuo diuidentis, dat 56. à quo subductus 9. quantùm fieri potest, relinquit 2. & à numero diuidendo 7950. reiectis 9. prout fieri potest, relinquitur 2. Vnde facta diuisio benè se geret.





PROB. V. PROPOS. XXXI.

Cuiuscumque regulæ operationem per aliam examinare.

SVmma numerorum subtractione collectorum probatur. Sic summa 117. examinatur subtrahendo 39. & 42. & 117. Nam si remanet 36. erit bene facta collectio. Et è contra subtractio numerorum collectione examinatur ; sic, si residuum 17. à subtractione numeri 32. à 24. remanens colligatur cum numero 32. qui à maiori subducitur, & efficiat 49. vt priùs, subtractio recta erit.

	36
	42
	39
	117
	17
	32
	49

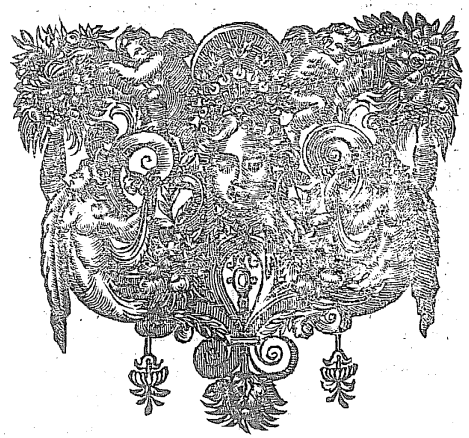
Ratio patet. Quia si auferatur id, quod additum est, quod est subducere.

reliquitur necessariò id, quod erat, & si addatur id, quod ablatum est, idem, quod erat, integratur. Quare si benè erit facta collectio, subtractione idem restituetur, quod priùs, & si bona est subductio, additione, quod priùs erat, integrabitur.

Multiplicationem numerorum ex diuisione experimur. Nam si multiplicationis summa per numerum, vel multiplicatum, vel multiplicantem diuidatur, necesse est alterum ex ipsis prouenire, quòd, si non proueniat, signum est collectionem, vel multiplicationem non fuisse exactam.

Partitio quoque examinatur multiplicatione : Nam si numerus quotiens cum numero diuidente multiplicetur, additis, si fortè fuerint, reliquijs, debet summa multiplicationis æquare numerum diuisum ; quòd si non æquet, signum est diuisionem non esse perfectam, sed in aliquo deficere.

Ratio est, quia diuidere est numerum in tot partes secare, quot sunt in diuidente vnitates, & multiplicare est numerum integrare ex alio numero, tanquam pars assumpto toties, quot sunt in multiplicante vnitates, ex def. 15. & 16. Vnde dato multiplicante, quì quotiens erat, & multiplicato, qui erat diuidens, necesse est, vt idem numerus rursùs integretur. Sicut dato eodem genito, & integrato, & eodem diuidente necesse est, vt idem quotiens numerus restituatur, qui multiplicatus fuerat.



TRACTATVS IX.

IN V. LIBRVM EVCLIDIS

PARS PRIMA.

De Proportionum Notione.

QVM definitiones, quas ad initium Quinti libri tradit Euclides multa luce indigeant, vt percipiantur, visum est earum explicationem profusiùs prosequi, & ne dum eas, vt Mathematicorum mos est, tanquam nomina explanare; sed proportionum, quam explicant, essentiam probare, diuisiones, modumq; eas cognoscendi, & in eis argumentandi exponere: vt hac cognitione præuia, quæ deinde 5. libro ostenduntur generice proportionum habitudines faciliori captu comprehendantur.

EXPENSIO I

Quid sit Ratio.

RAtio est quædam quantitatiua relatio. Relatio secundùm nostra principia philosophica expens. 4. de relatioe concl. 5. & expens. 7. concl. 3. est quædam dependentia obiectorum in eis cognoscendis, quæ fundatur in aliqua positiua, seu dependentia, seu saltem applicatione vnius rei ad aliam. Ideoque Ratio erit quædam relatio quantitatis orta ex applicatione reali, aut possibili ad minùs quantitatis ad aliam quantitatem; vt inuicem commensurentur, vel saltem inuicem se contineant, aut se superent, & hæc possibilis quantitatum commensuratio, vel actualis est illa, ob quam intellectus considerat alteram quantitatem dependenter ab altera, & inter eas respectum, & relationem recognoscit. Cum ergo Ratio in relatione partis, & totius consistat, & commensurationis, operæ prætium est prius partis, & totius definitionem declarare.

DEFINITIO I.

PArs est magnitudo minor alia magnitudine, quæ multiplicata eam adeo mensurat, vt nihil mensuratæ maioris magnitudinis supersit.

Duplex ex pars alia *Aliquota*, alia *Aliquanta*. Aliquota hic definitur, quæ talis est, vt tot vicibus capiat in maiori, sint illæ vices, quot, quot sint, vt nihil supersit tale, quod illi adamussim nó commensuretur: Sed totum multiplicatis Illis vicibus penitùs correspondeat. Sic vncia, seu digitus metitur lineam 4 digitorum quater acceptus, & lineã sexdecem digitorum sex decies acceptus: sed si aliquid supersit in toto, quod mensuranti quantitati non adæquetur, sed eius alicui parti, tunc dicitur pars aliquanta, de qua definitio non est: Sic digitus, lineæ 4. digitorum, & $\frac{1}{4}$ dicetur pars aliquanta; quia id quod supereſt quatuor digitorum, & vnica quarta pars ipsius digiti mensurantis.

DEFINITIO II.

MVltiplex est autem maior minoris, cùm minor metitur maiorem.

Esse partis est relatio minoris quantitatis ad maiorem; Multiplicitas verò est relatio maioris quantitatis ad minorem; Intelligitur verò multiplicitas non respectu partis aliquantæ, sed aliquotæ ita, vt vices quibus mensura adhibetur æquent pluries replicatæ tandem maiorem, & sibi multiplicem.

DEFINITIO III.

Quemuliplices illæ magnitudines dicuntur cum æqualibus numero vicibus à minori quãtitate mensurantur.

Duæ lineæ quatuor palmorum dicuntur æque multiplices vnius palmi; quia palmus quatuor vicibus adhibitus successiuè, & hanc, & alias mensurat.

DEFINITIO III.

RAtio est duarum magnitudinum eiusdem generis secundùm quantitatem habitudo.

Quùm duæ quantitates; sint illæ, seu lineæ, seu superficies, seu solida inuicem comparantur, & sunt eiusdem generis secundùm quòd vna maior est, quã alia, seu minor, seu æqualis; tunc illæ magnitudines inter se Rationem consequi dicuntur, & hæc collatio, seu comparatio dicitur Ratio, ab aliquibus etiam Proportio; Quare patet; cur debeant esse eiusdem generis: quia scilicet, vt inquit Arist. 10. Methaph. tex. 4. *mensura eiusdem generis est, magnitudinum* namque *magnitudo, & secundum vnumquodque longitudinis longitudo, latitudinis latitudo, vocum vox, grauitatis grauitas; &c.* Cum ergo magnitudines inuicem referãtur prout vna excedit, vel æquat, vel ab alia deficit, hinc est, quod debeant eiusdem generis esse: alioquin inter ea, quæ diuersi generis sunt, nec maius quid, nec minus, nec æquale est; siquidem numerus non potest dici æqualis alicui superficiei, aut maior, aut minor: cùm in eodem genere non reperiatur, & ratio fundamentalis est, quia inter ea, quæ diuersi generis sunt non potest fieri realis applicatio; vnde habitudo, quæ in reali, seu possibili applicatione fundatur, inter ea reperiri nõ potest. Maximè quòd mẽsura debet nos inducere in cognitionem rei mensuratæ; at quomodo id eueniet, si quod mensuratur alterius generis est; nec suæ mensuræ conforme reperitur.

Dicitur quoque secundum quantitatem: quia comparatio penes qualitatem Ratio non vocatur; nec lineæ referri Ratione, quòd ambæ, V. g. sint albæ, aut nigræ. Sic dicitur *habitudo* in genere, nec explicatur, in quo consistat ista relatio; an in ratione mensurantis, & mensurati: quia licèt hanc proportionem dicant inuicem aliquæ quantitates, quæ dicuntur rationales: non tamen omnes id habitudinis assequuntur, cùm quædam dictæ irrationales nullam commensurationem admittant, sed earum proportio in eo consistat: quòd ampliùs non sint respectu alterius, quam quod sunt, & nihil vltra quantitatis obtineant ad alteram collatæ; quàm quòd consequuntur.

Verum fundamentum huius relationis dicitur à Mathematicis antecedens terminus verò consequens. Sic linea 3. palmorum collata ad lineam 6. palmorum dicetur antecedens; & linea 6. palmorum subsequens, & è contrariò quoque linea 6. palmorum relata ad lineã trium palmorum dicetur antecedens, sicut illa trium palmorum consequens.

DEFINITIO IV.

PRoportio est rationum similitudo.

Proportio dicitur etiam analogya; ab Euclide autem vocantur quoque proportio, & est in ratione continentis, vel contenti, vel maioris, & minoris, aut æqualis similitudo. Ita quod fundamenta huius relationis non sint quantitates ipsæ; sed quantitatum habitudines.

Cum ergo reperiuntur duæ magnitudines, vt 2. ad 6. quæ se respiciant in ratione maioris, & minoris, vel æqualis, vt aliæ, V. g. vt 4. ad 12. tunc duæ illæ 2. & 6. dicentur consequi eandem analogyam, & proportionem, quam 4. & 12. Dixi autem in ratione maioris, & minoris, vel æqualis, non in ratione mensurantis, & mensurati: quia sunt aliquæ quantitates, vt inuii supra, & sequenti expens. pleniùs dicam, quæ irrationales nulla cõmensuratione inuicem referantur: Quare similitudo earum ita erit, vt V. g. quantitas A collata ad quantitatem B, sit tanta, & non amplius, vt quantitas C respectu quantitatis D, ita quòd licet vices, quibus A mensurat B, aut vices, quibus C, mensurat D, non possint exprimi, adhuc tamen similes sint: sed ad pleniorem huius rei declarationem videamus. Vnde dignoscatur in quantitatibus Analogya.

EXPENSIO II.

In quantitatibus quænam sint proportionis, notiones.

SCiendum est quantitates respectu alterius, alias irrationales esse, alias rationales. Rationales quantitates sunt duę, vel plures, in quarum vna reperitur aliqua pars æqualis alteri parti alterius, quę mensuret ambas seu per æqualem replicationẽ illius partis mensurantis, seu per inæqualẽ. V. g. rationales dicentur lineæ duæ, quarũ vna sit 7. palmorũ altera 20. palmorũ; quia palmus in vtrisq; est pars equalis, per quam ita metiri potest linea 7. palmorũ, vt nihil remaneat ex ea, cum tota longitudo 7. palmis æqualis sit, sicut, & linea 20. palmorum vigesies multiplicatos palmos cõplectitur, vt nihil remaneat. Irrationales verò sunt tales quædam, lineæ, vel quantitates, in quibus pars nulla reperitur, quæ sit æqualis parti alterius quantitatis; per quam ita metiatur, tum vna, tum alia; vt nihil remaneat. V. g. diameter quadrati, & latus sunt lineæ incommensurabiles; Quia nec palmus, nec semipalmus, nec quarta pars palmi, nec aliqua alia mensura; quæ ex æquo mensuret vnam V. g. latus; vt nihil ex eo supersit, mensurabit, & alteram: quia semper, aut aliquid superabit, aut aliquid defficiet, & (quia faciliora sunt antè proponenda) ponemus primò definitionem habitudinis rationalis vnius quantitatis ad aliam.

DEFINITIO V.

RAtionem habere dicuntur rationales magnitudines, cùm vna alterius partes aliquotas continet.

Partes aliquotas appellamus eas, quæ multiplicatæ totam quantitatem æquant, vt diximus.

Cùm ergo aliqua quantitas continet partes alterius, illa respectu alterius dicitur habere rationem, & habitudinem. Diximus verò partes, non assignando quot sit; quia siue partes, quas continet, prima quantitas A, mensurent quantitatem alteram B per eundem numerum, seu eam superent, seu minus sint; nihil interest; & ita linea 7. palmorum habet Rationem lineæ 6. palmorum, & lineæ 7. palmorum, & lineæ 20. palmorum, seu 30. licet tamen non eiusdem speciei.

DEFINITIO VI.

IRrationales quantitates inuicem habitudine referuntur, & relatione, cùm multiplicatæ se inuicem continere possunt.

Ratio huius definitionis est, quia per continentiã partium nequaquam poterat definiri; cùm nulla pars in vna sicut nec in altera detur; quę pro communi mensura deseruire possit. Vnde præcedens definitio non poterat deseruire: licet enim, & hæc definitio rationalibus quantitatibus quoque conueniat; non tamen illas per hanc definitionem, quæ parum obscurior est, definire cõueniens visum est ob facilitatem sectandam; licet Euclides id fecerit.

Quod autem quantitates, quorum vna multiplicata superare potest aliam V. g. duo latera diametrum vnum, sicut diametri duo latera duo, & sic continuè, habitudinem dicant, patet. Nam secundum magis, & minus se inuicem excedunt,

& ideo habitudinem talem habent; vt saltem quoad multiplicationē comparabiles sint: Nam multiplicatæ saltem poterunt esse fundamentum proportionis, & ita speculationi Mathematicæ subijci. V. g. circumferentia ad diametrum proportionem habet, sed irrationalem; ideoque potest esse fundamentum proportionis. Nam poterit dari aliqua alia linea recta irrationalis ad quam se habeat diameter, vt ad circumferentiam. Si verò multiplicata non superet aliqua quantitas, aut non superetur, habitudo inter illas non est. Sic infinita quantitas non habet relationem aliquam quantitatiuam ad alteram quantitatem infinitam; quia infinitum, quantumuis multiplicatum, infinitum non superat. Quòd autem hic mutuus excessus proportionalium quantitatum sit fundamentum similitudinis alicuius patet. Quia quantitates duæ A, V, g. ad B in omni multiplicatione quantitatis A, quæ adhibeatur possunt inuicem se habere, ac duæ aliæ C, & D, si & ipsæ tot vicibus multiplicentur nimirum fundamenta, vel termini æquo numero vicium multiplicata assumantur: nam potest esse, quòd si fundamentū A multiplicatū 20. vicibus minus inueniatur quam B terminus suus; quòd sic quoque fundamentū C 20. vicibus multiplicatum minus inueniatur, quàm suus terminus D: Vel si multiplicetur fundamentum A 21. vicibus, & maius inueniatur, quā suus terminus B: Quod sic quoque fundamentum C 21. vicibus assumptum suo termino D malus inueniatur.

At si è contra termini multiplicentur duabus vicibus, & fiat maior B fundamento A, & deinde terminus alter D multiplicetur duabus vicibus, quod similiter euadat maior quam C, & sic semper in omni multiplicatione æquis vicibus adhibita, aut fundamenti, aut termini succedat. Omnino in hoc A, & B quantitates se respicient similiter, ac C, & D, & fundamentū primum habitudinis ad suum terminum habebit similitudinis relationem eandem, quam fundamentum secundum ad suum terminum; quia simili modo in omni multiplicatione, quæ possit fieri fundamentum primum excedit suum terminum, sicut aliud secundum fundamentum excedit quoque suum: Vel si æquatur primum, æquatur quoque secundum, vel si primum fundamentum termino suo sit minùs, hoc quoque secundum fundamentum relationis suo termino est minùs. Ecce ergo in istis fundamentis, quæ multiplicata superant suos terminos, vel superantur ab ipsis, aliqua in hac mutuâ termini, fundamentiq; superatione, similitudo: cùm, & aliud fundamentum æquali multiplicatione multiplicatum superet quoque suum terminum.

A B
C D

At si daretur aliqua quantitas, V. g. angulus contactus tanquam fundamentum, qui ad suum terminum angulum rectilineū comparatus semper minor inueniretur, hæc habitudo alteri habitudini, V. g. alterius anguli contactus cum altero angulo rectilineo comparari nequit. Nam angulus primus contactus nunquam potest, aut æquare, aut superare suum terminum rectilineum, sicuti nec alter angulus contactus potest vnquam superare suum; & ideo nullam aliam habent fundamenta, cum suis terminis similitudinem, nisi quòd minus sunt; at si sint minus eodem modo, & simili ratione, seu habitudine dissimili dignosci nequit: cùm nec sint quoad suas partes comparabiles, eò quòd sint irrationales; neque earum similitudo proportionum quò ad omnem, multiplicationem, & genericam similitudinem probari possit.

Patet itaque, cur habitudo duarum proportionum irrationalium definiatur per earum mutuā superationem; si multiplicentur: Quia hoc tantùm præbet fundamentum similitudinis ipsarum proportionum. Et hæc similitudo proportionum est illa, quæ speculationi, & argumentationi Mathematicæ deseruit.

EXPENSIO III.

Quænam quantitates proportionem consequantur.

OPeræ pretium est cognoscere, quænam sint illæ quantitates, quæ proportione, & ideo analogya gaudeant; ne aliquando sumamus eas quantitates, quæ nulla proportione assimilari possunt, tanquam in ea similes; & sic ab euidentia in manifestos errores incidamus.

CONCLVSIO I. PROPOS. I.

Infiniti ad infinitum nulla est proportio.

PRobatur, quoniam infinitum multiplicatum non potest superare aliud infinitum; neque illud continere. Siquidem infinitum, vt voluere antiquiores est illud, quod in se continet, quid quid est conceptibile illius; si vero multiplicaretur, iam esset aliud infinitum, cum quo multiplicitatem constitueret.

Deinde iuxta Arist. est illud infinitum, in quo est semper aliquod vltra accipere; si autem infinitum non adæquaret infinitum multiplicatum, in eo iam non esset vltra quid acciperetur; siquidē acceptū esset quid quid eius esset dum aliū adæquare nequit, ergo infinitum non potest habere aliud iufinitum maius se, & ideo multiplicatum erit.

CONCLVSIO II. PROPOS. II.

Finitum nullam dicit rationem cum infinito.

PRobatur, quia finitum, si maneat finitum nūquam aut æquabit, aut superabit infinitum; sed ille quantitates inuicem dicunt proportionē; quæ se mutuo possunt superare, ergo finitum infinito nulla proportione conformatur.

CONCLVSIO III. PROPOS. III.

Puncta, quæ sunt in aliqua quantitate nullam dicunt proportionem Mathematicam, & cognoscibilem, cum punctis, quæ sunt in alia.

PRob. Ea enim, vel finita sunt, vel infinita. Si infinita ex præcedenti nullam dicunt inuicem rationem, si finita; vel sunt indistinguibilia, & indeterminata, vel non. Si indeterminata iam nequeunt se inuicem supe rare: Nam quòd indeterminatum est multiplicari nequit; cùm eius neque hæc, neque illa pars adsit, nec si multiplicetur, quantitas illius multiplicationis agnoscitur.

Si determinata sunt, vel sunt æqualia quantitate, & hoc est falsum: Nam omnes lineæ essent cōmensurables, vel quantitate inæqualia: At earum quantitas non agnoscitur, nec determinata est. Nam quantitas puncti saltem sub indiuisibilitate sensibili latet: Ergo multiplicata, incertum erit, an se superent, aut æquent, siue non.

2. Probatur. Nam demostrationi Mathematicę deseruire non possunt; cùm ad hoc lis inter Philosophos pendeat; an sint puncta, vel partes; an sint finita, vel infinita; an distincta, seu indistincta; an æqualia, seu inæqualia. Quare nec vlla proportio, si qua esset, certa reperiretur, & indubitabilis, quæ fundamentum demostrationi Geometricæ firmum præberet.

CONCLVSIO IV. PROP. IV.

Inter puncta, & lineas. Inter lineas, & superficies. Inter superficies, & corpora nulla proportio intercedit.

PRobatur. Nam nec punctum quantumuis multiplicatum lineam adæquare potest, nec linea superficiem; nec superficies corpus, cùm vel infinitæ, sint, vel indeterminatæ, nulloque certo numero comprehendantur: Quare eoùe multiplicari non possunt; cum earum numerus non agnoscatur.

COROLLARIVM

HInc habes, quòd ea Geometria, quæ in indiuisibilium proportionibus fundatur omnino suspecta sit; licet enim conclusiones, quas deducit verè reperiantur: non inde tamen hinc illa certitudinem acquirit, vel in principijs, vel in illationibus; cum à præmissis falsis verùm sequi possit, vt Logici fatentur, vt patet ex hac omnis homo est bellua, omnis bellua est viuens, ergo omnis homo est viuens.

EXPENSIO IV.

De diuisione Rationum.

RAtio apud Mathematicos vocatur etiam portio: quia sumunt fundamentum proportionis pro ipsa proportione. Vnde diuisiones, quæ sequuntur Rationum, vocantur etiam proportionum.

CONCLVSIO I. PROPOS. V.

Proportio rationalis diuiditur in duas, inæqualitatis, & æqualitatis.

PRobatur: Quia aliqua quantitas ita continet aliam, vt ab ea contineatur, vt duæ lineę 7. palmorum se inuicem commensurant. Alia verò continet magis aliam, quàm quòd contineatur ab ea: vt linea 7. palmorum continet lineam 3. palmorum, & amplius: at linea trium palmorum non continet lineam septem palmorum: nisi secundū quid, & quoad aliquos palmos.

CONCLVSIO II. PROP. VI.

Ratio inæqualitatis quæcumque etiam irrationalis, quæ semper inæqualitatis est, diuiditur in proportionem maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis.

PRob. Nam quantitatū inæqualium, vel maior confertur ad minorē, & hæc maioris inæqualitatis est, vel minor ad maiorem, & hæc est inæqualitatis minoris. Neque tibi videatur maior ad minorem eâdem relatione referri, quâ minor ad maiorem; est enim diuersa relatio, & proportio. Quoniam quantitas maior V. g. quinque palmorum linea ad minorem trium palmorum habet maiorem proportionem, quàm minor ad se, cū eā contineat semel, & insuper ipsius duas tertias partes: & minor ad maiorē collata minorem proportionem habet, cum minus ipsius contineat; siquidem nec totam quidem continet, sed tantum tres partes ex quinque, quibus constat.

Cum ergo maioris ad minorem maior proportio sit, quam minoris ad maiorem patet esse diuersas, & ideo distingui.

CONCLVSIO III. PROP. VII.

Ratio rationalis maioris inæqualitatis secatur in sex genera. Si proportionem Æqualitatis multiplicem, superparticularem, superpartientem *in* multiplicem superparticularem, & multiplicem superpartientem. *At minoris inæqualitatis in easdem species quoque se recipit verùm ad distinguendum, & indicandum, quòd sit minoris inæqualitatis additur particula* sub: *ita dicitur submultiplex, subparticularis, sub partiens, &c.*

PRobatur, & simul singulæ proportiones assignatæ explicantur.

Nam maior continet minorem, aut semel, aut pluries. Si maior continet minorem pluribus vicibus ex æquo, vt nihil supersit, ita vt minor maioris pars aliquota sit, vt palmus est pars decima lineæ, quæ sit decem palmorum; dicitur multiplex. Multiplicaturque secundùm vices, quas continet minorem V. g. dicitur dupla, tripla, quadrupla, quæ continet minorem bis, ter, quater. At si minor conferatur ad maiorem dicitur subdupla, subtripla, subquatrupla; quòd minor contineatur, à maiore bis, ter, quater, &c.

At si continet pluribus vicibus, & aliquid insuper remaneat; tunc, aut id, quod remanet, facit vnā partē aliquotā minoris, aut nō, sed plures partes, si facit vnam partem aliquotam minoris; tunc dicitur multiplex super particularis; Sic 9.

ad 4.

ad 4. habet proportionem multiplicem super particularem; quia bis 4. continet, & insuper quartam ipsius partem: ita 26. ad 6. habet rationem multiplicem super particularem; cùm quater sex contineat, & insuper 2. nimirum tertiam eius partem.

At si ne dum pluries contineat; sed insuper plures partes eius, quæ non conficiant vnam partem aliquotam. Tunc est multiplex super partiens V. g. 27. ad 5. comprehendit enim quinquies 5. & insuper duas eius partes, quæ aliquotam partem non conficiunt, cum non mensurent numerũ 5 ex æquali; si autẽ conficerent vnam partem aliquotã, iam illa essa Ratio multiplex superparticularis propter vnicã partem aliquotam, quę supereſſet, vt est 26. ad 6. nam 2. qui supersunt tertiam partem numeri 6. conficiunt.

Facessunt autem hæ duæ Rationes in diuersas species, quæ denominantur iuxta partes, quas cõtinent E.g. si multiplex supparticularis talis sit, vt maior bis contineat minorẽ, & remaneat pars dimidia dicitur dupla sesquialtera, si bis, & tertiam partem minoris, dicitur dupla sesquitertia; si ter, & insuper quartam partem, dicitur tripla sesquiquarta, &c.

Cęterum si Ratio esset minoris inæqualitatis tunc adderetur particula *sub*; & diceretur subdupla sesquialtera subtripla sesquiquarta.

At si de multiplici superpartiente loquamur, hęc quoq; denominatur iuxta vices, quas maior cõtinet minorem, & iuxta id, quod insuper continet V. g. Si quinquies minorem contineat, & insuper 3. ex quatuor partibus, quibus minor constat, vt est 23. ad 4. dicitur Ratio quintupla super tripartiens quartas, sic si esset 22. ad 5. diceretur quadrupla superbipartiens quintas, &c. Et hoc quoad multiplicem proportionem maioris inæqualitatis. Verùm si sit minoris inæqualitatis idem dicendum prorsus; nisi quòd particula *sub* est addenda pro *super* V. g. quadrupla subbipartiens quintas, Tripla sub tripartiens octauas, &c.

At si maior contineat minorem semel tantùm; tunc est equalitatis. Verùm si contineat semel, & insuper vnam eius partem aliquotam; tunc dicitur superparticularis, V. g. 8. ad 9. habet Rationem superparticularem; quia 9. continet 8. semel, & insuper octauam eius partem; sic 10. ad 8. Rationem superparticularem tenet; quia 10. semel continet numerum 8. & insuper eius quartam partem, quæ est 2.

Quæ in species multas secatur iuxta diuersas partes, quas insuper maior continet minoris quãtitatis: Nam si minorem quantitatẽ contineat semel, & eius dimidiam dicitur superparticularis sesquialtera, si tertiam partem, dicitur sesquitertia, &c.

At si semel contineat, & insuper aliquas partes amplectatur vnam aliquotam non integrantes, vt 9. continet 7. semel, & insuper duas partes, quæ 7. non diuidunt ex æquo, nec sunt eius partes aliquotę; tunc est Ratio superparticularis partiẽs.

Quæ, & habet diuersas species iuxta partes, quas continet maior minoris vltra continentiam totalem ipsius maioris; Sic si contineat maior minorem semel, & 3. partes, ex 10. vt se habet 13. ad 10. dicitur Ratio superparticularis tripartiens decimas, & ita de alijs. Et hę sunt Rationes maioris inęqualitatis: at minoris inęqualitatis sũt ipsæ eędem: nisi quòd pro particula *super* additur particula *sub*. Sic Ratio 2. ad 3. erit subparticularis sesquialtera, sic 8. ad 10. erit proportio subparticularis sesquiquarta. Sic 5. ad 7. erit Ratio subparticularis bipartiens quintas, &c.

PROB. I. PROPOS. VIII.

Datis duobus numeris reperire, quam Rationem ex assignatis dicant.

DEntur primo 5. & 20. de quibus volumus agnoscere, in quâ Ratione inuicem sint; diuidatur maior per minorem, & quotiens erit 4. quia ergo est numerus plurium vnitatum, & nihil remanet, Dico quod est Ratio multiplex, & dicitur quadrupla, quia 5. numeri 20. est quarta pars aliquota: Igitur 5. ad 20. erit Ratio multiplex subquadrupla, & 20. ad 5. erit Ratio multiplex quadrupla.

Detur secundo 15. & 35. Diuido rursus maiorem per minorem, & quotiens est 2. remanentq; 5. diuido rursus per hoc residuum numerum minorem, & quotiens est 3. Quia itaque primus numerus quotiens est 2. dico esse rationem multiplicem duplam; quia verò secundus est 3. pars aliquota numeri 15. dico esse duplam sesquitertiam.

Verum si aliquid adhuc remaneret V. g. si esset datus nnmerus 16. & 35. tunc primus quotiens esset 2. & ideo Ratio esset dupla, & residuum essent 3. per quod diuisus numerus minor 16. aliquid remanet nempe 1. ideo dicitur Ratio tertij generis multiplex, & superpartiens, nec secundus quotiens quæritur, cùm residuum numeri minoris pars aliquota non sit, sed vterque numerus, minor, & residuum exprimitur, & dicitur *dupla tripartiens* ob 3. residuum, *decimas sextas* ob 16. numerum minorem. Vnde 35. ad 16. habet proportionem multiplicem duplam tripartientẽ decimas sextas, idest complectentem bis minorem, & insuper tres partes ex 16. quas numerus minor continet.

Eodem modo agendum est; si est Ratio superparticularis, vel superparticularis partiens. Sic si quæratur, quę sit Ratio 10. ad 8. diuidendus est numerus maior 10. per 8. & quotiens est 1. remanentq; 2. quo diuisus 8. dat per quotientem 4. dico itaque proportionem 10. ad 8. esse superparticularem sesquiquartam; at si numerus minor non diuideretur ex æquo, & aliquid remaneret; tunc non esset superparticularis; sed superpartiens, vt si quæratur Ratio 10. ad 7. Iam quia 7. diuidit 10. semel, & quotiens est 1. dicitur superparticularis, at quia 3. remanent, per quem ex æquo non diuiditur 7. & aliquid remanet: Ideo est superparticularis tripartiens ob 3. residuum, septimas, quod iuuit numerum minorem 7.

COROLLARIVM

SI quis volet exprimere Rationes per numeros. Si sint maioris inæqualitatis multiplicis eam exprimet eo modo, quo solent fractiones exprimi, ponendo tamen si sit maioris inæqualitatis numerum maiorem super lineam, & minorem infra eam, V. g. scribet proportionem duplam, sic $\frac{2}{1}$ triplam $\frac{3}{1}$ quadruplam $\frac{4}{1}$.

At, si sit multiplex super particularis, exprimet per integrum, & fractionem, vt quintupla sesquiquarta $5\frac{4}{4}$ vel reducendo totum numerum in fractionem $\frac{24}{4}$.

Si autem sit multiplex superpartiens exprimetur nihilominùs per integrum, & fractionem eodem modo vt 2. & $\frac{1}{7}$ exprimit Rationem duplam tripartientem septimas, vel etiam poterit exarari reducendo totum in fractionem scribendo $\frac{15}{7}$. Et ita agendum est in superparticulari exprimendo eam per vnitatem tanquam per integrum, & per fractiones, vt Ratio 8. ad 10. nempe superparticularis sesquiquarta exprimitur, vel numero $1\frac{1}{4}$, vel per $\frac{10}{8}$ vel per $\frac{5}{4}$.

Idem obseruabitur in exprimendo superparticulari multiplici, & efficietur $1\frac{3}{7}$ vel $\frac{10}{7}$ quæ est Ratio superparticularis tripartiens septimas.

At sit exprimenda Ratio, quam habet numerus minor ad maiorem numerus minor ponetur super lineolam, & maior infra.

Sic submultipla erit $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{5}{15}$, &c. multipla subparticularis erit $\frac{7}{4}$ Multipla subpartiens $\frac{8}{10}$ subpartiens $\frac{7}{10}$.

EXPENSIO V.

De rationum compositione.

CVm proportiones, Rationumque similitudines debeamus declarare premittenda est earum compositio, quæ eam immutat similes proportiones, vel dissimiles componendo.

Obserua aliam esse proportionem duplam, triplam, &c. aliam duplicatam, triplicatam, aliam compositam.

Proportio tripla, quadrupla, &c. est, cùm quantitas maior continet maiorem ter, quater, quinquies, &c. vt 2. continetur à 4. vel 6. vel 10. At proportio duplicata, triplicata, quadruplicata est; cùm numerus, vel quantitas multiplicat se, & suum productum, & productum producti, & sic successiuè. Quoties enim interuenit hæc multiplicatio, tot vicibus dicitur multiplicata, sic si semel fiat est simplex; si gemina vice, est duplicata; si ter, est triplicata; vt si 2. multiplicet se, & fiat 4. hæc est proportio simplex: at si iterum 2. multiplicet 4. & fiant 8. est duplicata, & si iterũ 2. multiplicet 8. & fiant 16. est triplicata, & 32. quadruplicata est proportio huius numeri ad 2.

At si hæc multiplicatio non per eandem proportionem fiat dicitur composita, V. g. si 2. ad 6. dicat proportionem, & 6. ad 9. proportio 9. ad 2. dicitur composita ex proportione 2. ad 6. & 6. ad 9. in nulloque alio differt à duplicata; nisi quod illa semper eadem est, & continua, hic verò proportio non continua: sic 3. 9. 27. sunt numeri, qui continua proportione progrediuntur; ideoq; 27. ad 3. dicitur habere proportionem duplicatam. Nimirum gemina vice repetitam; At 3. 6. 9. sunt numeri, qui continua proportione non correspondent; neque enim similis Ratio est 3. ad 6. quam 6. ad 9. cùm prima sit subdupla, nempe 1. ad 2. Secunda verò subparticularis sesquialtera nimirum 2. ad 3. & ideo 9. dicitur habere ad 3. proportionem compositam.

Itaque proportio tripla: quadrupla, &c. est propriè Ratio: at verò duplicata, triplicata; vel etiam composita est Proportio possibilis: nempe inter 2. V. g. & 16. possunt intercipi, & interseri duo proportionales numeri dicentes inuicem similem proportionem, & Analogiam silicet 4. & 8. inter 2. & 16. & erunt 2. 4. 8. 16. & triplex similitudo intermediabit nimirum 2. ad 4. prima, 4. ad 8. secunda, 8. ad 16. tertia. Sic composita est proportio possibilis, quæ potest intercipi inter duos numeros; sed dissimilis, & diuersa, si inter eos plures numeri interijciatur. Sic 2. ad 10. habet proportionẽ cõpositã: quia duo intermedij diuersam proportionem dicent, vt 2. 4. 6. 10. Nam proportio 2. ad 4. est differens ab ea, quam habet 6. ad 10. cùm hæc sit subparticularis quadripartiens sextas, at illa subdupla.

Aduerte autem vnius quantitatis ad alteram non esse vnicam compositam proportionem; sed multis posse eam respicere compositis proportionibus pro vt sunt quantitates, quæ inter vnam, & alteram mediant, quæ sunt infinitæ, ita 9. dicit proportionem compositam ad 3. eius; quã habet 6. ad 3. sed etiam erit composita quam 4. ad 3. & quam 5. ad 3. Sic inter 100. & 5. multæ, multæque proportiones interponi possunt, ex quibus omnibus dicitur componi proportio 100. ad 5. vt 100. 20. 5. 100. 50. 5. 100. 30. 5. 100. 10. & 5. sic tot erunt compositæ proportiones, quot numeri possunt interponi inter 100. & 5.

Vnde proportio composita est etiam simplex; prout eam animaduertes: Nam, si V. g. 10. compares ad 5. erit simplex; at respectu 5. & 7. erit composita ex proportione 5. ad 7. & 7. ad 10.

Ratio verò; cur inter vnam quantitatem, & aliã positã quantitate intermediã extrema ex illã dicãtur componi est: quia cum V. g. 100. habeat in se eas partes, quas 50. possidet tot vicibus contentas prout continetur in 100. V. g. duabus vicibus necesse erit; quod, & obtineat omnes partes secundum quas numerus ipse 50. continet 5. quę sunt 10. ideoque 5. decies acceptus componit 50. & etiam in duplo maiore proportione sumptus; nempe secundùm eam, quã 100. respicit 50. componet numerum 100. Sic proportio 10. ad 5. componitur ex proportione alicuius numeri intermedij, vt 8. Nam 5. ad 8. est vt $1\frac{3}{5}$ vel $\frac{8}{5}$ nimirũ quãtitas 5. cum tribus vnitatibus, vel partibus accepta æquat 8. at 8. est ad 10. ut $\frac{4}{5}$ nempe; si ad 8. addatur quarta eius pars æquat 10. Ergo quantitas 5. aucta tribus partibus ipsius 5. nempe 3. & quarta parte ipsius 8. nempe 2. æquabit 10. Quare proportio 10. ad 5. constat ex proportione; seu partibus, quibus 8. continet 5. & his quibus ipsa quantitas 10. continet 8. comparata ad 5. & 8. secùs verò si ad vnum simplicem numerum.

Et hinc licet definitiones harum proportionum colligere.

DEFINITIO VII.

Proportio replicata est; cum trium magnitudinum, vel plurium, eadem est ratio primæ ad mediam, quæ mediæ ad tertiam, & tertiæ ad quartã prima enim dicitur duplicatã habere proportionem ad tertiam; triplicatam ad quartam, & sic consequtiùs donec termini extiterint.

DEFINITIO VIII.

Ratio composita est, cum rationum quantitates aliquam effecerint rationem inter se multiplicatæ.

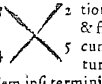
Rationum quantitates sunt denominatores Rationum V. g. rationis A B $\frac{3}{4}$ denominator est 3. quia indicat suis vnitatibus quomodo 6. contineat 2. vel quot partes ipsius 6. in se contineat 2. nempe tertiam. Si ergo denominatores multiplicentur

centur inuicem alicuius proportionis nimirum 3. denominator proportionis A B $\frac{2}{5}$ & C D $\frac{2}{4+1}$ denominator, qui est 4. producunt 12. denominatorem, qui denominat proportionem compositam ex A B, & C D nimirum H F $\frac{c}{3+\frac{c}{2}}$ & exprimit quod 6. in 72. contineatur vicibus duodecim, quia ergo denominator proportionis $\frac{c}{3+\frac{c}{2}}$ est 12. Et 12. producitur ex multiplicatione denominatorum 3. & 4. qui denominant proportionem; 3. quidem rationis A 2. ad B 6. & 4. rationis C 3. ad D 12. Ideo proportio H F $\frac{c}{3+\frac{c}{2}}$ producitur à proportionum compositione A B, & C D.

PROB. I. PROPOS. IX.

Datis duabus proportionibus quatuor numeris, expressis reperire tres terminos easdem proportiones habentes.

SIt data gemina proportio, nimirum 3. ad 4. & 2. ad 5. Oporteatq; reperire tres numeros eandem proportionem exprimentes. Disponatur, vt vides. Deinde fundamenta Rationum 3. & 2. inuicem multiplica & fient 6. Postea fundamẽtũ vnius, cum termino alterius multiplicetur, vt 3. cum 5. & fient 15. Tandem ipsi termini multiplicentur inuicem, & fient 20. Dico quod 6. 15. & 20. habent eandem proportionem, quam 3. ad 4. & 2. ad 5.



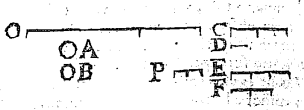
Probatur. Nam cùm numero 3. multiplicauerimus 2. & 5. producti 6. & 15. constabunt tot ternarijs, quot vnitates erant in 2. & 5. ex defin. 15. Tract. 8. Ideo dicent eandem proportionem ex defin. 5. huius, quam 2. & 5. Deinde quia 5. multiplicauit 3. & 4. productis 20. & 15. constabit tot quinarijs, quot vnitates erant in 3. & 4. ex cit. defin. Ideoq; ex defin. 5. huius dicent 15. & 20. eandem proportionem, quam 3. & 4. quòd tot quinarij sint in vtroque multiplicato, quot priùs erant in multiplicandis vnitates: Quare ita erit in proportione 6. ad 15. vt 2. ad 5. quòd sicut 5. continet 5. vnitates, & 2. duas, sic 15. continent 5. ternarios, & 6. duos, & sicut 4. continet quatuor vnitates, & 3. tres: sic 20. continet 4. quinarios, & 3. tres quinarios: Quare ita erit 2. ad 5. vt 6. ad 15. & 15. ad 20. vt 3. ad 4. quod erat præstandum.

PROB. II. PROPOS. X.

Datis duabus proportionibus, quibus proportio alicuius quantitatis erga aliam constat, cognoscere; quænam sit ipsius ad aliam proportio.

SIt data proportio quantitatis A ad quantitatem B, quæ dicatur composita ex duabus proportionibus; quam nimirum habet linea, vel numerus 3. ad 2. & linea, seu numerus 4. ad 1. vt cognoscatur quænam sit A ad B quantitates quascumque proportio: Inueniantur ex præcedenti tres numeri eiusdem proportionis, vt sunt 2. 3. 1. vt sit 12. ad 3. vt 4. ad 1. & 3. ad 2. vt priùs erant. Dico, quòd ea est proportio quantitatis A ad quantitatem B, quæ est 12. ad 2. nihil curando de intermedio 3.

Probatur. Quia 12. numerus habet proportionem compositam eam, quam 12. ad 3. & 3. ad 2. quæ est ea, quam habet 4. ad 1. & 3. ad 2. sed hæc est gemina proportio, ex qua componitur proportio quantitatis A ad quantitatem B ex suppositione. Ergo proportio quantitatis A ad quantitatem B est illa quam habet 12. ad 2.



COROLLARIVM I.

* HInc ergo ellucet: Quomodo proportio composita dignoscatur: nimirum si comparentur extrema relictis medijs. Vnde neque erit necesse reperire tres numeros; sed solum duos extremos inter quos composita proportio reperiatur, hoc autem fiet ex præced. 9. propos. si multiplicemus simul, Rationũ antecedentia, seu fundamenta, V. g. 2: Et 3. & 4. & 5. terminos: Nam numeri producti 6. & 20. habebunt proportionem compositam, quam 3. ad 4. & 2. ad 5. Ita quoque in lineis poterit fieri. Nam si detur proportio E ad F, & C ad D non eadem; & multiplicetur C fundamentum tot vicibus, quot partes aliquotæ sunt in antecedenti, seu fundamento E, & fiat O iterumque consequens D multiplicetur, seu terminus secundum partes; quę sunt in consequenti, seu termino F, & secundum quas dicit proportionem, & fiat P; dico O ad P habere proportionem compositam; cum idem fiat quod in numeris effectum est. Vnde si quantitas A dicatur habere proportionem compositam ad B lineæ C ad D, & E ad F habebit eam proportionem quam O ad P.

COROLLARIVM II.

* HInc etiam est: Quod si dentur plures proportiones; quam duæ ex quibus aliqua alia proportio componatur, idem agendum sit multiplicando fundamenta inuicem; deinde terminos, vt si sit proportio 3. ad 4. & 1. ad 5. & 2. ad 7. & 4. ad 5. multiplicabimus omnia antecedentia ducendo primum in secundum, deinde tertium in productum ex primis vt fiant 24. deinde eodem modo consequentes terminos, & fient 700. Ergo proportio 700. ad 24. est composita ex proportionibus assignatis omnibus; quod etiam potest fieri reperiendo quantitates, quæ continuè sint proportionales.

COROLLARIVM III.

IDem prorsus agendum, & facilius, cum proportio est eadem, quæ multiplicanda sit, vt inueniatur proportio replicata, sic 2. ad 4. & 5. ad 10. inuenietur proportio duplicata 10. ad 40. vt patet in istis numeris 10. 20. 40. inter quos est eadem proportio primi ad medium, quæ medij ad vltimum.

EXPEN-

EXPENSIO VI.

Quænam quantitates proportionem consequantur, & quam obtineant.

CVm acturi simus de modo argumentandi de vna proportione ad alteram, & vis argumentationis in earundem similitudine constat; ideo priùs qnænam sit, & inter quas quantitates reperiatur proportio cognoscere oportet.

DEFINITIO IX.

IN eadem ratione magnitudines dicuntur esse; cùm primæ, & tertiæ, ideśt fundamentorum æquè multiplicia à secundæ, & quartæ, ideśt terminorum æquè multiplicibus, aut æquantur, aut superantur, aut superant iuxta omnem multiplicationem, quæ adhibeatur.

Quia dantur quædam quantitates, nempe irrationales, vt supra diximus, quæ nulla communi mensura possunt mensurari. & ideo neque earum proportio individua manifestari; cùm non cognoscatur: ideo in hac definitione proportio tantùm generica exprimitur, quam omnis proportio possidet, seu rationalis, seu irrationalis: nempe, quòd si multiplicentur fundamenta æquè ideśt per eundem numerum, & termini æquè ideśt per eundem numerum; non tamen necessariò, quem adhibuimus in fundamẽtis, & reperiatur; quòd fũdamenta semper simul excedunt, aut æquent, aut minus sint, adhibitâ quacumque multiplicatione, dicendum esse fundamenta ad suos terminos simili proportione referri.

Ratio est. Quia impossibile est, quod fundamenta cum terminis non sint in eadem proportione, deinde semper æquo pacto respectu terminorum se habeant data qualibet multiplicatione possibili.

Nam sit maior A, quàm B particulâ C, quæ deberet abesse, vt esset similis proportioni D ad E: ita quòd, si illa deficeret, tunc proportio A ad B esset similis proportioni D ad E. Certum est, quòd si A, & D fundamentorum æquè multiplicia sumantur, & etiam B, & E terminorum. Quod terminus B crescet magis, quàm E respectu fundamentorũ, & non simili augmento, quia semper C particula abundans, & similitudinem auferens etiam ipsa multiplicabitur. Cùm ergo crescat magis B; quàm E, & non similiter augeatur, necessariò aliquando eueniet, quòd si E proximè sequetur suo fundamento D in aliquâ multiplicatione, vt clarum est posse euenire, data qualibet multiplicatione; ita vt deficiat solùm pars C, vel minus, quam C, eueniet inquam, quòd BC iam æquabitur suo fundamento A, vel etiam superabit: Quapropter, tũc terminus BC æquabitur suo fundamento A, vel illud superabit; dum terminus E non est maior, nec æquat suum fundamentum D. Exemplum sit in numeris, & dicantur



esse fundamenta { 4 ad 6 / vt / 3 ad 5 } terminos

Sumanturque æquè multiplices fundamentorum, 8. fundamenti 4. & 6. fundamenti 3.

Sic quoque terminorum 12. termini 6. & 10. termini 5. Videtur, quòd sit proportio, quòd terminorum ambo æque multiplicia superent pari consensu fundamentorum æquè multiplicia. Verùm alia multiplicatio adhibeatur, & fundamenta quinquies accipiantur, eruntque multiplicia fundamentorum 20 & 15. Termini verò sumantur tricies; eruntque terminorum æquè multiplicia 15. & 18. Vides ergo iam quomodo multiplex 15. termini 5. tricies acceptus æquet multiplicem fundamenti 3. quinquies accepti: at termini 6. tricies accepti multiplex 18. fundamenti sui multiplicem 20. quinquies accepti non æquet; igitur inter hos numeros similis proportio non erit, eo quia inuentum sit aliquando fundamentum esse maius suo termino, cùm aliud fundamentum suo termino non sit maius, cùm fundamenta equalibus vicibus, tum termini æqualibus vicibus, licet non eiusdem numeri, ac fundamentorum, fuerint multiplicati.

Dices omnis possibilis multiplicatio est infinita. Ergo numquam possumus scire: an in aliqua multiplicatione contrarium eueniat; cum omnis multiplicatio adhiberi ob suam infinitatem non possit.

Respondeo in vnaquaque materia suppere tales probationes, quæ ostendunt: quòd idem eueniet in omnibus possibilibus multiplicationibus, quod euenit in multiplicationibus de præsenti adhibitis, & quòd semper res ita procedet. Quoniam par sit ratio de omni multiplicatione possibili, ac de illis, quæ in præsentiarum adhibentur.

DEFINITIO X.

EAdem verò habentes rationem magnitudines proportionales dicũtur. Hoc per se clarum est.

DEFINITIO XI.

CVm fundamentum primum iuxta aliquam multiplicationem excedit suum terminum, & fundamentum secundum suum terminum non excedit; tunc primum fundamentum habet maiorem proportionem ad suum terminum; quam secundum ad suum terminum.

Ratio huius rei est. Quia si aliquando contingat, quòd fundamentum B, crescat, ita quòd superet terminum A, altero fundamento E suum terminum D non superante, in aliquo erit maior B V. g. in C, quam requireretur ad hoc, vt diceret eandem proportionem ad A; quàm E ad D ex anteced. Linea autem maior dicit maiorem proportionem ad aliam, quam linea minor eò, quòd requiritur, vt similes sint. Namque sit linea I ad A, vt E ad D illa erit minor, quam B: cùm B deberet detruncari, vt supponitur, si ad similem proportionem E ad D deberet reduci. Cùm ergo B sit maior, quàm I dicet etiam maiorem proportionem, quam I, quia linea maior B continet plus, vel plures partes lineæ A, quam linea I, & ideo continebit etiam magis de linea A, quàm E continet de linea D, quę tantũ de ea continet, quãtũ I de A.

COROLLARIVM.

CVm ergo duæ quantitates inæquales comparantur ad maiorem V. g. Pes 12. vnciarum palmus 6. & passus 72. Pes dicitur habere maiorem rationem ad passum, quam palmus eo, quòd plures partes eius contineat; nempe 12. cum palmus solum 6. contineat ex vncijs 72. At si passum compares cùm pede, & palmo, nempe cum minoribus, passus habet minorem proportionem cum maiori nempe cum pede, quàm cum minori, nimirum cum palmo; quia pedem continet solum sex vicibus, at palmum 12. vicibus; & ideo est maior proportio passus ad palmum; quàm ad pedem; minor, verò ad pedem, quam ad palmum.

Si verò duas quantitates inæquales compares cùm minori V.g. passum, & pedem cum palmo, Maior est proportio maioris, quam minoris ad eam; quia plus continet maior de ea V.g. passus de palmo, quàm minor, nempe pes de ipso palmo. At è contra minor comparata cum duabus inæqualibus, se maioribus; Minor hæc ad minorem V. g. palmus ad pedem maiorem proportionem habet, quam ad maiorem, cùm de illa minori contineat magis, quòd palmus pedis contineat medietatem; at verò passus 12. partem.

Si tandem mediocris comparetur, cum maiori se, & cum minori, vt pes cum palmo, & cum passui mediocris magis continet de minori; cum eam totam contineat, & insuper aliquid ampliùs quã de maiori, quam nec totam continet. Vnde habet maiorem proportionem cum minori, quam cum maiori. At, si minor, & maior ad mediocrem comparentur, maior dicet ob eandem causam maiorem proportionem ad mediocrem; quàm minor ob continentiam maiorem, quam habet cum totam eam contineat; non autem minor mediocrem.

DEFINITIO XII.

PRoportio in tribus terminis ad minus consistit; Quia cùm sit proportio Relationum quantitiuarum, & Rationum similitudo, & ad relationem requiratur fundamentum, & terminus ad hoc, vt inuicem comparentur relationes, & similes inueniantur, oportebit assignare fundamentum, & terminum hinc, inter quæ reperiatur vna relatio; & fundamentum, & terminum inde; in quibus consistat alia relatio, quæ relationes, & & habitudines, deinde similes dicantur. Verum, quia eadem quantitas potest respectu vnius esse fundamentum; vt 4. ad 8. & respectu alterius terminus, vt 2. ad 4. in quo 4. est terminus respectu minoris, & fundamentum respectu maioris: ideo proportio, & rationum similitudo in tribus terminis ad minus consistit.

DEFINITIO XIII.

HOmologæ seu similes ratione magnitudines sunt, antecedentes quidem antecedentibus, ideſt fundamenta fundamentis, & consequentes consequentibus, ideſt termini terminis.

Docet ne dum dari similitudinem rationum, seu habitudinum vnius quantitatis ad aliam, quæ relationes sunt fundamenta proxima similitudinis, sed etiam fundamenta remota, ideſt ipsas quantitates Rationem dicentes in similitudine cum alia proportione conuenientem, dici, & ipsa similia in hoc; quod duæ quantitates deseruiant pro fundamentis, & in ratione fundamentorum conueniant, & duæ pro terminis deseruiant, quæ non est simplex denominatio: sed necesse est fundamenta in hoc conuenire, quòd aut ambo sint æqualia terminis, aut ambo maiora, aut ambo minora, alioquin si vnum esset maius, aliud minus suo termino non esset eadem proportio cum vna esset maioris inæqualitatis, altera minoris.

DEFINITIO XIV.

ORdinata proportio est; cùm in duplici serie quantitatum proportionem dicentium eædem quantitates mediæ deseruiunt pro fundamento, & termino Rationis.

Sint duæ ſerles quantitatum proportionalium,

Prima	2	3	4
Secunda	4	6	8

Referatur; 2. ad 3. vt refertur 4. ad 6. & rursus 3. ad 4. vt 6. ad 8. ita quòd termini 3. & 6. deseruiant etiam pro fundamentis; Et sint quidem termini respectu proportionis antecedentis; fundamenta verò respectu sequentis: Quamuis proportio antecedens non sit eadem, ac sequens; sed diuersa; nihil interest, dicit quod hæc erit ordinata proportio. Quoniam eodem ordine dispositi termini inuicem se respiciunt procedendo versùs extremos terminos 4. & 8.

DEFINITIO XV.

PErturbata proportio est; cùm in duplici serie quantitatum proportionem dicentium medius terminus vnius deseruit pro fundamento respectu extremæ quantitatis; at fundamentum alterius deseruit pro termino respectu primæ quantitatis.

Sint duæ ſeries quantitatum proportionalium,

Prima	2	3	4
Secunda	6	8	12

Ordo verò earum perturbatus sit, & referatur 2. ad 3. vt 8. ad 12. Deinde referatur 3. terminus, vt fundamentum sumptus ad 4. vt alia quantitas 6. refertur ad fundamentum 8. Ita quòd terminus primæ seriei 3. deseruiat pro fundamento ad aliud tertium; at fundamentum secundæ seriei 8. deseruiat pro termino ad aliud sumptum, vt fundamentum. Si ergo ita sint ordinati termini vocabitur proportio perturbata; & oportebit ponere illud aliud in prima serie pro vltima quantitate, vt in secunda pro prima. Vocatur autem proportio perturbata, quòd non seruetur idem ordo, cùm in prima serie media, & secunda quantitas sit terminus, & fundamentum: respectu quidem primę quantitatis terminus; respectu verò assumptæ extremæ fundamentum. At in secunda serie secunda quantitas solum terminus est respectu primæ; at prima est fundamentum, & terminus; terminus quidem respectu antepositæ assumptæ, fundamentum verò respectu secundæ suę quantitatis.

EXPEN-

EXPENSIO VII.

De modis arguendi in proportionibus.

PRius agendum est de modo arguendi in genere; deinde de singulis modis in ſpetie.

Præsupponendum ex Logica. Solùm syllogismum inter argumenta à Logicis enumerata efficaciter concludere: Vnde, vt argumenta in proportionibus fundata vim adstrictiuam adipiscantur, & intellectum euidentiâ conuincant, oportet, licet Enthymematis modo prolata; quòd tamẽ ad syllogismum reduci possint. Syllogismus verò constat tribus propositionibus: Primæ duæ dicuntur Præmiſſæ, & earum prima est Maior, secunda Minor, vltima dicitur Concluſio. Præmiſſæ verò constant ex Subiecto, & Prædicato terminis, & Copula: Et terminus, qui replicatur in maiori, & minori dicitur, *Medius terminus*. Sic, si dicatur *omnis homo est animal*, hæc est maior propositio, & *homo* est subiectum *est* copula *animal* Prædicatum, cui additur minor. *Sed omne animal est viuens*; quæ, vt prima componitur ex ijſdem partibus, sed subiectũ est medius terminus nempe *animal*, quod replicatur in maiori, & minori; & ambæ hæ propositiones dicuntur *Præmiſſæ*. Tandem deducitur Conclusio euidens. *Ergo omnis homo est viuens*. Quæritur itaque in argumentis proportionum, quænam sint partes ad syllogiſmum necessariæ?

CONCLVSIO I. PROPOS. XIII.

Argumenta proportionum duo extrema, & medium terminum possident ipſas Rationes; copula est proportio asserta, quæ particula vt *explicatur*.

PRobatur Sit argumentum Mathematicum *numerus 1. est ad 2. vt 3. ad 6. Sed vt 3. ad 6. ita est 4. ad 8.* Ergo 1. ad 2. est vt 4. ad 8.

Numeri ipſi non sunt termini: nã, tunc argumentum consequeretur sex terminos, vt sunt sex diuersi numeri: argumentum verò constans pluribus terminis; quam tribus, non concludit ex Logicis; sed fallax est, & deficit in forma. Quare erit terminus ipſa proportio, quæ inter duos terminos reperitur.

Confirmaturque. Nam propositiones modales pro terminis integra propositione gaudent vt *necesse est hominem esse animal*, illud enim *necesse* est subiectum, at hominem esse animal, est prædicatum. Sic, & hic 1. *est* ad 2. subiectum est, & 3. *ad* 6. est Prædicatum, nempe duæ relationes altera, quæ est inter 1. & 2. altera verò, quæ militat inter 3. & 6. medius verò terminus erit proportio media 3. *ad* 6. quæ reperitur in maiori, & minori.

Probatur secunda pars. Nam copula est illa, quæ semel est in maiori, semelque in minori, & in consequentia. Sed talis est particula *vt* si sit assertiua, vel negatiua, nempe iuncta cum verbo *est*, vel *non est*; quoniam reperitur in omnibus tribus propositionibus. Ergo, *vt* est erit copula.

Probatur secundò. Quoniam tota vis argumenti ex proportionibus deducti, vt propos. 16. huius consistit in identitate similitudinis proportionum: Et ex eo, quòd proportiones duæ sint similes alicui tertiæ, arguitur, esse idem similitudinẽ inter se. In hoc enim probauimus vniuersaliter in noſtris Placitis Phyloſophicis vim syllogiſticam ſtatuendam: Sed *vt est* significat hanc relationem similitudinis, & indicat proportiones esse idem in similitudine; Ergo in eâ particulâ copula latebit; cum copula sit illa, quæ significat identitatem Prædicati, & Subiecti.

Sed iam accedamus ad particulares modos explicandos, quibus vtuntur Mathematici; qui sex sunt *Alternatio, Inuerſio, Compoſitio, Diuiſio, Conuerſio, Æquatio*. Et licet sint alij modi, vt explicabimus, hos tamen particulariter proprijs definitionibus illuſtrauit Euclides, vtpote difficiliores; & in quibus, vt plurimùm termini, & fundamenta ſedes mutarẽt, & alterum vices alterius in deductione concluſionis ſubiret. V. g. antecedens, & fundamentũ A in præmiſſis ponitur in concluſione, tanquã terminus, & conſequens. At nos alios etiam modos, in quibus nulla terminorum, fundamentorumque viciſſitudo reperitur, perſpicuitatis gratia explicabimus.

Modi itaque argumentandi sunt quædam enthimemata constantia ex duplici propoſitione perfectâ, & affirmatiuâ; quorum conſequentiâ ſemel probatâ, ex inde efficaciam ſyllogiſticam conſequuntur, & euidenter oſtendunt. Quia omne Enthymema, cuius conſequentia probata sit, vim ſyllogiſticam conſequitur; *vt iſte angulus eſt in ſemicirculo, ergo rectus eſt*. Si aliũde conſtet, omnem angulũ eſſe rectũ in ſemicirculo, erit ac ſi integrum ſyllogiſmum conficeres, *& diceres Omnis angulus in ſemicirculo rectus eſt. Iſte in ſemicirculo reperitur: Ergo rectus erit*. Quapropter, & modi arguendi Mathematici in proportionibus ſunt efficaces, quia licet ſint Enthymemata, eorũm tamen conſequentiam eſſe bene deductam in 5. libro Euclid. oſtenditur.

Iſtis itaque perceptis, obſeruandum eſt, duplicem eſſe modum argumentandi: Alium abſolutum, cùm quantitates dicunt quidem proportionem ſimilem, ſed non ſe habent inuicem, vt continens, & contentum; vt pars; & totum. Alium verò eſſe relatiuum, in quo quantitates ſumuntur, tanquam dicentes relationem totius, & partis. Primò itaque explicabimus modos argumentandi abſolutos à reſpectu partis, & totius. Deinde relatiuos.

DEFINITIO XVI.

ALterna, ſiu permutata ratio eſt ſumptio antecedentis, ſeu fundamenti, & termini vnius proportionis tanquam fundamenta in concluſione, vt ſe referentia ad fundamentum, & terminum alterius proportionis, tanquam ad ſuos terminos.

Iſte modus eſt: Cùm ponitur fundamenti ad ſuum terminum ſimilis proportio, quæ eſt alterius fundamenti ad ſuum terminum: Et deinde infertur. Quod fundamentum, ad fundamentum eãdem ſimili habitudine refertur, vt terminus ad terminum. Sic ſi ponantur eſſe.

	2	ad	4
vt	3	ad	6

Deinde poterit deduci, Ergo erit etiam Fundamentum 2. ad fundamentum 3. pro termino ſumptum, Vt terminus 4. pro fundamento ſumptum ad terminum 6.

Qui modus argumentandi efficaciter concludens demonſtratur propoſ. 19. lib. 5 Quod intelligitur, ſi fundamenta, & termini ſint eiuſdem generis. Non enim rectè inferetur ex eò, quòd linea A ad lineam B eſſet in proportione, vt numerus 2. ad numerum 3. ; quod deinde eſſet etiã linea A ad numerum 2. vt linea B ad numerum 3. vt clarum eſt ; cum nulla ſit proportio lineæ ad numerũ. Hanc verò argumentationẽ Doctores exprimunt, cum eâ vtuntur, dicendo ; ſi 2. ad 4. vt 3. ad 6. ergo permutando 2. ad 3. vt 4. ad 6.

DEFINITIO XVII.

INuerſa ratio eſt, cùm fundamenea, antecedentiaque proportionum aſſumuntur pro terminis, & termini, ſeu conſequentia aſſumuntur in concluſione pro fundamentis.

Si aliquis argueret: Quoniam eſt fundamentum 2. ad ſuum terminum 4. vt fundamentum 3. ad terminum 6. Ergo etiam erit terminus 4. ad fundamentum 2. vt terminus 6. ad fundamentum 3. vſurpando in concluſione terminos pro fundamentis, & fundamenta collocando pro terminis: hic modus dicitur *inuerſa ratio*, & hunc modum eſſe demonſtratiuum conſtabit ex Coroll. pr. 4. par. ſequentis, Exprimiturque dicendo. Ergo permutando, &c.

DEFINITIO XVIII.

ARguere ex æqualitate eſt, cum ſunt plures quantitates, quam duæ ordinatam, ſeu perturbatam proportionem dicentes, & arguitur, eſſe, eã proportionem inter fundamentum, & vltimum terminum vnius ſeriei, ac inter fundamentum, & terminum alterius vltimum, relictis intermedijs.

Dentur plures magnitudines; quàm duæ dicentes proportionem, veluti aliæ eiuſdem numeri, ſeu proportione perturbatã, ſeu ordinatã, & ſint

Ordinata 1. 2. 6. Perturbata 4. 8. 12.
vt 3. 6. 18. vt 2. 3. 6.

Si ergo relinquantur media aſſumptis extremis in concluſione, & primum fundamentum 1. dicatur referri ad vltimum terminum 6. vt fundamentum 3 ad vltimum terminum 18. ex eo, quod ſint 1. ad 2. ſic 3. ad 6. & 3. ad 6. ſic 6. ad 18. bona erit illatio in ordinata proportione; & bona quoque in perturbata; & ex eo, quod ſit 4. ad 8. vt 3. ad 6. & 8. ad 12. vt 2. ad 3. efficaciter deducetur concluſio, eſſe quoque 4. ad 12. vt 2. ad 6. in qua proportione, vt valeat, ritè ordinandi ſunt termini: nam ſi 2. poneretur vltimo loco poſt 6. in ſecundâ ſerie, tunc vltima relictis medijs, vt patet, non ſumerẽtur. Quod ſi ſint plures terminj, quàm tres, valet adhuc argumentum; ſic ſi ſint.

Ordinata 1. 2. 6. 8. Perturbata 4. 8. 12. 18.
3. 6. 18. 24. 2. 3. 6. 9.

Licebit adhuc in proportione ordinata arguere, vt 1. ad 8. ſic 3. ad 24. & perturbata vt 4. ad 18. ſic 2. ad 9. Hunc verò modum eſſe efficacem in omni proportione etiam irrationali; licet ſint ſeries diuerſi generis oſtenditur pr. 24. & 23. lib. 5. & cum ſignificant in arguendo. Ergo ex æquo, vt, &c.

MODI ADDITI.

DEFINITIO XIX.

ENumeratio rationis poteſt dici, cùm pluribus quantitatibus ordinatis, quæ dicant eandem proportionem, aſſumuntur omnia fundamenta, vt dicentia eam proportionem ad omnes terminos, vt vnum ad vnum.

Si dentur multæ proportiones ordinatæ, & ſint

1. vt 3. 4. 5.
ad ad ad ad
2. 6. 8. 10.

Et illis poſitis, deinde inferatur eſſe 13. nempe omnia fundamenta ad 26. omnes terminos ſimul, vt fundamentum aliquod, V. g. 3. ad terminum ſuum 6. iſte modus poteſt vocari Enumeratio; eo quia ad ſimilitudinem enumerationis Dialecticæ poſitis pluribus particularibus proportionibus cõcluſio deducatur, quę concludat omnes; & probatur propoſ. 17. lib. 5.

DEFINITIO XX.

COllectio eſt, cum plurium quantitatum proportionem ordinatam dicentium aſſumuntur fundamenta, & termini vnius ſimul, vt fundamentum, & antecedens ad fundamenta, & terminos alterius proportionis tanquam ad conſequentem, & terminum, & arguitur, ita eſſe omnia ad omnia; vt fundamentum aliquod ad aliud fundamentum.

Sit proportio ordinata propoſita
1. ad 2. & hoc ad 6. & hoc ad 8.
vt 3. ad 6. & hoc ad 18. & hoc ad 24.

Si hac poſitione inferatur. Quod etiam omnia fundamenta, terminique 1. 2. 6. 8. nempe 17. ſint ad alterius ſeriei fundamenta, terminoſque 3. 6. 18. 24. nimirum 51. vt aliquod ipſorum 2. ad aliud correſpondens 6. bona erit illatio, & oſtendetur Coroll. 2. propoſ. 19. Poteſt verò hæc illatio eſſe integra, & dimidiata: Nam omnia fundamenta, & termini poſſunt colligi, vel eorum aliquot in prima ſerie; dummodo colligantur correſpondentia in ſecunda ſerie.

Sic ſi colligantur extrema 8. & 1. in prima ſerie, & fiant 9. & item in altera ſerie correſpondentia 3. & 24. & fiant 27. erit eadem proportio 9. ad 27. quæ 2. ad 6, vel 1. ad 3. vel 6. ad 18.

Verùm hic quoque fundamenta, & termini debent eſſe eiuſdem rationis, & ſpeciei alioquin ſicut in permutata, rectè illatio non fieret.

DEFINITIO XXI.

REſiduatio eſt modus argumentandi, in quo totum ponitur, ad totum proportione reſpondens, vt pars ad partem, & deinde arguitur ex hoc quoque, eſſe reſiduum ad reſiduum, vt totum, ad totum.

Sit V. g. proportio 15. ad totum 3. vt pars 5. primi totius ad partem alius 1: Erit quoque reſidui 10. primi totius, proportio ſimilis proportioni, quæ eſt ad alteram partem reſiduam 2. alius.

Iſte verò modus arguendi eſt diuerſus ab ijs, de quibus acturi ſumus, qui ſe referunt; vt totum, & pars. Nam hic pars non confertur cum toto ſuo; ſed cum parte alius totius. Propterea que non eſt proportio partis, vt partis propriè; cùm non reſpiciat ſuum totum; ſed partem alteram, non ſibi compartem, alterius totius. Iſte verò modus oſtenditur propoſ. 22.

DE-

DEFINITIO XXII.

REplicatio eſt dici modus arguendi; cùm terminus, & fundamentũ replicata æquè ſumuntur, & ad fundamentum, et terminum conferuntur, vel æquè replicatos, vel ſimplices, alterius combinationis.

Sit V. g. 3. ad 4
Vt 6. ad 8.

Poſſum arguere eſſe quoque multiplex 3. nempe 9. ad ſuum terminum 12. multiplicem æquè numeri 4. quemadmodum eſt 6. ad ſuum terminum 8, quod oſtendetur propoſ. 18. lib. 5. Idemq; argumentum valebit, ſi quoque combinationis alterius æquè multiplicia ſumantur, V. g. 24. numeri 8. & 18. numeri 6, erit namque 9. ad 12. vt 18. ad 24.

DEFINITIO XXIII.

DEtractio poteſt dici modus argumentandi, cùm ex antecedenti, et conſequenti partes proportionales detrahuntur, et arguitur eſſe reſiduum fundamenti ad reſiduum termini, vt aliud fundamentum ad alium terminum, vt prius erat totum fundamentum ad ſuum terminum totum.

Dicatur quod 8. ſit ad 24.
velut 1. eſt ad 3.

Si ex 8. & ex 24 detrahantur partes proportionales 3. & 9. remanebunt 5. & 15. Si ergo arguatur, quòd 5. ſit ad 15. vt 1. ad 3. iſte modus poterit vocari *Detractio*; & oſtenditur valere in proportione multiplici propoſ. 6. lib. 5. In quacumq; proportione Coroll. prop. 25. eiuſdem.

DEFINITIO XXIV.

REflexio poteſt dici modus argumentandi, cùm duo fundamenta; ſeu antecedentia ſeorſim referuntur ad vnicum terminum, ſimili proportione, vt alia duo fundamenta, ſeu antecedentia ad ſuum terminum, ſeu conſequens; Deinde fundamenta prima ſimul ſumuntur, & arguitur obtinere eandem proportionem; quam alia duo fundamenta ſimul ſumpta ad ſuum terminum.

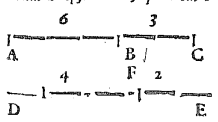
Dentur duo fundamenta 3. & 2. qui referantur ad terminum 6. & alia duo 6. & 4. qui referantur ſimili proportione; ac prædicta ad ſuum terminum 12. Si deinde arguatur eſſe quoque duo fundamenta ſimul, ſeu antecedentia 3. & 2. nempe 5. ad ſuum terminum 6. vt fundamenta 6. & 4. nempe 10. ad ſuum terminum 12.; erit bona deductio, & efficaciter concludet.

Probatur verò iſte modus propoſ. 25. lib. 5.

Modi, qui inuoluunt rationem totius, & partis.

DEFINITIO XXV.

COmpoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis cum conſequente, ſeu vnius; & hoc totum collatum ad ipſum conſequentem.



Sit proportio A B partis ad B C partem; vt proportio alterius partis D F, ad alteram partem F E, & colligatur, eam quoque eſſe proportionem totius A C; nempe antecedentis cum conſequente, fundamenti, & termini proportionis ſimul ad ipſam conſequentem, ſeu terminum B C; vt aliud totum D E fundamentum, terminuſque alterius proportionis ad ſuum terminum E F; dicetur huiuſmodi argumẽtum Compoſitio rationis eo, quod ex conſequente, & antecedente componatur aliud nouum antecedens, ſeu fundamentum. Demonſtraturque hic modus argumentandi propoſ. 21. lib. 5. Euclid. & quando illo vtuntur Mathematici; ita arguunt, vt A B ad B C; ſic D F ad F E, ergo *componendo*, vt A C ad C B; ſic D E ad F E. Sed forte explicabitur melliùs iſte modus argumentandi; Quod ſit: à proportionis partis ad cõpartẽ totius eiuſdem ſimilitudine proportioni alterius partis ad cõpartẽ alterius totius, deinde deducere, quod etiam totum prius ſit ad partem ſuam, ſicut totum poſterius ad partem ſuam, quæ partes fuerint ambæ, vel termini, vel fundamenta, & è contrà.

V. g. ſit pars 1. ad partem 2. totius A;
Veluti pars 1. ad partem 2. totius B;
Erit etiam componendo totum A ad ſuam partem 2; vt totum B ad ſuam partem 2.
Vel; ſi ſit pars 1. ad partem 2. totius A,
Velut pars 1. ad partem 2. totius B:
Erit quoque totum A ad ſuam partem 1;
Vt totum B ad ſuam partem 1.
Vel è contrariò,
Si ſit pars 1. ad partem 2. totius A;
Vt pars 1. ad partem 2. totius B.
Erit quoq; pars 1. ad totum ſuum A;
Vt pars 1. ad totum ſuum B;
Vel etiam erit pars 2. ad totum ſuum A.
Sicut pars 2. ad totum ſuum B.

DEFINITIO XXVI.

DIuiſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo conſequentem ſuperat antecedens, ad ipſum conſequentem.

Sit proportio, vt in præc. figura, A C totum ad B C partem vt D E totum ad F E partem, ſi deinde arguatur, quod exceſſus quoque A B, quo antecedens; nempe totum A C ſuperat conſequens, ſit ad ſuam partem B C conſequentem. Velut exceſſus D F, quo item antecedens D E ſuperat conſequentem F E, nimirum totum ſuam partem, ad ipſam F E conſequentem, iſte modus arguendi appellabitur diuiſio rationis, eò quod diuidantur antecedentia, ſeu fundamenta proportionum in ſuas partes, & oſtenditur iſte modus propoſ. 20. lib. 5. Eucl. In diuiſione autem rationis, dum deducunt concluſionem, ita loquuntur auctores *ergo diuidendo*, &c.

Diuiſio itaq; rationis ad hoc, vt rem clariùs explicemus, eſt cũ à ſimilitudine proportionis partis cum toto ſuo ad proportionẽ partis cum alio toto ſuo, quę partes ſint ambæ homologæ ſcilicet, vel fundamenta, vel termini, deducitur ſimilitudo proportionis compartis alteri parti eiuſdem totius ad proportionem compartis alteri parti alterius totius.

V. g. ſit totum A ad ſuam partem 1.
Vt totum B ad ſuam partem 1.
Erit ergo *Diuidendo* compars 2. ad ſuam compartem 1. totius A.

vt

vt compars 2. ad ſuam compartem 1. totius B.
Vel vt totum A ad ſuam partem 1.
Sic totum B ad ſuam partem 1.
Ergo erit, vt 1. pars ad compartem 2. totius A;
Sic 1. pars ad compartem 2. totius B:
Vel etiam ſic vt 1. pars ad A ſuum totum;
Sic 1. pars ad B ſuum totum:
Ergo vt pars 1. ad partem 2. totius A;
Sic pars 1. ad partem 2. totius B.

DEFINITIO XXVII.

Conuerſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo ſuperat antecedens ipſum conſequentem.

Veluti in præcedenti figura ex eo, quod ſit AC ad BC, vt DE ad FE; Ergo eadem tota AC ad exceſſum AB; ſic altera tota DE ad exceſſum DF: iſte modus arguendi dicitur *Conuerſio rationis*, & oſtenditur propoſ. 19. lib. 5. & cum illo vtuntur Mathematici, ſic inferunt; Igitur per Conuerſionem rationis, &c.

Itaque Conuerſio rationis propriè eſt arguere à ſimilitudine proportionis totorum cum ſuis partibus, ad ſimilitudinem proportionis totorum cum reliquis ſuis partibus.

V.g. vt totum A ad ſuam partem 1.
Sic totum B ad ſuam partem 1.
Ergo conuertendo vt totum A ad reliquam partem ſuam 2.
Sic totum B ad reliquam partem ſuam 2.

Tandem aduerte, quòd præter compoſitionem rationis aſſignatam datur etiam alius modus argumentandi, qui eſt compoſitio ipſarum proportionum, & differt propter hoc ab allata; quòd illa ſit compoſitio ipſarum quantitatum proportionem dicentium; hæc verò ipſarum rationum. Si enim ſint duæ proportiones $\frac{4}{1}$ & $\frac{4}{1}$, & duæ aliæ iſtis ſimiles $\frac{4}{2}$, & $\frac{8}{2}$, & ex primis modo, quo docuimus propoſ. 11. vnica proportio componatur $\frac{8}{1}$, item ex ſecundis; & fiant $\frac{1}{6}$ erit adhuc eadem proportio 8. ad 15. quæ 32. ad 60. vtpote ex iiſdē proportionibus cōpoſita; ſi ergo prob. proportionem A ad B eſſe compoſitam ex iiſdem proportionibus ex quibus eſt compoſita proportio quantitatis C ad D; bene arguetur eſſe A ad B, vt C ad D. Vnde dabitur quoque alia diuiſio rationis, nempe; ablatis rationibus ſimilibus à ſimilibus, quòd etiam reſidua habebunt eandem proportionem; ſic ablata proportione $\frac{4}{2}$ à proportione $\frac{4}{1}$; & item proportione $\frac{4}{2}$ à proportione $\frac{8}{2}$, remanebunt reſiduum primæ $\frac{4}{1}$, reſiduum ſecundæ $\frac{4}{2}$ qui ſimilem proportionem dicent ad inuicem, ſcilicet 10. ad 12. vt 40. ad 48. Vnde ſi quis probet, ablatas fuiſſe à ſimilibus proportionibus A ad B, quæ eſt C ad D proportiones ſimiles, reſidua quoque (poterit deducere) eſſe inuicem ſimilia: quod oſtendemus agentes de proportionalitatibus Rationum.

TRACTATVS IX.
IN V. LIBRVM EVCLIDIS
PARS SECVNDA.

De Proportionibus in genere.

Ognitis Rationum, Proportionumque definitionibus, modumq; illas tractandi, & in illarum cognitione ſe exercendi, ad proprietates earum genericas, & vniuerſaliſſimas accedimus. Eſtq; hic tractatus veluti Metaphyſica apud Phyloſophos. Nam ſicut illa entia vniuerſaliſſimè accepta cognitione intuetur; Sic iſte liber proportiones, atque earum ſimilitudines ſub tota vniuerſalitate animaduertit. Primòque agit, vtpote notiori de proportione multiplici: ſecundò de proportione plurium quantitatum ad vnam comparatarum, tertiò de plūribus quantitatibus ad plures collatis in ordine ad cognoſcendam earum in proportionibus diſſimilitudinem, & tandem de plurium quantitatum ad plures in Rationibus ſimilitudine, in quibus modi argumentandi fundantur. Iſte verò Tractatus à primis quatuor libris nullatenùs dependet; ſed tantum ab antecedenti Tractatus parte: verùm, quia eius cognitio ad ſextum neceſſaria eſt, cui, & primus, & ſecundus liber deſeruiunt; conueniens erit primum, ſecundumque librum legiſſe ſaltem, vt mens illis libris exercitata facilius per huius propoſitiones excurrat.

EXPEN-

EXPENSIO I.

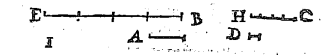
De ſimilitudine multiplicium quantitatum.

QVoniam proportio multiplex facilis eſt, conueniens fuit, vt ipſa ad percipiendam ſimilitudinem cuiuſcumque proportionis aditum ſterneret.

THEOR. I. PROP. I.

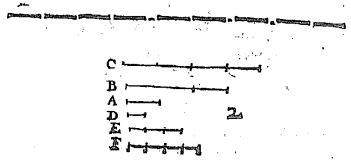
Si ſint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum, æquè multiplices; Quàm multiplex eſt vnius vna magnitudo; tam multiplices erunt, & omnes omnium.

SI dentur quotcumque magnitudines; nimirum duæ; A quidem vnius palmi; at D vnius digiti, & dentur deinde æquè multiplices aliæ æquales numero, V.g. BE ipſi A, & HC ipſi D. Dicit propoſitio, *quòd ſi omnes ſimul ponātur, multiplices nempe hinc* BE, *&* HC, *& ſimplices inde* A, *&* D, *quòd adhuc illæ compoſitæ ſimul, iſtis ſimul compoſitis, erunt æquè multiplices, vt erant priùs.*



Nempe; quod vt quatuor palmi continebant priùs *quater* lineam palmarem; ſic nunc quatuor palmorum linea, & quatuor digitorum *quater* continet lineam palmi, & digiti vnius.

Probatur ex defin. 3. præc. Tract. Illæ dicuntur æquè multiplices quantitates; cùm æquis numero vicibus vna continetur in alia. Quaexre A quater continebitur in BE, & D quater in HC. Si ergo diuidatur, in ſuaſque partes diſtribuatur EB, & HC ſingulæ partes palmares erunt ex BE effectæ, ſingulæ digitales ex HC. Addantur itaque ſingulæ partes digitales palmaribus ſingulis; hæ ſingulæ lineis ſimplicibus compactis ſimul A, & D, æquiualebunt. Ex 2. enim pronunc. l. 1. æqualia addita æqualibus æqualitatem non tollunt. Quapropter A, D ſimul ſingulis palmis, digitiſq; æquiualebit, cumque ſint quatuor digiti, & quatuor palmi ex hypoteſi, quòd ſint æquè multiplices. Ergo A, & D vnitæ lineæ continebuntur quater in lineis multiplicibus EB; & HC ſimul. Vt priùs continebantur ſumptæ ſeorſim in ſingulis ſeorſim ſumptis.



THEOR. II. PROPOS. II.

Si prima ſecundæ æquè fuerit multiplex, ac tertia quartæ; fuerit autem, & quinta ſecundæ, atque ſexta quartæ, erit & compoſita prima cum quinta, æquè multiplex ſecundæ, ſicut eſt tertia cum ſexta quartæ.

SIt duplex ordo linearum; Prior, in quo ſint tres magnitudines, nimirum prima, & antecedens palmorum 2. ſequens palmorum 4. ſubſequens C palmorum 8. Deinde ſit poſterior ſeries trium quoque magnitudinum; quæ antecedenti ſuæ D ſint æquè multiplices; vt ſunt prioris ordinis magnitudines antecedenti ſuæ A. V.g. ſi antecedens D eſt digitus, erit E ſequens duorum digitorum, & F ſubſequens quatuor digitorum. Dicit propoſitio *compoſitas quoque ſubſequentem* C *extremam, & ſequentem* B primæ A primi ordinis, eſſe *æquè multiplices*, vt in poſteriori ordine cū mediâ E, & ſequenti *extrema* F *compoſita, eſt* primæ D.

Probatur, Nam linea A menſurat lineam ſequentem B bis: Quater verò ſubſequentem C. Ergo ſi addantur ſimul B, & C bis, quaterque nimirum ſex vicibus eadem A. ambas menſurabit.

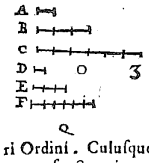
Sed in poſteriori ordine antecedens D ex hypotheſi menſurat quoque bis ſequentem E, & ſubſequentem F quater. (quia menſurat ſuas ſequentes, vt in priori ordine antecedens ſuas ſequentes menſurabat) Ergo hic quoque antecedens D ſuas ſequentes E, & F ſimul poſitas bis, quaterq; menſurabit, nimirum ſexties; vt faciebant ſequens, & ſubſequens compoſitæ in priori ordine, quod erat oſtendendum.

Aduerteque primam eſſe B, ſecundam A, quintam C; tertiam E, quartam D, & ſextam F, ſed, quia iſte modus explicandi videtur non adeo perſpicuus, illum vitauimus; licet alioqui laudatiſſimus.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si ſit prima ſecundæ æquè multiplex, ac tertia quartæ; Sumantur verò æquemultiplices primæ, & tertiæ erunt ex æquo ſumptarum multiplex, altera quidem ſecundæ, altera verò quartæ.

SIt duplex ordo magnitudinum, Prior, in quo ſit prima B, & ſequens pal. 3. multiplex ſecundæ A, quæ ſit 1. palmi; huic verò ſumatur ſubſequens C, quæ ſit ſequenti multiplex, & eam V. g. contineat bis.



Deinde Poſterior Ordo ſumatur magnitudinum eadem multiplicitate continentiarum conformis priori Ordini. Cuiuſque ſequens E ſit trium digitorum reſpectu primæ D vnius digiti. Illi autem ſequenti E ſumatur æquemultiplex F, nempe bis, vt in priori Ordine.

Dicit propoſitio *has ſubſequentes* C, *&* F, *tum prioris, tum poſterioris ordinis eſſe etiam æquemultiplices ſuis antecedentibus* A, *&* D.

Pro-

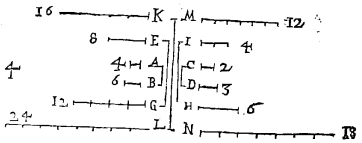
Probatur. Nam ſi c ſubſequens primi ordinis, & F ſubſequens ordinis ſecundi ex hypotheſi bis multiplicant ſuas partes æquales ſuper ſequentes B, & E, quælibet ex illis, veluti F Q, æquabitur ſuæ ſequenti E, & C O ſuæ item ſequenti B. Sed iſtæ ſequentes ex hypotheſi quoque ſunt æque multiplices antecedentium A, & D, & quælibet V. g. B multiplicat tot partes æquales ſuper A, quot E multiplicat partes æquales ſuper D. Ergo etiam partes ſubſequentium C O, & F Q, vtpote ſequentibus æquales: Sed aliæ partes reſiduæ in his lineis ſubſequentibus C, & F ſunt prædictis C O, & F Q, æquales. Ergo additæ iſtis adhuc facient totam lineam, quam complent, æquè multiplicem ex ant. propoſ. 2. Vnde C toties continebit A, quoties F continebit D; quę ſunt multiplices primæ; & tertiæ; quod erat probandũ.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si prima ad ſecundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam: etiam æquè multiplices ipſarum quantitatum iuxta quamuis multiplicationem eandem habebunt rationem; ſi prout inuicem reſpondent; ita ſumptæ fuerint.

SInt duæ combinationes magnitudinum A C prior, B D poſterior, ſitque A ad C, vt B ad D; nempe A in C contineatur, veluti continetur B in D. Sitque A prima, C ſecunda, B tertia, D quarta. Sumãturque horum fundamentorum A, & B æquè multiplices quantitates E, quę contineat A tricies, & G, quæ contineat B tricies. Terminis quoque C, & D iuxta quamuis multiplicationem à prima fundamentorum diuerſam ſumantur duæ aliæ æquè multiplices inter ſe nimirum I, quę bis continet C, & H, quæ bis continet D. Dicit itaque propoſitio, *quod ſtæ multiplices inuicem reſpondentes dicunt eandem proportionem inter ſe, quam dicebant quantitates ſimplices*. Et ſic, quod ita referatur E multiplex magnitudinis A, ad I multiplicé magnitudinis C veluti multiplex G magnitudinis B refertur ad multiplicé H magnitudinis D Itaq; multiplicia fũdamẽtorũ, vt fũdamẽta referentur ad multiplicia terminorum tanquam terminos. Quod, vt probeturiſtis quoque aſſumendæ ſunt æquemultiplices, fundamentis quidem F, & G multiplices K, & L, & terminis H, & I, aliæ æquemultiplices M, & N.

Probatur modo propoſ. Secundum par combinationum E, & G eſt æque multiplex fundamẽtis A, B, & I, H eſt æque multiplex terminis C:



& D. Quare ex definitione 9. aut æqualiter creſcent, aut æqualiter decreſcent, aut æquabuntur; Multiplicia fundamentorum, reſpectu multiplicium terminorum: Itaque creſcente E ſuper I, creſcet & 6 ſuper H: at deficiente E, ab I; deficiet quoque G ab H, & ſi æquentur E, & I æquabuntur G, & H, eo quia ex hypotheſi ſimplices quantitates, quibus multiplices ſunt, inuicem proportionem dicant, & ex def. 9. illæ quantitates, quæ proportionem dicunt, habent ſuas multiplices hac conditione crementi, decrementi, & æqualitatis prædictas.

Tertium verò par K, L eſt quoque multiplex reſpectu fundamentorum A, B, & aliud M, & N reſpectu terminorum C, & D, ex anteced. propoſ. Quod quælibet linea in his tertijs paribus multiplex ſit ſuæ correſpondenti in ſecundo pari. (& quælibet harum correſpondentium ſecundarum parium ſit æque multiplex fundamentis, & terminis ſibi correſpondentibus. Vnde K erit multiplex A, & L ipſius B, at M ipſius C, tandem N ipſius D.

Propterea eque etiam ipſæ magnitudines tertiæ eam conditionem conſequentur crementi, decrementi, vel æqualitatis in omni multiplicatione, quam ſecundę multiplices E, G, & I, H. Creſcenteque N reſpectu M creſcet L ſuper N, & decreſcente decreſcet, ſe æquante æquabitur.

Cum itaque ipſę ſecundę multiplices Sil. fundamenta E, & G termini quoque H, I habeant tertias multiplices K, L fundamentorum; M N terminorum illius conditionis, quæ requiritur in def. 9. ad ſimilitudinem proportionum, crementi, decrementi, æqualitatis, erunt proportionales, & ita erit E ad I, vt G ad H.

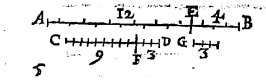
COROLLARIVM

HInc eſt quod ſi quantitatum duæ combinationes dentur, & antecedens A ad ſequentem C dicat eam proportionem, quam antecedens B dicit ad ſequentem D; quod dicent etiam proportionem è cõtrariò C ad A, vt D ad B. Ratio eſt: Quia ſi E, & G multiplices fundamentorum A, & B, vel ſimul ſuperant, vel ſimul æquant, vel ſimul deficiunt, à multiplicibus terminorum iuxta quamuis multiplicationem, & ideo eſt A ad C, vt B ad D; Pariter quoque multiplices terminorum I, & H ſimul deficiunt, vel ſimul æquant, vel ſimul ſuperant iuxta quamcumque multiplicationem multiplices fundamentorum E, & G: Vnde eadem ratione C erit ad A, vt D ad B.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si magnitudo magnitudinis æquè fuerit multiplex, vt ablata ablatæ; etiam reliqua reliquæ erit multiplex, vt tota totius.

SI ſint duæ magnitudines A B maior, & C D minor, quibus ſingulis auferantur duæ partes A E, & C F, quæ inuicem eam multiplicitatem dicant, quam totæ inuicem dicebant; Licet cum ſuis totis non eſſent illæ partes commenſurabiles, aut certè ijſdem partibus non componerentur;



rentur: Multiplicitas enim attendenda eſt vnius partis reſpectu alterius, ſicut, & totius ad aliud totum, non totius reſpectu partis. Sint itaque ablata pars A E, ita multiplex reſpectu C F ablatæ, vt eſt multiplex E A totum reſpectu C D totius. Aſſerit propoſitio. *Quod etiam reſiduum maioris erit multiplex reſpectu reſidui minoris, vt erat totum maius multiplex A B reſpectu totius minoris C D.*

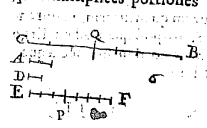
Ad id probandum aſſumitur aliqua alia quantitas G, cui ſit multiplex E B reſiduum, vt eſt reſiduum multiplex maius A E reſpectu minoris reſidui C F. Certum eſt; quod, ſi addatur hæc quantitas G portioni ablatæ C F totius minoris, ita erit multiplex totum maius A B ad totum hoc compoſitum denuò, vt eſt pars ablata maioris A E reſpectu ablatæ minoris C F. Sed hoc totum maius A B eſt ex ſuppoſitione, ita multiplex ad totum minus C D, vt erat ablata portio A E à maiori toto reſpectu ablatæ portionis C F à minori. Ergo hoc totum minus C D & rurſus eius pars ablata C F aſſociata cum aſſumptâ G, inuicem æquabuntur; vtpote quibus ſit totum A B æque multiplex ex 6. pronunc. Auferatur itaque ablatã portionẽ C F; & id quod remanet F D, & G quantitates remanebunt æquales, vtpote, quòd ab vtraque eadem C F ablata fuerit, quæ priùs quidem cum C D totum minus integrabat, at cum G aſſociata fuerat.

Sed huic aſſumptæ G, ita eſt multiplex reſiduũ E B totius maioris, vt ablatum A E ad ablatum C F; ex hypotheſi. Ergo, & huic reſiduo D F, ita eſt multiplex E B reſiduum maioris, vt ablatum A B ad ablatum C F, & conſequenter, vt totum A B ad totum C D.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si duæ magnitudines duarum magnitudinum ſint æquè multiplices, & quædam detractæ ſint earum æquè multiplices, & reliquæ earundem, aut æquales erunt, aut æquæ multiplices.

SI ſint duæ magnitudines C B, & E F, quarum prima ſit æquè multiplex alicui A, ſicut, & altera E F eſt multiplex alteri alicui D, V. g. ſepcies. Et auferantur, tum à prima C B, tum ab altera E F, æquè multiplices portiones earundem A, & D, nimirum Q B, & P F. Dicit *reſidua* C Q, & E P *eiſdem* A, & D *remanere, aut æqualia, aut æquemultiplicia, quòd libet ſuæ correſpondenti* Q C *ipſi* A, & E P *ipſi* D.



Probatur. Quoniam propoſ. 2. probatum eſt, quòd ſi duę æquè multiplices duarum; vt C Q multiplex A, & E P multiplex D, & aliæ duę Q B, & P F earundem A, & D æquè multiplices componantur duæ; & duæ, quæ reſpectu eiuſdem quantitatis multiplices ſunt, etiam compoſitæ C B, & E F remanebunt æquè multiplices reſpectu earundem A, & D. Ergo etiam detractæ æquemultiplices: Q B, & P F ab æquè multiplicibus totis, quæ remanent erunt æquè multiplices; aut ſaltem æquales, cum quælibet pars multiplicium ſit æqualis eis quantitatibus, quibus ſunt multiplices. Vnde detractis æquè multiplicibus Q B, & P F; aut plures partes reſtabunt in C Q, & E P; ideoque erunt æquè multiplices reſiduæ E P, & Q C, aut vna; & ideò erunt æquales ipſis A, & D, quibus priùs ante detractionem erant æquè multiplices.

EXPENSIO II.

De proportione ad vnicam quantitatem relata.

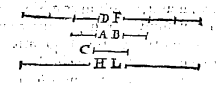
HIc agimus de pluribus ad vnicam comparatis, & ipſas quantitates, vt ſe habent, ad aliquam quantitatem examinamus: Si quidem facilius eſt duarum quantitatum ad vnicam collatio (cùm multiplicitas ſæpé ſæpiùs confuſionem inducat) quam plurium quantorum inuicem comparatio. Agemus autem primò deſimilitudine deinde de diſſimilitudine in duabus quantitatibus ad vnam conferendis, vt magis ex diſſimilitudine ipſa ſimilitudo nota euadat.

THEOR. I. PROP. VII.

Æquales ad eandem eandem habent rationem, & eadem eandem rationem conſequitur ad æquales.

SInt A, & B æquales. Dicit *conſequi eandem rationem ad aliam* C. Quod vt probet recurrit ad æquè multiplices, quæ V. g. eas contineant ter, vt D, & F. Lineæ verò C aſſumantur æquè multiplices duæ H, & L, quæ erunt æquales, vtpote eiuſdem æquè multiplices, ex pronunc. 6.

Probatur. Nam, cùm multiplices D, & F æqualium ſint inuicem æquales ſimul creſcent, decreſcent, & æquabuntur reſpectu multiplicium vnius C ſecundò aſſumptarum H, & L inuicem quoque æqualium, & hoc iuxta omnem multiplicationem. Quapropter, quantitates, quibus multiplices ſunt, eandem dicent proportionem, & A ad C proportionabitur; vt B ad idem C. Pariterque etiam C ad A eandem habebit rationem, quam idem C ad B; quia eiuſdem multiplices H, & L ad multiplices D, & F habent conditionem, quam multiplices quantitatum in proportione ſimilium requirunt, vel æqualitatis ſimultaneæ, vel diminutionis, vel augmentationis.



THEOR. II. PROPOS. VIII.

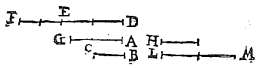
Inæqualium magnitudinum maior ad eandem maiorem rationem habet, quàm minor, & eadem ad minorem maiorem rationem habet, quam ad maiorem.

MAiorem rationem habere eſt magis de quantitate æquali alterius quantitatis in ſe continere, quam de alia V. g. 6. palmi continent 4. palmos; ideoque ad lineam 4. palmorum maiorem proportionem habent, quam ad 5. palmos

mos, cum 4. palmos contineat semel,& dimidio, non autem 5. palmos.

Duas verò partes habet hæc propositio. Prima est: *si dentur duæ lineæ, quarum vna si maior vt* A *alia minor, vt* B: *& comparentur ad aliam, quamlibet, vt* H: *Maior dicetur habere maiorem rationem ad eam* H, *quàm minor* B

Diuidatur A ita vt CA sit æqualis minori quantitati B: Sumatur; parti minori, siue sit C A, siue reliquum G C, multiplex F E, adeoque replicetur, vt euadat, vel maior, vel saltem æqualis ipsi H, & eidem multiplici F E addatur multiplex D E tot vicibus replicata, quot est ipsa F E, quæ tamen replicet,& multiplicet maiorem partem C A,eritq; D E maior, quam F E, & consequenter maior, quam H, quòd F E ei, vel æqualem fecerimus,vel maiorem. Sumatur verò quantitatis H multiplex talis L M, quæ sit proximè maior, quam E D, ita vt E D, non excedat, nisi ad summum quantitate H;tunc enim M L non poterit superare D F, quia excessus, vel æqualis ipsi H, vel minor non potest superare F E, quæ æquat, vel superat H, & sic D F multiplex A G non erit minor, quam M L, & E D minor, quam M L. Linea D F verò



ex 1. huius est multiplex quantitatis A G; eo quia componatur ex multiplici ipsi CA,& ex multiplici ipsi GC. Sic ED est multiplex quãtitatis AC ex effectione, & ideo quantitatis B ei æquali. (Vel si mauis F E erit multiplex G C, quæ æquabitur ipsi B; si B fuerit taliter assumpta, quæ relinquat C A maiorem,quàm B.)

Probatur. Multiplex antecedentis A G,nimirum D F excedit multiplicem L M suæ sequentis H in prima combinatione. At multiplex D E antecedentis B multiplicem L M quantitatis H iterum pro sequente sumptæ in posteriori combinatione non excedit. Ergo est maior proportio A G ad H, quam B ad H ex def. II. præc. part. quia contingit aliquando quod multiplex antecedentis AG excedat multiplicẽ sequẽtis LM, quãdo multiplex ED anteced. B eandẽ multiplicẽ non excedit.

Probatur quoque secunda pars; *quòd* H *dicat maiorem proportionem ad minorem* B; *quàm ad maiorem* A G, mutando solum combinationem.

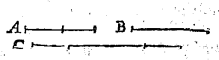
Nam L M multiplex H, vt antecedens sumpta maior est multiplici D E sequentis minoris B, quum eadem multiplex L M eiusdem H, etiam hìc pro antecedente sumpta, non sit maior in hac posteriori combinatione multiplici D F sequentis AG Ergo H dicit maiorem proportionem ad B, quam ad A G ex def. II. præc. part.

THEOR. III. PROPOS. IX.

Quæ ad eandem possident eandem rationem, æquales sunt inter se: Et ad quas eadem eandem habet rationem; istæ quoque sunt inter se æquales.

HÆc propositio ostenditur per reductionem ad impossibile, & conuertit vtramque partem Theor. 1. huius.

Assumantur itaque duæ lineæ A, & B, quæ dicant eandem proportionem ad C. Dicit propositio, *quòd* A, *&* B *sunt inuicem æquales*,



Quòd,si non sunt æquales.

Sit A maior,& B minor. Erit ergo ex præced. propositione maior proportio maioris A, quàm minoris B ad eandem C contra hypothesim.

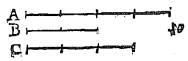
Probatur quoque secunda pars. Quoniam,si C respicit per eandem proportionem A, & B, & non sunt equales: Ergo ex 2. parte præced.prop. C diceret maiorem proportionem ad B, quàm ad A contra hypothesim.

THEOR. IV. PROPOS. X.

Ad eandem magnitudinem rationem habentium, quæ maiorem rationem habet,illa maior est; Ad quam verò eadem maiorem rationem habet, illa minor est.

HÆc propos. conuertit duas partes propos 8. & ipsa quoque probatur per reductionem ad impossibile.

Sit A, quæ maiori ratione referatur ad B, quàm C refertur ad ipsam B, Dicit A esse quoque maiorem; quàm C.



Probatur, Nam, si forent æquales A, & C, haberent ex præmissa propos. eandem rationem ad B, quòd est contra Hypothesim. Si verò A,quæ maiorem rationẽ habet esset minor, quàm C,consequeretur contra præsuppositum minorẽ rationem ad B, quàm C ex propos. 8. Ergo erit A maior, quàm C.

Secundo; si eadem B respicit proportione maiori C, quàm A. Dicit esse minorem C, quàm A. Quod ostenditur: Nam non erunt æquales,quoniam B ad easdẽ ex 9. propos. eandẽ rationem haberet. Rursus non maior C, quàm A minor; quia B tunc ad A minorem quantitatem, maiorem rationem haberet ex 8. propos. quàm ad C: Ergo erit C minor, quàm A: cum non sit, nec æqualis ipsi A, nec maior ipsâ.

EXPENSIO III.

De plurium quantitatum ad plures quantitates dissimili comparatione.

VTilis admodum euadit hæc speculatio ad ostendendos modos argumentandi in omni genere proportionum etiam irrationalium; ita vt huius propositiones sint veluti quædam Lemmata ad propositiones de plurium quantitatum proportionalium similitudine ad aliam item plurium quantitatum proportionalium similitudinem percipiendam,per quam, deinde veritatem, & firmitatem argumentorum Mathematicorum cognoscimus.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XI. Euc.13.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quàm tertia ad quartam; tertia verò ad quartam maiorem rationem habuerit, quàm quinta ad sextam: prima quoque ad secundam maiorem rationem habebit; quam quinta ad sextam.

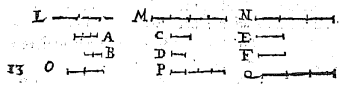
ASsumantur tres combinationes quantitatum A, B, & C, D, & E, F, quarum duæ nimirum A, B, & C, D, dicant proportionem; ita vt A, quæ dicitur prima, & antecedens ad B suam sequentem cõparata,ita se gerat in eâ continẽda, vt secundæ combinationis C antecedens ad D sequẽtem relata. Hæc verò antecedens secundæ combinationis, nimirum C ad sequentem suam D collata maiorem proportionem dicat,quam tertiæ combinationis antecedens E ad sequentem suam F. Asserit, *quòd, & antecedens primæ combinationis* A *dicet maiorem proportionem ad sequentem suã* B, *quàm combinationis tertiæ antecedens* E *ad suam sequentem* F.

Probatur. Accipiantur multiplices antecedentium, seu fundamentorum in singulis combinationibus L M N, & multiplices sequentium idest terminorum O, P, Q, quæ singulæ fundamentorum sint sibi æquẽ multiplices; sicut etiam terminorum sint sibi æquẽ multiplices,licet differant à multiplicitate priorum.

Si itaque antecedens secundæ combinationis C ad suam sequentem D dicit eam proportionem, quam primæ combinationis antecedens A dicit ad suam sequentem B; Ergo multiplices earum antecedentium ex 9. defin. pr. p. huius crescent simul semper decrescent, æquabuntur adhibitâ qualibet multiplicatione respectu sequentium; ita vt, cùm superat vna antecedens sequentem suam, superet,& alia antecedens sequentem suam; si æquat, æquet; si vna deficit, deficiat, & alia.

Sed huius secundæ combinationis antecedens C ad sequentem D maiorem proportionem habet; quàm antecedens tertiæ combinationis E ad suam sequentem F: Ergo ex 11. defin. euenire potest aliquando; quòd crescat multiplex M fundamenti C secundæ combinationis, & consequenter cum eo multiplice L suæ simplicis A prioris combinationis se augendo pariter super multiplices terminorum O, & P, & non crescat tamen N super Q.

Quia ergo non creuit N magis, quàm Q, cum creuit M magis, quã P, at cũ creuit M, magis quam P, creuit semper L in priori combinatione magis, quam O, & semper L sequitur M, non autem N: Ergo horum multiplicium simplices dicent ma-



iorem proportionem, & si dicit maiorem proportionem C ad D. quam E ad F, etiam ex 11. definit. dicet maiorem proportionem A ad B, quam E ad F; quòd multiplex L simplicis A simul cùm multiplici M simplicis C maior inuenta sit aliquãdo, quam multiplex O, & P terminorum suorum; non autem N multiplex E maior inuenta sit multiplici Q termini sui F.

COROLLARIVM

HOc etiam argumentum demonstrat, quòd si secundæ combinationis fundamentum C ad terminum D dicat minorem proportionem,quàm dicat E ad F;eam quoque dicere A ad B: cùm sicut M multiplex minor sit,quam P,sic, & L multiplex minor sit, quam O; cùm tamen N aliquando maior sit, vel æquet Q.

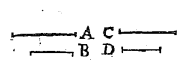
THEOR. II. PROPOS. XII. Eucl. 14.

Si prima ad secundam eandem rationem habuerit, quam tertia ad quartam; Prima verò, quàm tertia sit maior; etiam secunda maior erit, quàm quarta: Quod si fuerit æqualis prima tertiæ, erit etiam æqualis secunda quartæ, si fuerit prima minor, quam tertia erit etiam secunda minor, quam quarta.

TRes partes propositio enumerat,quæ tamen singulæ faciliter probantur. Si sint duæ combinationes, quarum antecedens A, quam dicit primam ad sequentem B,quam vocat secundam ita comparetur in proportione, vt alterius combinationis C tertia ad sequentem D quartam. Dicit propositio; *Quòd qualis altera antecedentiũ fuerit respectu alterius antecedentis: Etiam altera sequentium respectu suæ sequentis* talis erit, si maior antecedens A antecedente C; maior erit quoque sequens B sequente D, si æqualis, æqualis;si minor A, quàm C, minor quoque erit B, quàm D.

Quoniã ponitur maior A ãtecedẽs antecedẽte C, erit maior proportio A ad B,quã C ad B. Itaq; sunt tres cõbinationes quantitatum; prima est C ad D, quę ita refertur, vt in secũda cõbinatione A ad E: Verùm hæc secunda A ad B nõ ita refertur,vt tertia C ad B: sed maior est proportio A ad B secundę combinationis;quam C ad B tertiæ,vt in principio dixi: Ergo ex præcedenti maior erit quoque proportio in prima combinatione C ad D; quam in tertia C ad B. Cum ergo eadem C dicat maiorem rationem ad D, quam ad B; ideoque minorem ad B, quàm ad D, ideo ex 8. propos. maior erit B, quàm D.

Probatur secunda pars. Quia ponitur æqualis antecedens A antecedenti C, erit eadem proportio A ad B; quam C ad B: Cùm ergo ex hypothesi sit A ad B, vt C ad D, erit etiam eadem proportio C ad D; quam C ad B: Ideoque D, & B ex propos. 9. inuicem erunt æquales.



Tertia quoque pars patet ex Coroll. propos. præced. Nam si minor est A, quam C, erit minor proportio A ad B, quam C ad B. Itaque instituemus tres combinationes: Eritque prima C ad D in eadem proportione, quam A ad B; sed hæc secunda A ad B non erit in eadem proportione,quã

in tertia C ad B: Verùm minor erit proportio A ad B; quàm C ad B: Ergo ex præced. Corgll. minor quoque erit proportio C ad D, quam C ad B. Idcoque C ad B habebit maiorem proportionem, quàm ad D, quare ex 9. propos. B erit minor quàm D.

COROLLARIVM I.

CLarum autem est ob æqualitatem proportionum; Quod si antecedens A sua sequente B sit maior; quòd etiam antecedens C sua sequente D futura sit maior: Quia alioquin si A esset maior, quàm B, & C minor quam D, aut æqualis ipsi D illa quantitas A diceret proportionem maioris inæqualitatis A ad B, at quantitas C diceret ad D proportionem, aut minoris inæqualitatis, aut æqualitatis. Et idem asseras si A sit minor, quàm B, etiam C futuram esse minorem, quàm D, & si æqualis sit A, & B, & alias quoque quantitates C, & D eadem æqualitate potiri.

COROLLARIVM II.

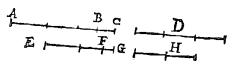
COlligitur quoque, Quod si B, & C sit eadem, vel sint æquales; quòd si A ponatur maior, quàm C, ipsa C etiam erit maior, quàm D, dummodo sit A ad B, vt C ad D; quia, cùm B sit maior, quam D ex prop. 11. & C sit ei B æqualis, erit etiam ipsa C maior, quam D.

THOR. III. PROPOS. XIII. Eucl. 25.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint; maxima, & minima reliquis duabus maiores erunt.

SInt duæ magnitudines A C, & D, quæ se inuicem proportione ea respiciant, quâ aliæ duæ E G, & H. Sitque A C maxima earum, & H minima. Dico; quod, si istæ simul addantur; facient quantitatem maiorem, quàm reliquæ mediocres simul compositæ, nimirum D, & E C. Nam si ex A C maxima detruncetur pars A B æqualis lineæ D, & ex media E G portio æqualis E F lineæ minimæ H, cùm sint æquales additæ simul A B, cum H pro primo toto, & D cum E F pro secundo toto æqualia erunt. Siquidem ipsi H prioris totius æqualem detruncauimus E F partem additam ipsi D, & ipsi lineæ D posterioris æqualem fecimus B A additam partem ipsi H.

Sed portiones residuæ E C maximæ, & F G mediæ sunt inæquales, maiorque est maximæ residuum, quàm mediæ; Ergo, si hæc residua addantur, residuum nempe B C priori toti A B, & H, & mediæ F G posteriori toti E F & D, maius erit priùs compactum ex maximâ, & minimâ, quàm posterius totum compositum ex mediis.



Remanet itaque ostendendum, quod residuum maximæ F C, sit maius, quam mediæ F G. Id verò probatur. Tota A C maxima, est ad suam mediocrem E G, vt D mediocris ad minimam H: Ergo partes abiatæ à maximâ pars A B, & ex mediâ E F candé dicent proportionẽ; quia mediocri D, & minimæ H sunt æquales: Quare ex prop. 6. residua B C, & F G eandem dicent proportionem, quàm sua tota. Totum verò A C maiùs ponitur eò, quod sit maximum; quam E G; ergo, & residuum EC, erit maius; quàm FG. Alioquin si esset æquale, aut minus non diceret B C ad F G eandem proportionem maioris inæqualitatis quam A C ad E G, sed vel æqualitatis, vel minoris inæqualitatis.

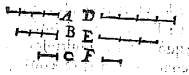
Propositio autem verificatur pro nunc tantùm de proportionalibus multiplicibus ob propos. 6. in qua fundantur; sed infra extendetur ad quascumque proportionales Coroll. propos. 22.

THEOR. IV. PROPOS. XIV. Eucl. 20.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales, numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; ex æquo verò prima maior fuerit, quàm tertia, etiam quarta maior erit; quam sexta; si fuerit æqualis, erit quoque quarta sextæ æqualis; si fuerit illâ minor, hæc quoque illâ minor erit.

SVmantur tres magnitudines A, & B, & C, & aliæ tres D, E, & F, quarum combinationes in eadem ratione sint A ad B prioris ternarij, vt D ad E posterioris, & B ad C prioris, vt E ad F. posterioris. Dicit primo; quòd si prima A, sit maior tertia C in priori ternario, quòd etiam prima D erit maior, quàm tertia F in posteriori.

Probatur. Nam, quòd A ex hypothesi ponatur maior, quàm C, erit ex propos. 8. maior proportio A ad B, quàm C ad B; & quia eadem est proportio B ad C, quàm E ad F, & ideo ex Coroll. propos. 4. C ad B, quam F ad E; dicet quoque A ad B maiorem proportionem, quàm F ad E. Sed A ad B est eadem proportio, quam D ad E ex hyp. Ergo D quoque dicet maiorem proportionem ad E, quàm F ad E: Ergo ex prop. 10. erit maior D, quam F.



Probatur secunda pars: Nempe, si sit æqualis prima A tertiæ B prioris ternarij; quòd etiam talis sit posterioris ternarij prima D ad tertiam F, hoc est æqualem, eodem argumento.

Quoniam sunt æquales A, & C, ex 7. huius A antecedens ad sequentem primi ternarij B erit, vt sequens, & tertia C ad ipsam mediam B: sed, vt hæc media B est ad vltimam, & tertiam C; sic est media alterius ternarij E ad suam extremam F, & è contrà ex Coroll. propos. 4. huius, nempe vt C ad B, sic F ad E; Sed dictum est, quòd C ad B, est vt A prima ad B mediam, & ex hypothesi, vt A ad B; ita D posterioris ternarij ad E mediam; Ergo, vt D prima ad E mediam, ita F tertia ad E eandem mediam. Quare ex 9. propos. erit D æqualis ipsi F, quod erat probandum.

Probatur quoque tertia pars, eodem argumento, quo pars prima, nempe si sit minor A, quàm C, futuram esse quoque minorem D, quàm F.

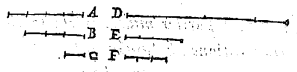
THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XV. Eucl. 23.

Si sint tres magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero, quæ binæ, & in eadem ratione sumantur; fuerit verò perturbata earum proportio; ex æquo autem prima tertiâ maior fuerit, erit quarta maior, quàm sexta; Si æqualis prima tertiæ, etiam quarta sextæ erit æqualis; sin illâ minor, & hæc minor erit.

SIt ternarium linearum A, B, C, & aliud ternarium D, E, F; Quarum proportio sit perturbata vltimum relatio, & proportio, quæ intercedit inter primam A, & secundam B prioris ternarij imitetur proportionem, quæ est in posteriori secundæ E ad tertiam F. Quæ verò proportio reperitur inter secundam B, & tertiam C prioris ternarij similis sit proportioni, quam habet D primò posita ad secundam E.

Dico; quòd, si in priori ternario prima maior erit, quàm tertia; etiam in posteriori prima, quã Euclides vocat quartam, maior erit, quàm tertia, quam vocat sextam.



Probatur hæc prima pars: Quoniam maior ponitur A prima, quàm C tertia: Ergo maior erit proportio primæ A ad mediam B, quàm tertiæ C ad eandem mediam B; Sed in eadem proportione reperitur B ad C, in qua D ad E, & ideo ex Coroll. propos. 4. C ad B, quàm E ad D. Ergo maior proportio A ad B, quàm E ad D: vt erat maior quã C ad B. Rursus eadem proportio reperitur A ad B, quã E ad F. Ergo est maior proportio E ad F; quàm E ad D. Igitur ex prp. 10. D erit maior, quã F.

Probatur secunda pars de æqualitate; nempe; si A ponatur æqualis ipsi C, quòd D erit æqualis ipsi F.

Quoniam A, & C sunt æquales: Ergo ex prop. 7. eandem rationem habent A, & C ad B; sed ratio, quã B respicit C, est eadem, quã D respicit E; & ex Coroll. 4. eadem quoque ratio est C ad B, quàm E ad D; Igitur eadem ratione A refertur ad B, quã E ad D: Sed rursus A proportionem dicit ad B, vt E ad F. Ergo E refertur ad D eadem proportione, ac ad F: Ergo F, & D erunt æquales, ex propos 9. huius.

Probatur quoque tertia pars eodem prorsus argumento, quo prima pars ostensa est; Quod scilicet posito A minori, quàm C in priori ternario, minor quoque in posteriori sit D, quàm F. Quia enim minor est A, quàm C dicet minorem proportionem ad B, quàm C ex 8. propos. Sed A ad B est, vt E ad F: Ergo E ad F dicet minorem proportionem, quàm C ad B. Sed vt est B ad C, ita est D ad E, & ex Corollprop. 4. C ad B, vt E ad D: Quare erit minor proportio E ad F, quàm E ad D; vnde D erit minor, quàm F.

EXPENSIO IV.

De modis argumentandi; seu similitudine proportionum.

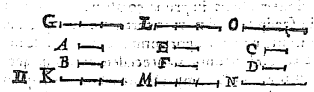
HVcusque comparauimus quantitates secundùm, quòd, aut maiorem, aut minorem proportionem dicebant, & semper dissimilem, & fundamenta proiecimus, quibus modos supra descriptos argumentandi in proportionibus ostendamus optimos, & euidentes: Nunc ad ipsas ostensiones horum modorum animus deleganduS.

Obseruandum est. *Conuersionem rationis*, Iam supra Coroll. 4. propos. fuisse ostensam; Nam fuit demonstratum; quòd si sint duæ combinationes quantitatum, in quarum prima sit A ad B, vt in secunda C ad D, quòd etiam è conuersò erit B ad A, vt D ad C. Vnde licebit arguere: si est A ad B, vt C ad D; erit etiam D ad C, vt B ad A conuertendo. Hic itaque alij modi erunt ostendendi,

THEOR. I. PROPOS. XVI. Eucl. 11.

Quæ eidem rationi sunt æedem rationes, & inter se sunt æedem rationes.

SInt proportionales inuicem quantitates A B in prima combinatione, & quantitates E F in secunda. Istisque quantitatibus E F sint item proportionales quantitates tertiæ combinationis C, D, ita vt similitudo proportionum; quæ est inter combinationes primam, & secundam non sit diuersa, sed eadem; quæ est inter proportiones secundæ, & tertiæ combinationis. Dicit propositio; quòd hæ proportiones quantitatum primæ combinationis sint similes proportionibus ter-



tiæ combinationis, & ponitur vniuersale fundamentum, & generale arguendi in proportionibus; siquidem omne efficax argumentum fundatur in hoc, vt proportiones sint similes alicui tertiæ proportioni, ex quo deducitur esse similes inuicem.

Ad id ergo probandum assumantur alia paria combinationum singulis istis combinationibus multiplicium, ita, vt multiplices fundamentorum æquali vicium numero constent; Terminorum quoque licet non cum primis, inuicem tamen sint æquè multiplices, itaque Fundamentorum, seu antecedentium A, E, C, sint æquè multiplices G, L, O, Terminorum verò sint æquè multiplices K, M, N.

Prob. Cum ponamus primam combinationem A, & B dicere proportionem eandem secundæ cõbinationis quantitatibus E, & F: Ergo ex defin. 9. Crescente multiplici aliqua G in omni multiplicatione ipsius fundamenti A super aliam correspondentem multiplicem K termini B, vel decre-

scente

scente, vel illi se æquante, crescet decrescet, æquabitur simul, & altera fundamenti E multiplex f super suam correspondentem M termini F.

Verùm, quia ponitur quoque eadem proportio inter quantitates tertiæ combinationis, & secundæ; estque E, ad F, vt C ad D, multiplices fundamentorum crescent, decrescent, æquabuntur pariter respectu multiplicium terminorum, & L, V. g. superante multiplicem M, superabit quoque O multiplicem suam N, vel hæc æquabitur, illâ se æquante, vel deficiet illâ deficiente.

Itaque multiplices G, O fundamentorum A, & C combinationum extremarum concordabunt simul in crescendo, decrescendo, & se æquando respectu multiplicium K, N terminorum B, & D: dum concordant in eodem cremento, decremento, & æquatione cum media L multiplici fundamenti E, respectu multiplicis M sui termini F.

Itque, cùm A, & C fundamenta habeant suas multiplices O, & L respectu multiplicium K, & N terminorum suorum B, & D crescentes simul, simulque decrescentes, & simul se æquantes, habebunt fundamenta ad suos terminos similem proportionem, & A erit ad B, vt C ad D.

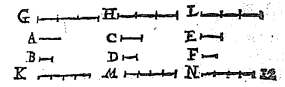
THEOR. II. PROPOS. XVII. Euc. 12.

Si sint magnitudines quotcumque proportionales; quemadmodum se habuerit vna antecedentium ad vnam consequentium; ita se habebunt omnes antecedentes ad omnes consequentes.

IN prima huius demonstratione hoc Theorema ostenditur in proportione multiplici; Modo verò hic ostenditur in proportione quacumque etiam irrationali. Dicitur itaque, quòd si dentur tres combinationes, aut etiam plures; quarũ antecedens ad sequentes suas, fundamẽtaq; proportionum terminis eandem obtineant proportionem, & sit in prima combinatione A ad B, vt in secunda C ad D, vt in tertia E ad F, quæ omnes similitudine proportionum correspondeant. Dicit, quòd, si omnes antecedentes simul accipiantur A, C, E, & comparentur ad omnes sequentes simul B, D, F, omnes antecedentes, ad omnes sequentes simili proportione correspondebunt, vt aliqua antecedens, ex ipsis V. g. C ad suam sequentem D proportionatur.

Prob. Nam acceptis æquè multiplicibus G, H, L ad omnes antecedentes A, C, E, erunt omnes simul æquè multiplices ad omnes antecedentes A, C, E, simul sumptas vt vna scilicet G vni earum A ex prima propos. huius. Acceptis quoque æquè multiplicibus K, M, N, sequentium B, D, F, erunt omnes multiplices simul collectæ K, M, N, ad omnes sequentes B, D F item simul sumptas, vt vna multiplex K ad vnam suã sequentem B. Sed, & antecedentes singulæ proportionẽ consequuntur eandem ad suas sequentes ex hypothesi. Ergo ex defin. 9. part. pr. huius æquabitur simul, decrescet crescetque multiplex vnius antecedentis A respectu multiplicis suæ, sequentis B cum multiplices omnes G, H, L, omnium antecedentium A, C, E, in omni multiplicatione consimili gradu, vel decrescunt, vel crescunt, vel æquantur respectu multiplicium K, M, N, simul suarum sequentium B, D, F.

Si itaque omnes multiplices G, H, L, omnium antecedentium A, C, E, relatæ ad multiplices omnes K, M, N, omnium sequentium B, D, F, crescunt, decrescunt, æquantur quemadmodum vna V. g. G relata ad suã correspondentem K. Igitur ex definitione 9. omnes antecedentes A, C, E, simul iunctæ ad omnes sequentes B, D, F, simul vnitas dicent proportionem eandem, veluti vna antecedens, nempe A ad suam sequentem B comparata. Quod erat probandum.

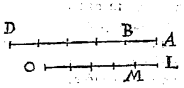


Hic ostenditur modus argumentandi, quem addidimus, primus; cum enumeratis multis combinationibus, quæ eandem proportionem habeant, ex inde arguitur omnia fundamenta esse ad omnes terminos, vt vnum fundamentum ad suum terminum: & est Enthimemma, quod alia probatione non indiget, cùm remaneat hic probatum, & reducatur ad prima principia, & totalem euidentiam, vt patet.

THEOR. III. PROPOS. XVIII. Euc. 15.

Partes cum pariter multiplicibus in eadem sunt ratione, sumantur pro vt inuicem respondent.

SInt suarum partium A B, & L M, æquè multiplices lineæ A D, & L O dicit singulas esse proportionales; inuicem. Si ita sumantur prout correspondent, nempe si referatur pars ad partem, ita totum, ad totum.



Probatur. Nam singulę partes lineæ A D sunt æquales inuicem; Ergo ex 7. propos. omnes ad vnam earum V. g. ad A B eandem habent rationem, sic, & in linea L O omnes, cum sint æquales, ad vnam eandem earum V. g. ad L M habent eandem rationem.

Igitur, vt se habet vna antecedentium A B ad vnam consequentiũ L M V. g. ita se habebunt omnes simul antecedentes, ideſt tota linea A D ad omnes consequentes, nimirum L O, ex pr. 17.

THEOR. IV. PROP. XIX. Euc. 16.

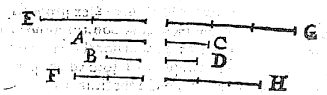
Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & vicissim proportionales erunt.

HIc demonstratur alterna, seu permutata proportio, quæ tradita est def. 16. Si namque sint duæ combinationes, quarum in vna antecedens A ad sequentem B eam proportionem dicat, quam in secunda combinatione antecedens C dicit ad D.

Dico quoque eam proportionem dicere ambo antecedentes inuicem A, & C, quam sequentes inuicem dicũt B, & D, quod tamen intelligendum, quũ proportiones sunt in eodẽ genere, vt patebit.

Ad

Ad id vero probandum in prima combinatione antecedenti A, & sequenti B sumantur multiplices E F, quæ complectantur numerum partium equalem, & idem fiat in secunda combinatione assumendo multiplices G, & H, quæ licet non cum primis, adhuc tamen saltem inuicem partes equalis numeri habeant.



Probatur. Nam antecedẽtium multiplices E, & G crescent, æquantur, decrescunt, vt sequentium multiplices F, & H. Ergo ipse inuicem antecedentes A, & C proportionem dicunt eam, quam consequentes B, & D. Probatur, quod crescant, decrescant, æquntur multiplices antecedentium, vt multiplices sequentium ex defin. 9. quia dicunt inuicem proportionem. Quòd verò dicant proportionem patet; quia eidem dicunt proportionem: nam ex propos. præced. ita proportionatur multiplex E multiplici F sequentis, sicut antecedens A proportionata est ad sequentem B; sed præsupponitur quod antecedens A ad sequentem B in prima combinatione dicant eam proportionem, quam antecedens secundæ combinationis C dicit ad D. Ergo, & multiplex E antecedentis proportionem dicit cum F multiplice sequentis, vt antecedens C secundæ combinationis ad sequentem D.

Sed idem quoque ex præmissa propos. de multiplici C respectu suæ antecedentis C, & de multiplici H respectu suæ sequentis D, in secunda combinatione asserendum nempe, quòd dicant eam proportionem, quę reperitur inter antecedentem C, & sequentem D huius ipsius secundæ combinationis. Ergo multiplices in prima combinatione inuicem, & multiplices secundæ combinationis Inuicem eam proportionem dicunt, quam antecedens C, & sequens D. Quare dicent, ex 16. huius eandem proportionem inter se duę B ad F, vt duæ G ad H: Æquabuntur, itaque crescent, & decrescent æqualiter ex 12. propos. huius in omni multiplicatione. Vnde, & quantitates, quibus sunt multiplices, nimirum antecedentes A ad C, & sequentes B ad D inuicem dicent eandem proportionem ex defin. 9. part. primæ.

COROLLARIVM I.

VNde colligas posse mutari rationem alternè, solum in proportionibus eiusdem generis, quia si essent diuersi generis non possent dici, multiplices primæ combinationis, & secundę vnquam æquari, vel esse maiores, vel minores; quia quantitates diuersi generis sicut æqualitatem non habent, ita nec possunt dici maiores, vel minores.

COROLLARIVM II.

HInc, & ex propos. 17. illum modum, quem assignauimus supernumerarium, & definit. 20. appellauimus Collectionem probare possumus. Nam dispositis terminis.

2 3 4
6 9 12

Ita vt sit 2. ad 3. vt 6. ad 9. & 3. ad 4. vt 9. ad 12. erit etiam permutando 2. ad 6. vt 3. ad 9. & 3. ad 9. vt 4. ad 12. Quamobrem ex propos. 17. poterimus colligere omnia fundamenta simul in hac proportione permutata 2. 3. 4. nempe 9. comparando ad omnes terminos simul 6. 9. 12. scilicet 27. & dicere, quòd, ità sit 2. ad 6. vt 9. ad 27. nempe vt fundamentum aliquod 2. ad suum terminum 6. ita omnia fundamenta 9. ad omnes terminos scilicet 27.

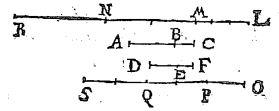
PROB. V. PROPOS. XX. Euc. 17.

Si Cõpositæ magnitudines proportionales fuerint, hæ quoq; diuisæ proportionales erunt.

DEmonstratur his modus argumentandi, in proportionibus, qui dicitur diuisio rationis. Namque si tota magnitudo A C, sit proportionata ad suam partem B A, veluti tota D F ad suam partem E D.

Dicit quoq; diuisas eandem seruare rationem, & adhuc esse, vt pars A B ad eiusdem partem alteram B C, ita pars D E ad eiusdem totius partem alteram E F.

Quod vt probetur assumendę sunt duarum partium A B, & B C æquè inuicem multiplices, quæ erunt L M, & M N. Deinde duarum partium alterius quantitatis D E, & E F æquè multiplices inuicẽ, & cũ *primis* O P, & P Q. Vbi considerandũ est, ex prima prop. huius, quòd istæ multiplices partium simul positæ, vt O Q, & L N, sunt quoque æquè multiplices totorũ A C, & D F: Quo notato, rursus accipiantur æquè multiplices partiũ A B, & D E, & addantur primis ipsarum met assumptis multiplicibus simulq; posite ex secunda prop. huius erunt adhuc æquè multiplices, nimirum M N R. quantitati A B, & P Q S, quantitati D E.



Quoniam N M prima in priori serie ex multiplex secundæ A B, vt in posteriori Q P est multiplex secundæ D E: & N R. tertia prioris seriei, ita est multiplex suæ secundæ A B, vt tertia Q S in posteriori serie est multiplex suę secundę D E; ideo, vt ibi docetur, simul compositæ prima, tertiaque M R. erit etiam ita multiplex secundæ A B prioris seriei, & posterioris prima cum tertia P S suæ secundæ D E.

Quo posito, Assumantur pro prima combinatione totæ quantitates A C, & D F, quæ vt supponitur dicunt similem proportionem cum suis partibus B A, & D E, quę pro secunda combinatione assumendæ sunt, & ita sit A C tota ad A B partem, vt D F tota ad D E partem; quare earum multiplices simul, æquantur, crescunt simul, atque decrescunt in omni multiplicatione ex 9. defin. nimirũ L N & O Q totorum, & fundamentorum respectu M N R, & P Q S, quæ sunt multiplices partium, & terminorum, sed compositæ, vt diximus. Ablatis itaque partibus istis, ex quibus componuntur ab æquè multiplicibus M N hinc & P Q, inde, quæ sunt communes, tum multiplicibus totorum, tum multiplicibus partium; cùm crescunt, crescent

adhuc

adhuc, cùm deficiunt, deficient quoque, cùm æquantur, similiter equabuntur remanentes multiplices binæ LM, & OP residuæ totorum, respectu quantitatum similiter residuarum partium RN, & QS. Sed hæ remanentes sunt etiam multiplices partium nimirum LM partis CB, & PO partis FE ex hypothesi, in prima combinatione; At in secunda RN ex ostens. est multiplex partis AB, & SQ partis ED. Ergo partes AB ad BC inuicem proportionem dicunt vt DE ad EF, ex 9. defin. cùm earum æquè multiplices simul crescant, decrescant, & æquantur iuxta quamlibet multiplicationem antecedentiũ respectu consequentium.

COROLLARIVM.

COllige hinc posse argumentari, quòd, si pars ad totum proportionem dicit, vt alia pars ad suum totum, etiã pars ad partem, vt altera pars ad alteram partem dicat proportionem, tam rectè, quam conuersè argumentando; nimirum ne dum rectè dicendo, vt AC ad AB, ita DF ad DE: Ergo vt AB ad BC, ita DE ad EF; sed etiam conuersè, ergo, vt CB ad AB ita EF ad DE.

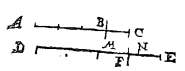
COROLLARIVM.

DEducitur secundò, nihil interesse, quod sumantur pro prima combinatione, partes maiores, aut minores; quia æquo modo valet argumentum, vt patet Nec quòd assumantur priùs maiores partes; vt totis proportionales, ex quo arguatur; quod etiam partes eædem maiores sint residuis partibus proportionales, vt si dicatur vt AB, ad AC; ita DE ad DF. Ergo vt AB ad BC; ita DE ad EF.

THEOR. VI. PROPOS. XXI. Euc. 18.

Si diuisæ magnitudines sint proportionales; hæ quoque compositæ erunt proportionales.

HÆc propositio demonstrat illum modum argumentandi in proportionibus esse bonum, quo deducitur vt definitione 24. quòd, si diuisæ magnitudines sint proportionales, coniũctas quoque eandem proportionem seruare, qui modus arguendi apellatur *Compositio rationis*. Si dentur itaque diuisæ magnitudines; nimirum AB, & BC proportionales; vt sunt DF ad FE.



Dicit compositas quoq; esse simili proportione correspondentes, & totum AC, ad partem BC referri, vt totum DE ad partem FE.

Probatur. Si enim totum AC non est proportionatum parti suæ BC; vt alterum totum DE suæ parti FE; erit saltem in aliquo toto eorum aliqua pars, cui correspondeat totum suum, vt parti suæ alterum totum refertur.

Assignetur itaque, & sit in linea DE pars N *minor*; Sitque iuxta aduersarios AC totum ad BC partem, vt DE totum ad NE partem, quò posito sequitur absurdum tali modo.

Si enim est, vt AC totum ad BC partem, ita DE totum ad NE partem: Erit quoque diuidendo AB pars ad BC partem ex præced. vt AN pars ad NE partem: sed ex hypothesi, vt est AB pars ad BC partem, sic quoque est DF pars ad FE partem: Ergo ex 16. propos. huius pars DN ad partem NE assignatam obtinebit eandem proportionem, quã pars DF ad partem FE primo positam; quòd earum proportiones sint similes tertiæ proportioni; nimirum AB ad BC. Sed antecedens DN ponitur maior, quàm antecedens DF; ergo etiam sequens NE erit maior sequente FE ex propos. 13. hoc autem absurdum est, quia ponitur minor ab aduersarijs. Quod si pars EM maior statuatur ipsâ FE, & velint aduersarii, quòd ED totũ ad ME partẽ, sit in eadẽ proportione, quã reperitur AC totum ad BC partem, incidimus adhuc in idẽ absurdum: Nam tunc erit minor ME, quam EF, quæ ME est assignata ab ipsis maior.

Et probatur simili argumẽto. Quoniam enim ex aduersarijs est AC totum ab BC partem; sic DE totum ad ME partem; poterimus diuidere ex anteced. & asserere, quòd AB pars sit ad BC partem, sic DM pars ad ME partem. Verum etiam pars DF est ad partem FE, vt pars AB ad partem BC ex hypothesi: qua de ré DM simili proportione consentiet ad ME: ac DF ad FE; quòd eorũ proportiones tertiæ proportioni, quæ militat inter BA, BC sint similes; Sed antecedens DM ponitur minor, quàm antecedens DF: Ergo etiam, & consequens ME minor esset sequente FE, & tamen maior EM ab aduersarijs constituta est quàm EF.

COROLLARIVM I.

Collige, quòd nihil interest, an arguas priùs conuertendo terminos, & vtendo conuersione, V. g. dicendo; si proportionem dicit AB ad sequẽtem partem in prima combinatione BC, quam dicit DF antecedens in secunda combinatione ad suã sequentem FE, igitur conuertendo terminos erit sequens BC ad suam antecedentem AB in prima cõbinatione, vt sequens FE ad antecedentem secundæ combinationis DF. Deinde sequatur ex arguendo compositione rationis; Ergo 5. & erit tota AC antecedens ad sequentem AB suam partem vt est antecedens DE tota ad sequentem DE suam partem. Imo possum; & adhuc contrario modo sumere terminos, & arguere sequentem quoque, quæ est pars AB se habere ad totam AC antecedentem, vt pars DF sequens ad antecedentem totam DE.

COROLLARIVM II.

COllige hinc illum modum argumentandi in proportionibus cõfirmari; quò arguitur ex proportionis similitudine, quam habet prior linea AB cùm sua parte BC, comparata proportioni, quam habet tota posterior linea DE, cum sua parte FE, quod etiã tota prior AB ad suam reliquam partem AB simili proportione referatur, quam tota posterior DE ad suam reliquam partem DF. Quod ergo iste modus argumentandi bonus sit.

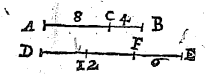
Probatur. Nam cùm tota prior, AC se habeat ad suam partem BC, vt posterior DE tota ad suam partem EF, poterit quoque argumentari *diuidendo* ex 20. huius, & assumendo residua pro totis, quare reliqua pars AB, in priori linea erit ad ablatam CB; quo pacto est DF reliquũ in posteriori linea ad ablatam FE: Quamobrem, & poterimus conuertere propositionem, & é contra dicere, quod ablata CB in priori linea ad residuum AB est, sicut

sicut ablata EF ad residuum DF. Iterumque Componendo ex propos. 21. huius, quòd sicut se habet tota AC prior ad suã partẽ residuã AB, ita se habeat tota DE posterior ad DF suam residuam partem.

THEOR. VII. PROP. XXII. Eucl. 19.

Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum ad ablatum; & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit.

SVpra id quoque ostensum est ab Eucl. in proportione multiplici, vt quid facilius, licet demonstratio ab illa nullo pacto dependeat, cùm tamen à multis antecedentibus, vel mediatè, vel immediatè dependentiam obtineat. Hic itaque generaliter ostendit, & dilatat propositionem etiam ad proportiones irrationales. Si itaque reperiatur aliqua quantitas AB, quæ tota ad aliam DE similis in proportione sit, vt eius aliqua pars BC, est proportionata alterius parti EF. Dicit quoque reliquum AC ad reliquum DF similem proportionem consequi.



Probatur. Nam ex propos. 16. si in prima cõbinatione tota antecedens prior linea AB ad sequentem posteriorem totam DE, vt pars à priori linea BC antecedens in secunda combinatione ad sequentem EF partem ablatam alterius posterioris, licebit permutare terminos; & affirmare ex propos. 19. *permutando*; Antecedentem quoque totam AB ad antecedentem BC, quæ est sua ablata pars, dicere eam proportionem, quam sequens tota DE dicit ad sequentem EF, quæ est sua à se ablata pars. Iterumque ex propos. 20. poterimus arguere *diuidendo*, & dicere; Quod si eandem proportionẽ, quam dicit tota antecedens AB, in priori linea ad antecedentem BC, quę est ablata sibi pars, dicit quoque tota sequens DE in posteriori linea ad ablatam sui partem EF; Quod etiam reliqua pars AC prioris lineæ ad BC residuum in eadem proportione sint; quam posterior DF ad posteriorem FE dicebat: Quare rursus *permutando* erit, vt AC fundamentum ad DF fundamentum, vt terminus BC ad terminum FE: hoc est, vt tota AB ad totam DE, quæ ex hypoth. vt BC ad EF comparatur.

COROLLARIVM

HInc apparet propositionem 13. esse intelligendam vniuersaliter; cùm vniuersaliter sit verum, quòd, si sit totum ad totum, vt ablatum ad ablatum; etiam reliquum ad reliquum, ita erit vt totum ad totum; & ideo, quòd, cum sit AC maior, quam EG, quod etiam sit residuum BC maius quam FG adhibita figur. propos. illius.

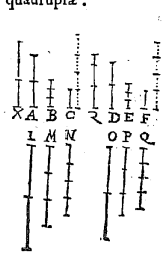
THEOR. VIII. PROPOS. XXIII. Euc. 22.

Si sint quotcumque magnitudines, & aliæ ipsis æquales numero; quæ binæ in eadem ratione sumantur; etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonstrauit superius Euclides in propos. 14. quòd binæ sumptæ in eadem ratione quantitates essent, vel æquales, vel minores, vel maiores alijs quantitatibus sumptis, vt binæ pariter secundum proportionem similem ad primas: nunc demonstrat esse etiam proportionales, ex quo desumitur modus argumẽtandi ex Æqualitate vocatus.

Sint itaque magnitudines ABC, & aliæ tres DEF. Sitque prima, & antecedens A ad suam secundam, & sequentem B, in priori ternario, vt in posteriori prima D, & antecedens est ad secundam, & sequentem E. Sit quoque B modo, vt antecedens posita ad tertiam C suam sequentem in priori ternario, vt in posteriori secunda E sumpta, vt antecedens, est ad tertiam F sequentem suam. Dicit *ex æqualitate primã A ad tertiam* C in priori ternario *ita referri*, vt in posteriori *prima D ad tertiam* F intermissis medijs terminis B, & E.

Quod, vt ostendatur, accipit singulis quantitatibus prioris ternarij singulas lineas L, M, N, quarum quæliber, ita multiplex suæ cuique lineæ assumantur, vt assumuntur in posteriori ternario multiplices O, P, Q, correspondentibus lineis; Lineæ itaque L, & O, sint æquè multiplices primarum A, & D, V. g. duplæ: M verò, & P sint æquæ multiplices secundarum B, & E, V. g. triplæ: NQ tandem sint æquè multiplices tertiarum V. g. quadruplæ.



Probatur. Nam tum in priori, tum in posteriori ternario primarũ multiplices L, O, relatæ ad tertiarum multiplices N, & Q crescunt decrescunt pariter ad quãcumque multiplicationem, vel etiam eis æquãtur. Ergo primæ A, & D quibus sunt multiplices ex 9. definitione in eadem proportione erunt respectu tertiarum C, & F.

Remanet antec. probanda. Probatur autem ex 14. propositione huius. Nam multiplices binæ in eadem proportione sumuntur, ita, vt in priori ternario multiplicium, ita respiciat prima multiplex L secundam suam M, sicut in posteriori multiplicium ternario prima multiplex O, respicit suã multiplicẽ P, & idẽ dicas de secunda multiplici M relata ad multiplicem tertiã N, quæ ita se habet ad eam, vt in posteriori ternario multiplicium secunda P ad suam tertiam Q comparata.

Ratio huius ex propos. 4. huius desumitur. Quòd multiplices antecedentes ad sequentes suas eam habeant proportionem, quam habent simplices antecedentes, quibus multiplices sunt ad suas sequentes simplices. Quare, cùm antecedens A ad sequentem B in priori simplicium linearum ter-

nario sit, vt in poste riori antecedens D ad sequentem E ex hypothesi, sequitur, vt tali quoque proportionis similitudine afficiantur earum multiplices ita, vt sit L ad M, vt O ad P. Rursus cum pariter ex hypothesi B ad C prioris ternarij sit, vt E ad F; quod earum multiplices quoque in proportione similitudinem dicant ita, vt sit M ad N, vt P ad Q. Cum itaque ita sit L ad M, vt O ad P; & M ad N, vt P ad Q erit perpetuus nexus, & simultas ex propos. 14. huius L, & O in crementa decrementa, & æquatione respectu extremarum N, & Q. Quare ex defin. 9. simplices eandem dicent proportionem, & A erit ad C, vt D ad F.

COROLLARIVM I.

QVòd si sint, seu maiores, seu minores eodem pacto probatur V.g. ponamus in priori ternario adesse X, quæ se habeat ad A, vt in posteriori Z ad D, erit quoque ex eodem argumento X sumpta vt prima ad B quæ tunc erit tertia, vt in posteriori Z prima habet ad E, quæ tunc erit tertia, & eodem modo de alijs quibuscumque, vel antecedentibus, vel sequentibus ostendetur.

COROLLARIVM II.

COlligitur secundo esse bonum illum modum arguendi, quo deducitur; quòd ex eo, quia proportionem similem habeant B ad C, vt E ad F, quod etiam similem proportionem linea B ad lineam punctatam ipsâ C quadruplo, vel vt libet maiorem habebit, ac altera D ad lineam punctatam, quadruplo, vel vt libet equè maiorem, Maiores enim istæ, cùm sint in proportione multiplici eâdem, possunt sumi, vt tertiæ; vnde ex æqualitatis argumentatione licebit inferre earum proportionem, cùm primis, & dicere: ex eo, quod C sit ad B, vt F ad E, multiplicem quoque C esse ad B, vt multiplex ipsius F ad E.

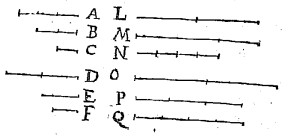
THEOR. IX. PROP. XXIV. Euc. 23.

Si sint tres magnitudines, altæque ipsis æquales numero, quæ binæ in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

DEmonstratur hic argumentationem ex æqualitate esse bonam, etiamsi proportio fuerit perturbata: Sit ergo ternarium prius linearum A B C, & aliud posterius D E F, in quorum priori proportio primæ A ad secundam B assimiletur proportioni, quam habet secunda E in posteriori ternario ad tertiam F, at quàm proportionem habet prima D huius posterioris ternarij ad secundam suam E; habeat quoque secunda B prioris ternarij ad tertiam C. Dicit; *quòd prima A ita proportione referetur ad tertiam C in priori ternario; sicut in posteriori: prima D ad tertiam F referetur.*

Quòd vt probet, assumit æquè multiplices in singulis ternarijs ita, vt primæ A, & D æquè multiplices habeant L, & O, V. g. duplas; secundæ verò B, & E æquè multiplices obtineant V. g. triplas M, & P: At tertiæ C, & F æquè multiplices nanciscantur N, & Q, V. g. quadruplas.

Probatur ternarium multiplicium cum alio multiplicium ternario in ratione perturbata conuenit; ita vt prioris prima L ad secundam M referatur similiter, ac in secunda P ad tertiam Q in posteriori ternario: huius vero prima O ad secundam P referatur, vt in priori secunda M ad tertiã N.



Sed iam probatum est 15. propos. huius, quòd in ratione perturbata primæ V.g. O, & L crescunt decrescunt æquantur simul, & vnâ in qualibet multiplicatione & respectu quantitatum N, & Q, inuicem in crescendo, & decrescendo, vel se æquando semper indiuisibiles comites eodem modo se gerunt.

Ergo lineæ simplices nimirum A prima dicet eam proportionem cum tertia C in priori ternario; qualem dicit prima D ad vltimam F in posteriori.

Probandum remanet itaque, quod multiplices tum huius, tum alterius ternarij in ratione perturbata conueniant, ex propos. 18. quia partes cum pariter multiplicibus in eâdem ratione sunt, si sumantur prout inuicem respondent: Cum igitur simplices sint partes multiplicium, quòd earum partibus sint æquales, patet, quòd si simplices in ratione perturbata sibi correspondent, eodem pacto, & multiplices sibi correspondebunt in eadem ratione perturbata: Vnde ita L erit ad M, sicut P ad Q, & O ad P, vt M ad N.

THEOR. X. PROPOS. XXV. Euc. 24.

Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: habuerit autem, & quinta, ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam, eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.

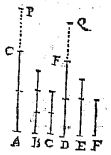
QVod demonstratum est 2. propos. de proportione multiplici, modò hic de omni proportione etiam irrationali ostenditur.

Si sint tres magnitudines in priori ternario, quarum prima A ad mediam B eam dicat rationem, quam in posteriori prima D ad secundam E, & rursus ad has medias nimirum ad B in priori ternario tertia C eam proportionem dicat, quam in posteriori tertia F ad mediam E habet: Affirmat *compositas quoque primam* A, *& tertiam* C, quod in punctatis expressum est prioris ternarij simili proportione respicere B, sicut compositas primam D & tertiam F posterioris ternarij ipsam E.

Probatur itaque obseruando prius; quòd cùm tertia dicat proportionem ad secundam tum in vno, tum in alio ternario ex hypothesi, *conuersè* arguendo etiam media in quolibet eorũ erit proportionalis tertię, ita vt B sit ad C eodem modo,

ac

E est ad F: quia ex hypothesi C est ad B, quemmodum E est ad F.



Quo supposito, iam possumus arguere ex æqualitate secundùm documenta propos. 23. quia habemus binas in vnoquoque ternario, tum priori, tum posteriori sibi proportione simili respondentes; namque ita est A ad B in priori ternario, vt D est ad E in posteriori, & ita B est ad C in priori, sicut E est ad F in posteriori.

Ergo ex *æqualitate*, ita prima A in priori ternario proportionabitur ad tertiam C, vt in posteriori prima D proportionatur tertiæ F. Et iam poteris arguere *componendo* ex documentis prop. 21. & addendo A primæ lineæ C, quod per punctatam exprimitur, dicere quod tota AP nimirum continua, & C punctata, ad C dicat similem proportionem; vt dicit tota DQ nimirũ continua cum F punctata ad F.

At ad hoc, vt tandem deueniamus ad conclusionem oportet constituere aliam argumentationem ex æqualitate. Iam enim habemus ex dictis vsque adhuc A primam cum C punctata 5. AP proportionatam ad C sicut prima D Q proportionatur ad F; Sed ex hypothesi quoque C est ad B proportionata, vt est F ad E. Ergo ita erit ex æqualitate tota AP, nimirum continua AC cum C P punctata ad B; vt est proportionata tota DQ, nimirum continua D F cum F Q punctata ad E.

COROLLARIVM

COlligit hic Clauius; quod hoc modo argumentandi, quo vsi sumus posse, & demonstrari, id quod ostensum est propos. 6. de proportione multiplici conuenire omni proportioni. Nimirum, quod si duæ magnitudines ad duas eandem habeant proportionem, & detractæ quædam habent ad easdem eandem proportionem, & reliquas, quę remanent, ad easdem eandem proportionem habituras. Nam positâ eadem figurâ assumes pro prima prioris ternarij totam AC cum punctata C P, & pro posterioris ternarij prima D F cũ punctata F Q. Si ergo auferatur C, & F, & ponantur rursus pro tertijs, ita quod ad secũdas suas B, & E eam habeant proportionem, quam habebant, quando erant coniunctæ. Reliquę AC, & D F ad easdem secundas B, & E eam proportionem habebunt, quam priùs habebant integræ ad B, & E. Pr. Nam C est ad B, vt F, ad E: Ergo conuertendo, vt fecimus priùs, B erit ad C, vt E ad F, Quare ex æqualitate tota A C P erit ad C, vt tota D F Q est ad F; Erga diuidendo ita est A C ad C, vt D F ad F; Et quia ex hypothesi ita est C ad B, vt F ad E; Ideo A C, & D F poterunt poni pro primis C, & F pro medijs, & B, & E pro tertijs, & ex æquali argumentari, ita esse A C ad B, vt D F ad E, quod est propositum.

TRACTATVS X.

IN VI. LIBRVM EVCLIDIS

De proportione quantitatis continuæ.

Isis proportionibus genericis ad particulares descendimus iuxta diuersitatem materiæ, quibus præcipuè applicantur; Nam alia est proportio numerorum, alia est quantitatis continuæ; Quantitatis verò continuæ duplex est, alia rationalis, alia irrationalis. Modò verò agimus de quantitatis continuæ proportione prout præscindit ab irrationali, seu rationali.

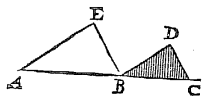
EXPENSIO I.

De principijs huic tractatui spectantibus.

PRincipia, quæ huic expensioni maximè deseruiunt sunt definitiones quædam figurarum, quę proportiones fundant.

DEFINITIO I.

Similes figuræ rectilineæ sunt, quæ & angulos singulos singulis æquales habent, atque etiam latera, quæ circa angulos æquales proportionalia.



Figuræ illæ similes dicuntur, quæ angulos æquales habent, vt sunt B niger angulo A, & D angulo E, & C angulo B albo, & latera proportionalia circa æquales angulos; ita vt sit trianguli nigri crus CD ad alterum BD eiusdem; Veluti crus BF albi ad crus AE eiusdem, quæ complectuntur angulum E album æqualem angulo D nigro, quem crura prædicta DC, & BD complectuntur, & sic de alijs cruribus. Quapropter quadratum, & figura altera parte longior non sunt similes figuræ; quia latera quadrati habent circa quemlibet angulum rectum proportionē æqualitatis; at figuræ alterā parte longioris proportionem inæqualitatis, licet alioquin, tum vnius, tum alterius figuræ, anguli sint æquales, vtpote recti. Vnde etiam constat omnes figuras, quæ rectilineæ sunt, æquilateræ, & æquiangulæ, & numero eodem, tum laterum, tum angulorum constant, esse inuicem similes, licet maximè sint inæquales.

DEFINITIO II.

Reliquæ figuræ sunt, cùm in vtraque figura antecedentes, & consequentes rationum termini sunt,

Ideſt, cùm in prima figura fuerit fundamentum proportionis, & in secunda terminus proportionis eiusdem: in eadem verò secundâ fundamentum reperiatur alterius proportionis correspondentis, & huius terminus in primâ, ita vt duarum proportionum similium nulla sit tota in vnica figura; sed fundamentum sit in vna terminus in alia: hæ dicuntur figuræ reciprocæ. Sic in fig. præced. si sit AE ad BD, vt BC ad BA dicerentur illa duo triangula figuræ reciprocę, quia AE est fundamentum vnius proportionis, & BA terminus alterius in triangulo albo, sic & BD est terminus primæ proportionis, & BC fundamentum secundę proportionis in triangulo nigro.

DEFINITIO III.

Secundum extremam, & mediam rationem recta linea secta esse dicitur, cùm vt tota ad maius segmentum, ita maius segmentum fuerit ad minus.

Si linea data AB, ita diuidatur in C, vt correspondeat eadem proportione simili tota ad maius segmentum AC, vt idem maius segmentum AC ad minus CB refertur; tunc dicitur secta in C extrema, & mediâ ratione.

A C B

DEFINITIO IV.

Altitudo cuiuslibet figuræ est, perpendicularis à vertice ad basim deducta.

Ptolomæus in libro de Analemmate inquit, Mensuram debere esse certam, & determinatam. Propterea, cùm omnes rectæ lineæ, quę à vertice alicuius figuræ ducuntur incertæ sint, & indeterminatæ, meritò sola perpendicularis rationem mensuræ sibi vendicat, & altitudinem cuiuslibet figuræ metitur; sic figuræ QCAP altitudo est PC cadens in latus QA. Potest tamen quodlibet aliud latus constitui pro basi, & linea perpendicularis à remotiori angulo deducta (acumen enim illius



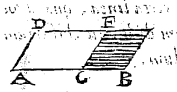
an-

anguli, vertex est) dicitur altitudo figuræ illius, sic VA in latus CQ demissa, erit altitudo quoque figuræ. Nota definitionē de compositione Rationum, quam ponit hic Euclides esse supra explicatam Tract. 9. Exp. 5. Def. 7. part. 1.

DEFINITIO V.

Parallelogrammum secundùm aliquam rectam lineam applicatum deficere dicitur parallelogrammo; quando non occupat totam lineam; Excedere verò quando occupat maiorem lineam, quam sit ea secundùm quam applicatur; ita tamen, vt parallelogrammum, quod deficit, vel excedit illi applicato eandem habeat altitudinem, quam ipsum parallelogrammum applicatum; & constituat cum eo totum vnum parallelogrammum.

Sit data rectà linea AB, super quam constituatur parallelogrammum ACDE, cuius latus AC totam longitudinem lineæ AB non æquet, sed desit CB; tunc parallelogrammum AE erit deficiens,



& si interrogetur, quo defectu? hic defectus erit parallelogrammum EB nigrum, occupans reliquū lineæ CB, & eandem altitudinem cum deficiente AE obtinens, & cum eo parallelogrammum vnicum, vt DB constituens. Deinde sit linea AC, & ei applicetur parallelogrāmū maius à D, quod ipsā excedat latere AB in parte CB; tunc parallelogrammum erit abundans, aut excedens. Excessus autem erit parallelogrammum nigrum EB habens eandem altitudinem, cum prædicto BD, & cum eo idem parallelogrammum constituens DB.

DEFINITIO VI.

Homologæ sunt quantitates, cùm, vna, fundamenta, & antecedentia proportionem, altera terminos continet, vel consequentes.

Cum itaque aliqua quantitas habet in se fundamenta, & antecedentia rationum; alia terminos correspondentes, ille quantitates dicentur homologæ.

V.g in fig. def. 1. Si sit crus AB albi ad crus BC alterius nigri, vt AE albi ad BD nigri; dicuntur triangula figuræ homologæ cum fundamenta ambo AB, & AE sint in albo, termini BC, & BD ambo in nigro.

EXPENSIO II.

De proportione laterum triangulorum.

CVm triangula principium figurarum sint, & ea ex quibus figuræ reliquæ constituuntur: Hinc est, quòd in primis de proportione laterum agatur, quæ ea ambiunt, atque constituunt.

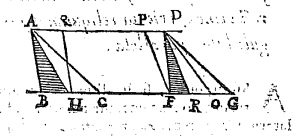
THEOR. I. PROPOS. I. Euc. 1.

Triangula, & parallelogramma, quorum eadem fuerit altitudo, ita se habent inter se, vt bases.

CVm triangula, & parallelogramma ex def. 4. habeant altitudinem eandem, cum fuerint constituta inter easdem parallelas, ob eandem perpendicularem, quam consequuntur. Constituantur primo duo triangula nigra inter parallelas AD, & BC. Dicit, quòd hæc triangula proportionem similem ad inuicem possident, quam bases.

Quod vt probetur in parallela, quâ bases insunt, assumendæ sunt basibus æquales, nimirum basi BH trianguli BHA vna æqualis, quæ sit HC, coniungendæque sunt C & A, fietque triangulum HAC æquale triangulo nigro sibi contermino ex 1. Coroll. propos. 39. primi.

Rursusque alteri basi FR trianguli nigri assumendæ sunt æquales, V. g. duæ RO, & OG, confungendæque sunt rectis OD, & DG; facientq; triangula ROD, & ODG ex Coroll. 2. prop. 40. primi æqualia nigro FDR.



Probatur. Bases triangulorum alborum æquales sunt basibus nigrorum triangulorum; ipsaq; triangula suis triangulis conterminis probatæ sunt ex Coroll. 1. propos. 40 primi æqualia: Ergo sunt æquè multiplicia basis, & triangulum album basi suæ conterminæ, & nigro triangulo BAH pro priori pari. Sicut triangula duo, dueq; eorum bases RO, & OG sunt æquè multiplices eiusdem basis FR, & trianguli nigri FDR pro secundo pari: nimirum bases quidem basibus multiplices, sicut triangula triangulis.

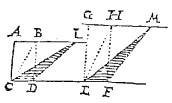
Cum ergo in quacunque multiplicatione basis BH, & triangulī BAH æquè multiplices in primo pari crescant, vel decrescant, vel æquentur pariter relatæ ad æquè inuicem multiplices basis FR, & trianguli nigri FDR in secundo pari; dicendum est ex defin. 9. tract 9. triangulum nigrum BAH ad nigrum FDR eam habere proportionem, quam habet basis BH ad basim FR, & ideo, quòd basium ad bases, & triangulorum ad triangula sit proportio similis.

Probatur quoque de parallelogrāmis. Partes cum pariter multiplicibus in eâdem sunt ratione ex 18. lib. 5. Sed triangula sunt dimidia parallelogrammorum ex propos. 39. primi: Ergo cum triangulis in eadem sunt ratione; Sed triangula in eadem sunt ratione, vt bases; Ergo, & parallelogramma. Et erit parallelogrammum BQ ad parallelogrammum RP, vt basis BH ad basim FR.

COROLLARIVM

COlligitur ex Commandino; quòd, si triangula habeant æqualem, vel eandem basim se habere ad inuicem, vt altitudines, V. g. triangulum CDL nigrum, & triangulum EMF nigrum erunt inuicem, vt altitudines, nempe perpendiculares

lares punctatæ BD, & HF; Namque, si trahatur EH, & CB erunt triangula punctata CED, & HEF, vt altitu lines BD, & HF pro basibus vsurpatę, siquidem erunt inter parallelas AC, & DB, & inter FH, & EG: Sed triangula punctata sunt æqualia nigris ex prop 39. I. Coroll. vtpote inter easdem parallelas, & super eandé basim constituta: Ergo nigra triangula in eadem proportione sunt, ac altitudines, & vt altitudo BD ad altitudinem FH, sic CDL ad EMF; quòd & dicendum est de parallelogrammis, cùm sint dupla triangulorum, prout in probatione propositionis dictum est.



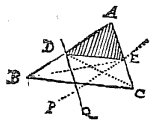
THEOR. II. PROPOS. II. Eucl. 2.

Si ad vnum trianguli latus parallela ducta fuerit recta quædam linea, hæc proportionaliter secabit ipsius trianguli latera: & si trianguli latera proportionaliter secta fuerint, quæ ad sectiones iuncta fuerit; recta linea, erit ad reliquum ipsius trianguli latus parallela.

ASserit; quòd, si in aliquo triangulo, vt in triangulo ABC ducatur parallela ad aliquod laterum V.g. DE, *hæc proportionaliter secabit crura reliqua* AB, & AC, & hoc pro prima parte.

Ad quod demonstrandum ducit lineas DC, & EB punctatas, quæ faciunt duo triangula minora super eandem basim DE constituta, & inter parallelas BC, & DE, nimirum triangulum DEB, & aliud DEC, quæ ex propos. 39. 1. Cor. 1. erunt æqualia.

Probatur triangulum nigrum est ad punctatum DEB, vt basis AD ad basim DB:



Rursus idem triangulum nigrum est ad aliud punctatum DEC in eadem proportione veluti est basis AE, ad basim EC ex prop. 1. huius.

Sed, vt triangulum nigrum se habet ad vnum ex triangulis punctatis V.g. BDE, ita se habet ad aliud DEC, ex propos. 7. quinti, cum vt dictum est hæc triangula sint æqualia; Ergo vt se habet basis tringuli nigri DA ad basim punctati DB; ita se habet eiusdem trianguli basis AE ad basim punctati EC. Quare crus AB est sectum proportionaliter in D eâ proportione, quâ sectum est crus AC proportionaliter in E.

Secunda verò pars conuertit priorem, & dicit, quod si trianguli latera ABC secta fuerint proportionaliter in D, & E *linea, quæ puncta coniunget erit parallella*.

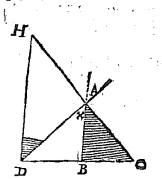
Probatur verò ex eò, quòd triangula DEC, & DEB sint æqualia; Ergo ex Coroll. 2. propos. 39. primi inter easdem parallelas DE, & BC sunt autem æqualia ex 9. quinti; quia eidem triangulo nigro sunt proportionalia. Sunt etiam proportionalia eidem nigro ex prima huius propos. quia habent bases eiusdé nigri, basibus similiter proportionales, & est DA ad DB, vt AE ad EC ex hyp. & insuper sunt inter easdem parallelas AB, & PE, & inter AC, & DQ; siquidem cum desinant in eundem verticem; etiam inter parallelas easdem erunt. Ergo vt basis DA ad basim DB; sic triangulum nigrum ad triangulum BDE: & vt AE ad EC bases; sic triangulum nigrum ad triangulum DEC: Ergo albi DEC, & BDE erunt inuicem æquales ex 9. quinti. Quare ex Coroll. 2. propos. 39. erunt inter parallelas.

THOR. III. PROPOS. III. Eucl. 3.

Si trianguli angulus bifariam sectus fuerit; secans autem angulum recta linea secuerit, & basim; basis segmenta eandem habebunt rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera.

Et si basis segmenta eandem habeant rationem, quam reliqua ipsius trianguli latera; recta linea, quæ à vertice ad sectionem deducitur, bifariam secat ipsum angulum.

SIt triangulum ADC; diuidaturque aliquis angulus eius V. g. A bifariam per rectam AB, affirmat primò, *quod hæc in* B *puncto secat basim* DC *in duas portiones, quæ inuicem ita proportionatæ sunt, vt sint connexa sibi crura*, V. g. ita est DB ad BC, vt DA ad AC. Quòd, vt probet, ad AB à puncto D ducit parallelam DH; deinde prolungat latus AC vsque quo coeat in H. Probat autem coituras has lineas, quia anguli niger, albusque simul ad D, æquales angulo B nigro ob parallelas ex prop. 30. & niger ad C ex Coroll. 6. prop. 17. sunt minores duobus rectis, (vt in omni triangulo euenit) deberent verò esse æquales ex propos. 29. ad hoc, vt DH, & HC essent parallelę, & ideo non possent coire.



Ad hoc autem, vt propositio immediatè probetur, probandū est prius, quòd crura DA, & AH sint inuicem æqualia.

Id ostenditur ex æqualitate angulorum. Nam, cùm crus DA incidat in parallelas DH, & AB, faciet angulos alternos æquales; nimirum nigrū ad D, & album cruce signatū ad A ex propos. 30. primi. Rursusque cùm crus HA incidat in eadem parallelas HD, & BA faciet angulum externum nigrum ad A opposito, & interno H æqualem ex propos. 30. primi. Sed angulus niger, & cruce notatus ex hypothesi factā sunt æquales; Ergo, & angulus H, & D niger erunt æquales. Quare ex propos. 15. primi latera hos angulos æquales subtendentia erunt æqualia; Quo supposito probatur propositio.

Eam proportionem, quam habet portio AH ad AC eandem habet, cum sit crus ei æquale, DA ad AC ex propos. 7. quinti. Sed pars basis DB, vtpote inter parallelas DH, & AB intercepta, parti alteri BC simili proportione refertur, quâ HA ad AC ex 2. huius propositione. Ergo BD ad CB dicit etiam similem proportionē, quam dicit crus DA ad AC.

Se-

Secunda pars est opposita primæ, dicitque è contrariò, quòd si basis secta sit in partes proportionales eâ proportione, quam latera inter se habent, *quòd angulus* A *sectus erit bifariam*, suppositaque praxi antecedenti trahendi parallelam HD, & prolungandi latus AH, ita probat. Angulus ad A cruce signatus est æqualis angulo alterno nigro ad D, alterq; niger ad A est æqualis angulo H externus interno ex prop. 30. Sed isti niger D, & H sunt inuicem æquales: Ergo, & angulus cruce signatus; & niger ad A sunt inuicem æquales; Quare angulus ad A trianguli DAC propositi sectus est bifariam. Angulus autem H, (quòd probandum est) æqualis inuenitur angulo nigro ad D ex 14. prop. primi; Quia latera ijs subtensa DA, & AH æqualia sunt. Sunt autem æqualia ex 9. quinti; quia eidem AC eandem dicunt rationem: Eandem verò dicunt rationem ad AC ex 11. quinti: quia dicunt eandem rationem ad AC, quam pars basis DB ad partem BC. & linea DA quidem ex hypotesi, HA vero ex 2. huius, quod sit inter parallellas, vt pars DB; parallelæ enim sunt ex constructione DH, & AB.

THEOR. IV. PROPOS. IV. Euc. 4.

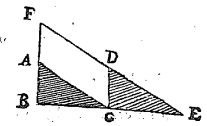
Æquiangulorum triangulorum, proportionalia sunt latera; quæ circum æquales angulos, & homologa sunt latera, quæ æqualibus angulis subtenduntur.

AD probandam hanc propositionem aliqua priùs in ipso probationis apparatu, & praxi præsupponenda sunt, & etiam probanda. Itaq; si dētur duo triāgula nigrū nigriusq; quę habeant angulos correspondentes æquales V.g. angulū ad A nigerrimum angulo ad D nigro, angulum ad C nigerrimum angulo nigro E angulum verò nigerrimum B angulo nigro ad C. Dicit, quòd *crura, quæ claudunt æquales angulos, sint inuicem proportionalia*, pro prima parte propositionis: nimirum dicere V. g. crus BC ad AC similem proportionem, quam dicit quoque CE ad ED; quoniam claudunt æquales angulos nigerrimum ad C & nigrum E, & sic dicas de alijs. Quod, vt ostendatur ponenda sunt duo triangula super vnam rectam BE, & prolunganda sunt latera BA, & DE ad hoc, vt fiat triangulum maius BFE: namque supponit necessariò conuenire in F, eo quòd præsupponat angulum B, & angulum E ambos non posse esse rectos, & consequenter ex propos. 29. primi non posse esse parallela prolungata crura BF, & EF. Anguli verò illi recti ambo esse nequeunt; quia cuiuscunque trianguli duo anguli sunt duobus rectis minores; si autem B ponatur rectus nigerrimus ad C erit minor recto, & consequenter angulus ei æqualis E.

Sed antequam probetur propositio probandum est primò quoque, rectas BF, & CD esse parallelas. Id verò ostendetur. Si considēretur BC, quæ incidit in eas, & facit angulum DCE nigrum externum angulo ad B nigerrimo interno, & ad easdem partes, vt ex hypotesi constat, æqualem; Quare ex probatis 29. primi BF, & CD parallelæ sunt; cùm incidens in eas BE faciat angulum externum interno, & easdem partes æqualem.

Probandum quoque est secundo lineas AC, & FE esse parallelas ob eandem prorsus causam. Nam eadem linea BE incidens in eas in punctis C, & E facit angulum ACB nigerrimum nigro E æqualem, vt ex hypotesi constat: Vnde spatium illud album FADC erit parallelogrammum, vtpote parallelis contentum. Quare, & latera correspondentia FD, & AC erunt æqualia ex 34. propos. primi, necnon, & latera FA, & DC.

Progres. 1. Probatur propositio lineæ FB, & DC parallelæ sunt. Ergo ex 2. propos. huius DE antecedens ad DF sequentem, vt CE antecedens ad BC sequentem proportione referuntur. Quare *permutando*, vt ex 19. propos. quinti, vel ex



def. 16. ipsa crura triāguli nigri, quę fecimus antecedentia erunt ad inuicem, vt partes FD, & BC quas posuimus tanquam consequentes, & erit DE ad CE, vt FD ad BC: Sed pars FD æquatur ex prædictis cruri AC: Ergo crus DE erit ad crus CE nigri triāguli, vt crus AC cruri BC nigerrimi. ambientia angulos æquales E nigrum, & C nigerrimum.

Progres. 2. Idem eodem argumento probabitur de cruribus AB, & BC, quæ inuicem eâ proportione consentiant, quâ CD, & CE. Nam AC est parallela ipsi FE: Quare portio cruris CE, vt antecedens ita respondebit proportione ad aliam BC sequentem, vt AF pars alterius cruris, vt antecedens ad aliam partem BA sequentem. Quare *permutando*, ita erunt antecedētes inuicem CE ad AF, vt sequentes inuicem BC ad BA: sed AF est æqualis cruri CD: Ergo CE ea proportione respicit CD, quā BC respicit BA. Et iam de cruribus angulos æquales C nigrum, & B nigerrimum ambientibus propos. ostensa est; probatur tandem de cruribus æquales angulos D, & A ambientibus. Vtendo argumento ex *æqualitate*, quod docet 23. propos quinti.

Progres. 3. Nam iam habes primam *quantitatem* cruris DB habere ad secundam CE eam proportionem in priori triangulo nigro, quam habet prima quantitas CA ad secundam BC in secundo triangulo nigerrimo ex primo progressu. Et ex secundo, quòd secunda quantitas primi nigri triāguli CE respicit DC tertiam ea proportione, qua secundi nigerrimi, triangluli quantitas lineæ CB respicit tertiam BA. Ergo ex æqualitatis argumento prima cruris quantitas nigri DE, ita refertur ad tertiam DC, vt triangluli nigrioris secundi quantitas AC relationem dicit ad AB.

Secunda verò pars patet ex definitione 6. homologarum quantitatum; nempe *similium*, similes enim quantitates dicuntur illæ, quæ geminæ in aliqua quantitate possunt summi; vt antecedentes, vel vt consequentes. Hoc autem habent latera triangulorum æquiangulorum, cum æqualibus angulis subtenduntur. Nam, vt potes considerare in processu probationis, latera, quæ vt antecedentia sumpta, vel consequentia sunt, fuere semper ea, quæ æqualibus angulis subtensa fuere, & ideo crus AC est simile cruri DE; quia considerata fuerunt, vt antecedentia; nempe, vt fundamenta proportionis, quę angulis æqualibus

ad C

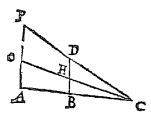
ad C nigro,& E ſubtenduntur. Sic CE,& EC ſunt ſimilia. homologa ; quia vt ſequentia poſſunt aſſumi: nempe,vt termini proportionis, ſunt autem ſubtenſa angulis A,& D æqualibus , & ita de alijs duobus DC,& AB.

COROLLARIVM I.

HInc fit. Lineam rectam, quæ parallela ducitur vni lateri in triangulo, auferre triangulum toti triangulo ſimile. Nam in triangulo EBF, Cùm lineæ FB, & DC parallelæ ſint,incidens in eas recta FE faciet angulum nigrum externum D interno F , & ad eaſdem partes ex 30. 1. æqualem . Rurſus incidens BE idem præſtabit faciendo angulum externum C nigrum æqualem interno B,& ad eaſdem partes; angulus verò E eſt communis . Ergo erit æquiangula pars nigra CDE toti triangulo FBE . Quare habebit latera æquales angulos amblentia proportionalia, & proinde ex def. 1. huius ſimilia erunt triangula .

COROLLARIVM II.

COlligitur quoque: Quod ſi baſi V. g. AF parallela BD agatur, & ab angulo C, cui ſubtenſa eſt, V g. recta ad baſim ducatur, quæ parallelam diuidat, & baſim ; eas diuidere in partes proportionales , eſſeque DH ad HB, vt PO ad OA. Nam ex præcedenti Coroll. triangulum totum CAP, & triangulum eius pars DBC ſunt ſimilia. Rurſuſque triangula OPC, & pars eius DHC. Et ſic triangula HBC , & OAC ſimilia ſunt. Itaque ea proportione reſpiciet CD crus CP, quà DH refertur ad PO. Rurſuſque eadem CD ad eandem CP referetur , vt BD ad PA itaque ex 16. lib.5. erit DH ad PO , velut DB ad PA. Quamobrem *permutando* fundamentum , & pars DH reſpiciet fundamentum, & totum DB, vt terminus, & pars PO reſpicit terminum, & totum PA. Quare diuidendo eâdem proportionem dicet pars DH ad partem HB, vt pars PO, ad partem OA.

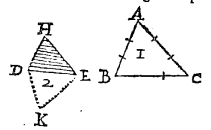


THEOR. V. PROPOS. V. Eucl.5.

Si duo triangula latera proportionalia habeant , æquiangula quoque erunt , & æquales habebunt eos angulos, ſub quibus homologa latera ſubtenduntur .

SIt triangulum ABC primum . Aliudque DHE nigrum,cuius latera ſint lateribus primi proportionalia,ideſt ſit DH ad DE, vt BA ad AC V. g. comprehendant duas tertias partes, quorumlibet correſpondentium. Dicit,quod hoc triangulum nigrum erit primo æquiangulum .

Quòd, vt probet facit triangulum punctatum



DEK triangulo primo æquiangulum BAC.

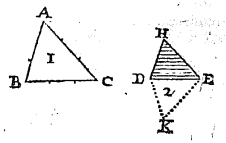
Probatur. Nam crus AB ex 4. huius dicit eam proportionem ad baſim BC primi trianguli vt crus punctatum DK ad ſuam baſim DE .

Sed ad eandem baſim dicit quoque ex hypotheſi eam proportionem, quam BA ad BC crus DH trianguli nigri . Ergo æqualia erunt hæc crura DH, & DK ex 9. quinti . Eodem modo argumentum procedet de crure punctato EK, quod erit æquale cruri HE trianguli nigri ; quia dicunt eandem proportionem ad ſuam baſim DE, quam crus CA primi trianguli ad baſim ſuam BC . Ergo ex 21. prop. primi angulus K angulo H eſt æqualis;ſiquidem baſis eſt communis, & crura correſpondentia æqualia . Quare,& anguli ad baſim correſpondentes erunt æquales nimirum niger , & albus ad D, & niger, & albus ad E . Sed anguli trianguli punctati ex conſtructione ſunt æquales angulis primi trianguli BAC : nimirum angulus D albus angulo B . Ergo, & angulus correſpondēs niger D. Item angulus E albus angulo C : Ergo & correſpondens niger E eidem erit æqualis . Et tandem K angulo A quare, & angulus H niger eidem A erit æqualis vnde triangulū DHE nigrum angulos primo BAC cos æquos habet, qui homologis cruribus inſunt.

THEOR. VI. PROPOS. VI. Eucl. 6.

Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem, & circum æquales angulos latera proportionalia habuerint , æquiangula erunt triangula, æqualeſque angulos habebunt ſub quibus homologa latera ſubtenduntur .

HOc eſt quaſi idem Theorema,ac antecedens, ſiquidem eodem argumenti methodo probatur , ſimilique praxi inititur. nihilque aliud diuerſi haber;niſi quod diuerſam conditionem ſupponit;nempe vnum angulum vni æqualem,lateraque proportionalia, quæ hunc angulum ambiunt. Si itaque triangulum BAC primum , & aliud nigrum, quod habeat angulum ad D nigrum angulo primi B æqualem ; ſintque latera illud concludentia DH, ad DE lateribus, BA, ad BC proportionalia. Dicit reliquos angulos reliquis eſſe æquales . Nam ſic verificabitur quoque ſecunda pars, nempe ſimilia, & homologa eſſe illa latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur : nimirum BA,& DH, qui ſubtendunt angulos æquales E nigrum,& C album eſſe ſimiles , vt antecedentes proportionum, & BC, & DE baſes, quæ angulo A, & H ſubtenduntur eſſe quoque ſimiles , V. g. terminos proportionum . Vt autem id probetur,faciendus eſt punctatis lineis angulus ad D albus æqualis angulo B,& angulus ad E albus æqualis angulo C, vt in præcedēti propoſ.anguluſque K ex Coroll.2. propoſ. 17. primi erit æqualis angulo A: Quare triangulum punctatum erit æquiangulum primo triangulo BAC .



Probatur. Nam triangulum punctatum eſt æquiangulum triangulo primo . Sed triangulo huic

huic punctato eſt æquiangulum triangulum nigrum ; Ergo triangulum nigrū eſt æquiangulum triangulo primo . Quod autem triangulum nigrum ſit æquiangulum triangulo punctato, probatur eundo per ſingulos angulos ſufficienti ſingulorum enumeratione , angulus ad D niger eſt ex hypotheſi æqualis angulo B primi trianguli ; vt eidem angulus albus punctati ad D ex conſtructione eſt æqualis ; Ergo albus , & niger ad D inuicem æquales ſunt . Reliqui verò anguli probabuntur æquales ex æqualitate laterum correſpondentium . Nam ex 22. propoſ. primi, triangula habentia crura duo equalia ambientia angulum æqualem , æquala quoque ſunt quoad baſim , & reliquos angulos . Hæc autem triangula habent duo crura duobus æqualia . Crus enim DE in his triangulis punctato , & nigro eſt commune; quare remanet ſolum probandum de crure DK, & DH, quòd ſint æqualia .

Probatur verò ; quia DK eam proportionem dicit ad DE ; quam dicit BA ad BC primi trianguli ex 4.huius propoſ. cum ſint æquiangula: ex effectione : Sed eam proportionē,quam dicit BA ad BC,& ideo,quā DK ad DE ex 16.l.5.imitatur quoq;ex hyp. proportio DH ad DE in nigro triangulo . Ergo ex prop.9. l.5. æqualia ſunt inuicem DH,& DK,vtpote vni baſi ED eandem proportionem dicentia .

Quapropter , cùm iam habeamus duo crura punctati ; & duo nigri trianguli angulos ad D nigrum,& albū ambientia æqualia, anguli reliqui ad E niger, & albus, & angulus H,& K erunt æquales ex prop.22. primi,& ideo duo triangula nigrum, & punctatum erunt æquiangula .

THEOR. VII. PROPOS. VII. Eucl.7.

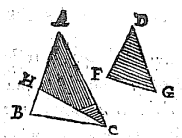
Si duo triangula vnum angulum vni angulo æqualem; circa verò alios angulos latera proportionalia habeant , reliquorum autem ſimul vtrumque , aut minorem; aut non minorem recto : Æquiangula erunt triangula , & æquales habebunt eos angulos , circum quos proportionalia ſunt latera .

DEntur duo triangula ſemialbum,& nigrum, quę habeant angulos nigros æquales E. g. A,& D , & crura alios angulos C,& G ambientia proportionalia , ſcilicet BC ad CA in ſemialbo proportionetur, veluti FG ad GD in nigro . Reliqui verò anguli ſpetie non diſſonent; ſed ſint aut ſimul minores recto, aut ſimul non minores .

Ideſt reliquus angulus albus B ſit acutus, ſi F eſt acutus ; aut ſi B ſit obtuſus , talis quoque ſit F; aut ſi B eſt rectus, talis quoque ſit F . Nam ſi ſpetie diſſentiunt,& vnus eſſet acutus, alter obtuſus, hac ſola vltima conditione defficiente propoſitio non verificaretur .

Probatur verò oſtendendo datis ijs conditionibus duorum angulorum æqualium , & laterum proportionalium circa alios duos, & ſpeciei eiuſdem reliquorum , reliquos ſpecie ſolum notos eſſe inuicem æquales, & conſequenter ex propoſ. 27. lib. primi etiam reliquos duos proportionalibus lateribus ſeptos,eſſe equales,& hoc oſtendendo alterū eorū,nec maiorē eſſe poſſe , nec minorē.

Caſus 1. Sit itaque angulus A angulo D æqualis, anguli B, & F ſpecie noti , nimirum minores recto , & angulus C ſit clauſus cruribus proportionalibus , & ſit AC , ad CB, vt anguli G crus DG ad crus FG. Dico angulū C angulo G eſſe æqualem . Quod ſi non credatur: Sit, vt inquiunt aduerſarij;ſemialbus angulus C maior ; quam G, qui vt eſſet æqualis ipſi G , ſufficeret pars nigra C. Igitur triangula nigra inuicem erunt æquiangula ; quod habeant omnes angulos æquales , & quidem A, & D ex hypotheſi ; anguli verò G, & C ex aduerſarijs ; anguli H niger, & F ex neceſſariâ conſequentiâ ob prop.17.l.1. Cor.2. Quāobrem habebunt latera proportionalia ex propoſ. 5. huius, & CA erit ad CH, vt DG ad GF : Sed vt AC ad BC, ita proportionatur ex hypotheſi DG ad GF : Ergo ex prop. 16. quinti, vt AC refertur proportione ad GH : Sic idem AC refertur ad BC : Quare ex 9. quinti , cùm eadē eis eandē dicant proportionem , crura HC, & CB erunt æqualia ; ideoque ex propoſ. 14. primi H, & B anguli albi, vtpote æqualibus tenſi cruribus, æquales . Sed angulus B ex hypotheſi eſt minor recto : Ergo H albus erit minor recto , & conſequenter niger H maior recto : Sed oſtenſum eſt angulum nigrum H eſſe equalē angulo F nigro,& ideo minorē recto.Ergo eſſet minor,& non minor recto, quod eſſe nequit.



Caſus 2. Sit deinde ABC niger, & angulus A in ipſo æqualis angulo D, & ſit AC, ad CH ; vt DG ad GF, & ponantur, vt priùs H angulus niger, & F, minores recto, & dicatur ab aduerſarijs, angulum nigrum C eſſe minorem angulo G, qui, vt eſſet æqualis, deberet eſſe ſemialbus C. Tunc triangulū BAC ſemialbū nigro erit æquiangulū, & B angulo F ex prop.17.l.1.Cor.2. ob angulos A, & D æquales ex hypotheſi, & ſemialbum C, & nigrum G ex aduerſarijs .

Ergo erit ex 5. huius AC, ad BC, vt DG ad GF. Sed ex hypotheſi eſt etiam AC, ad CH, vt DG ad GF; Ergo erit AC ad BC, vt AG ad HC : Erunt itaque æquales ex 9. quinti HC,& BC . Sed angulus H niger eſt æqualis angulo F minori recto , ex hypotheſi ; ergo H albus maior recto , & B ei æqualis. ob laterum, quibus inſiſtunt æqualitatem ex propoſ. 14. maior quoque recto contra oſtenſa : Oſtenſus eſt enim æqualis angulo nigro F, qui ponitur minor recto .

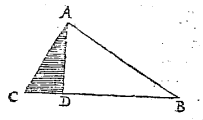
Caſus 3. Sint deinde angulus B, & augulus F non minores duobus rectis ideſt , vel ſint recti , vel obtuſi , & dicatur ab aduerſarijs, angulum C ſemialbum eſſe maiorem angulo G, qui, vt eſſet æqualis , deberet eſſe niger C. Itaque vt priùs triangula nigra erunt æquiangula, ob angulum A ex hypotheſi angulo D nigro æqualem, & angulum nigrum C ob dictum aduerſariorum angulo G æqualem ; & ideo angulus H niger erit æqualis angulo F : lateraque erunt proportionalia , eritque AC ad CH, vt DG ad FG, & ex hypotheſi AC ad CB , ita DG ad GF. Igitur erit AC ad CH,ita AC ad CB : ex 16.l.5. Erunt ergo equales ex prop 9.l.5. CH, & CB. Ideoque angulus albus H erit æqualis angulo albo B. Sed angulus B ponitur, vel rectus , vel maior recto.Ergo talis eſſet angulus H albus,& ſic cōtra propoſ. 17. duo anguli trianguli eſſent æquales duobus rectis, vel eis maiores, & angulus niger H eſſet minor recto, qui oſtenſus eſt maior .

Casus 4. Sic quoque ostendetur propositio; si dicant aduersarij angulum ad C esse minorem angulo C, vt supra ostensum est in simili casu 2.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII. Eucl. 8.

Si in triangulo rectangulo ab angulo recto in basim perpendicularis ducta sit, quæ fiunt à perpendiculari triangula, tum toti triangulo, tum ipsa inter se similia sunt.

IN triangulo ABC angulus BAC sit rectus, à quo ad basim perpendicularis agatur AD. Dicit duo triangula, in quæ à perpendiculari CAB triangulum partitur album, & nigrum *esse similia totí, & etiam inuicem*.



Probatur. In triangulo toto angulus totus semialbus A rectus est; Et pariter rectus est angulus D albus trianguli penitùs albi: Angulus verò ad B est communis ergo ex Coroll. 2. propos. 17. reliquus niger C albo apud A erit æqualis: Vnde triangulum CAB totum erit æquiangulum, suæ parti albæ DAB.

Cùm itaque hæc triangula sint æquiangula; homologa erunt ex propos. 4. huius ea crura, quæ angulis æqualibus subtenduntur. Ideoque sicut est BC basis anguli recto oppositi ad crus DA anguli B oppositum, & sicut BA crus ad AC crus maioris triangulii, sic DB crus ad DA in minori. Quare latera, quæ æqualibus angulis opponuntur erunt homologa: Quia bases angulis rectis oppositæ deseruiunt pro fundamentis, dicitur enim, sic est CB basis ad crus CA, vt basis BA ad crus DA sicut etiam crura pro terminis.

Probatur quoque de parte nigra eodem modo. Nam si in triangulo nigro angulus D niger angulo A semialbo æquatur; cùm ambo recti sint: angulus C niger communis: Ergo reliquus niger apud A reliquo angulo B ex Coroll. 2. prop. 17. erit æqualis. Cum ergo triangulum nigrum, & semialbum totum CAB sint æquiangula; patet esse similia. Vnde, cùm album, & nigrum sint similia semialbo toti; erunt etiam similia inuicem.

COROLLARIVM I.

MAnifestum hinc euadit perpendicularem ab angulo recto in basim cadentē esse mediam proportionalē inter duo basis segmenta, & eā proportionem dicere BD ad AD: quam AD ad CD. Siquidem, qualis est proportio AB ad AC, talis est proportio DB ad DA. Rursusque qualis est proportio BA ad AC, talis reperitur proportio DA ad DC: Ergo ex prop. 16. lib. 5. eadem proportione refertur DB ad DA quā DA ad DC, & id euenit, quod D A sit crus minus respectu albi, & respectu nigri sit crus maius, & duo munia obeat.

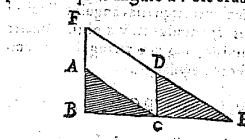
COROLLARIVM II.

FRultur quoque; Crus quodlibet esse medium proportionale inter totam basim, & illam basis partem, cui vnitur. Nam ostensum est; quòd ita se habet BC basis ad crus BA in triāgulo maiori, vt eadē BA basis in minori ad DB crus. Sic quoq; se habet basis CB ad crus CA, sicut se habet idem crus CA, & basis ad crus CD: Et hoc euenit. Quia CA, AB crura sunt, simul bases, & duplici munere funguntur, ob quod possunt deseruire pro termino, & fundamento.

THEOR. IX. PROPOS. IX. Eucl. 31.

Si duo triangula duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, & secundum vnum angulum componantur, ita vt homologa latera sint etiam parallela, tunc tertium vtriusque latus in rectam lineam coibit.

SIt triangulum propos. 4. BAC nigerrimum, & CDE nigrum, & ita collocentur, vt AB oppositum angulo apud C, sit parallelum cruri CD oppositum æquali angulo E. Sic crus AC parallelum



cruri DE, quæ æqualibus angulis nigerrimo apud B, & nigro apud C opponuntur. Et ita erunt crura homologa parallelé posita; quòd crura angulis oppositis æqualibus sint proportionum, aut fundamenta, aut termini. Dico crus BC & CE, quæ remanent in vnam rectam extendi, quæ est BE.

Probatur: Angulus apud A nigerrimus, qui æquatur albo apud C, quòd A C incidat in parallelas BF, & CD ex 30. primi. Angulus item apud B nigerrimus, qui nigro apud C æqualis est. Angulus tandem nigerrimus apud C, hi tres faciunt, cū sint anguli eiusdē triāguliduos angulos rectos, ergo nigerrimus apud C, & albus æqualis nigro A, & niger æqualis nigerrimo apud B etiam ipsi erunt æquales duobus rectis. Ergo ex prop. 13. l. 1. lineæ BC, & CE in directum erunt; cum efficiant, cum linea AC, vel CD angulos duobus rectis æquales.

EXPENSIO III.

De reciprocatione laterum in figuris.

LIcet hic solùm Euclides de parallelogrammis, & triangulis agat, cùm tamen sint hæ figuræ omnium figurarum initia, hæc expensio videtur ad omnes posse extendi, vtpote omnium reciprocationem pertractans. Reciprocatio verò est vt diximus, cùm fundamentum proportionis est in vna figura, terminus verò eiusdem in alia, & in hac alia fundamentum similis proportionis reperitur, & terminus in priori, ita vt quælibet combinatio partim in vna figura sit, partim in alia.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. X. Eucl. 14.

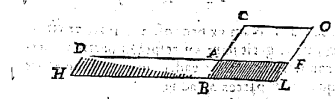
Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum parallelogrammorum reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos.

Et quorum parallelogrammorum reciproca sunt latera, circum æquales angulos, & vnus angulus alteri æqualis, illa sunt æqualia.

DVas partes habet hęc propositio, & secunda primam conuertit. Prior itaque est, quod si dentur duo parallelogramma æqualia, quę insuper angulum angulo æqualem obtineant, hęc habitura quoque latera, quæ sunt circa æquales angulos reciproca.

Sint itaque rectangula duo albū AO, & DO semialbum. Dicit latera horum esse reciproca, quæ ambiunt angulos æquales, & ita esse DA huius semialbi ad AF alterius albi, vt alterius latus AC est ad huius latus BA.

Ad probationem verò præsupponendum est, quòd, si duo parallelogramma vniantur in vertice æqualiū angulorū, ita poterūt cōstitui; vt latera in vnā rectā coeant, & latus DA v. g. parallelogrāmi DB semialbi vnam rectam faciat cum latere AF alterius albi. Hoc verò colligitur à propos. 12. lib. 1. vbi dicitur lineas rectas angulos æquales ad verticem efficere, cùm vnà coeunt. Ideoque cum anguli albi apud A huius sint æquales tum parallelogrammi DB, tum alterius AO, & latus DA, cum AF penes rectam lineam sit positum, necesse est, vt etiam aliud latus AC in directum sit cum latere AB;



alioquin sequeretur angulos ad verticem apud A esse æquales, & lineas in directum nequaquam positas esse.

Quo suppositō, producendum est latus BH vsq; dum occurrat lateri OF producto in L, & iam habemus parallelogrammum nigrum AL.

Et sic Probatur propos. Parallelogrammum nigrum est eiusdem altitudinis, ac album AO. Ergo ex 1. propos. huius erunt inuicem vt bases, & ita erit parallelogrammum AO ad nigrum, vt AC basis ipsius ad AB basim nigri, & alterius DB communis. Eodem pacto philosophare de semialbo respectu nigri. Nam, cùm sit eiusdem altitudinis cum ipso nigro, respiciet illud, vt sua basis DA, nigri respicit basim albo parallelogrammo communem AF, critque semialbum ad nigrum, vt DA ad AF.

Sed ex 7. quinti, cùm alba parallelogrāma æqualia sint inuicem, ex hyp. eidē nigro eandem dicunt proportionem. Ergo, & basis CA ad basim AB eandem dicet proportionem, quam basis DA ad basim AF. Quare latera reciprocè se respicient. Secunda pars primam conuertit; asseritque, quòd si latera DA, & AF; sic AC, & AB circa angulos æquales apud A reciproca fuerint in proportione ita vt proportionem, quæ est CA, ad AB imitetur proportio, quæ est DA ad AF, rectangula ipsa fore æqualia. Supponitque probatio eandem constructionem, quæ peracta est.

Probatur ex 9. quinti, si parallelogramma albū AO, & DB semialbum ad nigrum eandem dicent proportionem, æqualia erunt: sed eam dicunt: Ergo æqualia sunt. *Minor* verò argumenti constat: Quia parallelogramma eiusdem altitudinis eam dicunt proportionem, quam suæ bases ex 1. huius. Ergo parallelogrammum AO album, aliud nigrum eā proportione spectabit, quā sua basis AC, spectat basim AB nigri cùm sit eiusdem altitudinis, ac nigrum. Ideoque asseras de parallelogrammo semialbo DB, quòd cum sit eiusdem altitudinis cum nigro eodem, eam dicet proportionem, quam sua basis AD ad basim AF.

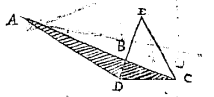
Sed basium DA, & AF proportio, quā se respiciunt ex præsuppositione eadem est, ac basium AC, & AB, Ergo, & parallelogramma album AO, & semialbum DB eadem proportione respicient nigrum idem. Quare sunt æqualia ex propos. 9. lib. 5. citata.

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl. 15.

Æqualium, & vnum vni æqualem habentium angulum triangulorum reciproca sunt latera, quæ circa æquales angulos.

Et quorum triangulorum, vnum angulum vni æqualem habentium, reciproca sunt latera, quæ circum æquales angulos, illa sunt æqualia.

DEntur duo triangula æqualia BEC album, & nigrum ADB habentia angulos, qui ad B æquales; Asseritur, & crura fore reciproca in proportione; nimirum esse albi crus EB ad crus nigri BD, vt crus AB eiusdem nigri ad crus BC trianguli albi. Quod, vt probet; collocandi sunt tali modo triangula se in verticibus tangentia, vt crura vnius, cum cruribus alterius vnam rectam efficiant V. g. AB, & BC sicut crus EB, & BD. Hoc autem poterit fieri, vt in precedenti diximus propter angulos æquales ad B album, & nigrum, Coniunganturque D, C, & fiat triangulum nigerrimum DBC.



Probatur. Nam nigrum, & nigerrimum triangulum sunt eiusdem altitudinis, cùm conueniant in vertice D, Ergo ex propos. 1. huius, eam proportionem, quam triangula dicunt ad inuicem nigrum ad nigerrimum, dicent, & bases AB ad BC. Idem dicas de triangulo albo, & nigerrimo sunt enim, eiusdem altitudinis, quòd conueniant in puncto C: Quare ex eadem prima huius, basis EB albi ad basim BD nigerrimi eandem dicet proportionem, quam album triangulum ad nigerrimum. Sed tum triangulum album, tum nigrum ex prop. 7. quinti, eo, quòd ex hypothesi sint æqualia eandem dicunt proportionem ad nigerrimum: Ergo,

& crus EB, ad crus DB eandem dicet proportionem, quam AB ad BC.

Secunda verò pars Theorematis est conuersa præcedentis, & dicit; quòd si crus EB ad aliud reciprocum ED, dicat eandem proportionem, quâ refertur AB ad BC, æqualia fore triangula: Nam vt bases ita ex prop. 1. huius erunt quoque triangula album, & nigrum ad nigerrimum, cum sint eiusdem altitudinis: Quare, cum ex prop. 9. quinti, quæ eidem eandem dicunt rationem æqualia sint, sequitur vt æqualia quoque sint triangula album, & nigrum cum bases AB ad BC, & BE ad BD ex præsuppositione eandem proportionem dicant.

EXPENSIO IV.

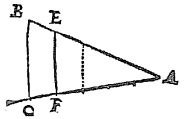
De lineis proportionaliter secandis.

VIdimus primo libro sectionem linearum in partes æquales: modo hic illam intuebimur in partes proportionales; nec tamen sectionum modi omnes hac expensione concludemus: plurimi enim sunt; qui, cum non sint elementares, & tanquam principia generalia nõ se habeant, nec necessarij ad elementa ipsa percipienda sint: imo multorum cognitionem supponant non dum hausta, vt queant intelligi, ideo ea in proprium tractatum reiecimus. Fuit autem necessarium, vt primo lib. fecimus, agere priùs de triangulis; vt hę operationes secandarũ linearũ ostenderẽtur.

PROB. I. PROPOS. XII. Eucl. 9.

A datâ rectâ lineâ imperatam partem auferre.

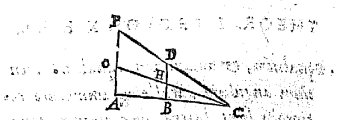
IMperetur, vt ex linea AB auferratur, V. g. quinta pars. Ex A ducatur recta AC, vtcunque, quę tamen angulum aliquem efficiat in A, & in hac linea AC tot partes ab A incipiendo signentur æquales assignatæ ad placitum magnitudini, quota pars est ea, quæ desideratur detruncari, vt in proposito exemplo, assumendæ sunt quinque partes, quia quinta detrahenda est, & ab vltima parte C ducenda est linea, quæ extremum alterius B coniungat, ita vt fiat triangulum ACB. Huic autem à puncto penultimo F parallela agatur FE, eritque EB pars quinta lineæ AB absciſa.



Probatur. Nam ex propoſ. 2. huius ea proportione, quâ refertur AE, ad EB, eâ ipſâ AF reſpicit FC. Ergo componendo, vt docuit argumentari 21. propoſ. quinti, ita reſpicit AB tota partem ſuam BE, ſicut AC tota partem ſuam CF. Sed CF eſt quinta pars totius AC. Ergo & BE erit quinta pars totius AB.

COROLLARIVM

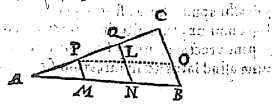
HInc deducitur, & à Coroll. 2. prop. 4. Poſſe quoque ab aliqua V. g. DB partes, quaſcunque placuerit, auferri. Si lineam ducas ei parallelam maiorem aliquam, quę ſit AP, eamque diuidas in partes quaſcumque, E. g. in duas in O, deinde extrema, & omnia puncta diuiſionum ad idem quodcumque punctum C ducas, quod ſit vltra lineam diuidendam minorem DB ita quòd in medio ipſa remaneat, & lineæ in punctum C conuenientes per eam tranſeant, vt ſunt PC, & OC, & AC. Iſtæ enim diuident lineam propoſitam DB in partes proportionales ijs partibus, quas in PA fecimus: Eritque DH, & HB in linea DB, vt PO ad AO in linea PA; quod oſtenditur in ipſo Coroll. 2. propoſ. 4. cuius figuram hìc adhibemus.



PROB. II. PROPOS. XIII. Eucl. 10.

Datam rectam lineam inſectam ſimiliter ſecare, vt data altera recta ſecta fuerit.

HÆc ferre eſt eadem, quæ ſuperiori problemate, Sit recta AB ſecanda in tot partes, quæ proportionem eam inter ſe ſeruent, quam partes alicuius alterius datæ inter ſe conſeruant. Conſtituatur itaque recta aſſignata AC tali modo, vt faciat cum diuidenda angulum A, & iunctis extremitatibus linea BC, ad hanc AB à punctis diuiſionũ P, & Q ducantur parallelæ PM, & QN. Nam linea AB erit diuiſa, vt propoſ. 2. poſcit, in partes ſimiles lineæ AC, vtque id probetur, ducatur eo punctata ad AB parallela.



Probatur. Nam ex propoſ. 2. huius, vt eſt AP ad PQ, ita ſe gerit pars AM reſpectu partis MN, ergo proportionales ſunt eadem proportione AM, & MN, quá erant partes AP ad PQ.

Eodem modo valet argumentum de parte PQ, & QC, quæ inuicem eam proportionem ſeruabunt, quam in linea punctata partes PL, & LO ob eandem propoſ. huius 2.

Sed partes punctatæ PL, & LO ſunt æquales partibus MN, & NB ex propoſ. 33. primi, quod in parallelis lineis ſignatæ ſint, & à parallelis effectæ. Ergo etiam PQ, & QC ita ſunt proportionales, vt MN, & NB.

COROLLARIVM

COlligitur hoc modo poſſe ſecari AB ſecundum proportionem quamcumque datam. Nimirum, ſi priùs ſiguemus in AC indeterminata eas partes habentes eam proportionem, quam volumus, & cętera præſtentur, vt priùs, quando linea AC vt in propoſitione, præſupponebatur iã diuiſa.

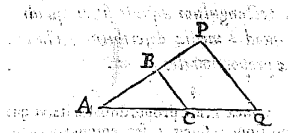
COROLLARIVM

COlligitur quoque lineas duas proportionaliter in geminis punctis diuiſas habere quoq; inter medias ſectionum proportionales V. g. diuiſa AC in Q nimirum in duas tertias partes, & in P nimirum in ſuam tertiam partem intermedia ſectionũ erit PQ, quę eam dicet proportionẽ cum AP, ſeu QC; quam dicit intermedia ſectionum MN ad AM, vel NB, ſi & AB ſimiliter in eaſdem proportionales partes ſecetur in M, & N. Nam iunctis iſtis lineis, vt faciant angulum in A idem; quod in propoſitione explicauimus, valebit argumentum, vt patet, cùm ſit eadem figura.

PROB. III. PROPOS. XIV. Eucl. 11.

Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem inuenire.

SInt duæ rectæ AB, & AC, ita diſpoſitæ, vt angulum in A conſtituant, producaturque ea, quam volumus conſtituere pro antecedenti V. g. AC, & in parte productâ capiatur CQ æqualis alteri AB, quam volumus eſſe ſequentem. Ducta deinde recta ad extremitates BC, ei à puncto Q parallela agatur QP, quæ inueniat in P lineam AB productam. Affirmat propoſitio, BP *tertiam proportionalem eſſe*: nimirum eam dicere proportionem AC antecedentem ad AB ſequentem quã reſpicit ipſa AB ſequens tertiam ſubſequentem BP.



Probatur. Nam ex propoſ. 2. huius; Ita proportione refertur AC antecedens, ad CQ ſequentem in priori crure AQ, vt AB ad BP refertur in ſecundo crure AP; Sed antecedens AC ita refertur proportione ad CQ velut ad AB antecedens in poſterlori crure (ſiquidem AB, & CQ ex conſtructione ſunt æquales). Ergo eam proportionem ex 7. quinti, quam dicit antecedens AC ad AB, ſequentem ſuam dicet quoque AB antecedens etiam ipſa ad BP ſequentem, & ſic AB erit media proportionalis: Nimirum ſequens reſpectu AC antecedentis, & pariter antecedens reſpectu ſubſequẽtis BP. At PB tertia proportionalis, erit, vt vul. prop.

COROLLARIVM.

COllige eodem modo, & quartam proportionalem, & quaſcunque alias poſſe inueniri; nimirũ ſi poſterioribus duabus, tertia inueniatur proportionalis regulâ præced. Inuenta enim, cum tribus priùs inuentis, quatuor erunt proportionales, & ſic ſi alias cupias ſemper eadem praxi vteris.

PROB. IV. PROPOS. XV. Euc. 12.

Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem inuenire.

DVas habeas lineas AB, & BC, quas in directum collocabis ita vt vnam rectã conſtituant AC; reliqua verò AD ita collocetur, vt faciat angulum quemcumque in A cum prima AB. Sit verò reperienda quarta proportionalis ita, quòd, ſicut AB proportionẽ habet ad BC, ita reliqua angulum faciens AD, cum aliâ reperiendâ proportionata exiſtat. Coniunge itaque extremitates D, & B rectâ BD, & huic coniungenti à puncto C duc parallelam, quæ occurrat lineæ AD productam in H. Nam DH erit quarta, quæ quęritur ita, vt eodem modo, quo ſe habet antecedens AB prioris cruris ad ſequentem eiuſdem BC. Sic referatur antecedens poſterioris cruris AD ad ſequentem DH in proportione.



Probatur facilitèr ex 2. propoſitione huius: Cùm enim DB ſit ex conſtructione parallela ad CH. Ergo ſicut refertur AB ad BC in priori crure; Sic refertur AD ad DH in poſteriori.

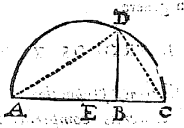
COROLLARIVM

COllige cum Pappo. Quomodo reperire poſſis quartam proportionalem, quæ ſit ad tertiam, vt prima ad ſecundam inuerſo ordine. Nam inuerſo ordine tertia AD erit coniungenda non ad extremum primæ A, ſed ad extremum C a ſecundæ, vt per lineas punctatas factum vides, & literis minuſculis notatũ, eſt enim eadem AD, quę ad. Nam tunc ex eadem propoſ. 2. ſicut antecedens, & prima AB ſe habet ad BA ſecundam, ita quarta h, d ſe habet ad tertiam d a.

PROB. V. PROPOS. XVI. Eucl. 13

Duabus datis rectis lineis, mediam proportionalem inuenire.

SIt duæ rectæ AB, & BC, quibus media proportionalis inuenienda ſit. Diſponantur in directum ita, vt fiant vna linea AC, quam bipartiens in E, & in ſectione E facto centro interuallo vſque ad extremitatem alterutrius extenſo V. g. A, ſemicirculus deſcribatur ADC. Deinde ſuper B erigatur perpendicularis BD. Nam hæc erit media proportionalis inter AB, & BC, quod vt probetur ducendæ ſunt rectæ AD, & DC, quæ ex propoſ. 28. tertij facient angulum rectum in D.



Probatur verò propoſitio ex Coroll. propoſ. 8. Nam D B cadit ſuper baſim angulo recto toti D ſubtenſam: quare inter duas eius portiones AB, & BC erit media proportionalis. Angulus verò D punctatis factum rectus eſt, quòd in ſemicirculo ex propoſ. 28. tertij exiſtat.

COROLLARIVM

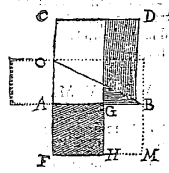
HInc eſt. Quòd perpendicularis excitata ſuper diametrum à quocunque puncto eius, ſit medium proportionale inter duo diametri ſegmẽta, vt clarè conſtat, cùm ex propoſ. 28. tertij ſemper ADC angulus rectus ſit; quoquo puncto circumferentiæ vertex eius, reperiatur.

PROB.

PROB. VI. PROP. XVII. Euc. 30.

Propositam rectam lineam terminatam extremâ, & mediâ ratione secare.

SIt recta AB; & ex 15. l. 2. sit secta in C ita, vt rectangulum sub totâ AB, & minori segmẽto CB contentum, sit æquale quadrato ex maiori segmento AC erectum. Dico hanc lineam extremâ, & mediâ ratione esse sectam, esseque AB totam, ad segmentum maius AC, vt segmentum idem AC ad minus CB in proportione reperitur.



Probatur: Quoniã enim quadratum, seu parallelogrãmum nigrum ex maiore segmento AH est æquale rectangulo nigro ex minore segmento, & tota effecto CD erit BD tota reciprocè ex propos. 10. huius ad GH maius segmentum, vt GA, idest æqualis CH ad GB segmentum minus. Vnde cùm tota ita se habeat ad segmentum maius, vt segmentum maius ad minus, linea AB in C erit secta extremâ, & mediâ ratione ex huius def. 3.

EXPENSIO V.

De æquipotentia proportionalium linearum.

HIc agitur; datis lateribus proportionalibus, vel quatuor, vel tribus, quòd possint duo rectangula æqualia constituere, vel quadratum, & rectangulum licet inuicem sint inæqualia. Pertractatur itaque de lineis proportionalium æquipotentia in genere.

THEOR. I. PROPOS. XVIII. Euc. 16.

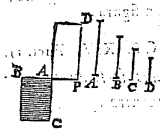
Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, quod sub extremis comprehenditur rectangulum est æquale illi, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo.

Et si sub extremis comprehensum rectangulum æquale fuerit ei, quod sub mediis continetur rectangulo, illæ quatuor rectæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ proportionales A, B, C, D. Dico primò, si ex A, & D extremis rectangulum componatur, vt est album DA, & ex mediis aliud rectangulum nigrum BC, hæc duo rectangula fore æqualia.

Probatur. Anguli sunt æquales niger, & albus ad A, vtpote recti latera quoque reciproca proportionalia ex hypothesi, nempe simili proportione refertur ex def. 2. huius PD ad AC, vt BA ad AP, quia sic in vtraque figura terminus, & fundamentum relationis est. Ergo ex 10. huius parte 2. rectangula album, & nigrum erunt æqualia.

Probatur secũda pars, quæ est conuersa prioris; nimirum, quòd rectangula æqualia habeant rectas sub quibus continẽtur proportionales. Colligitur verò probatio ex prima parte prop. 10. Nam cum hìc habeamus angulos ad A nigrum, & album æquales, & reciproca latera, nimirum se simili proportione respicientia PD lineam AC, vt BA lineam AP; patet lineas esse proportionales, & PD esse ad AC, vt BA ad AP.



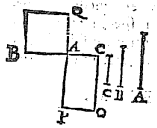
THEOR. II. PROPOS. XIX. Euc. 17.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum, quod sub extremis comprehenditur, æquale est ei quadrato, quod comprehenditur sub media.

Et è contrario si sub extremis comprehensum rectangulum æquale sit ei quadrato, quod à media describitur, illæ tres lineæ proportionales erunt.

SInt tres lineæ A, B, C proportionales ita, vt qua proportione respicit A sequentem B, sequens quoque respiciat subsequentem C. Dicit, quòd si ex extremis A, & C fiat rectangulum PC, & ex media C fiat quadratum QB; Quadratum, & rectangulum futura esse æqualia.

Probatur. Quia accipiam punctatam AQ æqualem mediæ B. Quare eam proportionem, quam dicit A ad punctatam, dicet, & B ad C. Cum ergo sint iã quatuor proportionales, patet ex præcedẽti propositione, rectangulum quadratũ BQ ex punctatâ, & lineâ B, æqualibus, & medijs constitutum, esse æquale rectangulo ex extremis C, & A constituto ex ant.



Secunda pars conuertit priorem eodem fundamento lineæ punctatæ præsuppositò, & eodem argumento, quâ secunda pars præced. Theorem. probata est; cùm enim æqualia sint quadratum, & rectangulum, erit proportio PA ad punctatam AQ, qualis est BA, ad AC, sed punctata, & BA æquales sunt, ergo erit AP ad BA, vt BA ad CA, nimirum trium proportionalium A, B, C.

EXPENSIO VI.

De proportione duplicata, & composita, quam figuræ inter se possident respectu laterum homologorum.

COmparantur in hac Expensione latera figurarum, tum simillium, tum dissimillium inuicem, & quam proportionem obtineant consideratur, vt ex inde cognito genere figuræ, & proportione laterum, faciliter etiam innotescat proportio ipsarum figurarum, vel è contrà.

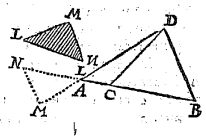
THOR. I. PROPOS. XX. Euc. 19.

Similia triangula inter se sunt in duplicata ratione laterum homologorum.

DVo triangula, vel duas figuras habere duplicatam proportionem laterum homologorũ, nihil aliud est, quàm quòd ita sit figura ad figuram proportionata, sicut inter tres lineas proportionales prima linea proportionatur ad tertiã, ita enim proportio duplicatur gemina vice, nam dicitur sicut est antecedens ad sequentem, & etcè prima proportio, ita est sequens ad subsequentem ecce secunda: V. g. si basis, quæ ponitur antecedens triangulorum simillium sint vt 1. ad 2. sequentem, triangula erunt inuicem vt 1. ad 4. nimirum repetendo proportionem gemina vice: nam sicut se habet 1. ad 2. ita proportionatur 2. ad 4.

Duplex autem potest esse casus. Nam vel latera homologa sunt æqualia, & sic etiam figuræ erunt æquales, cùm æqualia repetitis proportionibus semper æquo modo se habeant, & si volo reperire alium numerum, qui dicat proportionem, quam dicit 2. ad 2. non possum reperire; nisi 2. at cum proportio est inæqualitatis, tunc difficultas est, & id demonstrare oportet.

Sint ergo duo triangula simillia nigrum, & album ADB, abscindaturque ex propos. 14. basibus AB, & LN tertia proportionalis ex latere AB, & sit AC, ducaturque recta DC, eritque triangulum ANC probandum priùs, & demonstrandum æquale triangulo nigro antequam ipsam propositionem probemus.



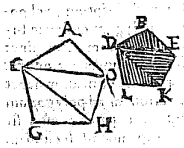
Probatur. Ex hypothesi, vt est AD ad AB, ita est LM ad LN ergo *permutando* ex 16. lib. 5. erit fundamentum AD ad fundamantum LM, vt terminus AB ad terminum LN; Sed vt est AB ad LN, ita fecimus LN ad AC proportionata crura. Ergo proportione correspondebit AD ad LM, vt LN ad AC. Ergo hæc triangula NLM, & ADC habebunt latera reciproca. Siquidem fundamentum primæ cõbinationis, & terminus alterius est in vno triangulo AD, & AC, & terminus primę, fundamentumq; secundæ est in alio triangulo, nimirum NL, & LM. Quamobrem ex 11. huius erunt triangula æqualia punctatum, quod æquale fecimus nigro (claritatis gratia,) & triangulum ADC: quo suppositò ita propositio

Probatur. Tres lineæ, nimirum AB basis, basi LN, & LN basi AC continuam dicunt proportionẽ; Vnde secundum superiùs explicata AB ad AC duplicatam dicet proportionem: Sed triangulum album maius ADB eam ad nigrum refertur proportione, quà basis AB ad basim AC: Ergo duplica ad illud proportione refertur. *Minor* vero *argumenti* ostenditur, nimirum quod triangulum ADB ad nigrum referatur, vt basis AB ad basim AC. Quia triangulum maius album dicit eam proportionem ad nigrum, quam dicit ad triãgulum ACD; quia iam hæc duo triangula nigrum, & ACD probata sunt æqualia, sed ad triangulum ACD dicit proportionem, quam basis AB, ad basim AC ex prima huius, quod in eundem verticem D finiant, Ergo refertur quoque ad nigrum eâ proportione, quâ basis AB ad basim AC duplicatâ AB ad basim LN.

THEOR. II. PROPOS. XXI. Euc. 20

Similia polygona in similia triangula diuiduntur, & numero æqualia, & homologa totis, & polygona duplicatam habent eam rationem, quam habet latus homologum ad latus homologum.

SInt polygona similia album, & nigrum habentia angulos æquales singula alba singulis nigris, vt A angulo B, & C angulo D, &c. Sic & latera proportionalia circa angulos æquales V g. sit AC, ad BD, vt AQ ad BE. Dicit pro prima parte *hæc duo polygona diuidi in triangula similia, & numero æqualia*. Nam ducantur rectæ ab vno angulo ad alios oppositos, vt ab angulo D lineæ DE, DK, sic ab angulo C rectæ CH & CQ, eruntque triangula numero æqualia, vt patet. Probatur itaque, quòd hæc triangula sint similia: Nam primò DLK nigro est simile triangulum CGH albi polygoni. Ratio est quia angulus L niger est æqualis albo G, & circa illos latera, ex hypothesi sunt proportionalia. Ergo ex prop. 6. & def. 1. triangulum DLK, est simile triangulo CGH. Vnde etiam anguli reliqui erunt æquales V. g. apud K, & H in dictis triangulis, & ex propos. 4. huius latera DK, & CH, vtpote angulis æqualibus in æquiangulis triangulis oppositа erunt homologa, Ideo erit DK ad CH, vt LK ad GH. Sed ob similitudinem polygonorum, vt est LK ad GH, ita est KE ad HQ: Ergo ex æquo erit vt DK ad CH, sic KE ad HQ. Sic quoque angulus apud K totus est æqualis angulo toti H; pars quoque anguli K versus L est æqualis parti H versus G. Ergo reliqua pars DKE erit æqualis reliquę CHQ. Quare ex propos. 6. triangulum DKE nigrũ erit simile albo CHQ: quod angulum apud K habeat æqualem angulo apud H, & latera circa ipsos proportionalia, & sic de reliquis alijs argumentabitur.



Prob. 2. esse homologa totis. Nã triangula nigrum DLK, & CGH album sunt similia inter se, ideoque habebunt duplicatam rationem laterum homologorum DK, & CH ex præc. & etiam eandem habebunt duplicatam rationem triangula similia DEK nigrum, & CQH album, quod eodem latere DK, triangula nigra, & eodem CH triangula alba prædicta inexistant. Quare triangula DLK nigrum ad album CGH eam habebit rationem, quam triangulum nigrum DEK ad album CQH, vtpote eiusdem proportionis lateris ad latus duplicatam vt diximus Tract. 9. Def. 27. in fine, & idem fiet argumentum de reliquis. Cum ergo sint proportionalia triangula polygoni nigri triangulis albi, ita vt omnia fundamenta proportionum, seu antecedentia sint in vno, & consequentia, seu terminat in altero. Ex propositione verò 17. quinti, vt est

vnum antecedens ad vnum consequens, sic sunt omnia antecedentia ad omnia consequentia, erunt omnia triangula nigri polygoni ad omnia albi, nempe totum ad totū in eadem ratione, vt aliquod nigrum triangulum suo correspondenti albo.

Probatur tandem tertia pars; Quod polygonum ad polygonum sit in duplicata ratione lateris homologi ad latus homologum. Probatur inquam. Quia ita est polygonum nigrum ad album, vt triangulum V. g. DLK nigrum ad album simile CGH: Sed similia triangula laterum homologorum duplicatam habent rationem ex præced. Quare etiā polygonum nigrum ad album duplicatam habebit rationē laterum homologorū V. g. KL ad GH.

COROLLARIVM

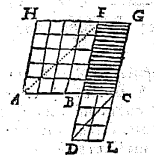
HInc est, quod si fuerint tres lineæ proportionales, vt est prima ad tertiam, ita esse polygonum descriptum simile super secundā ad polygonum super tertiam descriptum, vel polygonum super primam ad polygonum simile super secundam descriptum; quia enim prima linea ad tertiam duplicatam habet secundæ rationem: Polygonum verò super primam delineatum habet duplicatam primæ lineæ rationem ad polygonum super secundam formatum; patet 3. cùm sit eiusdem proportionis lineæ primæ ad secundam duplicata proportio primæ eiusdem lineæ ad tertiam, & polygoni super primā ad polygonū super secū dāduplicata quoq;, quòd erit eadē linee primę ad lineam tertiam, quam polygoni ad polygonum proportio.

THEOR. III. PROPOS. XXII. Euc. 23.

Æquiangula parallelogramma inter se eam habent rationem, quæ ex proportione laterum componitur.

QVantitas compositam respectu alterius habet rationem, cùm ne dum illam secundùm vnam proportionem respicit, sed secundùm plures, V. g. linea dicit proportionem ad aliam tanquam 10. ad 5. ita vt minorem superet medietate. Deinde hæc minor ad minorem se, dicit proportionem tanquam 5. ad 3. Illa itaque maior 10. partium æqualium habet ad lineam trium partium rationem compositam; nimirum eam, quæ est inter 5. & 3. & inter 5. & 10. ita, vt respiciat illam, ne dum superando eam medietate, vt superat 5. sed insuper eam superando duobus quintis vt 5. superat 3. vt diximus tract. 9. pr. part. def. 7. Dicit itaque Euclides, quòd *parallelogramma æqualium angulorum eam proportionem habent*, quæ ex lateribus componitur: nimirum aream rectilinei ABHE; ne dum esse maiorem rectilineo DC paruo proportione, quæ est inter AB, & BC hoc est dupla: sed & ea, quæ est inter EB, & BD, quæ est E. g. 5. ad 3. Quamobrem, si DC minus rectilineum continet 6. Rhombos, ne dum AE continebit 10. Rhombos, quæ est proportio 5. ad 3. Sed insuper alios 10. nimirum 20. quæ est proportio 2 & 1. Et ita Rhombus AE, dicit proportionem multiplicem, quia bis continet Rhombum DC, & insuper proportionem superparticularem bipartientem sextas, ideſt semel, & duas exelus sex partibus.

Potest etiam fieri comparatio inter AB, & BD latus pro vna proportione, & EB, & BC pro alia, & idem eueniet, vt sunt 20. 8. 6. vel 6. 15. 20. Primi namque proportionem habent, quam 5. ad 2.



& 4. ad 3. secundi vero proportionem habent, quam 2. ad 5. & deinde 3. ad 4. Vt autem propositionem demonstret, coniungit rectilinea ad apicem B, angulorum æqualium, ita vt in rectam vnam conueniant, vt fecimus supra propos. 10. latera reciproca AB, & BC sicut latus BD cum BE: prolungenturque eodem modo latera LC, & HE, donec sibi occurrant in G, & constituatur rectilineum nigrum BG.

Probatur rectilineum maius ex 1. huius dicit eam proportionem ad nigrum, quam dicit latus AB ad BC. Nigrum vero dicit eam proportionem ad minus, quā dicit EB ad BD, ob eandem altitudinē, sed ex pr. p. 5. def. 8. rectilineū maius ad minus dicit proportionē compositam ex sua proportione ad nigrum, & nigri ad minus: Ergo dicit etiam proportionem compositam ex lateribus AB ad BC pro prima proportione componente, EB, ad BD pro secunda.

COROLLARIVM I.

COllige, Quod eadem est ratio in triangulis habentibus vnum angulum alteri æqualem, vt est videre in triangulis BDC, & ABE, cùm enim triangulum sit medietas rectilinei in eadem basi, & eiusdem altitudinis sequitur, vt triangula eundem angulum habentia eodem pacto, ac rectilinea se habeant ad inuicē, cùm ita se habeat duplum ad duplum, sicut medietas ad medietatem ex propos. 18. lib. 5.

COROLLARIVM II.

* COlligitur quoq; quòd, cùm triangula omnia eiusdē altitudinis, & basis sint æqualia, sicut, & parallelogramma, sequitur quòd triangulum V. g. BCD se habeat ne dum ad triangulum ABE; sed etiam ad quodcunque aliud eiusdem altitudinis, & basis, vtpote illi æqualibus eodem modo; sicut, & quæcunque triangula eiusdem altitudinis, ac triangulum maius ABE, quia sunt ipsi æqualia, respicient BCD triangulum minus, & quòdcunque illi æquale, vt sunt ea omnia, quæ cùm hoc minori eiusdem altitudinis sunt, & basis eādem ratione: quare verum erit illud, quòd difficillori argumento demonstrat Commandinus, triangula inter se rationem habere compositam ex proportione basium, & altitudinum, & idem dicas de parallelogrammis.

EXPENSIO VII.

De similium figurarum notione, & effectione.

TOta hæc quæstio de figuris similibus cognoscendis est, & id ex quadruplici principio, seu loco, scilicet vel ex cognitione laterum; vel ex similis alterius comparatione, quòd duæ alteri sint similes, & ideo inter se; vel quòd pars similiter sit descripta, ac suum totum; vel tandem quòd figuræ ipsę similes efficiantur, & ideo in primis docet eas efficere, & datam figuram imitari.

THEOR. I. PROPOS. XXIII. Euc. 18.

A data recta linea describere rectilineum simile similiterque positum, ac alterum rectilineum.

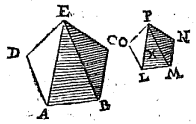
SIt rectilineum paruum X, cui oporteat super datam rectam AB describere rectilineum simile, similiterque positum, nimirum quod habeat angulos æquales, & latera proportionalia paruo rectilineo X.

Sic itaque faciendum est: resoluatur figura paruaX in triangula nigrius, nigrum, & album, siue etiam in plura, si pluribus lateribus, quàm assignata, constet. Deinde super AB ad A fiat angulus niger æqualis angulo nigro L, similiterque ad B fiat angulus alius niger æqualis angulo nigro M, & ex 27. primi angulus E niger angulo nigro P æqualis erit.

Rursus idem fiat super lineam AE faciendo angulum album ad A angulo albo ad L æqualem. Pariterque angulum album ad E angulo albo ad P æqualem; reliquusque D reliquo O æqualis erit. Tandem idem efficiatur de angulis nigerrimis ad B, & E; quæ æquentur angulis nigerrimis M, P, & C eueniet æqualis angulo N. Et ita rectilineum AB, rectilineo X erit simile, similiterque positum.

Probatur. Nam anguli eodem ordine æquantur, & latera proportionalia sunt. Ergo sunt similia.

Probatur itaque de angulis; quòd æquentur,



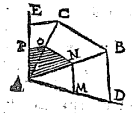
Nam pars alba ad A parti albæ ad L, sicut nigra alia A, & L nigra æquales sunt; Ergo totus angulus A toti angulo L æqualis erit. Idem philosophare de partibus anguli E, quæ partibus anguli P æquantur, sic de partibus B partibus M æqualibus, & hoc ex constructione: iamque probatum est angulum D angulo O, & angulum C angulo N esse æqualem; quamobrem omnes anguli eodem ordine in vtraque figura æquales sunt.

Probatur quoque de lateribus. Nam æquiangula sunt triangula ex constructione. Ergo, & latera erūt proportionalia ex 4. huius, prout æquales ambiunt angulos. Quapropter, vt se habet in proportione AB ad BE, & BE ad BC, ita se habet in triangulo paruo LM ad MP, & MP ad MN. Vnde ex æquo ita proportionabitur AB ad BC, vt LM ad MN; Et ex 4. huius, vt est BC ad CE, ita MN ad NP: Ergo hæc tria latera AB, & BC. & CE inuicem similiter se habent ac tria correspondentia in figura X, quæ sunt LM, & MN, & NP.

Idē autē prorsus argumētū valet de alijs tribus AB, & AD, & DE figuræ maioris, quæ eodem ritu probabuntur proportionalia tribus figuræ X; nimirum lateribus LM, & LO, & OP; Ergo rectilineū maius minori est simile, similiterque positum.

COROLLARIVM

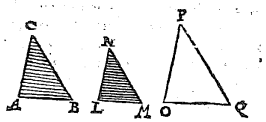
COllige ex Clauio angulos quoque æquales fieri diuidendo figuram in triangula, duo nigra, & album, & productis lineis diuidentibus AC, & AB sicut, & lateribus, anguli A, ex quo prodeunt AD, & AE singulis reliquis lateribus ON, MN, OP parallelas ducēdo DB, & BC, & CE. Ita enim triangula maiora inclusis, & minoribus (vt ex Coroll. propos. 4. erunt proportionalia V. g. album maius ABD, albo minori, ANM, &c. consequenter tota figura maior constans ex tr angulis similibus, similis erit figuræ minori inclusæ.



THEOR. II. PROP. XXIV. Eucl. 21.

Quæ eidem rectilineo sunt similia; & inter se sunt similia.

SInt duo rectilinea album, & nigrum nigerrimo LMN similia. Asserit *esse etiam inter se similia*.



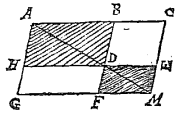
Probatur facliter. Nam duo anguli correspondentes A, & O sunt æquales angulo L. Ergo & inter se. Item B, & Q angulo M; item C, & P angulo N: vnde & æquales inter se: lateraque angulos æquales amplexantia ex 4. propos. huius erunt proportionalia. Siquidem CA est ad CB, vt LN ad NM, & LN est ad NM, vt PO ad PQ. Ergo ex æquo CA erit ad CB, vt PO ad PQ. Et idem dicas de alijs cruribus; atque adeò per definitionem. Similia erunt triangula nigrum, & album, quòd sint similia nigerrimo LNM.

THEOR. III. PROPOS. XXV. Euc. 24.

In omni parallelogrammo, quæ circa diametrum sunt parallelogramma, & toti & inter se sunt similia.

ADsit parallelogrammum AGMC, in quo ducatur diameter AM, & per quodlibet eius

punctum D ducantur duæ parallelæ ad latera GM, & MC; quæ sint BF, & HE. *Dicit parallelogramma, quæ circa diametrum sunt nigrum, & nigerrimum esse inter se similia.*



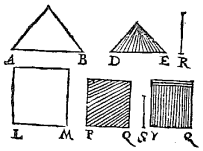
Probatur, quia constituuntur triangulis, quę parallelæ auferunt. Vnde ex Coroll. propos. 4. huius, triangula ea erunt similia triangulis totius, V. g. parallelogrammum maius nigrum constituitur duobus triangulis æqualibus ex prop. 41. l. 1. sed quorũ quodlibet, vt ABD est simile vni ex duobus triangulis, ex quibus constituitur totum, idest triangulo ACM ob parallelam BD ipsi CM: triangulum quoque nigerrimum minoris DEM simile est eidem toti triangulo AMC. Ob parallelam DE, ipsi AC, Ergo parallelogramma quoque nigerrimum, & nigrũ, vtrobique eis triangulis dupla erunt similia toti Quare & similia inter se erũt ex præced. vel ex 16. lib 5. quæ enim vni tertiæ sunt eędem rationes, & inter se sunt eædem rationes.

THEOR. IV. PROP. XXVI.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & ab eis rectilinea similia, similiterque descripta proportionalia erunt.

Et si à rectis lineis similia, similiterque descripta rectilinea proportionalia fuerint, etiam ipsæ lineæ proportionales erunt.

PRima pars huius Theorematis est. Quod si sint quatuor lineæ, cuius antecedẽs AB in prima cõbinatione ad sequentẽ DE ratione referatur simili rationi, quâ in posteriori combinatione refertur LM antecedens ad sequentẽ PQ, & consti-



tuantur super rectas primæ combinationis duo rectilinea inuicem similia, similiterque posita V. g. duo triangula album, & nigrum. Rursusque super rectas secundæ combinationis alia rectilinea diuersi, etiam generis à primis; sed tamen inuicem similia, similiterque descripta V g. duo quadrata album, & nigrum. Affirmat, *quod hæc rectilinea erunt proportionalia*, ita, vt, sicut triangulum album ad nigrum referatur, ita quadratum album ad nigrum referatur, quod vt probetur.

Inuenienda est tertia proportionalis rectis primæ combinationis, quæ erit R. Sicut, & posterioris combinationis reperienda est tertia proportionalis S, secundum documenta 14. propos. huius hoc posito.

Probatur ex propos. 21. Coroll. vt est basis AB ad tertiam proportionalem R, ita est triangulum album ad nigrum.

Pariterque vt est latus LM ad tertiam proportionalem S ita ex eodem Coroll. est quadratum album ad nigrum.

Sed basis AB trianguli dicit ad suam proportionalem R similem proportionem, quam dicit LM ad S. Ergo, & triangulum album respicit nigrum eâ proportione, quâ quadratũ albũ respicit nigrũ.

Minor argumenti constat ex 23. quinti nimirum quod AB sit ad R veluti LM est ad S. Quoniam, cùm R, & S sint tertiæ proportionales, ex *a*mo; argumentando, eam proportionem, quam dicet AB ad suam proportionalem R, eandem dicet LM ad suam tertiam proportionalem S: Quoniam dicebant eandem proportionem ad suas sequentes DE, & PQ, ex hypothesi.

Secunda vero pars vertit primam, & præsupponit ad probationem inueniendam tribus AB, nimirum DE, & LM quarta proportionalis YZ; super quam constituendum est rectangulum simile, similiterque positum; ac rectilineum LM, de quo probandum est priùs, quòd sit æquale rectilineo PQ, ad hoc, vt conuertatur propositionis prima pars, & probetur, quòd rectilinea rectilineis similibus, & similiter descriptis proportionalia, lineis constent proportionalibus.

Probatur autem, quòd sint æqualia duo quadrata nigra. Quia ad ipsa dicit eandem proportionem quadratum album; quam dicit AB ad DE, & quidem ad quadratum nigrum PQ ex suppositione; ad quadratum verò YZ ex eo quod sit super quartam proportionalem YZ, vt ex antecedenti probatione huius propositionis constat, vnde erit triangulum album ad nigrum, ita quadratum album ad nigrum eo quia sit AB ad DE vti LM ad YZ. Quare ex propos. 9. quinti cum eisdem quadratis nigris eandem dicat proportionem album quadratum, erunt æqualia quadrata nigra.

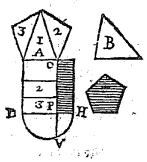
Probatur modo secunda pars propos. Duo quadrata nigra sunt in duplicata ratione suorum laterum ex 20. huius; sed hæc probata sunt æqualia; Ergo, & latera PQ, & YZ erunt æqualia. Sed latus LM dicit eandem proportionem ad latus YZ; quam basis AB ad basim ED. Ergo etiam eamdem dicit proportionem latus ML ad latus PQ, quam basis AB ad basim ED.

THEOR. V. PROPOS. XXVII. Euc. 25

Dato rectilineo simile, similiterque positum, rectilineũ & alteri dato æquale constituere.

SIt datum rectilineum A V. g. pentagonum, cui constituendum sit rectilineum simile, similiterque positum: sed alteri dato æquale V. g. triangulo B. Itaque secundùm doctrinam propos. 43. primi rectilineum parallelogrammum DC æquale rectilineo A cõstituatur super latus quodlibet eiusdem rectilinei imitandi A, & huic rectilineo parallelogrammo fiat aliud nigrum simile super latus alterum CP idest CH; sed æquale rectilineo B. Inuenientur ergo lateribus DP, & PH parallelogrammorum nigri, & albi, quæ æqualia non sunt, media proportionalis ex propos. 16. huius PV, & super hanc PV rectilineum constituatur nigrum simile priori iuxta regulas propos. 23. & hoc erit illud, quòd quæritur.

Nam pentagonum nigrum, iam fecimus simile, similiterq; constitutũ dato A. Quare solum remanet demonstrandum; quòd triangulo B sit æquale, Id verò ostenditur. Nam est æquale rectangulo nigro CH, sed hoc est æquale *proxime fecimus* triangulo B. Ergo, & pentagonum nigrum est æquale triangulo B.



Maior probatur. Nam dicit eandem proportionem pentagono A; quam dicit rectilineum CH; quæ verò eidem eandem dicunt proportionem, inuicem æqualia sunt ex propos. 9. quinti.

Quod verò nigrum pentagonum, & nigrum parallelogrammum dicant eandem proportionem pentagono A ostenditur: Nam dicunt eandem proportionem, quam parallelogrammo DC: Sed hoc pentagono A est æquale. Ergo, & pentagono A, ex 7. quinti eandem dicunt proportionem.

Probandum est. Quod parallelogrammo DC eandem dicant proportionem nigrum pentagonũ, & nigrum parallelogrammum. Nigrum parallelogrammum ad parallelogrammum DC ea proportione refertur ex prop. 1. huius, cum sint eiusdem altitudinis, qua bases DP, & PH. Sed ea proportione, quâ referuntur bases DP, & PH, pentagonum nigrum ad idem parallelogrammum refertur: Ergo refertur ad CD proportione eâdem pentagonũ nigrum, qua rectangulum nigrum CH.

Patet hæc *minor* figuræ similes, similiterque positæ super primam, & mediam lineam referuntur, vt refertur prima ad tertiam ex Coroll. prop. 21. Sed pentagonum nigrum est positum super mediam PV: ergo dicit ad pentagonum A, cui simile est, & similiter positum eam proportionem, quam dicit prima PH ad tertiam DP. Sed pentagonum A ex constructione est æquale parallelogrammo DC. Ergo ad hoc parallelogrammum dicit ex 7. quinti eam proportionem, quam prima, quæ est basis HP dicit ad tertiam, quę est basis PD; quod erat tandem probandum. Quare pentagonum nigrum ad parallelogrammum album referetur, vt PH ad DP, sed taliter etiam nigrum parallelogrammum ad albũ maius refertur: Ergo nigro parallelogrammo nigrum pentagonum erit æquale; quare, & ipsi B triangulo.

EXPENSIO VIII.

De similium figurarum additione, & subtractione.

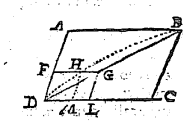
PRimo parallelogrammorum deficientium, vel abundantium proprietates ponit, ex inde docet addere, vel subducere alicui parallelogrammo, & applicare datæ lineæ, vel cum defectu, vel cum excessu, vt placet, deseruitque hæc doctrina maximè lineis irrationalibus, de quibus lib. 10. agit Euclides.

THEOR. I. PROPOS. XXVIII. Euc. 26.

Si à parallelogrammo parallelogrammum ablatum sit simile toti, & ei similiter positum, communem cum eo habens angulum; hoc circa idem diametrum, sicut totum, consistit.

DIcit. Quod, si à maiori parallelogrammo ABDC auferatur parallelogrammum minus DFGL, quod deinde ipsi accommodetur, vt angulus super æqualem angulum situs sit, vt vides in D. Dicit hoc paruum parallelogrãmum consistere circa diametrum totius DB; quod probat per reductionem ad impossibile.

Nam si dicatur. Quod DG, & GB in vnam re-



ctam non conueniant, & ideo, quòd non possit esse diameter idem trahatur diameter, & sit punctata, quæ transeat non in G, sed per aliquod aliud punctũ. Itaque E.g. trãsibit per H, & tracta HM parallelogrammum FHDM erit simile toti DABC ex 25. huius, quia ex aduersarijs circa diametrum sunt: Quamobrem latera inuicem erunt proportionalia, ita vt quâ proportione DA respicit latus totius DC, sic latus minoris DF respiciat DM; sed & idem latus DF respicit DL eadem proportione, quâ DA respicit DC; quia parallelogrammum FGDL est simile toti ex 25. huius: Ergo cùm ad idem DF eandem dicant proportionem ex 9. quinti essent æquales DM, & DL pars, & totum. quod repugnat.

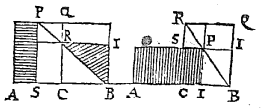
THEOR. II. PROPOS. XXIX. Euc. 27.

Omnium parallelogrammorum secundùm eandem rectam lineam applicatorum deficientium figuris parallelogrammis similibus, similiterque positis, parallelogrammum maximum est id, quod à dimidia describitur, dummodo defectus quorumcunque aliorum similes existant defectui, quo deficit parallelogrammum prædictum à dimidia descriptum.

DEtur recta AB, cui applicetur parallelogrammum nigrum AP deficiens ad complendam, occupandamque totam lineam AB portione PB. Asserit, quod, si huic deficientię PB super dimidiam CB constitutum sit simile parallelogrammum, quale est ex prop. 25. huius RB, cum sit circa diametrum BP deficientis superficiei. Asserit inquam istud parallelogrammum ex dimidia, sed deficienti superficiei simile, esse maius parallelogrammo nigro AP, & quocunque alio cum dictis conditionibus facto.

Probatur pars AS nigri parallelogrammi fig. ad

dexteram est equalis parti CI parallelogrâmi BR ex medietate descripti BR : Reliqua verò pars C P



parallelogrammi nigri, cùm sit complementum æquatur, & suppletur per aliud complementũ PQ; quod ex prop. 35. l. 1. ei est æquale, ergo rectilineũ ex medietate ER superat parallelogrammum nigrum AP reliquo parallelogrammo RP. Ita etiam euenit; si parallelogrammum nigrum AP fieret altius paralelogrâmo ex medietate descripto BR, dummodo hoc parallelogrammum, vt supra dixi, esset simile defectui BP, nempe existens circa diametrum superficiei deficientis nigro rectilineo ad occupandam totam lineam AB, vt potes videre in altera figura.

Probatur eodem modo. Nam AQ est æquale parallelogrammo BQ; ablatis itaque ab vtrisque complementis æqualibus IQ, & SR. remanebunt æquales, adhuc residuæ partes, nimirum hinc seminigra BR, inde parallelogrammum AP nigrum adiuncto ei paruo rectilineo PR: Ergo nigrum parallelogrammum AP est minus seminigro RB & deficit ab eius equalitate hac portione ei additâ RP.

PROB. I. PROPOS. XXX. Eucl. 28.

Ad datam rectam lineam applicare parallelogrammum æquale dato rectilineo deficiens tali superficie parallelogrammâ, quæ sit similis alteri parallelogrammo dato. Dummodo datum rectilineum, cui æquale applicandum est, non sit maius eo, quod à dimidia describi quiret, simile defectui dato.

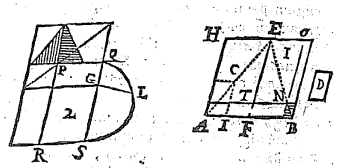
SI tibi exibeatur recta linea AB, ad quam applicandum sit parallelogrammum æquale triangulo nigro; sed quòd deficiat ad totam lineam cõplendam in sua superficie, portione tali, quæ sit similis alteri datæ D.

Est primo aduertendum, quod hoc triangulum non debet esse maius; quàm illud rectangulum, quod describeretur à medietate: namque deffectus deinde non posset similis rectilineo dato D constituì; quòd, vt probauimus in preced. propos. rectilinea applicata, quæ deficiunt simili defectu rectilineo dato ea, quæ sunt super medietatem, sunt maxima omnium. Vnde si esset rectilineum maius, quàm quod super medietatem posset fieri, deinde deffectus similis non esset rectilineo dato.

Præceptum 1. Describatur itaque super A B rectilineum D, quod sit punctatum A C, tractoq; diametro EA indefinitè, erigatur à puncto medio F parallela lateri punctato CI, quæ occurrat diametro EA in E, fiatque totum rectilineum AFHE super medietatem: de quo primo videndum est: an sit æquale triangulo nigro per operationem, quam vides, & quam docuit Euclides propos. 41. primi. Siquidem facto rectilineo PG in dato angulo A secundum longitudinem lineæ AF, æquale triangulo nigro, prolungatisque lateribus RP, & QS, transferendum est rectilineum AE ex medietate super illud: nam si excedatur à rectilineo PG, operatio non potest fieri, vt dictum est: si eidem rectilineo commensuretur, & sit ei æquale, nihil aliud exposcitur, factum enim est, quod quæritur, & defectus EB erit similis rectilineo dato D, at si maius sit rectilineo PG.

Præceptum 2. Tunc ex doct. propos. 27. huius inueniatur excessui inuento GR parallelogrammum æquale EN, & ad id reperiatur inter QG latus rectilinei triangulo æqualis, & latus GS latus excessus media proportionalis GL, super quam trasiatam in EO fiat parallelogrammum EN simile, similiterque positum, ac defectus EB; producãturque latera ON, & NT. Iamque erit applicatum lineæ AB rectilineum AN æquale triangulo nigro; sed quod deficit rectilineo nigro NB similis rectilineo D.

De quo duo probanda sunt. Primum, quòd sit simile rectilineo D defectus niger NB: secundo, quòd rectilineum AN sit æquale triangulo nigro.



Prog. 1. Similitudo itaque probatur. Quia figura deficiens EB est similis figuræ ex medietate AHEF, quæ est contermina. Sed hæc facta est similis figuræ D, Ergo etiam illa deficiens EB similis erit figuræ D. Sed huic quoque est similis deficiens figura minor inclusa TO, Ergo, & reliqua nigra BN. Patet consequens, quia ex prop. 28. h. est circa idem diametrum totius BE, quæ verò circa diametrum sunt ex propos. 25. huius, & toti, & inter se sunt similia.

Progress. 2. Quod verò parallelogrammum AN, æquale sit triangulo nigro, Probatur. Nam AN est æquale rectilineo PG, in 2. fig. Sed illud PG est æquale triangulo nigro ex constructione: Ergo, & rectilineum AN est æquale triangulo nigro.

Probatur maior propositio. Quòd parallelogrammum AN æquale sit rectilineo PG, nam est æquale gnomoni TBO. Sed hic est equalis rectilineo PG, quòd sint gnomon TBO, & PG residua ex æqualibus vt EX I, & 2. præcep. PS, & BE. Ergo AN est quoque ei PG æquale. Quod verò AN sit æquale gnomoni ostenditur. Nam pars FN, cùm sit complementum, est æqualis parti NO, ex prop. 35. primi. Pars autem AT, cum sit super equalli basi, & inter easdem parallelas est æqualis ex prop. 37. primi alteri parti TB. Ergo AN æquatur gnomoni TBO. Quapropter, cum AN rectilineum applicatum lineæ AB sit æquale gnomoni TBO; hic verò gnomon TBO sit æqualis rectilineo PG, quòd, vt dixi, ambo residua sint æqualium EN, & GR rectilineorum ab æqualibus EB, & PS ablatorum. Rectilineum verò PG sit æquale ex effectione triangulo nigro; Etiam AN rectilineum erit ei nigro triangulo æquale, applicatum autem erit lineæ AB, & deficiet rectilineo nigro NB simile rectilineo D.

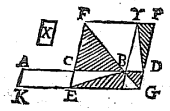
PROB.

PROB. II. PROPOS. XXXI. Eu. 29.

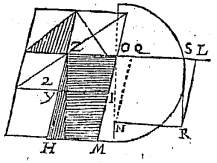
Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare excedens figura parallelogramma, quæ similis sit parallelogrammo alteri dato.

EXibita tibi sit linea AB, ad quam oporteat applicare æquale triangulo seminigro parallelogrãmum excedens ipsam figura parallelogramma, nimirum GB, quæ similis sit parallelogrammo alicui dato V. g. X.

Constituatur itaque super dimidiam AB, ideſt CB parallelogrãmum CFYB, sed simile parallelogrãmo X, similiterque positum; quo facto reperiatur quadratum æquale huic parallelogrammo, simulque triangulo seminigro; quod exequemur, vt vides in secunda figura, primo ex doct. 44. primi constituendo in dato angulo rectilinei X super latus ZO æquale lateri CB rectilineum nigrum ZOIY æquale triangulo seminigro, & iuxta illud ponemus rectilineum YHMI simile, & æquale rectilineo CYEB. Hoc enim poterimus facere ex propos. 44. primi propter æqualitatem angulorum correspondentium, & lateris YI, quo facto OH totũ redigemus in rectangulũ punctatũ æquale ex propos. 37. primi, vtpote inter easdem parallelas, & super eandem basim. Huic verò rectangulo faciemus quadratum equale ONRS ex prop. 16. secundi. Tandemque huic quadrato fiat rursus parallelogrammum æquale ex prop. 37. vel ex prop. 43. primi; sed simile, similiterque positum, ac parallelogrammum X, scilicet QNRL.



Hoc itaque parallelogrammum simile est alteri seminigro CY ex medietate facto simile, similiterque posito, vt X; sed tamen maius, quòd ne dum huic CY rectilineo seminigro, sed etiam triangulo seminigro æquale sit. Quare ob similitudinem, & similem positionem poterit describi super BF; ita vt excessus sit versus Y, & E, & excedat tribus partibus seminigris gnomonis CGY, vt perspicuum est. Tracto itaque latere AK parallelo ipsi AB, & CF producto in B, erit parallelogrammum KD, requisitum; quod erit æquale triangulo seminigro excedens datam lineam AB figura seminigra BG simili rectilineo dato X.



Probatur, vt in anteced. propositione AG rectilineum est æquale gnomoni CGY; quoniam pars KC est æqualis parti EB, vtpotè duo dimidia totius KB, & ideo complemento HP æquali ipsi EB. Sed gnomon CGY est equalis triangulo seminigro: Ergo AG rectilineum est æquale triangulo seminigro.

Quod autem gnomon sit æqualis triangulo seminigro, ostenditur: nam est æqualis rectilineo YO nigro, quod EP, & HO duo tota sint æqualia, & CY, MY duę partes eorũ sint æquales, ex constructione. Ergo gnomon CGP, & rectilineum YO partes remanentes ex totis æqualibus erunt æquales. Cum itaque gnomon CGY, & rectilineum YO sint æqualia. Rectilineum verò YO ex constructione sit æquale triangulo seminigro. Ergo, & AG rectilineum applicatum æquale gnomoni, & ideo rectilineo nigro YO erit tandem æquale triangulo seminigro.

Patet autem; quod excedat lineam AB datam, rectilineo BG simile rectilineo X; quod totum EP sit ex constructione ei simile; ergo talia erunt etiam rectilinea circa diametrum ex propos. 28. huius. Circa verò diametrum reperitur BG rectilineum.

EXPENSIO IX.

De laterum figurarum proportionali potentia.

LIcet supra egerimus de potentia proportionalium linearum, quam habent ad constituendum alteri æquale rectilineum; non tamen lineas consideravimus, vt in aliqua figura existentes ad constituendum rectilineum proportionale. Modo hic eas consideramus, vt latera alicuius figuræ proportionalis alteri quacumque proportione. Et primo considerabimus, tanquam latera trianguli rectanguli; deinde tanquam latera alicuius quadrati, vt fecimus secundo libro. Euclides quidem hoc 6. libro de solâ potentia agit trianguli rectanguli, de potentia verò laterum alicuius quadrati lib. 12 tractat, sed nos existimauimus hic esse propriũ earũ propositionum locum.

THEOR. I. PROPOS. XXXII. Euc. 31.

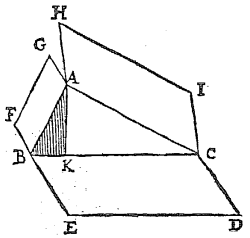
In rectangulis triangulis figura quælibet à latere angulum rectum subtendente descripta æqualis est figuris sibi ipsi similibus, similiterque positis, quæ à lateribus describuntur.

TRiangulum sit rectangulum ABC. Describaturque super BC quæcumque figura rectilinea BD, cui similes, similiterque positæ constituantur super crura BA figura BG, & CA figura CH. Dico figuram BD super basim esse æqualem figuris super crura BG, & CH.

Prob. Sicut est ex CA quadratum prima quantitas ad quadratum ex CB secundam quantitatem in prima serie; ita est rectilinea CH prima quantitas ad rectilineum BD secundam quantitatem in posteriori serie (debes autem imaginari super latera rectanguli descripta quadrata l. id. fig. non exprimat.)

Hoc autem patet; quòd similiter quadrata, & figuræ

figuræ se habeant, eo quòd sit ex prop. 21. quadratum ad quadratum, vt figura ad figuram; quia sunt

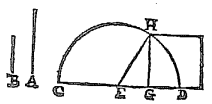


eorum proportiones duplicatæ eiusdem proportionis laterum AC ad CB. Et ob hanc eandem rationem quadratum ex BA in prima serie tertia quantitas ad quadratum ex BC in eadem serie secundâ quantitatē est, sicut rectilineum BG tertia quātitas seriei posterioris ad BD rectilineum item secundam quantitatem eiusdem seriei posteriosis. Qua propter ex propos. 25. lib. 5. Composita prima quantitas cum tertia prioris seriei, nempe quadrata ex CA, & BA erit ad secundam; nimirum quadratum ex BC, vt in posteriori serie prima quātitas rectilineum CH cum tertia quantitate rectilineo BG simul sumpta ad rectilineum BD. Sed quadrata ex BA, & AC dicunt proportionem æqualitatis quadrato ex BC ex 11 l. 2: Ergo etiā rectilinea BG, & CH dicent proportionem æqualitatis rectilineo BD ex BC.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Datis duabus lineis inæqualibus reperire, quid possit plus maior, quam minor in ordine ad similes figuras constituendas.

DEntur duę lineæ A maior, & B minor. Accipiatur alia quædā dupla maioris, vt CD, & eâ diuisâ per medium in E, eo in puncto centro facto, interuallo eius medietatis ED, ducatur semicirculus. Inde à centro E mensurata longitudine minoris datæ B vsque ad G, ibi erigatur perpendicularis, & deducatur vsque ad circumferentiam, & punctum contactus H centro E rectâ EH coniungatur. Dico enim, quòd si fiat figura ex CH similis figuræ ex A effectæ *illud est spatium, quo figura ipsa ex A effecta superat figurā sibi similem ex linea B erectam*, & Ideo quod A est in potentia maiori, quàm B ad quamcunque figuram constituendam cuiuscunque formæ, seu magnitudinis tota linea GH.



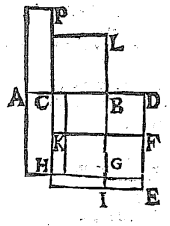
Probatur ex propos. præced. Subtensa angulo recto G, scilicet HE, est æqualis lineæ datæ A, ideo quòd singulæ sint æquales radio EC, & A quidem ex constructione; HE verò, quòd sit radius. Quare eius figura similis, similiterque posita, erit æqualis duobus figuris similibus, similiterque positis ex GH, & ex EG. Quamobrem figura ex A æqualis figuræ ex EH simili, similiterque posita erit maior figurâ ex EG, & ideo ex B sibi æquali totâ figurâ ex GH simili, similiterque posita; quod erat probandum.

THOR. III. PROPOS. XXXIV. Eu. 13.

Si recta linea secetur secundùm mediam, & extremam rationem, maius segmentum, cum dimidio totius iunctum, quintuplum potest efficere quadratum maius, quàm à dimidia totius describitur.

SEcetur recta AB in C media, & extrema ratione. Sitque maius segmentum BC; Prolongetur in D, & sit BD dimidia totius AB. Dico *quadratum ex CD; nimirum CE ex maiori segmento, & dimidio totius esse quintuplum maius, quàm quadratum ex sola dimidia BD, quod est BF.*

Probatur. Quadratum AG, ex AB totâ effectum, & ideo dupla lineæ BD, est quadruplum quadrati ex ipsa dimidia BD, ex propos. 6. l. 2. Et huic quadrato æqualia sunt rectangula duo, vnum AH sub tota, & minore segmento, alterum CG ex tota, & maiore segmento ex prop. 4. l. 2.



Primo quidem rectangulo AM, vel AP ex tota, & minore segmento æquale est quadratū ex maiore segmento CB, quòd est CL, vel KI ex propos. 15. l. 2. Alteri verò rectangulo CG, ex tota, & maiore segmento sunt æqualia duo rectangula ex CB, & BD qualia sunt BK, & KG ex maiori segmento, & dimidiâ totius effecta, & ideo æqualia inuicem. Loco tamen rectanguli KG substituamus æquale FI, quod sitcom plementum rectanguli BK in quad. CF, & ideo ex prop. 35. l. 1. ei æquale, & hinc æquale, rectangulo KG. Igitur quadratum AG ex tota est æquale rectangulis duobus ex maiore segmento, & dimidia BK, & FI, & quadrato CL, ideſt æquali KI ex segmento maiori. Ideo hæc omnia erunt quadruplicia quadrato ex dimidia BF, vt est ostensum, tale esse quadratum AG, cui æquantur. Adde omnibus istis simul rectangulis BK, & FI, & quadro KI quadratū BF ipsum ex dimidia BD, & omnia erunt quintuplicia ipsius quadrati BF. Hæc autem omnia simul, nempe duo rectangula cum duobus quadratis, ex dimidia, & ex maiore segmento faciunt ex 6. l. 2. quadratum ex CD, ideſt CE erectum super segmento maiori CB, & addita medietate BD; hoc est super CD: Ergo hoc quadratum erit quintuplum quadrati BD.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. XXXV. Eu. 3. l. 11.

Si recta linea secundùm mediam, & extremam rationem sit secta, minus segmentum dimidio maioris additum; quintuplum potest eius, quod à dimidio maioris segmenti describitur.

SIt data recta AB secta secundùm extremam, & mediam rationem in C; Sitque minus segmentū AC, cui adijciatur dimidium DA maioris CB Dico DC posse efficere *quadratum quintuplo maius, quàm AD.*



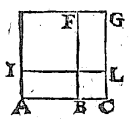
* Probatur. Ita proportionatur tota AB ad CB maius segmentum, vt CB ipsum ad AC.

Qua de re ex 18. l. 5. etiam medietas totius ad medietatem segmenti maioris se habebit, vt segmentum maius CB ad minus CA, & ideo conuertendo minus CA ad maius CB segmentum se habebit, vt dimidiū AD segmenti maioris ad dimidium AI totius AB. Vnde ex 17. lib. 5. minus CA cum dimidio maioris segmenti se habebit eodem modo ad maius CB cum dimidio AI totius AB, vt segmenti maioris dimidiū AD ad dimidium totius AI. Ideoque etiam quadrata harum linearum taliter se habebunt ex prop. 26. h. Atq; adeo erit quadratum segmenti minoris simul, cum dimidio maioris segmenti, tanquam vna linea, & latere ad quadratum maioris segmenti cum dimidio totius lineæ AB tanquā vno latere, vt quadratum dimidij DA segmenti maioris ad quadratū dimidiæ totius AI. Ergo etiā permutando erit quadratum minoris segmenti cum dimidio maioris, tanquam vno latere, ad quadratum dimidij segmenti maioris, vt quadratum maioris segmenti cum dimidio totius, tanquam vno latere ad quadratum dimidię totius: sed hoc quadratum ex precedenti est quintuplum quadrati dimidiæ totius. Ergo etiam quadratū ex DC minore segmento, & dimidio maioris effectum erit quintuplum quadrato segmenti DA dimidij maioris, quod erat probandum.

THEOR. V. PROPOS. XXXVI. Eu. 4. l. 11.

Si recta linea secetur secundùm extremam, & mediam rationem; Quod à tota, quodque à minore segmento vtraque simul quadrata tripla sunt eius, quod à maiore segmento describitur quadrato.

SIt AC secta secundum mediam, & extremam rationem in B. Dico quadratum AG totius AC, & quadratum BL minoris segmenti esse tripla



quadrato IF maioris segmenti.

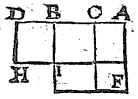
Probatur. Nam ex 17. lib 2. Rectangulum sub tota AC, & minore segmento BC, nimirum AL, est æquale quadrato maioris segmenti IF, Itaque IF, vtpote pars quadrati AG iam æquat se met, vtpote quadratum maioris segmenti, & insuper quadratum AC ex tota continet rectangulum AL ex tota, & minore segmento ipsi IF quadrato maioris segmenti æquale. Et insuper FL rectangulum, cui, si addas quadratum minoris segmenti BL, erit æquale rectangulo AL, & consequenter AC quadratum cum BL iam tertio æquat quadratū IF maioris segmēti. Vnde quadratum totius CA cum quadrato BL minoris triplum faciunt quadrati à maiore segmento descripti, quòd propositum fuit.

THEOR. VI. PROP. XXXVII.

Si recta linea secundum extremam, & mediam rationem secetur. Apponaturque ei æqualis maiori segmento; hoc sit minus segmentum respectu totius maioris, quæ modo se habet tanquam maius segmentum.

SIt AB secta secundùm extremam, & mediam rationem in C, addaturque ei DB æqualis maiori segmento. Dico *quod DA est recta quoque secundùm mediam, & extremam rationem in B: est q; minus segmentum DB, maius verò BA.*

Prob. Rectangulum IF contentum sub tota, & minore segmento ex 15. l. 2. est æquale quadrato



DI maioris segmenti DB additi. Adde itaque vtrisque spatium, quod eis est cōmune: Eruntq; æqualia rectāgulum AH, & quadratum BF. Rectangulum verò continetur sub tota DA, & maiore segmento DB addito. At quadratum ex linea BA, quæ erat à principio. Ergo ex 17 l. huius ita erit DA ad BA, vt BA ad BD; Ideoque DA erit secta extremâ, & mediâ ratione.

COROLLARIVM

QVare ita potens erit AB, cum dimidio DA ad quintuplum quadrati dimidij DA ex pr. 34. huius, & ex propos. 35. dimidium AB cum DB simul quintuplum poterit dimidij AB, & ex præced. DA, & BD distinctæ poterunt duo quadrata simul triplum quadrati ex BA.

THEOR. VII. PROPOS. XXXVIII.

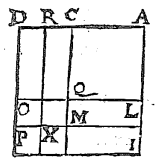
Si recta linea media, & extrema ratione secetur, & ei adiatur minus segmentum; Quod tota cum hac additione potest efficere quadratum, quintuplum est eius, quod à maiore segmento efficitur.

SIt linea AR secta in C secundùm mediam, & extremam rationem & addatur ei minus segmentum DR. Dico totum DA quintuplo maius efficere quadratum; quàm CA maius segmentum.

Probatur. Quadratum AQ, vt sæpius dixi, ex maiore segmento, & rectangulum CX ex tota RA, & minore segmento RC æquantur inuicem. Hoc

autem

autem rectangulum ter sumptum, vt CX, & XI & PB, cum quadrato AQ quater æquant AQ; adde tandem rectangulum ML cum quadrato PX, & addes æquale vni ex prædictis partibus CX: Cùm LM æquet RQ, rectangulum, & PX quadratum XQ; vnde totum erit æquale rectangulo toti CX ex tota, & minore segmento; & propterà quinta quàtitas erit æqualis quadrato QA: Sed hæc omnia rectangula cum duobus quadratis æquant quadratũ AP totius AD, vt constat ex prinpos. 1C. lib 2. Ergo quadratum ex DA quintuplum est quadrati ex CA.



EXPENSIO VIII.

De proportionibus circuli, & partibus ipsius.

QVamuis Euclides vnicam propositionem de Circulo solùm adferat, adhuc plures, illasque elementares esse necessarias, experimentum docet. Cum & ea, quæ de parallelis in Cosmographia, & de figuris Isoperimetris, & multa alia, hæc fundamenta expoſcant. Et sanè cùm 3. lib. multa de æqualibus circulis, angulis, figuriſq; circulo inscriptis dicta sint, hic etiam de proportionalibus circuli partibus lautiùs agendum videbatur.

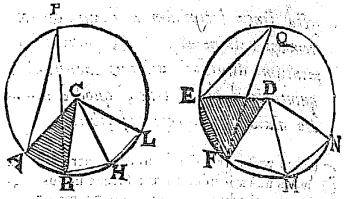
THEOR. I. PROPOS. XXXIX. Eucl. 33.

In æqualibus circulis anguli eandem habent rationem cum peripheriis, quibus insistunt, siue ad centra, siue ad circumferentias constituti sint. Insuper, & sectores.

SInt duo circuli æquales, quorum centra C, & D, sintque in ipsis duo anguli nigri ad cẽtra subtendentes arcus, AB, & EF; sectoresque ACB, & EFD. Dicoque itaque *ita esse angulum nigrum apud* C, *ad angulum nigrum apud* D, *vt arcus* AB *ad arcum* EF, *& vt sector* ACB, *ad sectorem* EDF. Ducantur AB, & EF rectæ & in circulo vtroque aliæ istis subtensis æquales accommodentur in circulo C lineæ BH, & HL, &c. vsque dum placet, & in circulo D, aliæ tot numero, ac præcedentes; sed æquales EF, eruntque arcus subtensi, circuli quidem C æquales arcui AB ex 32. tertij, & ex 26 anguli quoque albi apud C nigro C, vt singuli albi circuli D erunt æquales nigro, D necnõ, & arcus subtensi FM, & MN erunt æquales arcui EF.

Probatur itaque propos. Quam multiplex est aggregatum angulorum apud C, quod est ACL, anguli nigri C, tã multiplex est arcus AL, arcus AB, & sector ACL sectoris nigri. Item quam multiplex est aggregatum angulorum EDN. anguli nigri D in circulo D, tã multiplex est arcus EN arcus EF, & sector EDN sectoris nigri.

Quare, si angulus ACL sit æqualis angulo nigro, etiam arcus subtensus AL arcui AB æqualis erit: si maior angulus, maior erit arcus, si minor angulus minor quoque arcus. Et ita dicas de angulo EDN, & arcu EN; si enim angulus EDN æquet nigrũ angulum D, arcus EN æquabit EF arcum, si minor sit, erit minor, excedet si excedat, vnde ex def. 9. Tract. 9 si angulus nig. C ponat prima quãtitas, & D secunda & terminus in priori combinatione; At in posteriori, Arcus AB circuli C pro fundamento, & arcus EF circuli D pro termino: fundamenta, nempe angulus, & arcus circuli C. aquali passu excedent terminos, ideſt angulum, & arcum circuli D, æquabuntur, vel deficient, & hoc iuxta quamlibet multiplicationem. Quare ex illa definitione sicut est prima magnitudo ad secundam, nempe angulus niger apud C ad nigrum apud D, ita ast arcus AB, ad arcum EF.



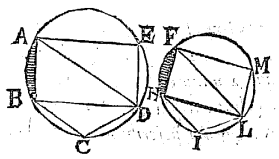
Et eodem argumento probabitur de sectoribus; quòd ita sit sector ACB, ad sectorem EDF, vt angulus niger in C ad angulum nigrum apud D quòd vt faciunt arcus, vnà cum angulis crescant, decrescant, & æquentur. Et quia anguli ad circumferentias dimidij sunt angulorum ad centrum, ex prop. 9. tertij ita erit ex 17. quinti, angulus ad circumferentiam P ad angulum ad circumferentiam Q, vt arcus AB, ad arcum EF, &c.

THEOR. II. PROPOS. XL.

Quæ in circulis similia polygona inter se sunt, vt à diametris quadrata.

SInt Polygonum in circulo ABCDE, & FHILM in minori circulo; Dico *ita esse polygonum* super AB ad polygonum super FH, vt quadratum ex diametro AD, ad quadratum ex diametro LF.

Ducto enim diametro AD, & FL, nec non, &



BD subtensâ, & HL, erunt triangula BDA, & FHL similia, cùm sint in similibus segmentis ob similitudinẽ præsuppositam polygonorum. Quare BA erit ad AD diametrum ex 4. sexti, vt FH, ad FL; & permutando erit BA ad FH, vt diameter AD ad diametrũ FL, sed ex prop. 26. h. cùm basium proportionem duplicatam habeant, vt est basis ad basim; ita polygona similia ex ijs basibus constituta: Vnde ita erit polygonum super BA ad polygõnum super EH, vt quadratum ex AD, ad quadratũ ex FL.

CO-

COROLLARIVM

HInc ellicies idem dicendum de quocumque alio latere comparatum ad aliud sibi correspondens AE V.g. ad FM.

THEOR. III. PROPOS. XLI.

Circuli inter se sunt, vt ex diametris quadrata.

* PRobatur. Nam si polygona similia in circulis BGE, & FLM præced. propos. multiplicentur, vsque dum queant multiplicari, semper eorum latera æquè multiplicando erunt ad inuicem, vt quadrata diametrorum: sed circulus polygonum, cuius latera multiplicata sint quousque multiplicari queant, non excedit. Nam si excederet, adhuc in segmẽto circuli, vt est pars nigra BA. & HF possent latera delineari. Ergo erit etiã circulus BACDE, ad circulum FHILM, vt quadratũ ex diametro AD ad quadratum ex diametro FL.

THEOR. IV. PROPOS. XLII.

Ambitus similis Polygoni circulo inscripti est ad ambitum alterius, vt diameter vnius ad diametrum alterius.

* PRobatur vtendo eadem fig. Nam BA prima quãtitas est ad AD secũdã, vt FH tertia ad FL quartam. Habet autem quinta BC ad secundam AD eandem proportionem, quam HI sexta ad FL quartam. Ergo ex propos. 25. quinti composita quoque BA prima cum quinta BC habebit eandem proportionem ad AD secundam, quam tertia FH cum sexta HI ad quartam FL, & ita dicas de omnibus alijs lateribus replicando idem argumentum. Sic quia quantitas prima ABC habet eandem rationem ad AD secundam, & diametrum; vt FHI tertia ad quartam, nempe diametrum FL: habet autem CD quinta eandem proportionem ad diametrum AD, nempe ad secundam quantitatem, quam IL, sexta ad quartam nempe ad diametrum FL: habebit etiam quantitas composita prima cum quinta ABC, & CD, ad diametrũ AD; nempe ad secundã eandem rationẽ quã IFH, & IL sexta cũ tertia ad quartam, nempe ad diametrum FL, & sic de ceteris lateribus argumẽtũ vrgebit donec totus ãbitus sit cõpletus. Cùm ergo ambitus poligoni sit ad diametrum circuli, in quo est, vt ambitus alterius ad suum diametrum; erit etiam *conuertendo* Ambitus polygoni circulo inscripti ad ambitum polygoni similis in alio circulo inscripti, vt diameter ad diametrum.

THEOR. V. PROPOS. XLIII.

Circulorum circumferentiæ inter se sunt, vt diametri.

* PRobatur. Nam si polygona similia in circulis fig. prop. 40. ABCDE, & FHILM multiplicentur, vsque dum multiplicari possunt, semper eorum latera similiter numero augendo erunt ad inuicem ex præced. vt diametri: Sed polygonus multiplicatus in suis lateribus, vsque dum multiplicari potest, æquat ambitum circuli: nam si non æquaret in segmentis circuli, quibus excedit poligonum, alius polygonus posset inscribi pluribus lateribus præditus contra hypothesim; quæ supponit vltimum, qui possit inscribi esse inscriptum: Ergo ambitus circuli ad ambitum alterius circuli est, vt diameter ad diametrum.

THEOR. VI. PROP. XLIV.

Chorda vnius circuli ad chordam similem alius alterius circuli est, vt diameter ad diametrum.

PRobatur ex prop. proxlmè præced. 40. Nam ibi probatum est AB esse ad FH, vt diameter AD ad diametrum FL ob similitudinem triangulorum ABD, FHL.

THEOR. VII. PROPOS. XLV.

Arcus cuiuslibet circuli ad arcum similem alterius circuli eandem habent proportionem; quam chorda ad chordam: Etè contra.

* PRobatur. Qua vt in fig. propos. 40. arcus sunt similes: Erit arcus BA ad arcum HF, vt circumferentia ABCDE ad circumferentiã FHILM: Sed circumferentia ABCDE ad circumferentiam FHILM est, vt diameter AD ad diametrum FL ex prop. huius 43.: & chorda AB est ad chordam FH, vt diameter AD ad diametrum FL ex propos. 44. Ergo ex æquo erit, vt arcus BA ad arcum HF, ita chorda subtensa arcui BA ad chordã subtẽsam arcui HF; Quod argumentum facilè etiam ad probandum proportionem conuersam valebit.

COROLLARIVM

SEquitur hinc si arcus non sint similes, eos non habere inuicem, eandẽ proportionẽ: Si namq; eam haberent essent similes; *conuertendo*, vt chorda ad diametrum, ita arcus ad circumferentiam.

TRACTATVS XI.

IN VII. LIBRVM EVCLIDIS PARS PRIMA.

De proportionibus Numerorum in genere.

HIc agit Euclides de numeris. Diuiditurque in tres Expensiones: In prima agit de fundamento proportionis in numeris, quæ est ratio mutua mensuræ, & mensurati; Secunda agit de proportione numerorum, in qua modi argumentrandi etiam in numeris veri demonstrantur, qui veri vniuersaliter demonstrati sunt lib. 5. Tertia agit de numeris minimis primis inter se, & hoc vt octauo libro, deinde agat de proportionibus numerorum primorum, sicut eodem libro agit de proportionibus planorum numerorum, & solidorum, quibus primi numeri sunt radices.

EXPENSIO I.

De principijs.

PAuca hìc principia ponenda sunt, cùm ferè omnia apposuerimus tract. 8. quâdo de Arithmetica simplici egimus, & ea, quæ specialiter ad hunc tractatum spectant sunt sequentia.

DEFINITIO I.

PRoportio numerorum est habitudo quædam vnius numeri ad alium secundùm quòd continet, vel continetur, vel semel, vel aliquoties, & insuper aliquam illius partem vel partes.

Supra tract. 8. def. 17. breuiùs proportionem numerorum definiuimus dicendo esse habitudinem numerorum in ratione mensurantis, & mensurati. Verùm hæc definitio per omnia genera proportionum accuratiùs in ratione quâque mensurantis, seu mensurati progrediens, rem specialiùs aperit. Eas verò species proportionum exponit, de quibus supra egimus tract. 9. expen. 2. cor. 3.

Cùm dicit *continet, vel continetur*, explicat proportionem maioris, & minoris inæqualitatis, si adsit.

Cùm dicit *semel* explicat proportionem æqualitatis; cùm dicit *aliquoties* explicat proportionem multiplicem.

Cùm dicit, *& insuper aliquam eius partem* explicat super, vel subparticularem etiam multiplicé, secùdùm quòd cõtinet, & cõtinetur, vel semel, vel aliquoties, & insuper aliquam contenti partem.

Cùm verò dicit *partes* explicat proportionem superpartientem, vel subpartientem etiam multiplicem: nam si semel, & insuper aliquas partes est superpartiens, & si contineatur subpartiens: quòd si aliquoties, & insuper aliquas partes, tunc est super, vel subpartiens multiplex.

DEFINITIO II.

TErmini, seu radices proportionis sunt duo numeri, quibus in illa proportione minores sumi nequeunt.

DEFINITIO III.

CVm tres numeri proportionales fuerint, primus ad tertium duplicatam rationem habere dicitur, primi ad secundum. At cum quatuor numeri proportionales fuerint primus ad quartum triplicatam rationem habere dicitur primi ad secundum, & semper deinceps vna amplius, quam diu proportio extiterit.

Hæc definitio explicata est supra tract. 9. par. 1. def. 7.

Itaque si sint tres numeri eadem proportione gaudentes V. g. 2. 4. 8. proportio 2. ad 8. est duplicata proportionis 2. ad 4. & si sint quatuor est triplicata, V. g. 2. 4. 8. 16: numerus 2. ad 16. habet proportionem triplicatam, 2. ad 4. & sic consequenter si sint quinque, V. g. 2. 4. 8. 16. 32: numerus 2. ad 32. quatruplicatam proportionem habet eius, quam 2. ad 4. quod & intelligitur inuersè, quod numerus maior vltimus ad primum habeat proportionem repetitam, & replicatam, quam secundus ad primum. V. g. 32. ad 2. est quadruplicata eius, quæ 4. ad 2.

DEFINITIO IV.

QVotlibet numeris ordine positis, proportio primi ad vltimum componi dicitur ex proportionibus primi ad secundum, & secundi ad tertium, & tertij ad quartum; & ita deinceps, donec inter medios extiterint numeri.

Hæc quoque definitio explicata est par. 1. def. 8. tract. 9. Vnde breuiter: si ponantur ordine numeri crescentes, quoquo placuerit augmento V. g. 2. 8. 7. 9. 12. 16 vltimus 16. componitur ex proportionibus primi 2. ad secundum 8. & secundi 8. ad tertium 7. & tertij 7. ad quartum 9. & quarti 9. ad quintum 12. Et si inter istos libeat interponere numerum vel plures, V. g. 8. inter 7. & 9. dicetur quoque 16. ad 5. nouiter appositis proportionibus componi.

AXIOMATA.

NVmerus metiens totum, & ablatum, metitur, & reliquum.

Sit V. g. numerus 9. qui metiatur 45. & ablatum 27. Dico, quòd metitur, & reliquum 18. Nam cùm metiatur totum diuidi poterit totum in partes ipsi 9. æquales; nempe in quinque nouenarios. Cumque metiatur ablatum quoque, hoc ablatum 27. diuidi poterit in partes ipsi 9. æquales, nempe in tres nouenarios, & remanebunt duos nouenarios ad æquandum totum. Ergo duo nouenarij mensurant reliquum vsque ad complementum totius 45. nempe 18.

Axiomata reliqua tract. 8. habentur.

EXPENSIO II.

De partibus numerorum alterum mensurantium.

AD hoc, vt sternat iter ad numericas proportiones intelligendas Euclides incipit agere de partibus numerorum, quæ alium numerum possint mensurare, vtpote quòd in hac mutua mensura, vel totius, vel alicuius partis proportio eorum consistat.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duobus numeris inæqualibus detrahatur semper minor à maiore alterna quadam detractione, & semper superfit aliquid, donec perueniatur ad vnitatem; Numeri primo assumpti primi inter se erunt.

17. 6.

SIt propositus numerus 17. maior, 6. minor, qui detrahatur à priori quoties fieri potest, nempe duplici vice, deinde alia detractione residuum à quo 6. auferri nequeat, V. g. 5. detrahatur vicissem à 6. si remaneat vnitas sola, vt hic remanet: Dicit propositio, *quod de his numeris, & omnibus alijs similem proprietatem habentibus, pronunciandum sit, quòd sint inuicem primi, idest, quòd solam vnitatem pro communi mensura possideant.*

Progress. 1. Probatur. Nam si aliam obtineret; hæc esset numerus maior vnitate, qui metiretur vtrosque nempe totum maius 17. & ablatum minus 6. sed ex axiom. 12. numerus metiens totum, & ablatum; metitur quoque reliquum. Ille ergo numerus maior vnitate metiretur, reliquum 5.

Progress. 2. Et rursus eodem ritu argumenti; quia 5. secunda detractione ablatum est à 6. & ex primo progress. numerus ille maior vnitate metitur totum 6. & ablatum 5. metietur, & reliquum 1. Ergo numerus maior vnitate ipsam vnitatem metietur, quòd est absurdum. Vnde communis mensura nulla 17. & 6. numeris erit, nisi vnitas: Ergo erunt inuicem primi ex def. 22. tract. 8.

PROBL. I. PROPOS. II.

Duobus numeris datis non primis inter se maximam eorum communem mensuram reperire.

6. 22.

DEntur duo numeri, vt 6. & 22. Detrahaturque minor à maiore quoties fieri potest; remanebunt 4. Detrahatur rursus secunda detractione 4. à minore 6. & remanet 2. Detrahatur rursùs tertia detractione 2. à 4. & nihil reliqui remanet: *Dico 2. esse communem amborum mensuram.* Quod, si esset necesse aliam, & aliam detractionem reiterare, id fiat, donec nihil remaneat. Ille enim postremus numerus, à cuius detractione nihil remanet, erit communis assignatorum numerorum mensura maxima.

Progress. 1. Probatur primò; Quod hæc sit communis mensura V. g. 2. numeri 6. & numeri 22. ex pronunciato tract. 8. Nam numerus numerum metiens metitur quoque omnem numerum, quem ille metitur; sed numerus 2. vltimo remanens metitur 4. cùm nihil ex eo, facta detractione, quoties fieri potest, remanserit. Ergo metitur quoque partes ei 4. æquales, quas numerus idem 4. per detractionem abstulit à numero maiori. Ergo metietur quoque numerũ se maiorem 6. qui ex ijs partibus constabat, & se vltimo residuo V. g. ex 4. & 2.

Progress. 2. Sed numerus 6. & 4. metiuntur numerum primum 22; cùm 6. æquetur paribus detractis nempe tribus vicibus numero 6. & 4. æquetur residuo: Ergo vltimum residuum 2. metitur quoque numerum primo propositum 22.

Patet consequutia ex primo prog. 4. & 6. qui numeri integrant numerum primo positum 22.

Probatur secundò. Quòd hæc sit mensura maxima. Nam si hic numerus 2. maxima mensurã non est, erit aliquis maior, quam 2. qui metietur vtrosque 22. & 6. Quare ex pron. 1. huius metietur quoque primum residuum 4. quia metitur totum 22. & ablatum 6. Sed eadem paritate, quia metitur totum 6. & ablatum 4. metietur quoque residuum 2. Maior ergo numerus, quam 2. commensurabilis numero 2. quod est absurdum.

Quod si datis duobus numeris, & facta detractione nihil remaneat, numerus minor erit communis maxima mensura maioris, vt est 6. numeri 18. se enim metitur sua quantitate, & numerum maiorem sui replicatione.

COROLLARIVM

HInc manifestum est numerum metientem duos numeros, metiri quoque eorum communem maximam mensuram: Nam aut hic numerus est æqualis, aut minor. (maior enim esse non potest, cùm ijdem duo numeri duas maximas inæquales mensuras habere non possint.) Ergo ille numerus, si est æqualis, metietur quoque communem mensuram, cui æquatur; si est minor, idem valebit argumentum: nam maxima mensura est residuum vltimum: quare si metitur totum, & ablatum; metietur etiam omnia residua successiuè remanentia, & tandem maximam quoq; com-

munem mensuram; Sic 6. est maxima mensura, & simul residuum numeri 42. & 12. quos si numerus 3. mensuret; dū quaterdecies in numero 36. sexties in 12. inest: mensurabit quoque 6. quòd eorum residuum existat.

PROB. II. PROPOS. III.

Tribus numeris datis non primis inter se eorum communem mensuram reperire.

42. 18. 8. mensura 2.

DEntur tres numeri 42. 18. & 8. quorum communis mensura reperiri debeat.

Inueniatur primo maxima mensura duorum maiorum V. g. 42. & 18. ex 1. propos. quæ sit 6. si ergo hæc maxima mensura capiat in tertio numero ex æquo ita, quod nihil remaneat: hæc erit maxima omnium communis mensura: At si aliquid remaneat exerceatur per mutuam detractionem regula tradita præc. propos. quoties opus est; detrahaturque E. g. 6. ab 8. quoties fieri potest. Remanebunt 2. rursus si 2. ex 6. subducatur, nihil remanet.

Pronuntio itaque 2. esse trium numerorum 42. 18. & 8. communem mensuram maximam.

Probatur, quod sit trium communis mensura ex præc. prop. Post remum residuum 2. est maxima mensura numeri tertij 8. & maximæ mensuræ 6. duorum primo assumptorum numerorum. Ergo etiam ipsorum est mensura ex pronunciato 3. huius.

Probatur quoque secunda pars; Quod sit omnium trium maxima mensura. Nam, si non est, erit aliquis numerus maior V. g. Nūmorum, qui cum metiatur duos numeros primo propositos 42. & 18. metietur quoque eorum communem mensuram 6. ex Coroll. præcedenti; sed ex hypothesi metitur quoque tertium numerum 8. Numerus ille Nūmorū cū ex aduersarijs dicatur triū datorum numerorum communis mensura. Ergo metitur totum nempe 8. & ablatum 6. Qua de re metietur quoque reliquum 2. Sed ille Nūmorum numerus ponebatur maior, quam 2. Ergo numerus maior, quam 2. ipsum metiretur, quod est absurdum.

COROLLARIVM

HInc ellicies idem, quod in præced. Coroll. numerum metientem tres numeros metiri etiam maximam eorum mensuram: Nam maior esse non potest ipsâ maximâ mensurâ; si sit æqualis clarum est cum numerus omnis se per vnitates suas metiatur. Si sit minor eodem modo, quo supra probatur. Quoniam maxima mensura est rel quorum trium numerorum. Ergo eam mensura minor, quæ metitur tres numeros, nempe totum primū, & ablatos reliquos per mutuam subtractionem, metitur etiam vltimum residuum, nempe omnium trium maximam communem mensuram.

COROLLARIVM II.

SI verò aliquis cupiat plurium numerorū, quàm trium communem mensuram, idem præstandum erit, & inuenta trium mensura, quarti, per mutuam detractionem inuentæ mensuræ ab ipso, mensura maxima inuenietur; illa enim erit quatuor numerorum mensura communis.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Omnis numerus est cuiuslibet dati numeri, aut pars, aut partes

PRobatur. Vel sunt primi inuicem, vt 7. & 5. & sic numerus minor est partes numeri maioris; Quia tot habet vnitates V. g. 5. quæ sunt partes maioris numeri, ex quibus, additis alijs, 2. componitur.

Vel duo numeri non sunt inuicem primi, & sic si minor maiorem metiatur, vt 4. metitur 8. tunc 4. est pars, vt per se patet, numeri 8. Quod si non metitur, reperiatur eorum communis mensura, qualis est 3. numeri 6. & 9. Assumanturque à minori numero ei communi mensuræ tot partes æquales, quot possunt sumi V. g. 3. & 3. Iam numerus minor est partes numeri maioris; quia eius plures partes comprehendit; cùm 3. 3. integrent numerum 6.

THEOR. III. PROPOS. V.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter. alterius eadem pars, & simul vterque vtriusque eadem pars erit, quæ est vnus vnius.

HÆc propos. est l. 5. propos. 1. vniuersaliter proposita; modo hic in numeris ostenditur.

Partes 3. 2. compositi 5
Integri 12. 8. 20

Dentur plures numeri, sed facilitatis g. duo, vt 2. & 3. quorū primus 2. diuidat 8. In tot numero partes V. g. in 4. in quot 3. diuidit 12.

Dico, quod compositi 2. & 3. diuisores, vt faciant 5. dividerit quoque compositos numeros 8. & 12. nempe 20. in tot numero partes, vt prius dividebant.

Probatur. Diuide numeros metitos 8. & 12. in partes æquales metientibus numeris 2. & 3. hab. bisque ex hypothesi æqualem numerum partium ex singulis metitis numeris, vt ex 8. erues 4. duenarios, ex 12. verò 4. ternarios. Adde itaque singulos duenarios æquales 2. metienti

2 3
8 12
2222. 3333
5555
20

ternarijs æqualibus metienti 3. efficiesque 4. quinarios æquales metientibus 2. & 3. simul additis: Ergo reperiet quinarius metiens in simul additis quinarijs, nempe vicenario 4. quinarios, ideſt singulas partes cuiuscunque metiti 12. & 8. simul additas,

THEOR. IV. PROPOS. VI.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eadem partes, & simul vterq; vtriusque eadem partes erit, quæ vnus vnius.

HÆc propositio eadem est, ac antecedens; solùmque vult, quòd numerus metiens comprehendat non vnam partem, sed plures partes metiti. Sint ergo plures numeri, sed pro nunc duo V. g. 6. metiens numerum 8. cuius comprendat 3. duenarios ex quatuor quibus 8. constat, & 9. metiens 12. comprehendat quoque ex eo 3. ternarios ex 4. quibus constat.

Partes 6. 9 compositi 15
Integri 8. 12 20

Dico: Quod, si componantur 6. & 9. & fiant 15. eandem tres partes comprehendent ex 8. & 12. simul additis, nempe vicenario, vt prius simplices faciebant quælibet ex suo numero metito.

6 9
222. 333
8 12
2222 3333
555
15
5555
20

Probatur. Diuide numeros metientes in partes; secundùm quas metiuntur suos metitos V. g. 6. in 3. duenarios, & 9. in 3. ternarios, quas simul addes ideſt duenarios cum ternarijs vt fiant 3. quinarij: Ergo metientes compositi, nempe 15. comprehendet tres quinarios. Sic est faciendum de metitis singuli enim distributi in partes metitas V. g. 8. in duenarios, & 12. in ternarios ex hypothesi, tum duenarij, tum ternarij æquales numero erunt, nempe 4. qui simul additi erunt quinarij 4: prout numeri metiti constabant singuli, vel 8. ex 4. duenarijs, vel 12 ex 4. ternarijs. Cum ergo, tum metiti compositi eundem numerum partium 4. quinarios, & metientes 3. quinarios, secundum quem in mensura priùs correspondebant, integrent; patet, quod etiam compositi alter alterius eædem partes erunt. Idē autem etiam eueniet, si aut fractos assumas, aut si plures.

THEOR. V. PROPOS. VII.

Si numerus numeri pars fuerit, vt ablatus ablati: & reliquus reliqui eadem pars erit.

SIt numerus integer 5. eadem pars numeri 20. quæ pars est ablati 2. numeri 8. ablati, hic à 20. ille à 5.

Pars 2 compars 3 totum 5
Pars 8 compars 12 totum 20

Dico reliquum 3. ex 5. esse eandem partem residui 12. ex numero 20.

Prob. Assume probationis gr. quemcumque numerum incognitum *Equorum*, cui residuum 3. sit eadem pars, nempe tot vicibus insit, quæ est ablati 2. ablato 8. & consequenter, quæ est totius 5. toti 20. ideſt quatuor vicibus. ex hypothesi. Ergo metientes 3. & 2. simul vt faciant 5. inuenient tot partes ex 5. propos. huius in metitis 8. & numero *Equorum* incognito. simul vnitis, quot 2. ablatus, & metitor, in 8. ablato, & 5. totum in toto 20. Ergo illi compositi numerus 8. & numerus *Equorum* faciens 20. hoc enim aggregatum metitur eadem mensura 5. nempe 2. & 3. compositi per vices 4. replicatas eaſdem, quibus metiabatur mensura 5. totum 20. Quare incognitus Equoquorum numerus erit 12, nempe residuum numeri 8. ex 20. quem metietur residuum 3, vt 2. ablatus, ablatum 8. & 5. totus totum 20.

COROLLARIVM

COllige, quod idem intelligitur in numeris fractis, & etiam de numero maiori, & multiplici respectu minoris. Sic si 8. ablatū sit tot vicibus numero 2. ablato, quot 20. totus, numero 5. toti, erit etiam residuum 12. tot vicibus maior numero residuo 3. vt patet, cùm sit eadem ratio.

THEOR. VI. PROPOS. VIII.

Si numerus numeri partes fuerint, quales ablatus ablati, & reliquus reliqui eædem partes erit, vt totus totius.

Partes 6. 9 compars 15 totum
Partes 8. 12 compars 20 totum

SIt numerus 6. ablatus à 15. eadem pars numeri 8. ablati à 20. scilicet eius tot vices conci neat V. g. tot duenarios, quot 15. integer minoris numeri continet vices numeri 20. integri maioris V. g. quinarios.

Dico, quod residuum 9. integri 15. cum numerus 8. fuerit ablatus, est eadem partes, nempe tot vicibus contineatur aliqua eius pars in numero 12. residuo maioris numeri 20. quot 6. in 8. vel 15. in 20.

Probatur. Assumatur aliquis alius *Equorum*, qui tot vices contineat numeri 12. quot ablatus 6. ablati 8. vel integer 15. numeri 20. Coniungaturq; iste numerus *Equorum*, cum residuo 6. At 12. residuum cum ablato 8. Isti vnique, vt priùs, facient 20. V. g. *Homines*. Ergo ille numerus *Equorum* iunctus cum 6. faciet 15 Nam, cùm incognitus Equorum numerus sit eædem partes 12. vt 6. numeri 8. Ergo etiam iunct. 6 & incognitus ex propos. 6. huius erit eædem partes numeri 8. & 12. coniunctorum, ac vnus vnius V. g. 6. respectu numeri 8. Sed numerus, qui sit ad 20. vt 6. ad 8 alius non est; nisi 15. Ergo iste numerus *Equorum* cum numero 6. iunctus faciet 15. Ergo erit ille numerus *Equorum* 9. nempe residuum numeri 15. ablato 6. qui ita est ad 12. residuum numeri 20. vt ablatum 6. ablato 8. vel totus 15. toti 20. Quod & de numeris quibuscumque fractis intelligitur.

THEOR. VII. PROPOS. IX.

Si numerus numeri pars fuerit, & alter alterius eadem pars; Et vicissem, quæ pars est vel partes primus tertij, eadem pars erit, vel eædem partes secundus quarti,

I. 2. Hominum II. 8. Lapidum
III. 3. Equorum IV. 12. Nummorum
333 222

SIt primus numerus V. g. 2. *Hominum* numeri 8. secundi *Lapidum* eadem pars, quæ est 3. *Equorum* numeri tertij 12. *Nummorum*. *Dico, quod Hominum numerus numero Equorum eadem pars est, vel partes, quæ numerus Lapidum numero Nummorum.*

Probatur. Nam diuisis *Lapidibus* 8. secundum vices; quas *Hominum* continet, V.g in duenarios, & numerus *Nummorum* secundum vices, quas continet *Equorum* V. g. in tot ternarios, erunt ternarij *Nummorum* tot vices, quot duenarij *Lapidum* ex hypothesi. Sed insuper erunt omnes duenarij eædem partes respectu ternariorum. Cum enim omnes tum duenarij inuicem, tum ternarij inuicem sint æquales sit, vt duenarius tot vnitates habeat respectu vnius ternarij, quot alius duenaris respectu alius ternarij. Ergo si coniungantur omnes duenarij simul, vt fiant 8. vt priùs numerum *Lapidum*, & ternarij quoque simul vniantur, vt fiant 12. *Nummorum*, vt prius eadem pars, seu partes eædem manebunt ex 5. propos. & 6. huius, quæ vnus vnius, nempe quæ duenarij *Hominum* respectu ternarij Equorum.

THEOR. VIII. PROPOS. X.

Si numerus numeri partes fuerit, & alter alterius eædem partes, & vicissim, quæ pars est, aut partes primus tertij, eadem pars, aut partes est secundus quarti.

SIt primus numerus *Hominum* 6. qui sit partes secundi numeri 9., Sitque alter tertius numerus 8. *Equorum*, qui sit partes num. 12. quarti.
I. 6. Hominum II. 9.
III. 8. Equorum IV. 12.
Dico. Quod primus numerus Hominum tertio Equorum eadem pars est, seu partes, quæ 9. secundus numerus numeri 12. quarti.

Probatur. Nam diuisus in suas partes 6. numerus *Hominum* iuxta quas capit in 9. nempe in 2. ternarios, & 8. *Equorum* iuxta quas capit in 12. nempe in 2. quaternarios singulæ erunt sui totius pars, quia 6. *Hominum* numerum habet tot ternarios, quot *Equorum* 8. quaternarios, Et insuper erunt eadem pars, tam ternarius numeri 9. quam quaternarius numeri 12. ex hyp. Vicissim ergo ex anteced. eadem pars, vel partes duenarius erit quaternarij, quæ 9. numeri 12. Ergo si iterum iungas duos ternarios *Hominum*, vt sint 6. simulque iungas duos quaternarios *Equorum*, vt sint 8. vt priùs ita erunt ex 5. & 6. prop. hu. iuncti ternarij 6. ad iunctos quaternarios 8. vt vnus 3. ad vnum 4 & ideo, vt 9. ad 12.

Nam, vt ibi si numerus numeri fuerit pars, aut partes, & alter alterius eadē pars, seu partes simul vterque vtriusque eadem pars erit, vel partes, quæ vnus vnius.

EXPENSIO III.

De proportione numerorum.

LIcet modi argumentandi vniuersaliter supra ostēsi sint l. 5. Quia tamē in quātitate discreta specialibus rationibus comprobari poterant, noluit Euclides eos præterire; quippe, cum proprietates quātitatis discretę ostendere apud se constitutum habuerit, & illi præcipuum locum inter passiones numerorum inueniant, ad eas penitùs ostendendas etiam modos ipsos demonstrationibus quantitatis discretæ naturæ addictos prosequi necessarium fuit.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Si fuerit vt totus ad totum, ita ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum erit, vt totus ad totum.

SIt numerus aliquis totus 21. ad 24. vt 14. ablatum à 21. ad 16. ablatum à 24.
Totus 21. ad totum 24.
Vt ablatum 14. ad ablat. 16.
Reliquum 7. ad reliq. 8.
Dico, quòd reliquum 7. erit in eadem proportione ad reliquum 8. vt 14. ad 16.

Probatur. Nam ex definitione erit totus pars, vel partes totius, vt ablatus ablati. Ergo, & reliquus reliqui ex 7. & 8. prop. erit pars eadem, aut partes ablatus ablati, vt totum totius. Ergo dicent eandem proportionem; cùm proportio numerica in eo consistat, quòd vnus respectu alterius sit eadem pars, vel partes, & cęt. vt ex definit. 1. constat.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Si sint quicumque numeri proportionales, erit quemadmodum vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes.

Series I. 3 2 5 collecti 10
Series II. 9 6 15 numeri 30

SInt duę numerorū series, quorum numeri sint proportionales ex ordine V. g. in prima serie 3. 2. 5. in secunda 9. 6. 15. ita vt primus 3. referatur primo 9. vt secundus 2. secundo 6. & tertius 5. tertio 15.

Dico collectos numeros primæ seriei numeris collectis secundæ seriei eadem proportione respondere, quam vnus eorum ad alium possidet.

Probatur. Numeri, qui dicunt proportionem sunt eædem partes, vel eadem pars ad inuicem, vt sunt numeri primę seriei, cum numeris secundæ sed ex 5. & 6. propos. numeri, qui sibi inuicem sunt eadem pars, vel eædem partes, si vniantur, & colligantur, sunt etiā eadē pars, vel eadem partes vnū ad alterum sit collecti, vt erat vnus vnius: Ergo 10. numeri primę seriei collecti erūt eadem pars, seu partes numerorū 30. secundæ seriei collectorum, vt vnus 3. primæ seriei ad alterū correspondetem 9. in secunda. Igitur cum adhuc perseuerent eædem partes, seu pars collecti eadem proportione, quā singuli se respicient.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, & vicissem proportionales erunt.

4 6
8 12

SIt 4. ad 6. quemadmodum 8. ad 12. *Dico eos inuicem fore proportiales.*

Probatur, ex huius 9. vel 10. propos. Quia primæ combinationis antecedens numerus 4. & fundamentum relationis est eadem pars, seu partes ac 8. in secunda combinatione fundamentum itē, & antecedens; sicut terminus, & consequens in prima combinatione 6. est ad terminum, & consequentem 12. in secunda combinatione. Sed qui sunt vicissem eadem pars, seu partes dicunt proportionem ex definit. 2. Ergo cum sint vicissem eædem partes vicissem erunt proportionales, vicissem vero significat, quod fundamenta relationum dicant eam proportionem inuicem, quam termini.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si sint quotcunque numeri, & alij ijs æquales multitudine, qui bini sumantur, & in eadem ratione, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

Series I. 3 5 4 Ergo vt 3 ad 4
Series II. 9 15 12 9 ad 12

SInt duæ series numerorum prima 3. 5. 4. Secunda 9. 15. 12. qui bini, & in eadem ratione sumantur, nempe primus 3. ad secundum 5. sit in prima serie, veluti 9. ad 15. in secunda serie: Sic in prima serie, sit 5. ad 4. vt in secunda est 15. ad 12. Dicit, *quòd etiam extremi, tum primæ, tum secundæ seriei in eadem ratione erunt.* Primusque 3. tertium numerum 4. eadem proportione respiciet, quā 9. respicit 12.

Progress. 1. Nam ex hypothesi, vt primus 3. In prima serie ad secundum 5; sic in secūda primus 9. ad secundum 15. & vt 5. ad 4. sic ponitur 15. ad 12. Ergo permutando 3. erit ad 9. vt 5 ad 15 Rursusque vt 5. ad 15. sic 4. erit ad 12. Ergo ex 5. & 6. propos. erunt etiam eadem pars, vel partes 3. numeri 9. quæ 5. numeri 15. Sic quoque eadem pars, vel partes 5. numeri 15. quæ 4. numeri 12. Quapropter eadem pars, vel partes erit 3. numeri 9. quas 4. numeri 12. Siquidem sunt eadem pars, vel partes alter respectu alterius similiter, ac est 5. numeri 15. Propterea etiam similiter erit pars, vel partes 3. numeri 9. sicut 4. numeri 12.

Cum ergo sint inuicem numerus 3. eadem pars, vel partes numeri 9. quæ 4. numeri 12. sequitur ex definitione 1. quod 3. sit ad 9. vt 4. ad 12.

Progress. 2. Cum itaque 3 respondeat proportione ad 9. eadem, quā 4. respicit 12. Ergo rursus permutando 3. erit ad 4. vt 9. erit ad 12.

COROLLARIVM

IN numeris itaque licebit argumentari *ex æquo*, & positis tribus numeris, vel pluribus, qui in eadem ratione bini, & bini; ac alij tres, seu plures sumantur, poterit argui esse primum proportionis fundamentum ad vltimum terminum in prima serie, vt primum fundamentum ad vltimum terminum in secunda serie in proportione respondet.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Si vnitas numerum quempiam metiatur: æquè autem alter numerus alterum quēdam numerum metiatur, & vicissim vnitas tertium numerum metietur, ac secundus quartum.

LIcet vnitas numerus non sit secundùm multos, easdem tamen proprietates, ac numerus præter pluritatem possidet, & maximè, quòd sit pars alterius numeri V.g. 4. quemadmodum alter numerus 4. pars erit numeri 12. Quare idem verificabitur de vnitate, quod dictum est propos. 9. & 13. de numeris, absque eo quod eandem demonstrationem hic repetamus, & hoc ne dum intelligendum in hac propos. Sed in omni alia, vbi fit comparatio numeri ad numerum: Nam quilibet numerus numeri mensurati fit vnitas: V. g. 3. numeri 9. fiunt tres ternarij, sicut in ipso 3. sunt tres vnitates. Dicit itaque Euclides, quod si 1. metiatur 3. sicut 4. metitur 12. quòd vnitas quoq; metietur 4. sicut 3. metitur 12. Quòd est dicere, quod si sit 1. ad 3. vt 4. ad 12. quod etiam erit vicissem 1. ad 4. vt 3. ad 12. ex propos. 13.

THEOR. VI. PROP. XVI.

Si duo numeri mutuò se se multiplicantes fecerint aliquos, geniti ex ipsis æquales inter se erunt.

6 4
24

DVo numeri 6. & 4. se se mutuò multiplicantes faciant aliquem.

Dico, *quòd siue 4. multiplicet ipsum 6. siue ipse numerus 6. multiplicet 4.* numerum eundem prodire, vel duos numeros æquales V. g. 24 & 24.

Probatur. Tot erunt in producto 24 quaternarij, si 6. multiplicet 4 quot in numero 6. vnitates ex def. 15. tr. 8. & ita vnitas metietur 6. sicut 4. metitur productum 24. Quare vicissim ex præc. ita vnitas metietur 4. sicut 6. numerum productū 24. Quia verò etiam 4. multiplicat 6. Ergo productus numerus V.g. Ouium cōtinebit 6. quoties sunt in 4. vnitates; cùm ergo in hoc posteriori producto Ouium genito à 4. multiplicatore numeri 6. toties contineatur senarius, quot in 4. vnitates, & cùm 6. multiplicabat 4. senarius quoq; continebatur toties in producto 24. quoties in 4. erant vnitates, vt ostensum est; Ergo senarius per æquales vices mensurat productum 24. & hoc productum Ouium: Quapropter hoc productum Ouium erit 24. ex pr. 3. tr. 8. THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVII.

Si numerus duos numeros multiplicans fecerit aliquos; geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ac multiplicantes.

Est 6 ad 8
Multiplicans 4
Vt 24 ad 32

SIt numerus 4. qui multiplicet 6. & multiplicet 8.

Dico, quod producti 24. & 32. ita sunt inuicem in proportione, vt 6. ad 8. multiplicati, quos 4. multiplicat.

Probatur. Nam 6. continetur tot vicibus in 24. quot 8. in 32. cum tot vicibus contineatur, quot vnitates sunt in 4. ex hypothesi. Ergo ex defin. 1. dicent multiplicati cũ suis productis proportionem eandem cum sint productorum eædem partes, & erit 6. ad 24. vt 8. ad 32. Ergo ex 13. propos. & ad inuicem, viciſſemque dicent proportionem, & ita erit 6. ad 8. multiplicati, ſicut producti 24. ad 32.

THEOR. VIII. PROP. XVIII.

Si duo numeri numerum quendam multiplicando fecerint aliquos; Geniti ex ipsis eandem rationem habebunt, ac multiplicantes.

Ita 6 8
Multiplicatus 4
Vt 24 32

SIt numerus 6. qui multiplicet 4. quem & 8. multiplicet.

Dico 24. & 32. productos esse ita ad inuicem, vt 6. & 8. qui multiplicauere numerum 4.

Probatur. Quia ex 16. h. producti erunt equales etiam ſi 6. & 8. non eſſent multiplicatores ſed 4. eos multiplicaret, ſed ex anteced. ſi vnus numerus duos multiplicat productus ad productum; ita eſt vt multiplicatus ad multiplicatum. Ergo Idem ſequetur, ſi duo numeri vnum eundemque multiplicent, ideoque 6. erit ad 8. vt 24. ad 32.

THEOR. IX. PROPOS. XIX.

Si quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex primo, & vltimo fit numerus æqualis eſt ei, qui fit à mediis.

Vel ſi numerus, qui emergit ex multiplicatione primi cum vltimo ſit æqualis producto ex mediis, illi numeri erunt proportionales.

SIt numerus 2. ad numerum 3. vt numerus 4. ad numerum 6. in proportione refertur.

Dico primò; quod multiplicatus primus 2. cum vltimo 6. generat numerum æqualem gẽito ex multiplicatione mediorum 3. & 4.

Id verò demonſtratur. Etenim primus numerus 2. multiplicet 4. medium, & faciat numerum quendam *Ouium* V. g. 8. Cum ergo idem numerus multiplicet quoque extremum 6. ex hypotheſi & generet V. g. numerum *Hominum* 12. erit genitus *Ouium* 8. ad genitum *Hominum* 12. ex prop. 17. huius, vt generantes 4. & 6. per eundem numerum 2. multiplicati, & ideo etiam vt 2. ad 3. cum ex hypotheſi ſit eadem ratio.

Rurſus: quia ex hypotheſi 4. multiplicat 3. & generat numerum *Equorum*, ex effectione autem 4. etiam multiplicat 2. & producit numerum *Ouium* 8. Ergo 8. dicet eadem proportionem ad numerum *Equorum*, ac generantes 2. & 3. idcoque vt 2. ad 3. ita 8. ad numerum *Equorum*. Cum numerus *Ouium* 8. dicat proportionem ad numerum *Equorum*, & *Hominum*, quam 2. ad 3. ſeu 4. ad 6. quæ ex hypotheſi eſt eadem proportio. Et ideo, cùm dicat idem numerus ad eos proportionem eandem, erit eorũ, vel pars, vel partes eædẽ: Quare geniti erunt æquales, ex 3. prin. 8. cùmque genitus ex 2. & 6. ſit 12. numerus *Hominum*, etiam numerus *Equorum* ex 3. & 4. genitus erit 12. cui eſt eædem partes numerus 8. *Ouium*.

Dico 2. Quod, ſi numerus productus à primo, & vltimo ſit æqualis producto ex mediis, *eos producentes numeros fore proportionales; & multiplicantes eſſe inuicem, vt multiplicati*. Sic numeri Hominum, & *Equorum*, ſi ſint æquales, erit 2. numerus multiplicans in genito *Hominum* ad multiplicantem 3. in numero *Equorum*, vt multiplicatus 4. in eodem ad multiplicatum 6. in numero Hominum ita, vt reciproca ſit relatio.

Probatur. Nam idem numerus *Ouium* ad eoſdem numerum inquam *Hominum*, & *Equorum*, vt pote ad æquales eandem dicit proportionem, & eam ipſam ex propoſ. 16. quam multiplicantes ad multiplicatos: quare ita erit 8. ad numerum 12. Hominum, vel Equorum, vt 2. ad 3. per numerum 4. generantes 8. Ouium, & Hominum numerum 12. vel vt 4. ad 6. per numerum 2. generantes 8. *Ouium*, & 12. *Equorum* numerum: Quare cum 2. ad 3. ſit in eadem proportione, ac *Oues* ad *Homines*, & in ipsâ eâdem ſit 4. ad 6 etiam inuicem erit eorũ eadẽ proportio ex prop. 16. l. 5. h. & ita erunt 2. ad 3. multiplicantes, vt 4. ad 6. multiplicati.

THEOR. X. PROPOS. XX.

Si tres numeri proportionales fuerint, qui ſub extremis continetur æqualis eſt ei, qui à medio efficitur.

SIt 2. ad 4. vt 4. ad 12. Medius numerus eſt 4. qui vt duplex æqualis vſurpatur. Vnde hæc eſt eadem propoſitio, vt prior eademque paritas. Nam in alio non differt; niſi quod medij numeri hic ſunt æquales vt 4. & 4. ibi vero inæquales.

THEOR. XI. PROPOS. XXI. Eucl. 22.

Si fuerint tres numeri, & alij ipſis multitudine æquales; qui bini ſumantur, & in eadem ratione, fuerit autem perturbata eorum proportio, etiam ex æqualitate in eadem ratione erunt.

2 3 4 Ergo 2 ad 4
6 8 12 vt 6 ad 12

SInt duæ ſeries numerorum Vna 2. 3. 4. & altera 6. 8. 12. quarum numeri bini ſumantur: Reperiaturque eorum proportionem eſſe perturbatam: nimirum primos binos 2. ad 3. prioris ſeriei dicere inuicem eam proportionem, quam 8. ad 12. bini extremi ſecundæ ſeriei, & extremos binos prioris ſeriei 3. ad 4. dicere eam proportionem, quam duo primi 6. ad 8. poſterioris ſeriei.

Dico, quòd ex æqualitate in eadem ratione exiſtunt.

Progreſſ. 1. Probatur. Ponitur ex hypotheſi 2. ad 3. vt 8. ad 12. Ergo ex 19. propoſitione, ſi multiplicentur inuicem extremi numeri 2. & 12. & medij 3. & 8. dabunt genitos æquales 24 & 24.

Progreſſ. 2. Sic quia in hypotheſi ponitur 3. ad 4. vt 6. ad 8. ſi eadem multiplicatio fiat extremorum 3. & 8. & mediorum 4. & 6. prodibunt numeri geniti æquales inter ſe. Ergo etiam cum priùs genitis.

Siquidem etiam hìc inuicem ſe multiplicant 3. & 8. in vna multiplicatione ſicut progreſſu primo. Quare ſicut ibi producebant 24. ſic, & hic producent, cui genitus numerus ex 4. & 6. erit æqualis, & conſequenter genito primo ex numero 12. & 12. Ergo ex 19. propoſitionis parte ſecunda dicent proportionem ad inuicem generantes numeri, quæ vocatur ex æqualitate, & ita reſpondebit proportione 2. ad 4. in prima ſerie, vt 6. ad 12. in ſecunda mediis numeris poſthabitis 3. & 8.

Quod ſi fuerint plures numeri, quàm tres V.g. 2. 3. 4. 8. pro vna ſerie, & 3. 6. 8. 12. ita vt ſint etiam 4. ad 8. vltimi vt 3. ad 6. primi, idem prorſus ſequetur: Nam cùm ſit oſtenſum; ita eſſe 2. ad 4. vt 3. ad 8. relictis mediis 3. & 6. conſequenter erunt ſolum tres numeri pro vna ſerie 2. 4. 8. & pro altera 3. 8. 12. quorum proportio perturbata erit 2. ad 4. vt 6. ad 12. & 4. ad 8. vt 3. ad 6.

2, 4. 8.
3. 6. 12.

Vnde eadem, quæ ſuperiùs valebit demonſtratio: Idem etiam oſtendetur in quinque numeris, ac in quatuor etiam ſi numeri ſint fracti.

Et hæc Euclides de proportionibus numerorum. Verum adſunt etiam proportiones, quas libro 7. vniuerſaliter probat de quacunque quantitate, & quas ex intimis principijs Arithmeticis Clauius hic adducit, qui modi. cùm fundent argumenta, quæ ex proportionibus petuntur ob eorum vtilitatem, viſum eſt non præterire.

THEOR. XII. PROPOS. XXII.

Si quatuor numeri proportionales ſint, & conuertendo proportionales erunt.

NAm detur 4. qui ſit ad 10. vt 12. eſt ad 30.
4 ad 10 Ergo 10 ad 4
vt 12 ad 30 vt 30 ad 12

Dico, Quod conuertendo 10. erit in eadem proportione ad 4. vt 30. ad 12.

Probatur. Ponitur 4. ad 10 in eadem proportione, quâ 12. refertur ad 30. Ergo ex 13. propoſ. & viciſſim proportionales erunt. Erit; 4. ad 12. vt 10. ad 30. Quia itaque refertur 10. ad 30. & 4. ad 12. Ergo rurſus viciſſim proportionales erunt; eritque 10 ad 4. vt 30. ad 12. Ita enim proportionem conuertimus: dum terminos pro fundamentis relationum ſumimus, & conſequentia pro antecedentibus.

THEOR. XIII. PROP. XXIII.

Si compoſiti numeri proportionales fuerint, & diuiſi proportionales erunt.

COmpoſiti numeri proportionales ſunt, cùm totum refertur ad partem ſuam, vt aliud totum ad aliam partem ſuam. Sit ergo 9. qui refertur ad ſuam partem 3. vt 15. refertur ad ſuam partem 5. diuidantur iſti numeri per eaſdem partes ſuas, auferanturque partes 3. à 9. & erit 6. Rurſus 5. à 15. & erit 10.

9 totum ad 3 partem vt compars 6 ad 3
Vt Ergo
15 totum ad 5 partem ſic compars 10 ad 5

Dico, quod pars 3. refertur ad reliquum 6. vt pars altera 5. refertur ad reliquum ſuum 10.

Probatur. Quia ex prop. 11. ſi totum ad totum ſe gerat vt ablatum ad ablatum, & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum ſe habebit. Sed numeri V. gr. 3 & 5. ſunt ablata 6. & 10. ſunt reliqua: Ergo ſe habent prorsùs eodem pacto vnum ad aliud correſpondens, 3 nimirum ad 5. & 6. ad 10. vt totum 9. ad totum 15. ergo, & inter ſe eodem pacto ſe habent, vt cum toto; quia quæ ſunt eadem vni tertio ſunt eadem inter ſe.

THEOR. XIV. PROP. XXIV.

Si diuiſi numeri proportionales ſint. Hi quoque compoſiti proportionales erunt.

Vt pars 7 ad compartem 3
Ita pars 14 ad compartem 6
Ergo vt pars 14 ad totum 20
Sic pars 7 ad totum 10

DEntur numeri quatuor partes duorum integrorum V. g 7. pars prioris totius 10. qui ſit ad ſuam compartem 3. vt alterius totius 20. pars 14. eſt ad ſuam compartem 6.

Dico, quod etiam tota ſibi inuicem proportionalia ſunt ea proportione, qua partes, & quod componendo, ſi erit, vt 7. ad ſuam compartem 3. ſic 14. ad ſuam compartem 6. hinc etiam erit conſequenter to-

tum 10. ad 7. partem, vt totum 30. ad 14 partem.

Prob. Ponitur proportio 7. partis ad 3. compartem prioris totius vt pars 14. ad 6. compartem in posteriori toto. Ergo ex propos. 13. huius erunt, & vicissim, eritque 7. pars ad 14. partem fundamenta, vt 3. compars ad 6. compartem terminos: Quaderè ex propos. 12. huius, vt vnus antecedentium ad vnum consequentium, ita omnes antecedentes ad omnes consequentes, & sic, vt 7. antecedens ad 14. consequens, sic omnes antecedentes 7. & 3. nempe totum 10. ad omnes consequentes 14. & 6. simul, hoc est totum 20. propterea que ex propos. 13. rursus vicissim erit 7. antecedens ad 10. antecedentem, vt 14. consequens ad 20. consequentem; nimirum pars ad suum totum, vt alia pars ad suum totum eadem proportione refertur; ex eò quod fuerit pars ad suam compartem, vt alia pars ad suam compartem, quod est arguere componendo ex definit. 25. lib. 5.

THEOR. XV. PROPOS. XXV.

Si compositi numeri proportionales fuerint; hi quoque per conuersionem rationis proportionales erunt.

COnuersioni rationis locus datur, cùm totum refertur ad partem, vt aliud totum ad suam partem: Nam tunc potest argui; quòd, & altera pars sit ad totum vt alia pars ad suum totum. V. g. sit 9. pars numeri 15. & 12. pars numeri 20. & 9. referatur simili proportione ad 15. vt 12. ad 20.

Dicit, quod ita quoque refertur reliquum 6. ad 15. totum, vt reliquum 8. refertur ad 20. totum suum.

Vt pars 9 ad 15 totum.
Sic pars 12 ad 20 totum.
Ergo compars 6 ad 15 totum.
Vt alia compars 8 ad 20 totum.

Probatur. Nam si est pars 9. fundamentum relationum ad 15. totum, & ad terminum, vt 12. pars, & fundamentum ad 20. terminum, & totum. Ergo ex propos. 13. & vicissim fundamenta 9. & 12. & partes dicent eandem proportionem, quam termini 15. & 20. tota. Quamobrem si est totus 15. ad totum 20. vt ablatus 9 ad ablatum 12. etiam reliquus 6. totius 15. ad reliquum 8. totius 20. ex 11. propos. erit, vt totus 15. ad totum 20. Si itaq; pars 6. vt fundamentum respicit relatione proportionis terminum, & partem 8. vt totum 15. tanquam fundamentum, totum 20. vt terminum: Ergo rursus vicissim ex 13. propor. inuicem fundamenta eandem proportionem dicent, quam termini inuicem, & ita respiciet totum 15. reliquum 6. ambo fundamenta; sicut respicit totum 20. reliquum 8. ambo termini.

EXPENSIO IV.

De minimis, primisque numeris.

THEOR. I. PROPOS. XXVI. Eucl. 23.

Primi inter se numeri sunt minimi, qui eandem proportionem obtineant.

SIt 7. & 4. primi numeri ad inuicem. *Dico eos minimos esse eorum numerorum, qui proportionem similem habent, quam 4. ad 7.*

Probatur. Nam si alius reperitur minor, quam 7. & 4. Sit ille *quorum* quidam numerus, qui præsupponatur minor quam 7. & *Leonum*, qui dicatur ab aduersarijs, minor, quàm 4. dicentes tamen proportionem, quam 4. ad 7. Cum itaque proportio numerorum in eo sita sit, vt numerus numeri sit eadem pars, vel partes, quam alter similis eis in proportione est pars, vel partes alterius; sequitur, vt debeat dari aliquis numerus, qui metiatur *Equos*, & *Leones* toties, quoties metitur 4. & 7. Vel ergo ille numerus est vnitas, & ita cum vnitas toties capiat in 7. quot sunt *Equi*, & toties in 4. quot sunt *Leones*, erunt *Equi* septem, & *Leones* 4. nempe idem numerus, qui 4. & 7. non autem minor, vt volebant aduersarij. Quod si non sit vnitas; sed aliquis alius numerus, qui 4. & 7. metiatur, sicut *Equos*, & *Leones*: iam 4. & 7. non erunt inter se primi: nam primi numeri inter se sunt: quorum communis mensura est non numerus, sed tantum vnitas.

THEOR. II. PROPOS. XXVII. Euc. 24.

Minimi numeri omnium eorum, qui habent cum ipsis communem rationem primi quoque sunt inter se.

SI dentur 7. & 4. qui dicantur minimi ex omnibus, qui proportionem habent, quam 7. ad 4. *Dicit quod isti quoque erunt inter se primi.*

Probaturque reducendo propositionem ad impossibile. Nam, si non sunt primi, erit aliquis numerus V. g. *Hominum* communis mensura; ita quod numerus ille *Hominum* capiet toties in 7. quot in stabulo sunt *Equi*, & toties in 4. quot in sylua sunt *Leones*. Ergo si multiplicetur numerus *Hominum*, per numerum *Equorum* producet numerum 7. & si multiplicetur idem numerus *Hominum* per *Le num* numerũ procucet 4. Quamobrem ex propos. 17. numerus *Leonum* minor, quam 4. & *Equorum* minor quam 7. (cum multiplicati faciant 7. & 4.) dicent inuicẽ proportioné eandẽ, quam 7 ad 4. Vnde 7. & 4. nõ erunt minimi omnium proportionem dicentium, quàm 7. ad 4. quòd *Leonum*, & *Equorum* minores numeri eandem proportionem dicant, quod est contra præsuppositum.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII. Euc. 25.

Si duo numeri primi inter se fuerint, qui vnum eorum metitur, numerus ad reliquum primus erit.

DEntur numeri 8. & 9. qui inuicem primi sint, & 4. metiatur 8. *Dicit quod 4. ad reliquum 9. primus erit.*

Primi 8 9
4

Probatur. Quia. Si 4 non est primus ad numerum 9. metietur eos aliqua communis mensura præter vnitatem. Sit hæc mensura aliquis numerus *Hominum*, quæ metiatur 4. & 9. Hæc etiam ex 11. pronunc. metietur 8, quoniam 4. ex hypothesi metitur 8., qui numerus 4. à numero *Hominum* metitur: quare numerus *Hominum* erit mensura numeri 9. ex præsupposito, & numeri 8, vt probaui; vnde 9. & 8. non erunt inter se primi; cùm habeant aliquem numerum *Hominum* præter vnitatem communi ipsorum mensuram, quod est absurdum; cùm præsupponamus 7. & 9. primos inuicem.

THEOR. IV. PROPOS. XXIX. Eu. 22.

Minimi numeri omnium in sua proportione æquè metiuntur alios maiores eandem proportionem habentes, minor quidem minorem, & maior maiorem.

DEntur duo numeri 2 & 3. minimi inuicem, alijque duo maiores 4. & 6. eandem proportionem habentes. *Dicit quod 2. minor æquè metitur 4. minorem, sicut 3. maior quam 2. æquè metitur 6. maiorem, quam 4.*

Probatur. Quoniam ponitur, vt 2. ad 3. ita 4. ad 6. ex prop. 13. vicissim proportionales erunt; nempe fundamenta proportionis dicent eam proportionem, quam termini, & ita erit quoque 2. ad 4. vt 3. ad 6. Quamobrem iuxta 1. definitionem erunt numeri minores 2. & 3. eadem pars, vel partes maiorum 4. & 6. Vnde eos metientur.

Probatur etiam, quod æquè. Quia non possunt esse eædem partes: Nam si dicatur, quod hoc euenire possit, diuidantur in eas partes, quas conficit 2. numeri 3. & sint tot, quot *Equi* sunt in agro, & 4. numeri 6. & sint tot, quot *Oues* sunt in stabulo. Itaque erit numerus 2. iuxta 1. definitionem ad numerum *Equorum* similis in proportione, quam 4. ad numerum *Ouium*. Quamobrem ex 13. propos. & vicissim ita erit numerus *Equorum* ad numerum *Ouium*, vt 2. ad 4. minor autem vtique est *Equorum* numerus, quam 2. & *Ouium* quam 4. quod sint pars, vel partes horum numerorum; eo quod sint multiplicatores partium eos componentium, & ideo necessario minores; quod est absurdum, cùm 2. & 4. ex hypothesi sint minimi in hac proportione. Quare 2. erit medietas numeri 4. vel si aliquis alius numerus loco exempli substituatur, erit eius, vel pars tertia, vel quarta, non autem plures partes numeri 4. continebit. Sicut nec 3. numeri 6. alioquin necessariò darentur partes minores, quæ eandem rationem possiderent contra Hypothesim.

THEOR. V. PROPOS. XXX. Eucl. 26.

St duo numeri ad quempiam primi fuerint; etiam ex ijs genitus ad eundem primus erit.

POnantur duo numeri 7. & 4. qui sint primi ad 9. inuicemque multiplicentur 7. & 4. & fiat numerus 28. *Dicit quòd, & numerus 28. erit primus ad 9.*

Probatur reducendo ad impossibile. Nam, si 28. & 9. non sunt inter se primi, metiatur eos aliquis numerus *Hominũ*, at 28. toties, quot sũt *Leones* in campo. Itaque numerus *Leonum* multiplicatus per numerum *Hominum*, vel è contra producet 28. qui numerus producitur etiam à 4 & 7. Vnde ex 19. propos. reciprocè proportionales erunt, & 4. ad numerũ *Hominũ* erit, vt numerus *Leonũ* ad 7.

Progress. 2. Quoniam autem 4. & 9: ex hypothesi sunt inuicem primi, & numerus *Hominum* metitur 9. ex presuppositò, sequetur iuxta propos. 28. quòd etiam numerus *Hominum* sit primus ad numerum 4. & ideo, quòd sit minimus in sua proportione iuxta propos. 26. Et hinc, quòd in hac proportione sint numeri maiores 7. & numerus *Leonum*, qui hanc ipsam dicunt proportionem, ex progressu 1. Et iuxta propos. anteced. quod eque metiatur 4. numerum *Leonum* sicut numerus *Hominum* numerum 7. Cum autem numerus *Hominum* metiatur 9. vt ex hypothesi, & 7. vt modo; sequeretur, quòd 7. & 9. non essent inuicem primi, quòd communi mensura præter vnitatem metiantur contra hypothesim.

THEOR. VI. PROPOS. XXXI. Eu. 28.

Si duo numeri ad duos numeros, quisq; ad vtrosque primus sit: Etiam geniti ex primis duobus erunt primi ad genitos ex postremis duobus numeris.

2 3 15
Primi Geniti
4 5 8

DEntur 2. & 4. primùm, & deinde 3 & 5. Sitque primus 2. ad vtrosque 3. & 5. sicut, & 4. ad eosdem vtrosque 3. & 5. primus existat. Multiplicentur simul 2. cum 4. vt fiant 8. & 3. cum 5. vt euadant 15. *Dicit, quod etiam 8. & 15. geniti, erunt primi inuicem.*

Probatur. Nam 2. ponitur primus ad 3. & 5. Ergo ex præced. etiam genitus 15. erit primus ad eundem 2. Item, quia 4. est primus ad 3. & 5. etiam 4. erit primus ex præced. propos. ad 15. Cùm igitur numerus 15. sit primus ad 2 & 4. Ergo ex præced. etiam erit primus ad genitum ex ipsis 8. & ita 8. ad 15. primus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XXXII. Eu. 29.

Si duo numeri primi inter se fuerint, & multiplicans vterque seipsum, fecerit aliquem; Geniti ex illa multiplicatione primi inter se erunt. Et si rursus ijdem multiplicent hos Genitos, & alios numeros efficiant. Isti denuò refecti erunt primi inuicem: Et semper circa extremos hoc eueniet.

2. 3. 9 27
Primi Geniti & rursùs Geniti
2. 3. 4 8

SInt 2. & 3. qui se multiplicent, & 3. faciat 9. & 2. faciat 4. *Dico primò 4. & 9. esse primos inuicem.*

Probatur. Quoniam 2. & 2. sunt primi ad 3. Ergo ex 30. propos. huius, etiam ex illis genitus 4. ad eundem 3. primus erit. Cum ergo sit 4. primus ad 3. & ideo quoque ad aliud 3. Ergo si 3. & 3. se multiplicent; 9. Genitus ex propos. 30. primus erit ad 4.

Dico 2. Quod si rursus 2. multiplicet 4. & faciat 8. & 3. multiplicet 9. & faciat 27. eodem mo-

do ſint primi inuicem.

	2	9		27
Primi	ad		Geniti	
	3	4		8

Probatur. Nam 2. eſt primus ad 3. ex hypotheſi & 9 eſt primus ad 2. Siquidem 3. & 3. ſunt primi ad 2. Ergo ex propoſ. 30. o. genitus erit etiam primus ad 2. Sic vt diximus ſupra 4. eſt primus ad 3. & 9. Quare habemus duos numeros, quorum quiſque ad duos alios primus eſt, nempe 2. ad 9. & 3. & 4. ad 9. & 3. Ergo ex præced. geniti ex ipſis nempe 8. ex 4. & 2. ſic 27. ex 3. & 9. erũt inuicẽ primi, & ſic deinceps, etiamſi 2. multiplicet 8. & 3. 27. & ſic eodem modo res ſuccedet, cùm ſemper ſit eadem ratio.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXIII.

Omnem compoſitum numerum, aliquis primus numerus metitur.

PRobatur. Quia dato numero aliquo, V. g. 24 & datâ eius aliquâ menſurâ, vt 8. vel iſte 8; eſt primus, & iam habemus intentum, vel compoſitus; ſi eſt compoſitus, metiatur eum numerus V. g. 2. qui ſimiliter, vel erit primus, vel compoſitus, quod, ſi primus, habemus id, quòd volumus, ſi non primus metietur eum aliquis alius numerus; cùmque in numeris diminuendo non poſſimus progredi in infinitum; tandem in aliquo numero primo quieſcendum erit, vt eſt 2. reſpectu numeri 24.

THEOR. IX. PROPOS. XXXIV.

Omnis numerus, vel eſt primus, vel eum aliquis primus numerus metitur.

PRobatur ex antecedenti, quia ſi non eſt primus erit compoſitus, & ideo aliqua menſura primi alicuius numeri tandem menſurabitur.

PROBL. I. PROPOS. XXXV.

Numeris datis quotcunque reperire minimos omnium eandem rationem habentium cum ipſis.

SInt, quotcunque numeri 6. 9. 15. habentes quaſcumque proportiones, ſiue ſit eadem proprtio, quæ 6. ad 9 & quæ 9. ad 15 ſiue non: Iſti, vel erunt inter ſe primi, & ſic erunt etiam minimi in ea proportione iuxta propoſ 26, vel compoſiti, & ſic iuxta 2. propoſ. reperiemus maximam communem menſuram 3. quæ metiatur eos primum gemina vice ſecundum tricies, tertium quinquies. *Dico, quod duenarius ternarius; & quinquenarius ſunt numeri minimi primi in ea proportione.*

Probatur itaque primò, quod eam proportionem poſſideant.

Quoniam numeri 2. 3. 5. multiplicati per 3. faciunt numeros prædictos 6. 9. & 15. Sequitur ex propoſ 18. quod habeant geniti qui ſunt 6. 9. & 15. eandem rationem, ac multiplicati 2. 3. 5.

Probatur quoque quod ſint minimi in ea proportione, ſi enim tales non ſunt dabuntur aliqui ipſis minores. Sint itaque tales numerus *Homi-*

num, Equorum, & Ouium, qui iuxta propoſ. 28. metiẽtur ipſos 6. 9. & 15. æquè, & ideo per numerum aliquem V. g. *Leonum*. Quapropter numerus *Leonum* multiplicans numerum *Hominum* faciet 6. multiplicans autem numerum *Equorum* faciet 9. & tandem numerum *Ouium* generabit 15. Itaque ex 19. propoſ. h. quoniam duenarius multiplicatus per numerum 3. generat 6. & numerus *Hominum* multiplicatus per numerum *Leonum* generat item 6. Proportionales erunt inuicem hi numeri, & ſe gerent multiplicantes, vt multiplicati reciprocè, & erit 3. multiplicans ad *Leonum* numerum multiplicantem, vt *Homines* ad 2. multiplicati, ſed *Homines* ex hypotheſi ſunt minus, quam 2. numerus. Ergo ex prop. 29. etiã 3. numerus erit minor, quã *Leones*, qui numerus *Leonum* metitur 6. 9. & 15. propoſitos per numeros *Hominum, Equorum, & Ouium*. Quare numerus *Leonum* erit communis menſura illorum numerorum 6. 9. 15. & maior, quàm eorundem communis menſura 3. contra hypotheſim, quæ maxima ſupponitur. Itaq; alij numeri minores ipſis, nempe duenario, ternario, & quinario, qui eadem proportione potiantur, quam 6. 9. & 15. non poterunt dari.

PROB. II. PROPOS. XXXVI.

Duobus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur, numerum.

SIt primo exquirendus minimus numerus omnium, quem duo numeri primi inuicem; nempe 3. & 4. metiantur. Multiplicentur inuicem, & procreatus, puta 12. erit numerus, quem metiantur. Nam toties capiet 3. in 12. quot vnitates ſunt in 4 & 4. in 12. quot vnitates ſunt in 3. Quod verò 12. ſit minimus omnium, quem dati numeri metiantur.

Probatur. Nam, ſi fieriposteſt, aliquem alium numerum minorem V. g. *Equorum* menſuret, & numerus quidem 3. toties, quot *Ones* ſunt in campo numerus verò 4. eundem numerum; *Equorum* metiatur toties quot *Canes* ſunt in platea. Itaq; multiplicatus 3. per numerum *Ouium* produtet numerum *Equorum*, & hunc eundem numerum producet 4 multiplicatus per numerum *Canum*. Vnde ex 19. pr. reciprocè relationem dicẽt multiplicati 3. ad 4 quam multiplicantes numerus *Ouium* ad numerum *Canum*, & quia etiam 4 & 3. minimi ponuntur in hac proportione metietur quoque 3. numerum *Ouium*, & 4. numerum *Canum* ex 19. propoſ.

Progreſſ. 2. Conſiderandum autem eſt rurſus, quòd numerus 3. multiplicans numerum 4. facit 12. & 4. multiplicans ex hypotheſi numerũ *Ouium* facit numerum *Equorum*; erit ex 17. pr. eadem proportio 4 ad numerum *Ouium*, quam 12. ad numerum *Equorum*. Sed ex primo progreſſu 4. metitur numerum *Ouium*. Ergo, & 12. metietur numerum *Equorum*, quem poſuimus minorem, quam 12. quod eſt abſurdum.

Sint ſecundo dati numeri non primi inter ſe, vt 8. 12. inueniaturque ex prop. 33. h. minimi in ea proportione, vt ſit 2. ad 3., vt 8. ad 12. multiplicenturque iuxta 9. propoſ. extrema proportionum inuicem nempe 2 & 12. rurſuſque media, vt 3. & 8. fiet idem numerus 24. *Dico, quod iſte numerus eſt minimus, quem dati numeri metiantur.*

Quòd

Quòd autem 8 & 12. menſurent 24. clarum eſt cum multiplicati per 3. & 2. ipſum producant.

Quòd verò 24. ſit minimus omnium, quem menſurent, probatur eodem tenore argumenti vt ſupra. Nam ſi non eſt minimus dabitur aliquis numerus V. g. *Equorum* minor ipſo, quem menſurabunt 8. toties, quot *Ones* ſunt in campo, & 12. toties, quot *Canes* ſunt in platea: Quapropter idẽ numerus fiet *Equorum*, ſi numerus *Canum* multiplicet 12. ſicut ſi numerus *Ouium* multiplicet 8. Itaque dicent eamdem proportionem ex 19. propoſ. multiplicantes inuicem, quàm multiplicati, reciprocè, & ita erit 8 ad 12. vt ad numerum *Ouium* numerus Canum, & ita pariter erit 2. ad 3. vt numerus *Canum* ad numerum *Ouium* cum 2. ad 3. dicant eandem proportionem, quam 8. ad 12. Quare 2. & 3. (cum poſiti ſint minimi in ea proportione) menſurabunt quoque æquè numerus quidem 2. numerum *Canum*, & 3. numerum *Ouium*.

Progreſſ. 2. Obſervandum rurſus eſt, quod 8. multiplicans 3. producit 24. Sicut, & numerus idem 8. multiplicans numerum *Ouium* producit numerum *Equorum*: Quare ita 3. erit ad numerum *Ouium* ex propoſ. 17. ſicut 24. ad numerum *Equorum*.

Proptereaq; cùm ex progreſſ. primo 3. menſuret numerum *Ouium*, menſurabit quoque ex propoſ. 29. numerus 24. numerum *Equorum*, Qui poſitus eſt minor: itaque maior metietur minorem, quod eſt abſurdum.

COROLLARIVM

HInc ſit; quòd ſi duo numeri multiplicent minimos eandem rationem habentes, maior minorem, & minor maiorem, produci minimum numerum, quem illi menſurant. Nam demonſtratum eſt; quòd, ſi primus maior 3. multiplicans 8. compoſitum minorem, & 2. primus minor multiplicans 12. compoſitum maiorem faciunt 24. numerum minimum, quem 8. & 12. metiantur.

THOR. X. PROPOS. XXXVII.

Si duo numeri numerum quendam menſurent, minimus quoque numerus menſuratus ab ipſis numerum illum menſurabit.

SIt 4. & numerus 6. qui menſurent 36. & numerus minimus menſuratus ab ipſis 12. (Nã 4. & 6. multiplicati per 2. & 3. primos, & minimos in eadem proportione faciunt 12. *Dico, quod hic numerus 12. metitur quoque numerum 36.*

Probatur. Nam, ſi non ita eſt; auferatur 12. 36. numerus 12. quoties fieri poteſt, & ſit pars ablata numerus, quidam *Hominum*, qui 12. ex æquò continebit, per hanc ablationem neceſſariò ſuperabit aliquid, quod erit minus, quã 12. ex aduerſarijs: Hoc ergo reliquum ſit quidam numerus *Ouium*. Cum itaque 4. & 6. menſurent 12. etiam menſurabũt ablatum *Hominũ*, ex numero 36. & (vt preſupponitur) cũ menſurent quoq; totũ 36. menſurabunt, & reliquum numerum *Ouium* ex propoſ. huius 8. itaque numerus 12. contra hypotheſim, non erit minimus, quem 4. & 6. metiantur; cùm metiantur quoq; & reliquũ *Ouium* minus, quàm 12.

PROBL. III. PROPOS. XXXVIII.

Tribus numeris datis reperire, quem illi minimum metiantur numerum.

3. 4. 6. metitus 12.

SIt inueniendus minimus numerus, quem dati tres numeri 3. 4. 6. metiantur. Inueniatur ex propoſ. 36. minimus, quem 4. & 3. metiantur, & ſit 12. quem etiam 6. metitur. *Dico, quod 12. eſt minimus numerus, quem 3. 4. & 6. metiantur.* Si enim eſſet aliquis minor, is eſſet V. g. quidam Hominum, ergo numerus Hominum minor, quã 12. menſuraretur quoque à numero 3. & 4. Quare 12. non eſſet minimus, quem 3. & 4. vt repertum fuit, menſurarent.

Verùm ſi occurrat. Quòd minimus numerus, quem duo numeri menſurant, non menſuretur à tertio, vt eſt 16. qui menſuratur à 4. & 8. ſed non menſuratur à 6. tertio numero. Inueniatur minimus numerus, quem 16. & 12. metiantur, ſitq; 48. *Dico, quod iſte eſt numerus, quem tres 4. 8. & 12. metiantur.*

metitus primus 16.

4. 8. 12.

metitus ſecundus 48.

Probatur primò. Quod metiantur. Nam 4. & 8 menſurãt 16. hic 16. verò menſurat 48. Ergo, & 4. & 8. menſurant 48. ex propoſ. 10. huius.

Probatur ſecundò. Quod ſit minimus omniũ eorum, quos 4. 8. & 12. menſurant. Nam, ſi datur aliquis numerus V. g. *Equorum* minor, quam 48. quem 4. 8. & 12. menſurent. Sequitur, & quòd eum menſurent 12. & 16. ſiquidem 16. menſuratur à 4. & 8. Quare ex prop. præc. num. *Equorũ* menſurabitur quoque à 16. minimo, quem illi mẽſurẽt. Ergo 48. non erit minimus, quẽ 12. & 16. menſurent contra hypotheſim, cũ 16. ex probatione menſuret numerum *Equorum* minorem, quã 48. & 12. eundẽ menſuret, vtpote tertius numerus eorũ, qui numerũ *Equorũ* ex aduerſarijs mẽſurãt.

COROLLARIVM

SI tres numeri numerum quempiam metiantur, etiam minimum, quem, illi metiuntur, eundem menſurare. Nam ſi numerus 12. & 16. menſurant numerum Equorum etiam numerus 48. ex præced. propoſ. debebit illum menſurare. Cùm à minimis numeris numerus menſuratus, meſuret omnem numerum ab illis minimis menſuratum.

THEOR. XI. PROPOS. XXXIX.

Si quiſpiam numerus numerum metiatur, menſuratus habebit partem, vel partes à menſurante denominatas.

MEnſuret numerus 3. numerum 12. *Dico numerum 12. habere partes, vel partem à 3. denominatam*; nempe habere tertiam partem.

Oſtenditur. Nam 3. metiatur 12. toties, quot vnitates ſunt in 4. Ergo vt Vnitas metitur 4. ſic 3 metitur 12. Quare ex propoſ. 13. ita quoque

viciſſim

viciſſim. Vnitas metietur 3. vt 4. 12. Et ideo eadem pars erit Vnitas ipſius 3. quæ 4. ipſius 12. Sed Vnitas eſt pars ipſius 3. à 3. denominata. Ergo etiam 12. habebit partes ab ipſo 3. denominatas; nempe partem tertiam, vel duas tertias partes, & cet.

THEOR. XII. PROPOS. XL.

Si numerus partem habuerit quamlibet, metitur illum numerus à parte denominatus.

HAbeat numerus 15. partem 5. quæ denominetur à 3. ita, quòd 5. ſit tertia pars numeri 15. Dico, quod 5. menſurabit 15.

Probatur. Nam quot vnitates erunt in 3. tot erunt quinquenarij in numero 15. Ergo numerus quinquenarius à parte tertia denominatus metietur numerum 15.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Numerum reperire, qui minimus cùm ſit habeat datas partes.

SInt datæ partes tertia, quarta, quinta, quas inueniendus aliquis minimus numerus poſſidere debeat. Reperiatur aliquis minimus numerus, quem numerent 3. 4. & 5. iuxta partium datarum denominationem, qui erit 60. Dico numerum 60. eſſe minimum eorum, qui tertiam, quartam, & quintam partem habent.

Probatur. Nam quia 3. 4. & 5. metiuntur numerum 60. clarum eſt, quod numerus 60. ex præced. propoſ. habet partes à 3. 4. & 5. denominatas.

Quod verò ſit minimus eorum, qui tales partes habent.

Probatur. Nam ſi dicatur eſſe numerum aliquem Hominum minorem, qui tertiam, quartam, quintam partem habeat, metietur eum numerus 3. 4. & 5. & ſic non erit 60. minimus numerus, quem 3. 4. & 5. menſuret. Cum menſurent quoque numerum Hominum minorem numero 60.

THEOR. XIII. PROPOS. XLII.

Primis quibuſcumque numeris propoſitis ſemper plures vltra propoſitos poterunt mueniri.

SInt propoſiti numeri 2. 3. 5. primi inuicem. *Dico quòd vltra ipſos inuenietur aliquis alius.* Nam ſit numerus metitus à propoſitis 30. & addatur vnitas, & fiant 31. Iſte numerus, vel eſt primus cùm propoſitis; vel non. Si eſt primus habemus, quod volumus; inueniri nempe alium aliquem primum numerum præter propoſitos. Si non eſt primus ex propoſ. 33. eum aliquis primus numerus metietur. Menſuret eum numerus Equorum. Iſte, vel eſt idem cum primis, & eſt, vel 2. vel 3. vel 5. & ſic menſurabit totum 31. ex hypoteſi, & ablatum 30. vt vnus ex dictis. Ergo & reliquum 1. quòd eſt abſurdum cum numerus vnitatem non metiatur, vel eſt diuerſus à prædictis, & iam intentum habemus.

COROLLARIVM

ELlicles modum reperiendi numeros primos; Silicet reperiendo primum numerum, quem dati numeri metiâtur, & illi reperto addendo vnitatem, nam ille erit primus ad inuentos.

TRACTATVS XI.
IN VIII. LIBRVM EVCLIDIS
PARS SECVNDA.

De ſpeciali Numerorum proportione.

HIc liber agit iam non de proportionibus numericis in vniuerſali; ſed de ipſis in particulari: Et primò de proportionibus numerorum ſimplicium. Secundò de proportionibus numerorum figuratorum, quorum inquam vnitates ſi ordine diſponantur, figuram conſtituant. Vnde operæ pretium erit priùs horum numerorum perfectam habere notionem.

EXPENSIO I.

De principijs.

DEFINITIO I.

CVm duo numeri ſe ſe mutuo multiplicantes fecerint aliquem, genitus numerus planus apellabitur, numeri verò hunc generantes latera dicentur.

Planus

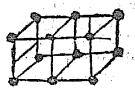
Planus dicitur numerus ortus ex duorum multiplicatione; quia ſecundùm ſuas vnitates ordine diſpoſitas parallelogrammum conſtituit, vt 3. & 4. faciunt 12. Poteſt verò idem, & vnus numerus plura habere latera; cùm ex pluribus multiplicationibus generari queat, vt 12. habet latera 3. & 4 ſic 2. & 6. vt ex aſteriſmis ordinatis conſtat.

* * * *
* * * *
* * * *

DEFINITIO II.

CVm verò tres numeri mutuò ſe ſe multiplicantes aliquem fecerint, qui procreatus, erit ſolidus dicetur, & generantes tres numeri latera dicentur.

Quia nimirum, ſi vnitates eius diſponantur, vel ſumantur tanquam partes ſolidæ alicuius ſolidi, ſolidum conſtituent, V. g. ſi 2. multiplicet 2. facient 4. & ſi 4. multiplicet 3. facit 12. quæ vnitates ſolidum conſtituunt, vt hìc videre eſt.



DEFINITIO III.

QVadratus numerus eſt, qui æqualiter æqualis, vel qui ſub duobus æqualibus numeris continetur.

Nam eius vnitates in longum, latumque diſpoſitæ quadratum conſtituunt. Sic numerus 25. ex 5. in 5. procreatus, dicitur numerus quadratus.

Numerus vero generans dicitur latus, ſeu radix quadrata, quæ, vt exquiratur, ſuo loco oſtendendum erit.

DEFINITIO IV.

CVbus numerus eſt, qui æqualiter æqualis æqualiter, vel qui ſub tribus æqualibus numeris continetur.

V.g. 125. qui ſub tribus 5. ſe multiplicantibus continetur: ſic 5. in 5. producit 25. & rurſus 5. in 25. producit 125. qui numerus cubus appellatur, & numeri producentes dicuntur latera, ſeu radix cubica, de qua ſuo loco agendum.

DEFINITIO V.

SImiles ſolidi numeri, & plani ſint, qui proportionalia habent latera.

Vt planus numerus plano numero ſimilis ſit, non requiritur, quòd omnia eius latera, ex quorum multiplicatione generatur ſint proportionalia omnibus lateribus, ex quibus alius generari poteſt ſic 6. & 24 ſunt proportionales; quòd ita ſit 2. ad 3. latera numeri 6. vt 4. ad 6. latera numeri 24. licet numerus 24. habeat alia latera; nempe 2. & 12. ſic 3. & 8., quæ lateribus 2. & 3. non proportionantur. Sic etiam ſolidus ſolido ſimilis erit; ſi aliqua latera vnius, lateribus alterius proportione reſpondeant, licet alia inueniri poſſint, quæ talia non ſint: ſic 24. & 192. ſimiles ſunt, quòd latera 24. numeri ſint 2. 3. 4. quæ ita ſunt inuicem, vt 4. 6. 8 latera numeri 192. licet adſint alia latera numeri V. g. 192. quæ non ita ſe habeant; vt 6. 8. 4.

EXPENSIO II.

De minimorum numerorum proportionibus.

QVia omnes numeri licet ratione non tamen proportione correſpondent. Ideo primo videndum quinam numeri inter ſe primi ſint, quibus poſſint inueniri numeri proportionales, & etiam tradere modum illos inueniendi, quod in hac Expenſione operi demandatur.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si ſint quotcunque numeri deinceps proportionales: extremi verò ipſorum primi inter ſe fuerint, ipſi omnes minimi in ea proportione erunt.

SInt numerorum deinceps proportionalium nempe continuè 8. 12. 18. 27. Dicit quòd ſi extremi 8. & 27. ſint primi inuicem; quòd etiam erunt dati omnes numeri minimi in ea proportione.

Probatur. Nam dentur 4. numeri minores ipſis, ſi id eſſe poteſt *Hominum, Equorum, Ouium, & Leonum*. Nam cum dicant eandem proportionem inuicem etiam extrema eorum ex propoſ. 14. ſept. ex æqualitate in eadem ratione erunt, & ita erit numerus *Hominum* ad numerum *Leonum*, vt 8. ad 27. Quare cum 8. & 27. ſint primi inuicem ex hypotheſi menſurabunt ex 29. propoſ. ſept. 8. quidem *Homines*, & numerus 27. *Leones*: nempe maior, vt ponitur 8. *Homines* numero minores, & 27. maior *Leones*, qui ſupponuntur pauciores.

PROBL. I. PROPOS. II.

Numeros reperire deinceps proportionales minimos in datâ ratione, quotcunque iuſſerit quiſpiam.

SIt data ratio, quam habet 2. ad 3. Et iubeatur primo inuenire tres numeros minimos ſucceſſiuè proportionales in illâ datâ proportione. Numerus 2. multiplicetur in ſe, & fiat 4. Deinde cum numero 3 & fiant 6. tandem 3. in ſe, & fiit 9 Dico 4. 6. 9. eſſe minimos in ea proportione.

Probatur autem primò. Quòd ſint proportionales. Nam, cùm numerus 2. multiplicet ſe, & 3. ex propoſ. 17. ſept. erit, vt ipſe 2. ad 3 ita producti 4. ad 6. Item cum numerus 3. multiplicet 2. & ſe erit vt 2. ad 3. multiplicantes, ita in proportione erunt producti 6. & 9.

Probatur ſecundò. Quod etiam ſint inuicem primi ex propoſ. 32. lib. ſept. Nam extremi 4. & 9. procreati ſunt ex numeris primis inuicem cum minimi ſint in ea proportione multiplicati in ſe. Ergo, & extremi 4. & 9. erunt primi, & ideo minimi in ea proportione. ex propoſ. ant. Quare etiam medij erunt minimi in ea proportione ex eadem propoſ. antecedi.

Iubeamur ſecundo ex iis repertis, inuenire alios minimos in ea proportione fiant ex 2. in tres inuentos 4. 6. 9. multiplicato, numeris 8. 12.

& 18. Deinde ex 3. in vltimum 9. fiat 27. Dico *rursus* 8. 12. 18. 27 *esse minimos in ea proportione*.

Probatur primò. Quod sint proportionales. Nam ex propos. 17. septimi, numerus 2. multiplicans 4. & 9. facit aliquos 8. 12. 18. Ii si geniti in eadem ratione erunt, quam 4. ad 6. & 6. ad 9. quæ quoque est eadem, quam dicit 2. ad 3. Sic pariter 3. multiplicans 9 fecit 27. & 2. multiplicans item 9. fecit 18. ex eadem propos. 18. & 27. in eadem ratione erunt, quam 2. ad 3. Ergo omnes quatuor numeri nuper reperti 8. 12. 18. 27. in eâdem ratione sunt, quam 2. ad 3.

Probatur secundo. quod minimi, quoque sint. Nam 2. & 3 cum sint primi, minimi sunt in ea proportione, & in eadem extremi sunt, 8. & 27. geniti ex 2 & 3 gemina vice in se. Quare ex pr. 32. sept. erunt quoque primi. Quare erunt minimi in ea proportione ex propos. ant. quam 2. ad 3. & sic semper succedet, si in infinitum sequaris.

COROLLARIVM I.

Hinc deducitur. Quod si tres numeri minimi sint continuè proportionales extremos quadratos esse. Nam sunt ex definitione 18 æqualiter æquales, siquidem extremi, vt 4. & 9. sunt facti, ex multiplicatione minimorum 2. & 3. in se.

COROLLARIVM II.

Deducitur quoque quatuor numerorum inuentorum, si minimi sint, extremos cubos esse, nempe 8. & 27. Nam 8. fit ex multiplicatione 2. in 2 & rursus ex multiplicatione 2. in genitũ 4. Sic 27. fit ex multiplicatione 3. in 3. & rursus ex multiplicatione 3. in genitum 9. Quarè 8. & 27. sunt numeri æqualiter æquales æqualiter. Si verò essent quinque, extremi essent quadrati quadratorum, & alij qui in Algebra explicantur.

COROLLARIVM III.

Extremi quoque secundùm hanc regulam inuenti, vt 4. & 9. fic 8 & 27. sunt primi inuicem, vt ex 32. propos. lib sept. constat. Nam consurgit 4 ex multiplicatione numeri 2. in se. Sic 9. ex multiplicatione 3. in se. Quare erunt primi ad inuicem. Sic 8. & 27. consurgunt ex multiplicatione 2. rursus in 4. & 3. rursus in 9.

COROLLARIVM IV.

Constat etiam duos minimos numeros in aliquâ ratione metiri alios quoscunque in eadem ratione. Quia scilicet producuntur ex eorum multiplicatione.

PROBL. II. PROPOS. III. Euc. 4.

Rationibus datis quotcumque in minimis numeris reperire numeros deinceps minimos in datis rationibus.

Sint datæ duæ rationes 2. ad 3. & 5. ad 6. Oporteatque reperire tres numeros minimos deinceps proportionales in datis rationibus, quod scilicet primus ad secundum sit, vt 2. est ad 3. & secundus ad tertium, vt 5. est ad 6. Ita fiet. Reperiatur minimus numerus ex propos. 36. sept. quem metiuntur 3. & 5. secundus, & tertius, & sit 15. exortus ex multiplicatione 3. cum 5. quia sunt primi inuicem; at si non essent primi, esset operandum, vt in secunda parte eiusdem propos. iubemur.

Rationes	2.	3.	5.	6.
Continuè in illis	10.	15.	18.	Proportionales.

Deinde tertius 5. multiplicet primum 2. & fiant 10. sicut secundus 3. multiplicet vltimum 6 & fiant 18. *Dico tres inuentos* 10. 15. 18. *esse in eo proportione, quam præsident* 2. *ad* 3. *& 5. ad* 6. *nisi rum esse* 10. *ad* 15. *vt* 2. *ad* 3. *&* 15. *ad* 18. *vt* 5. *ad* 6.

Probatur primo, quod eandem proportionem dicant. Nam numerus 2. & 3. multiplicando 5. fecerunt aliquos; nempe 2. ex 5. numerum 10. sicut 3. ex 5. numerum 15. Ergo ex prop. 17. sept. erunt in eadem proportione 2. ad 3. vt 10. ad 15. sic numerus 7. & 6. multiplicando 3. fecerunt 15. & 18. Ergo erunt in eadem proportione, ex eadem propositione, 5. ad 6. vt 15. ad 18.

Probatur secundò. Quod *sint minimi in datis rationibus*. Nam progress. primo si non sunt minimi erunt aliqui numeri minores singuli, singulis. Qui in datis rationibus existant. Sit ergo numerus *Equorum* minor, quam 10., qui sit ad numerum *Ouium*, minorem quam 15 vt 2. ad 3. cum ergo 2. & 3. ex hypothesi minimi sint in ea proportione ex prop 2. sept. metietur 2. numerum *Equorum* sicut 3 numerum *Ouium*.

Progress. 2 Pariter dabitur quoque numerus *Ouium* minor, quam 15. & numerus *Leonum* minor, quam 18. qui sint in eadem proportione, qua 5. ad 6. Quare 5. metietur *Oues* & 6. *Leones* ex citata prop. 19. sept. Vnde 5. & 3. metientur numerum *Ouium* minorem, quam 15. numerus quidem 5. vt modo probauimus: numerus verò 3. ex præc. progressu.

Quamobrem cùm 5 & 3 mensurent quoque 15. minimum, quem metiuntur. Sequetur, quòd numerus 15. ex propos. 37. metietur numerum Ouium minorem: quam 15. Cùm 15. sit minimus eorum ex effectione, quem 5. & 3. mensurent. Quòd verò numerus maior metiatur minorem, hoc esse nequit.

Sint deinde secundo casu tres rationes in minimis numeris 3. ad 4. prima, secunda 5. ad 6. tertia 2. ad 7. Et sint inuenienda quatuor numeri in datis rationibus deinceps, idest continuè proportionales.

Rationes	3.	4.	5.	6.	2.	7.
Continuè proport.	15.		20.		24.	84.

Equi, Boues, Leones n. minores

Inueniatur minimus numerus, quem mensuret numerus secundus 4. & tertius 5. & erit 20. Deinde multiplicetur tertius 5. cùm primo 3. nempe per vices, inxta quas 4. capit in 20. & gignetur numerus 15. Rursus multiplicetur 4. cum quarto 6. nempe per easdem vices, penes quas 5. capit in 20. & producetur numerus 24. Erunt itaque 15. 20. 24. tres numeri in data ratione continuè proportionales. Videatur igitur, an quintus numerus 2. mensuret 24. Quod si metiatur, vt facit 2. propositus, qui capit 12. vicibus in 24. per has vices multiplicetur 7. & erunt 84. Dico itaque, quod 15. 20. 24. 84. habent datas rationes.

Probatur primò. Quod sint in datis rationibus, & quidem de tribus primis 15. 20. 24. constat, cum eodem modo executioni problema mandatum sit, ac in primo casu. De tertio verò, qui sit, ad quartum vt 2. ad 7. sic constat. Nam 2. metitur 24. tot vicibus, quot 7. metitur 84. cum ambo multiplicati per 12. eos gignant. Ergo 24. & 84. ex propos. 18. septimi erunt in ijsdem rationibus 2. ad 7.

Probatur secundo. Quod sint minimi, & etiam de tribus primis res constat ex primo casu. De numeris verò 24. & 84. tertiam proportionem facientibus clarum est, quia minor numerus dari nequit, quàm 84. qui capiat 12. vicibus 7. vt 24. capit 12. vicibus 2.

Nam si 20. 24. & 84. non sunt minimi in datis rationibus 5. ad 6. & 2. ad 7. Dabitur itaque numerus quidam *Equorum*, qui sit ad *Bouum* numerũ vt 5. ad 6. & sit numerus Bouum ad Leones, vt 2. ad 7. qui tamen singuli essent minores, quam 20. 24. 84. Quare ex propos. 29 septimi 5. metietur *Equos*, & 6. *Boues*. Et ex eadem 29. propos. 2. metietur quoque *Boues*, vt 7. *Leones*. Quia dati numeri 2. 7. & 5. 6. minimi sunt in datis rationibus. At 2. & 6. mensurant quoque 24. ex effectione minimum, quem possint metiri: ergo 24. mensurabit quoque *Boues* numerum se minorem ex propos. 37. septimi, quod est absurdum.

Tertius casus est, si quintus numerus non caperet æquè in 24. vt si esset tertia proposita proportio A 5. ad 7. reperiatur *minimus numerus*, quem A 5. & 24. metiuntur, & sit 120. Quoties ergo 24. metitur 120. quæ vices sunt 5. toties 15. primus numerus metiatur alium, numerum nempe multiplicetur 5. per 15. & fiet 75. Item quoties 24. metitur 120. toties 20. secundus numerus alium numerum multiplicatus per eas vices, quæ sunt quinque, metiatur, & erit 100. At quoties 5. metitur 120. quæ sunt 24. toties 7. alium numerum metiatur, & ita 7. multiplicatus per 24. producet 168. Itaque 75. 100. 120. 168. erunt minimi in datis rationibus. Quod enim habeant datas rationes ostenditur. Quia enim 15. 20. 24. metiuntur 75. 100. 120. per eundem numerum A 5. erit eadem proportio inter hos quoque, quæ erat inter illos. Illi autem 15. 20. 24. eas rationes habebant, quæ 3. ad 4. & 5. ad 6. Ergo easdem habebunt 75. 100. & 120.

Deinde, vt 5. metitur 120. vicibus viginti quatuor, ita, & 7. metitur 168. Ergo inter 120. & 168. erit eadem proportio, quæ inter 5. & 7.

Prob. 2. Quod sint minimi. Nam Progr. 1. si non sunt tales. Dabitur aliquis numerus *Equorum* minor, quam 100. *Bouum* minor, quam 120. & *Leonum* minor, quam 168. qui tamen habebunt datas rationes.

				A		
Rationes	3.	4.	5.	6.	5.	7.
Continuè Prop.	15.		20.	24.		
Continuè Prop.	75.		100.	120.		168.

secundo inuenti Equi, Boues, Leones n. minores, quam immediatè ipsis superpositi.

Numerus *Equorum* est ad numerum *Bouum*, vt 5. ad 6. & ideo 5. metietur numerum *Equorum* ex propos. 29. & quia & 5. & 4. metitur 20. minimum, quem possent metiri ex effectione, metietur quoque 20. ex propos. 37. septimi numerum *Equorum*.

Progress. 2. Quia verò ostensum est, quod sicut 20. est ad 24. sic 100. ad 120. Et ita quoque ex aduersarijs *Equi* sunt ad *Boues*, vt 100. ad 120. Ergo ex *Equo*, vt 20. ad 24. sic *Equi* ad *Boues*: Quare permutando, vt 20. ad *Æquos*, sic numerus 24. ad *Boues*. Quare sicut ex 1. Progressu 20. metitur *Equos* sic 24. metietur *Boues*.

Sed 5. mensurat etiam ipsos Boues, eo quod præsupponatur ab aduersarijs, quod ita sit 5. ad 7. sicut *Boues* ad *Leones* iuxta propor. 29. sept. Cum itaque 24. & 5. mensurent *Boues* mensurabit quoq; & numerus 120. ex propos. 37. sept. quem illi minimum mensurant numerum (qualem reperimus ipsũ 120. ab initio) ipsos *Boues*: At *Boues* dicũtur minus esse numero, quàm 120. Ergo numerus maior 120. metietur minorem *Bouum*, quod esse nequit.

THEOR. II. PROP. IV. Eu. 16. l. 9.

Si duo numeri primi inter se fuerint, non erit, vt primus ad secundum, ita secundus ad alium quempiam.

Sint primi inter se 6. & 7. Dico, quod non potest esse, vt 6. ad 7. ita 7. referatur ad alium quempiam V. g. ad numerum *Ouium*.

	6	vt 7
	7	Oues

Probatur. Quia ex propos 29. sept. Si 6. esset ad 7. vt 7. ad numerum Ouium oporteret, quod 6. metiretur 7. æquè, vtpote fundamentum secundæ proportionis 7. quemadmodum idem 7. terminus primæ metiretur numerum Ouium, quòd esse nequit, cùm 6. & 7. sint inuicem primi.

THEOR. III. PROPOS. V. Euc. 17. l. 9.

Si sint quocumque numeri deinceps proportionales: Extremi verò ipsorum primi inter se fuerint; non erit, vt primus ad secundum, ita vltimus ad alium quempiam.

4		9
ad 6		Equos

Dentur 4. 6. 9. continuè proportionales quorum extremi 4. & 9. primi sint inuicem. Dico, quòd non est, vt 4. ad 6. ita 9. ad alium quempiam V. g numerum *Equorum*.

Probatur. Nam si ita esset 4. ad 6., si, 9. ad numerum *Equorum* permutando esset quoque 4. ad 9. vt 6. ad numerum *Equorum*. Quare, cùm 4. & 9. sint primi inuicem in ea proportione 4. æquè metietur 6 ex propos. 29. sept. & 9. Equos. Quia ergo 4. mensurat 6. & ponitur, vt 4. ad 6. ita 6. ad 9. metietur quoque 4. ipsum 9. æquè ex pron. 18. tr. 8. quod est absurdum.

PROBL. III. PROP. VI. Euc. 18. l. 9.

Duobus numeris datis considerare; an possit ipsis tertius proportionalis inueniri.

Sint dati numeri 4. & 7. Videndum est; si sint primi inuicem, si primi sunt, vt assignati. Ex propos. 4. huius euidens est, quod illis tertius proportionalis nequeat inueniri.

Quod si non sint primi, vt 4. & 6. multiplicetur in se numerus secundus, vt 6. & fiant 36. Videaturque an numerus primus 4. mensuret 36. si mensurat, vt assignatus 4. qui metitur 36. per 9. dicendum est; quòd habeat tertium proportionalem, & quod iste sit numerus ille 9. per quem primus 4. mensurat genitum 36. ex multiplicatione numeri 6. in se.

Probatur, quod ille 9. sit tertius proportionalis ex propos. 20. sept. Nam idem numerus 36. producitur, tam ex multiplicatione numeri medij 6. in se, quam ex multiplicatione 4. & 9. inuicem, qui sunt numeri extremi; siquidem, vt supponitur 4. per 9. mensurat 36. Vnde ex illa prop. 20. erit, vt 4. ad 6. sic 6. ad 9. Quod si non mensurat genitum ex multiplicatione secundi in se numerus primus, vt si dati fuissent 2. & 3. & genitus ex 3. esset 9. quem 2. non mensurat, dicendum; tertium proportionalem non posse illi inueniri.

Probatur. Nam si ille esset. Esset V. g. numerus *Equorum*: Quare cum ponatur, vt 2. ad 3. ita 3. ad *Equos*, ex propos. 20. producetur idem numerus ex multiplicatione 3. in se, nimirum 9. & ex multiplicatione 2. per numerum *Equorum*. Quamobrem 2. metiretur 9. mediante numero *Equorum*; quod esse nequit, cùm ponatur non metiri 2. ipsum 9.

PROBL. IV. PROP. VII. Euc. 19. l. 9.

Tribus numeris datis considerare, an possit illi quartus proportionalis inueniri.

Sint dati 3. numeri, quorum extremi, si sunt primi: Iam nequit quartus proportionalis inueniri ex propos. 5.

8. 12. 18. 27.

Si verò non sint primi, vt 8. 12. 18. multiplicandi sunt 12. & 18. vt fiant 216. & diuidendus est numerus 216. per 8. vt videamus; an ex æquo mensuret 8. primus numerus numerum 216. genitum ex medijs; Si mensurat, vt in assignato exemplo; videndum, per quem numerum id fiat, V. g. per 27. Et tunc dicendum: tribus numeris 8. 12. 18. quartum proportionalem inueniri posse; ipsumq; esse numerum 27.

Probatur ex propos. 19. sept. Nam idem numerus fit ex multiplicatione mediorum 12. & 18. qui ex multiplicatione extremorum 8. & 27. cùm 8. multiplicando 27. generet 216. siquidem 8. ipsum metitur per 27. ex pronunc. 7. tr. 8.

Quare 8. 12. 18. 27. erunt inuicem proportionales.

Si verò primus datus numerus non mensuret genitum ex medijs, vt si essent dati 3. 4. 10. Nam 3. primus numerus non mensurat ex æquo 40. numerum ortum à multiplicatione numerorum reliquorũ 4. & 10. Tunc dicendum quartum proportionalem prædictis numeris inueniri nequaquam posse.

Probatur. Quoniam, si inuenitur, sit illis numerus *Ouium*. quartus proportionalis. Numerus 3. 4. 10. & numerus *Ouium* sunt proportionales: Ergo ex 19. propos. sept. medij 4. & 10. producerent inuicem multiplicati 40. Et idem numerus produceretur ex multiplicatione extremorum 3. & Ouium numero; Quare 3. per numerum Ouium metiretur 40. quod est absurdum cùm ponamus 3. non metiri 40.

EXPENSIO III.

De proportione numerorum non primorum.

Aliqua etiam de quibuscunque numerorum proportionibus sunt delibanda, eaque, que elementi vim habeant, deseruiantque ceteris, de quibus agendum est.

THEOR. I. PROPOS. VIII. Euc. 8.

Si inter duos numeros medij continua proportione numeri cadant; etiam inter alios eandem rationem cum ipsis habentes totidem continua proportione cadunt numeri.

Dentur 10. & 80. inter quos medij continua proportione cadant 20. & 40. ita, quòd sint continuè proportionales 10. 20. 40. 80. Sintque alij duo numeri, qui eandem proportionem dicant 6. & 48. quam 10. ad 80. Dico, *quòd sicut inter 10. & 80. cadunt duo medij proportionales 20. & 40. ita cadere inter 6. & 48.*

10. 20. 40. 80.

Quod, vt ostendatur, assumantur minimi, quatuor numeri in ea proportione, in qua sunt 10. 20. 40. 80. & sint 1. 2. 4. 8. eritque, vt 10. ad 20. ita 1. ad 2. & sicut 20. ad 40. ita 2. ad 4. & sicut 40. ad 80. ita 4. ad 8. Quare ex *Æquo*, vt 10. ad 80. sic 1. ad 8. & ita 6. ad 48.

Cumque sint 1. & 8. minimi in ea proportione, ita mensurabit 1. numerum 10. sicut metitur 8. numerum 80. ex propos. 29. l. sept. & ex eadem propos. metietur etiam numeros 6. & 48. habentes eandem proportionem cum ipsis.

Quoties igitur 1. metitur numerum 6. & 8. numerum 48. toties intermedij minimi numeri 2. & 4. metiantur alIquos alios, & quia 1. metitur 6. sex vicibus, & 8. numerum 48. vicibus item sex, producet 2. intermedius minimus multiplicatus per easdé vices numerũ 12. & 4. alter intermedius, item per 6. ductus numerum 24. Quamobrem geniti in eadem proportione erunt ex propos. 17. sept. ac generantes per eundem numerum senarium multiplicatos, & ita erit 12. ad 24. vt 2. ad 4. quæ eadem est, ac 1. ad 2. & quæ 4. ad 8. Erunt itaque continuè proportionales 6. 12. 24. 48. vt sunt 1. 2. 4. 8. & ideo, vt sunt 10. 20. 40. 80. Cumque multitudo numerorum intermediantium, qui reperti sunt 12. & 24. sit æqualis multitudini numerorum mediantium 20. & 40. patet propositum: Quod tot numeri medij proportionales cadent inter duos numeros 6. & 48. quot inter 10. & 80. eandem proportionem cum eis habentes.

COROLLARIVM

Hinc est, quod neque inter numeros duplæ proportionis, neque superparticularis, neque superbipartientis possit cadere medius proportionalis, quia caderet etiam inter numeros minimos similis proportionis. Illi autem medium proportionalem recipere nequeunt. Nam dupla proportio minimorum est inter 1. & 2. superparticularis verò inter numeros sola vnitate dissitos, inter quos nullus numerus cadit, vt 2. & 3. superbipartiens verò inter numeros, qui dualitate differunt, vt 5. & 7. inter quos sola vnitas intercipitur; quæ esse nequit medius proportionalis.

Nam sint 3. & 5. minimi in aliqua proportione superbipartiente, & sit numerus inter eos 4. qui dicatur medius proportionalis. Ergo erit 3. ad 4. vt 4. ad 5. quare ex pr. 22. l. 5. & 3. ablatus à 4. ita erit ad 4. ablatum à 5. vt residuum 1. à 4. ad residuum 1. à 5. & ideo 3. esset ad 4. vt vnitas ad vnitatem; quod est falsum; quia esset vt inæqualis ad inæqualem, ita æqualis ad æqualem.

THEOR. II. PROPOS. IX. Euc. 10.

Si inter duos numeros, & vnitatem continua proportione ceciderint numeri; quot inter ipsos, & vnitatem deinceps medij continua proportione cadunt numeri totidem, & inter ipsos medij continua proportione cadent.

16. 40. 100. 250. 625.

8. 20. 50. 125.

4. 10. 25.

2. 5.

5.

Sint numeri proportionales 16. & 625. & inter primum, & vnitatem tres medij proportionales cadant 2. & 4. & 8. sicut, & inter secundum 625. & vnitatem cadant tres medij proportionales 5. & 25. & 125. *Dico, quòd, & inter ipsos, tres pariter medij proportionales inuenientur.*

Nam duo minores numeri interpositi 2. & 5. se mutuò multiplicẽt, procreabunt 10. minor autem eorum 2. multiplicet tum modo factum 10. & faciet 20. tum mediocrem alterius seriei, nimirum 25. & faciet 50. Tandem idem numerus 2. multiplicet hos factos nimirum factum 20. & faciet 40. sic, & factum 50. faciet 100. & tandem maiorem alterius seriei 125. & faciet 250. *Dico hos postremo factos esse inter datos 16. & 625. medy tres proportionales.*

Obseruandum verò est in primis. Cùm 1. 2. 4. 8. & cęt. sicut 1. 5. 25. 125. dicuntur proportionales ab vnitate, quòd sicut vnitas metitur bis 2. sic 2. metitur 4. & 4. 8. & cęt. sicque vnitas metitur 5. quinq; vicibus, vt 5. 25. & 25. metitur 125. & cęt. Quia ita ponitur 1. ad 2. vt 2. ad 4. & sic ponitur 1. ad 5. vt 5. ad 25. & cęt.

Probatur. Quia omnes 16. 40. 100. 250. & 625. habent eandem proportionem, quam 2. ad 5. Ergo sunt continuè proportionales. Quod verò eam proportionem habeant, quam 2. ad 5. Patet nam 16. 40. 100. & 250. eandem proportionem habent ex propos. 17. quam multiplicati ex quibus prodiere 8. 20. 50. cùm fuerint multiplicati per eundem numerum 2. Isti verò 8. 20. 50. eandem habent ob eandem rationem, quam 4. & 10. cum fuerint multiplicati per eundem 2. Et rursus isti 4. & 10. eandem, quam 2. & 5. quod hi per 2. fuerint multiplicantes, ex 18. propos. Et ob eandem rationem quoque 250. & 625. quem primo posthabuimus, erunt in eadem proportione, quam 2. ad 5. cum 125 multiplicatus per 2. fecerit 250. minorem, & multiplicatus per 5. fecerit 625. Vnde omnes quinque 16. 40. 100. 250. & 625. erunt continuè proportionales, nimirum in eadem proportione, quâ 2. ad 5.

EXPENSIO IV.

De numeris planis, & solidis.

Cum numeri plani, & solidi multas insignes proprietates consequantur, que maximè deseruiunt in Arithmeticis operationibus, & lib. 10. necessarie sint, ad cognoscendam diuersitatem quantitatis discretę à continua hinc est quod visis proportionibus numerorum simplicium; hic debeamus agere de numeris figuratis, nempe planis, vel solidis, & eorum proportiones agnoscere.

THEOR. I. PROPOS. X. Eucl. 5.

Plani numeri inter se rationem habent ex lateribus compositam.

Plani 8 15.

Latera 2. 4. 3. 5

Sint duo numeri plani 8. & 15. & latera primi 2. & 4. secundi 3. & 5. *Dico proportionem 8. ad 15. esse compositam ex proportione laterum.*

Prob. Faciant latus primi 2. & latus secundi 3. numerum 6. se mutuò multiplicando. Itaque habemus, quod numerus 2. multiplicando 4. fecit planum 8. & multiplicando 3. latus alterius plani, numeri 15. facit 6. & ideo ex propos. 17. l. sept. ita erit 4. ad 3. vt 8. ad 6.

Progress. 1. Eadem quoque ratione, quam 3. multiplicans 2. facit 6. & multiplicans 5. fecit 15. erit eadem ratio ex cit. propos. 2. ad 5. qua 6. ad 15. refertur. Quare 8. 6. 15. sunt deinde proportionales in proportionibus, quibus refertur 4. ad 3. & 2. ad 5. Nam tribus ijs numeris ordine positis, ita refertur 8. ad 6. vt latus 4. ad latus 3. & ita respondet in proportione 6. ad 15. vt 2. ad 5.

Plani numeri 8 15

Latera 4. 2 3. 5

6 numerus ex 2 & 3

Ita refertur 4 ad 3 & 2 ad 5.

Vt 8 ad 6 & 6 ad 15

Sed si ordo laterum inuertatur, & disponatur hoc ordine.

Plani 8 15

Latera 2. 4 & 5. 3

20

Vt refertur 2 ad 5, & 4 ad 3

sic 8 ad 20, vt 20 ad 15

Erit adhuc eadem ratio 8. ad 20. quæ est 2. ad 5. & 4. ad 3. quæ est 20. ad 15. Ita si quocunque alio ordine ea latera colloces V. g. 4. 2. 5. 3., aut 2. 4. & 3. 5. Nam 10. aut 12. producti ex medijs, laterũ numeris erunt ad extremos proportionales velut latera, & ita referretur 4. ad 5. vt 8. ad 10. & 10. ad 15. vt 2. ad 3. Sic referretur 2. ad 3. vt 8. ad 12. & 12. ad 15. vt 4. ad 5. Ergo, cùm proportio 8. ad 15. sit effecta ex proportione V. g. 8. ad 12. & 12. ad 15. aut ex proportione 8. ad 10. & 10. ad 15. aut ex proportione 8. ad 20. & 20. ad 15. aut ex 8. ad 6. & 6. ad 15. & hæ omnes sint proportiones laterum diuersimodè collatorum; patet ex def. 8. tract. 9. part. 1. proportionem planorum 8. ad 15. componi ex proportione laterum, quod, & de omnibus alijs planis valet.

THEOR. II. PROPOS. XI. Eucl. 15.

Duorum similium planorum numerorum vnus medius proportionalis est numerus, & planus ad planum duplicatam habet lateris homologi ad latus homologum rationem.

SInt duo plani numeri similes, silicet habentes latera proportionalia aliqua. V. g. 6. & 24. Nam latera aliqua numeri 6. quę sunt 2. & 3. sunt proportionalia aliquibus lateribus numeri 24. nempe 4. & 6. licet, & alij sint numeri, qui ex mutua multiplicatione producunt 6. & 24. qui proportionem non dicunt, vt essent 2. & 12. aut 3. & 8. latera quoque numeri 24.

Plani similes 6. 24. Medius 12.
Latera 2. 3. 4. 6.

Latera itaque numeri 6. sunt 2. & 3. & numeri 24 sunt 4. & 6. & eadem proportione gaudet 2. ad 3. vt 4. ad 6.

Dico, quòd inter 6. & 24. cadit medius proportionalis numerus aliquis. Nam multiplicentur terminus 3. primæ combinationis extremo, cum 4. alterius proportionis, producetur 12. *Dico hunc esse proportionalem medium.*

Probatur. Progressus 1. Quoniam ita refertur 2. ad 3. vt 4. ad 6. permutando ita quoque erit 2. ad 4. vt 3. ad 6.

Progressus 2. Quoniam 3. multiplicans 2. fecit 6. & 4. fecit 12. erit eadem proportio 2. ad 4. quam 6. ad 12. & sic quia 4. multiplicans 3. fecit 12. & multiplicando 6. fecit 24. erit eadem proportio 3. ad 6. quæ 12. ad 24. Quare proportionales sunt numeri 6. 12. & 24. Ergo 12. est medius proportionalis.

Probatur secundo: Quòd habeat 6. ad 24. duplicatam lateris homologi ad latus homologum rationem. Latera homologa illa sunt, quæ vtraque in eadem quantitate sunt, fundamenta proportionis, vel terminj; ita erunt in hac 2. & 4. fundamenta, & 3. & 6. ambo termini; patet autem ex prima probatione, quod ita est 6. ad 12. vt 2. ad 4. & 12. ad 24. vt 3. ad 6. Quare cum 6. ad 24. eam proportionem obtineat, quæ est 6. ad 12. & 12. ad 24. est duplicata cum gemina vice repetatur eadem proportio, & est etiam ea, quæ laterum homologorum 2. ad 4. vt 3. ad 6. Possent tamen etiam alio pacto disponi latera, vt in præc.

THEOR. III. PROPOS. XII. Euc. 19.

Duorum similium solidorum numerorum duo medij proportionales sunt numeri; & solidus ad solidum triplicatam habet rationem, quam habet latus homologum ad aliud latus homologum.

Solidi 48. & 162.
Latera 2. 4. 6. & 3. 6. 9.

SInt duo numeri solidi similes 48. & 162. & primi latera sint 2. 4. & 6. Secundi verò 3. 6. 9. sunt autem similes; quod latus 2. ita referatur ad 4. primi, vt latus secundi 3. refertur ad 6. & ita latus 4. primi referatur ad 6. vt latus 6. secundi refertur ad 9. *Dico, quod inter hos numeros solidos 48. & 162. duo medij proportionales cadunt numeri.*

Notandum verò est in primis; quod quia ponitur 2. ad 4. vt 3. ad 6. erit etiam permutando 2. ad 3. vt 4. ad 6. & quia ponitur 4. ad 6. latus primi solidi, vt 6. ad 9. latus secundi, erit etiam permutando 4. ad 6. vt 6. ad 9. quare erit eadem proportio, vel 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. nimirum latera vnius solidi ad latera alterius solidi collata, cùm conueniant in intermedia proportione 4. ad 6.

Nunc, vt probetur propos. disponatur latera in ordinem, vt placet; dummodo proportiones similes in loco correspondente sint, vt vides.

2 4 6 12 72
3 6 9 18 108 162

Deinde multiplicandi sunt 2. cum 4. latera primi fient 8. sicut 3. cum 6. latera secundi, & fient 18. plani numeri. Deinde terminus primi, vel consequens 4. multiplicandus est cum fundamento relationis, vel cum antecedente secundi, qui est 3. & fient 12. Tandem 6. primi, & 9. Secundi hunc 12. multiplicent, & facient 72. & 108.

Probatur itaque primo: Quod hi numeri 72. & 108. sint duo medij proportionales inter 48. & 162.

Progress. 1. Quoniam itaque 4. multiplicauit 2. & 3. sequitur ex propos. 17. septimi, quòd eadem proportio sit inter genitos 8. & 12. quæ est inter multiplicatos 2. & 3.

Progress. 2. Iterum, quia 3. multiplicauit 4. & 6. sequitur ex eadem propos. quòd sint 4. ad 6. multiplicati sicut 12. & 18. geniti. Quare 8. 12. & 18. sunt continuè proportionales.

Progress. 3. Solidus quoque numerus 48. resultauit ex multiplicatione 2. in 4. ex qua prodijt numerus 8. & rursus ex multiplicatione 6. in 8. Vnde factus est numerus ipse solidus 48. Sic dicendum est de numero solido 162.

Progress. 4. Numerus itaque 6. latus primi solidi multiplicans ea effectione 12. fecit 72. Itaque ex tertia propos. 17. ita erit 48. ad 72. geniti, quæ est 8. ad 12. quæ est ex 1. progressu 2. & 3.

Progress. 5. Sic quia numerus 9. latus tertium secundi solidi multiplicauit ex 3. progr. 18. & fecit 162. & ex effectione multiplicans 12. fecit 108. fit vt eadem proportio sit inter multiplicatos 12. & 18. quæ inter genitos 108. & 162. quæ vero est inter 12. & 18. est illa, quę est inter 4. & 6. ex 2. progressu.

Progressu 6. Tandem, quia latus tertium 6. primi solidi 6. & 9. latus tertium secundi solidi multiplicando 12. fecerunt 72. & 108. Sequitur ex 17. propos. quò eadem proportio sit inter 6. & 9. quæ est inter 72. & 108. Quamobrem

Concluditur: Quod ita sit in proportione solidus primus 48. ad 72. quæ est 2. latus prioris solidi ad 3. latus posterioris ex 4. propgressu. Et quod 72. ad 108. sit in eadem proportione, quam habet 6. latus tertium primi solidi ad 9. latus tertium secundi solidi ex 6. Progr. Tàdem quod 108. sit ad 162. solidum posterius, quæ est inter 4. latus secundum primi solidi ad 6. latus secundum posterioris solidi ex Progr. 5. quare continuam proportionem habebunt 48. ad 72. & hic ad 108. & iste ad 162. quam habet 2. ad 3. & 6. ad 9. & 4. ad 6. nimirum laterum vnius ad latera alterius, quæ

quæ vt prænotauimus est eadem proportio.

Probatur secundò: Quòd sit proportio triplicata inter solidos 48. & 162. nam vt probatum est, eadem proportio 2. ad 3. vel 4. ad 6. vel 6. ad 9. repetita in quatuor numeris 48. 72. 108. & 162. triplicatur, & ita est 48. ad 72. vt 72. ad 108. & 108. ad 162.

PROBL. III. PROPOS. XIII. Eu. 20.

Si inter duos numeros cadat vnus medius proportionalis numerus, similes plani erunt illi numeri.

CAdat inter 18. & 32. numerus medius proportionalis 24. *Dico 18. & 32. esse similes planos numeros.*

Prog. 1. Sumatur duo numeri minimi in ratione, qua refertur 18. ad 24. aut quę est eadem 24. ad 32. ex propos. 35. & sint 3. & 4. ex propos. 29. sept.

18 24 32
3 4 6 8

3. & 4. metientur 18. & 24. æquè, idest per æqualem numerum, metiantur per 6. ideoque 3. & 6. erunt latera numeri 18.

Progress. 2. Sic quoq; 3. 4. metientur ex eadem propos. numeros 24. & 32. æquè, idest per æqualem numerum 8. ideoque 4. & 8. erunt latera numeri 32.

Obseruandum est autem quod idem numerus 4. in primo progr. multiplicans 6. fecit 24. & ex 2 pr. idē 4. multiplicans 8. fecit 32. Vnde 6. & 8. habebunt eandem rationem, quam 24. ad 32 quæ est 3. ad 4. ex 17. septimi. Poterimus itaque vti permutatione. Cùmque sit 3. ad 4. vt 6. ad 8. etiam erit 3. ad 6. vt 4. ad 8. Iam ergo patet numeros 18. & 32 esse similes planos. Planos quidem; quia habent latera 3. 4. & 6. 8. similes verò, quia latera, vt requirit def. 1. h. planorum numerorum, sunt proportionalia, & est 3. ad 6. latera plani 18. vt 4. ad 8. plani 32.

THEOR. XI. PROPOS. XIV. Euc. 21.

Si inter duos numeros cadant duo medij proportionales numeri; similes solidi sunt illi numeri.

8 12 18 27
4 6 9
22 A 2 33 B 3

CAdant inter 8. & 27. duo numeri proportionales 12. & 18. *Dico 8. & 27. solidos esse.* Sumantur tres numeri minimi in ratione 8. ad 12. vel quæ eædem sunt 12. ad 18. vel 18. ad 27. ex propos. 35. septimi, & sint 4. 6. 9.

Progress. 1. Quia itaque inter 4. 9. assumptos numeros minimos cadit vnus medius proportionalis 6. erunt 4. & 9. assumpti minimi in ea proportione ex præced. prop. plani. Lateraque eorum erunt silicet 2. & 2. latera numeri 4. & 3. 3. latera numeri 9.

Progress. 2. Quia 4. 6. 9. assumpti minimi sunt in ea proportione metientur ex propos. 29. numeros primò propositos 8. 12. 18. 27. qui habent eandem rationem cum ipsis, & numeri quibus metiūtur erunt A 2. & B 3. Itaque 4. & 6. mensurabunt 8. & 12. per A 2. eos multiplicando & 6. cum 9. mensurabunt 18. & 27. per B 3. eos multiplicando.

Progress. 3. Sed 2. 2. latera numeri 4. plani se se multiplicando faciunt 4. rursus 4. per A 2. ex secundo progressu multiplicando 4. facit 8. cùm, vt ibi 4. metiatur 8. multiplicatus per A 2. Itaque 8. numerus solidus erit, cuius latera erunt 2. 2. & A 2. Sic, & 27. Nam 9. per B 3. multiplicatus ex secundo progress. producit 27. At ipse 9. numerus planus producitur ex multiplicatione suorum laterum 3. & 3. Ergo 27. erit, solidus ex definitione 2. h. cuius latera erunt 3. 3. & B 3.

Probatur verò; Quod sint solidi similes. Nam illi sunt solidi similes, quorum vnius latera tribus alterius sunt proportionalia.

Sed talia sunt 2. 2. respectu laterum 3. 3. 3. Ergo solidi similes erunt.

Progress. 4. Quod vero talia sint. Probatur. Nam ex 2. progr. A 2. multiplicans 6. produxit 12. & B 3. multiplicans 6. item produxit 18. Ergo erit 2. ad 3. vt 12. ad 18.

Progress. 5. 12. verò, & 18. sunt in eadem ratione, quæ 4. & 6. quia multiplicati per 3. fecerunt ipsos 12. & 18. & ideo, vt A 2. ad B 3.

Progress. 6. Quia verò assumpti minimi sunt extremi eorum 4. & 9. erunt quadrati ex Coroll. 1. 2. propos. huius, & ideo plani similes, & hinc ex propos. 9. cadet inter illos medius proportionalis 6. in proportione laterum homologorum.

Propterea latus 2. primi solidi 4. & aliud latus 2. eiusdē dicent eandem rationem ad 3. & 3. latera secundi solidi 9. vt 4. ad 6. quæ eadem ex 5. progr. quæ 2. A ad B 3. numeros mensurantes, & latera tertia solidorum. Quamobrem si est 2. ad 3. vt 2. ad 3. vt 2. A ad B 3. poterimus vti *Permutatione*, & dicere, quod erit latus 2. primi solidi ad 2. vt latus 3. ad latus 3. secundi, & ita latus 2. ad A 2. tertium latus eiusdem primi solidi, vt latus 3. ad latus tertium B 3. secundi solidi; quapropter similes erunt isti solidi.

Nōn potuimus autem assumere minimos 4. 6. 9. in proportionibus numerorū 8. 12. 18. 27. nisi extremi essent quadrati; quia trium minimorum numerorum, in eadem proportione continuantium extrema quadrata sunt ex Coroll. 1. propos. 2. huius.

THEOR. XII. PROPOS. XV.

Similes plani numeri inter se rationem habent, quam quadratus numerus, aliquis ad aliquem quadratum numerum.

DEntur duo plani similes 8. & 18. Dico, *quod sicut est 8. ad 18. ita sit aliquis quadratus ad aliquem numerum quadratum.*

Probatur. Nam 8. & 18. sunt plani similes ex hypothesi. Quare mediabit inter eos aliquis numerus proportionalis. Iste mediet, & sit 12. Reperiāturque minimi in eadem proportione, & sint 4. 6. 9. Horum extremi ex Coroll. 1. prop. 2. h. quadrati erunt. Quamobrem erit, vt quadratus 4 ad quadratum 9. ita 8. ad 18.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVI. Eu.27.

Similes solidi inter se rationem habent, quam cubus numerus ad cubum numerum.

PRobatur. Nam inter 16. & 54. vtpote inter solidos numeros similes interponantur duo medij proportionales ex propos. 12. huius. Eruntq; V. g. 24. & 36. Sumptis ergo quatuor numeris minimis in ea proportione, quę est 16. ad 24. item 24. ad 36. & tandem 36. ad 54. qui sint 8. 12. 18. 27. vt ex Coroll. 2. propos. 2. huius habemus, 8. & 27. Cubi erunt. Igitur 16. ad 54. solidi numeri habebunt eandem rationem, quam Cubus 8. ad Cubum 27.

COROLLARIVM I.

COllligitur ex prædictis omnibus. Nullos numeros esse planos, vel solidos similes, inter quos medius proportionalis cadere nequeat. Quare nulli numeri primi V. g. 11. & 13. possunt esse solidi similes; Quia latera non obtinent, præter vnitatem, & se ipsum (quia V. g. ex 1. & 11. fit 11. quæ latus non sunt; nisi impropriè, nec inter eos medius proportionalis cadere potest. Sic nec numeri inter se primi; qui quadrati non sint, aut cubi similes sunt. Quòd, si dicantur esse planos similes, cadet inter eos medius proportionalis, vel vnus, vel duo Quare cum sint primi inuicem, & sint tres, vel quatuor continua proportione hi erunt. Quadrati, vel Cubi ex Coroll. 1. vel 2. propos. 2. huius, quod est contra positionem.

COROLLARIVM II.

SIe nec numeros, quorum minor primus sit, qui ab vnitate solùm mensuretur, vt 3. 5. vel 7. non posse esse planos, vel solidos similes, nisi minor mensuret maiorem; Nam, si non mensuret essent primi inuicem, & ideo non possent esse plani, vel solidi similes ex præced. Coroll.

COROLLARIVM III.

SIc, neque plani similes possunt esse ij, quorum vnus Quadratus, vel Cubus sit alter nequaquam, vt 4. & 5. vel 16. & 20. aut 8. & 10. Nam, si essent plani similes haberent proportionem, quam quadratus, vel cubus numerus ad Quadratum, vel Cubum numerum. ex propos. 11. quod est contra hypothesim.

COROLLARIVM IV.

VNde facilis est inuentio numerorum non similium. Nam omnes numeri primi in se vt 3. 5. 7. 11. Sic numeri primi inuicem 2. & 3. Sic, & numeri, quorum vnus primus est, & alium non metitur, vt 5. & 8. Sic, & numeri quorum vnus Cubus sit, vel Quadratus, alter verò nequaquā, non possunt esse, aut plani, aut solidi similes.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Duos numeros planos similes inuenire.

ACcipiantur quatuor numeri proportionales, & sit 2. ad 5. vt 8. ad 20. seque multiplicent fundamenta cum terminis proportionum: 2. cum 5. & procreent 10. & 20. cum 8. & producant 80. *Dico hos esse planos similes.*

Probatur, quia illi sunt similes, qui habent lateta proportionalia ex defin. talia verò sunt ex constructione 10. & 80.

EXPENSIO V.

De Quadratis, & Cubis.

NVmeri Cubici, & Quadrati quædam species sunt numerorum similium planorum, & solidorum. Vnde visis eorum genericis proprietatibus, nunc etiam species ipsorum considerandæ.

THOR. I. PROPOS. XVIII. Eucl. 11.

Duorum Quadratorum numerorum vnus proportionalis numerus medius est, & Quadratus ad Quadratum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

SInt duo Quadrata 9. & 49. quorum latera sint 3. & 7. Dico primo *inter eos cadere aliquem numerum medium proportionalem.*

Probatur. Nam duo Quadrata sunt duo solidi similes; siquidem eorum latera 3. 3. & 7. 7. sunt equalia: Vnde eadē proportio est 3. ad 3. quę alterius laterū 7. ad aliud latus 7. Ergo ex prop. 5. inter eos aliquis medius proportionalis cadit.

Quadratum quoque duplicatam habet lateris ad latus rationem. Nam ea proportio, quæ inter 3. & 7. gemina vice in vno quoque quadrato repetitur, ob multiplicationem laterum in se.

THEOR. II. PROPOS. XIX. Eu.28.

Duorum Cuborum numerorum duo medij proportionales sunt numeri, & Cubus ad Cubum duplicatam habet lateris ad latus rationem.

PRobatur. Nam duo Cubi sunt duo solidi similes ob laterum suorum æqualitatem. Sic Cubi 27. latera 3. 3. 3. ad Cubi 64. latera 4. 4. 4. eadem proportione referuntur, & est primus 3. ad secundum 3. & primus 4. ad secundum 4. & secundus 3. ad tertium 3. vt 4. ad 4. sed inter solidos similes ex propos. 6. duo medij proportionales numeri cadunt. Ergo etiam inter Cubos.

Solidi quoque habent duplicatam lateris ad latus rationem. Quare etiam Cubi eo, quòd sint solidi similes. Sic 27. & 64. habent duos medios proportionales 36. & 48. & latus 3. cubi 27. prius in se; deinde in productū 9. ductus facit 27. Sicut, & latus 4. cubi 64. prius in se, deinde in productum 16. ductus facit 64. Vnde proportio, quæ est inter 27. & 64. est illa ipsa, quæ est inter 3. & 4. sed tripliçi vice repetita.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XX. Eucl. 22.

Si tres numeri deinceps sint proportionales, primus autem sit quadratus, & tertius quadratus erit.

SInt 9. 36. 144. continuè proportionales. *Dico quod si 9. est quadratus, & tertium 144. esse quadratum.*

Quia cum inter 9. & 144. cadat vnus medius proportionalis erunt plani similes ex propos. 11. huius, & ita ex definitione proportionalia habebunt latera: Quare ita erit 3. ad 3. vt latus alius 144. ad sui ipsius alterum latus: sed 3. & 3. sunt æquales: Ergo, & latera numeri alius 144. erunt æqualia 12. & 12., quare quadratus erit.

THEOR. IV. PROPOS. XXI. Eu.23.

Si quatuor numeri deinceps sint proportionales, & primus sit Cubus; quartus etiam Cubus erit.

SInt quatuor numeri 27. 45. 75. & 125. continuè proportionales. Dico, *quod si primus sit Cubus, & vltimum quoque cubum esse.*

Probatur. Nam erunt similes solidi primus 27. & quartus 125 eo quòd inter eos duo medij proportionales numeri intercipiantur ex prop. 12. Quare ex definitione ita erit 3. ad 3. & hic ad 3. vt latus primum ad latus secundum, & hoc ad latus tertium numeri 125. Sed 33. & 3. sunt numeri æquales. Vnde latera numeri 125. erunt inuicem æqualiter æqualia, quare cubus erit.

THEOR. V. PROPOS. XXII. Euc. 24.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam quadratus ad quadratum, si primus quadratus sit, etiam secundus talis erit.

SI sit 36. quadratum ad 64. numerum; vt quadratum 9. ad quadratum 16. *Dico etiam numerum 64. esse quadratum.*

Probatur. Quia inter quadratos 9. & 16. cadit vnus proportionalis numerus V. g. 12. ex propos. 11. huius, sed ita est quadratus 36. ad numerum 64. Ergo ex propos. 18. etiam inter 36. & 64. cadet vnus medius proportionalis. Videlicet 48. Ergo ex propos. 9. huius. Si 36. est numerus quadratus, talis erit, & 64.

THEOR. VI. PROPOS. XXIII. Eu. 25.

Si duo numeri inter se rationem habeant, quam cubus numerus ad cubum numerum, si primus sit cubus, talis quoque erit secundus.

SInt 64. & 116. numeri, qui habeant rationem eam inter se, quam 8. obtinet comparatus ad numerum 27. ambo cubos. *Dico, si 64. est Cubus, quòd talis quoque erit 116.*

Probatur, quia inter 8. & 27. vtpote inter numeros Cubos ex propos. 19. huius duo proportionales cadunt numeri: Quapropter ex propos. 8. cadent quoque tales numeri duo proportionales inter 64. & 119. Quare ex propos. 21. cum 64. Cubus ponatur, talis quoque erit numerus 116.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Si ab vnitate quotcumque numeri deinceps sint proportionales. Tertius ab vnitate quadratus erit, & vno intermisso quilibet sequens. Quartus autem Cubus, & duobus intermissis quilibet alius. Septimus autem Cubus simul, & quadratus, & quinque intermissis omnes alij.

SInt ab vnitate continuè proportionales

A	B	C	D	E
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
			1024.	2048.	4096.	F			

Primò *Dico tertium 4. esse quadratum, & intermisso vno, sextum 16. esse quoque quadratum, & intermisso vno, octauum 64. esse quadratum,* & sic sequendo.

Probatur. Nam: Quod 4. sit Quadratus numerus, inde patet; quia sub duobus æqualibus numeris 2. & 2. continetur ex definit. 4. Siquidem Vnitas est ad 2. vt 2. est ad 4. sed vnitas metitur 2. per se ipsam, ergo, & metietur numerus 2. numerum 4. per se ipsum, nempe per 2. Quod autem, & alij, qui intermisso vno succedunt sint quadrati, etiam patet ex propos. 20. eò quia intermediet inter vtrumque medius proportionalis V. g. inter 4. & 16. numerus 8. At 4. est Quadratus quapropter, & 16. erit quadratus ex pa. 2 2. h.

Secundo Dico, quod quartus ab vnitate Cubus sit. Nam Vnitas est ad 2. vt 4. ad 8. eodemque modo vnitas mensurabit 2. vt 4. numerū 8. Sed iam ex primę partis probatione 2. multiplicans 2. & per se ipsum generat 4. Ergo etiam modo 2 multiplicans 4. faciet 8. Ergo 8. Cubus erit. Quod autem intermissis duobus, omnes alij sint Cubi, patet ex 19. propos. quia inter 8. & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur.

Tertiò Septimus ab vnitate ostensus est cubus, vt patet ex numero D, quia occupat eum locum post primum cubum intermissis duobus: Est quoque Quadratus: quia post primum, & secundum Quadratum intermisso vno occurrit: Ergo simul erit Cubus, & Quadratus.

THEOR.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si ab vnitate quotcumque numeri proportionales deinceps fuerint ; qui verò post vnitatem Quadratus sit, & reliqui omnes Quadrati erunt, & si qui post vnitatem sit Cubus, & reliqui omnes Cubi erunt.

SI sint ab vnitate continuè proportionales numeri 2. 4. 16 64. 256. 1024. & primus 4. sit Quadratus. *Dicit reliquos omnes esse quadratos.*

Probatur. Quia ; cùm sint tres proportionales 4. 16. 64. primusque 4. sit quadratus, & tertius quadratus erit ; Eodem modo, cum 16. 64. & 256. sint continuè tres proportionales, & 16. sit quadratus ergo, ex propos. 20. huius, & 256. erit quadratus, & sic de reliquis. Nam numerus 4. ex hypothesi, numerus verò 16. quadratus eo, quòd ex prop. præc. sit quintus ab vnitate.

Probatur quoque de cubis eodem modo. Nam

2. 3. 4. 5. 6. 7

si sint 8. 64. 512. 4096. 32768. 262144. quartus ab vnitate 512. Cubus erit ex propos. anteced. & duobus intermissis ex propos. 19. 262144. erit quoq; Cubus. Sic quia primus 8. ex hypothesi est Cubus : Ergo ex prop. 29. numerus quoq; 4096. Cubus erit ob duos proportionales intermedios 64. & 512. Cum autem 512. quartus, & quintus 4906. sint cubi, & ita sit tertius 64. ad quartum 512. vt 512. ad 4096. ex propos. 21. huius, tertius quoque 64. erit Cubus. Cùm verò tertius 64. sit cubus, etiam ob duos proportionales intermedios. Sextus 32768. & sic de reliquis.

TRACTATVS XI.

IN IX. LIBRVM EVCLIDIS

PARS TERTIA.

De Planorum, Solidorumque generatione, & inuentione.

HIc agit Euclides de planis, solidisque numeris inueniendis, etiam Quadratis, & Cubis ; & quærit, qui numerus multiplicans alium Cubum, vel Quadratum efficiat, aut etiam numerum solidum aut planum : Reliqua verò de quibus pertractat de numeris paribus, & imparibus, & de perfectis, & imperfectis, non putauimus inter elementa necessariò collocanda. Cùm nomen vix consequantur in alijs partibus mathematicis ; substituimus autem Expensionem de æquipotentia numerorum, & inuentione Quadratorum, qui tractatus lib. 10. deseruiunt, & absolutè necessarij sunt.

EXPENSIO I.

De numerorum æquipotentia ad gignendos æquales planos.

SIcut lineas lib. 2. Euclidis ostendimus æquipotentes, & in diuersas partes sectas, posse æquiualere quadrato totius. Sic nunc idem videndum est de numeris. Cũ Euclides de his non agat ; sed acutissimè Clauius, verùm cum eius ostensiones visæ nobis sint difficiles, alias attulimus, quæ faciliori pede percurri possint.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si numerus aliquis in duas partes secetur Planus numerus totius, partisque multiplicatione consurgens æquatur quadrato, eiusdem partis, partiumque plano.

7

3 4

12 9 21

* SIt numerus 7. qui diuidatur in duas partes in 3. & 4. multiplicetурque totus per 3. & fiant 21. deinde ducatur 3 in se, & fiat quadratum 9. in alteramque partem, & fiat 12. *Dico, quòd planus numerus 12. & quadratus 9. æquantur plano 21.*

Probatur. 3. multiplicauit 4. & fecit planum 12. & se fecit 9. Ergo ex propos. 17. sept. ita erit 3. ad 4. vt 9. ad 12. Rursus idem 3. multiplicauit se, & fecit 9. multiplicauit quoquè 7. & fecit 21. Ergo ex eâdem, ita se habet 3. ad 7. vt 9. ad 21. Quia ergo est 3. ad 4. vt 9. ad 12. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. simul, vt 9. ad 9. & 12. simul ; sed eadem proportio est 3. ad 3. & 4. simul, quæ 3. ad 7. & eadem proportio, quæ est 3. ad 7. vt dixi est 9. ad 21. Ergo eadem proportio erit 9. ad 9. & 12. quæ 9. ad 21. quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æquales inter se 9. & 12. simul, ac 21. quod eidem 9. eandem dicant proportionem : hæc propos. ostenditur de lineis propos. 4. lib.

CO-

COROLLARIVM I.

* HInc educitur ; quod idem dicendum de alia parte. Nam totus 7. multiplicatus per 4. nempe 28. æquabitur quadrato ipsius 4. nempe numero 16. & plano partium hoc est, numero 12. In quo considerandum est, quod partiũ numerus est in vtroque idem, nempe 12. quoniam partes sunt æedem 3. & 4. quæ se inuicem multiplicant.

COROLLARIVM II.

* HInc etiam est, quòd si assumatur aliquis alius numerus præter partes, & ipsæ partes ; totumque multiplicetur ; planus numerus partium, per illum, alium numerum multiplicatus æquabitur totius plano ex eo alio numero consurgente ; Sic 3. & 4. partes numeri 7. si multiplicentur per 5. alium numerum, dabunt planos numeros 15. & 20. simul æquales plano 35. ex 5. per 7. genito : Ratio verò est eadem : Nam ita est 15. ad 20. vt 3. ad 4. ob numerum 5. multiplicantem & 15. ad 35. vt 3. ad 7. ob eundem 5. multiplicantem ex 17. septimi. Quaerè, si est 15. ad 20. vt 3. ad 4. erit etiam componendo 15. ad 15. & 20. simul ; vt 3. ad 3. & 4. simul ; sed 3. ad 3. & 4 simul est eadem, quam 3. ad 7. & 3. ad 7. eadem, quæ 15. ad 35. vt dixi. Ergo proportio 15. ad 15. & 20. simul erit eadem, quæ 15. ad 35. Ideoque ex prop. 9. lib. 5. æquales erunt numeri 15. & 20. simul, ac 35. cum ad eosdem, 15. numerus eandem dicat proportionem. Hoc etiam ostenditur de lineis lib. 2. propos. 4.

COROLLARIVM III.

ELlicito. Quod etiam si numerus in plures partes, quam 2. secetur, idem tamen erit, vt si 7. secetur in 3. 2. & 2. Nam totus numerus per aliquam partem V. g. 3. vel aliquem alium numerum multiplicatus, æquabitur singulis partibus per eundem numerum multiplicatis ; & simul sumptis eadem ratione, sic si 3. 2. & 2. multiplicetur per 3. hi facient 9. 6. & 6. qui æquabunt 21. numerum consurgentem ex 7. in 3. ducto.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si numerus in duas partes diuidatur, plani duo sub partibus, & toto comprehensi æquantur quadrato totius.

SIt numerus 7. diuisus in duas partes 3. & 4. & ex toto 7. & 3. fiat planus 21. & ex 7. & 4. planus 28. *Dico hæc duo plana æquari totius quadrato 49.*

7

3 7 4

21 49 28

* PRobatur. Nam quia 7. multiplicat 7. & 3. & facit 49. & 21. erit 3. ad 7. vt 21. ad 49. Sic quia multiplicat se, & 4. erit 4. ad 7. vt 28. ad 49. ex propos. 17. l. oct. cumque 7. multiplicet 3. & 4. erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 21. ad 28. Ergo componendo erit 3. ad 3. & 4. simul, quæ 21. ad 21. & 28. simul. Sed proportio 3. ad 3. & 4. simul est eadem ; quæ 3. ad 7. & 3. ad 7. quæ 21. ad 49. ergo ita erit 21. ad 21. & 28. simul vt 21. ad 49. quare ex propos. 9. l. 5. erunt æquales 21. & 28. simul ipsi 49. Id ostend. propos. 3. l. 2. de lineis.

THEOR. III. PROPOS. III.

Duo quadrata, cum duobus numeris planis, ex lateribus eorum effecta, æquantur quadrato, ex duobus lateribus tanquam vno assumpta.

* SIt quadratum 16. & quadratum 9. quorum latera sint 4. & 3. & duo plani ex eorum lateribus 4. & 3. effecti, qui erunt 12. & 12.

3 4

21 7 28

9 12 12 16

4 9

Dico, quod hæc omnia simul æquantur quadrato totius numeri 3. & 4. vt vno latere assumpti nempe 7. cuius quadratum est 49.

Probatur. Duo plani ex toto 7. & partibus 3. & 4. producti nempe 21. & 28. ex præced. æquantur quadrato totius 7. Sed ex 1. huius planus numerus sub toto comprehensus, & parte, vt 21. & 28. æquatur quadrato ex parte illa comprehendẽte, & plano numero à partibus comprehenso, & ideo planũ 12. æquatur quadrato 9. ex 3. & plano numero 12. ex 3. & 4. multiplicatione effecto, sicut planus 28. æquatur quadrato 16. ex 4. & plano eidẽ 12. Ergo quadratum 16. & 9. cum planis numeris 12. & 12. ex lateribus eorum 3. & 4. æquabunt quadratum ex ijs lateribus, vt vno hoc est 7. quod est 49 cùm æquent planos 21. & 28 æquantes simul quadratum totius 7. Ostenditur de lineis propos. 6.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si numerus bifariam sectus sit, & quidam numerus ei additus. Quadratum dimidij cum numero adiecto æquat planum numerum ex toto, & adiecto per adiectum multiplicato, & quadratum dimidij.

8

4 4 3

* SIt numerus 8. & diuidatur bifariam, & sit 4. addaturque 3. & sint 7. & 3. cum 8 totis sint 11. ex quibus toto cũ addito 3. fiat planus numerus 33. Inde ex dimidio 4. fiat quadratum 16. *Dico, quod planus numerus 33. & quadratum 16. æquant 49. quadratum lateris 7. dimidij 4 cum adiecto 3.* Quod, & ostenditur propos. 8. de lineis l. 2.

Probatur. Nam planus ex 11. & 3. æquat ex Coroll. 3. propos. 11. duos planos sub medietate duplici 4. & 4. & 3. adiectâ comprehensos ; nempe 12. & 12. & quadratum ex 3. nempe 9. Si ergo addamus etiam quadratum ex 4. hoc est 16. habebimus duos planos numeros ex lateribus quadratorum, & duo quadrata. Sed duo quadrata, & duo plani ex lateribus quadratorum æquant quadratum ex lateribus pro vno latere sumptis ex 3. pro-

posf. huius. Quare æquabunt quadratum 49. ex dimidio cum adiecto numero: Siquidem duo plani ex lateribus, non ex toto numero, & vnico 8. sed ex dimidio, eius facti sunt, vt duo esse possint, & ideo hi plani obtinent latera ex dimidio numero 4. pro latere, & pro alio ex adiecto 3. constituta, quæ simul addita vt sint 7. faciunt quadratum 49. cui duo quadrata 16. & 9. & duo plani ex ipsorum lateribus 12. & 12. æquantur ex propos. 3. huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si numerus secetur in partes æquales, & inæquales numerus planus sub partibus inæqualibus contentus vna cum quadrato, quo maior pars dimidiam superat, æquatur quadrato, qui ex dimidio enascitur.

SIt numerus 10. & secetur in partes equales in 5. & 5. & inequales in 7. & 3. & numerus, quo 7. maior pars superat dimidiam 5. sit 2. *Dico, quod planus numerus 21. ex 3 in 7. productus* vnà cum quadrato ex 2. hoc est 4. æquat quadratum 25. ex medietate numeri 10. hoc est 5.

* Probatur. Quia ex 1. huius Coroll. 3. planus numerus 21. ex 3. & 7. inæqualibus partibus, æquat duos planos numeros, ex 3. & 2. per 3. genitos, nempe 6. & 6. & quadratum 9. ex 3. prodictem, si ergo addamus quadratum 4. ex 2. erunt duo quadrata 4. & 9. cum duobus planis 6. & 6. æqualia quadrato 25. ex eorum lateribus consurgente, vt vno sumpto ex prop. 3. quæ sunt 2. & 3. & faciunt 5. Quod verò planus numerus 21. ex 3. & 7. genitus duos planos 6 & 6. cum quadrato 9. ex 3. exequet; patet ex Coroll. 3. propos. 1. nam 7. in tot partes diuidi potest, hoc est in partem, quâ medietatem superat 2. & in partem, qua medietas superat minorem 2. & in ipsam minorem 3. siquidem tanto deficit minor pars à medietate, quanto maior super medietatem augescit, & 7. maior est medietate numero 2. sicut 3. est minor medietate eodem numero 2. Ostenditur prop. 7. lib. 2. de lineis.

EXPENSIO II.

De Planorum, Solidorum, Quadratorum, & Cuborum generatione.

MVltiplicatio est illa, quæ generat numeros planos, vel solidos. Vnde hic quæritur; quinam numeri inuicem multiplicati, Quadratos, & Cubos, seu Planos, Solidosque numeros efficere possint.

THEOR. I. PROPOS. VI.

Si duo plani similes numeri multiplicantes se mutuò, fecerint quendam numerus productus Quadratus erit.

SInt duo plani similes 6. & 24. qui se mutuò multiplicent, & generent 144. Dico *hunc numerum esse quadratum*. Quod, vt ostendatur, multiplicandus est numerus 6. in se, & faciet 36. & sic 6. numerus multiplicabit se, & numerum 24. vnde ex propos. 17. ita erunt multiplicantes 6. ad 24. vt geniti 36. ad 144. sed ex propos. 11. lib. 8. inter planos similes vnus medius proportionalis cadit numerus V.g. inter 6. & 24. cadit 12. Ergo etiam ex propos. 8. lib. 8. cadet inter genitos, & eâdem proportione gaudentes 36. & 144. Cadat igitur, & sit 72. Cum igitur 36. 72. & 144. sint tres continuè proportionales, primusque 36. sit quadratus ex propos. 20. lib. 8. & secundus 144. quadratus erit, quod oportebat ostendere.

THEOR. II. PROPOS. VII.

Si duo numeri se se mutuò multiplicantes faciant quadratum, similes plani erunt.

SInt 6. & 24. qui faciant se inuicem multiplicantes quadratum 144. Dico, *quod isti numeri 6. & 24. similes plani erunt*. Nam primus 6. multiplicet se, & faciat 36. Erunt duo numeri quadrati 144. & 36. inter quos interueniet aliquis proportionalis numerus medius ex propos. 18. l. 8. Et quia 6. multiplicando se, & 24. facit 36. & 144. erunt in eadem proportione geniti, & generantes 6. & 24. Vnde etiam inter istos cadet ex propos. 8. lib. 8. aliquis proportionalis numerus 12. Quapropter ex propos. 13. erunt similes plani 6. & 24.

COROLLARIVM I.

ELlicitur. Quod si duo numeri quadrati etiam æquales faciant quendam, iste factus erit quadratus. Quòd duo quadrati facientes sint plani similes, eo quia quadrati ponantur, vt diximus in ostensione propos. 18. l. 8.

COROLLARIVM II.

ELlicitur quoque quod, si quis numerus quadratus alium multiplicans faciat quadratum, iste alius multiplicatus quadratus erit. Erunt enim ex hac 7. propos. plani similes. Vnde inter eos medius proportionalis cadet aliquis numerus; quâ ex re ex propos 20. lib. 8. si primus sit quadratus, & secundus quadratus erit.

THEOR. III. PROP. VIII.

Si compositus numerus aliquem multiplicans creet aliquem alium, productus solidus erit.

NVmerus compositus 6. multiplicans quemlibet alium numerum 4. faciet allum aliquem puta 24. *Dico genitum 24. esse Solidum*.

Probatur numerus 6. dicitur compositus. Itaq; metietur eum aliquis numerus præter vnitatem. Sit ergo 2. qui metiatur 6. per 3. ideft ter replicatus. Propterea que 2. multiplicans 3. facit 6. & 6. multiplicans 4. procreat 24. cùm ergo 24. consurgat à multiplicatione trium numerorum 2. 3. 4. ex definitione 4. lib. 8. factus 24. solidus numerus erit.

THEOR.

THEOR. IV. PROP. IX.

Si Cubus numerus se ipsum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

NVmerus Cubus 64. se multiplicando procreet aliquem nempe 4096. Dico *hunc quoque esse Cubum*. Repertum sit latus Cubi 64. quod est 4. & ex hoc 4. in se fiat 16. & deinde 16. multiplicetur per 4. erunt 64.

Progress. 1. Idem 4. se multiplicando fecit 16. & multiplicando 16. generauit 64. Quapropter ex prop. 17. sept. eadem proportio erit inter 4. & 16. quæ est inter 16. & 64. Sed vt 4. metitur 16. per 4. & 16. 64. ita vnitas metitur 4. per 4. ideft vnitas quater accepta facit 4. sicut 4. quater acceptus componit numerum 16. & 16. numerum 64. Quamobrem eadem pars erit vnitas numeri 4. quæ 4. numeri 16. & quæ 16. numeri 64. Vnde inter vnitatem, & numerum 64. duo medij proportionales cadunt numeri 4. & 16.

Progress. 2. Considerandum verò est, esse ita vnitatem ad 64. vt 64. ad 4096. Quoniã 64. multiplicando se, ideft sexaginta quatuor vicibus acceptus generat 4096. sicut vnitas 64. vicibus accepta facit 64. Quare eadem proportio erit inter vnitatem, & 64. quæ est inter 64. & 4096.

Sed ex primo prog. inter vnitatem, & 64. duo medij proportionales numeri intercipiuntur; Ergo quoque ex propos. 8. lib. oct. cadent inter 64. & 4096. etiam duo proportionales numeri intermedij. Quaderé ex prop. 21. l. oct. cum 64. sit Cubus, talis quoque erit numerus 4096.

THEOR. V. PROPOS. X.

Si Cubus numerus Cubum multiplicans faciat aliquem, productus Cubus erit.

SIt Cubus 8. qui multiplicet Cubum 27. & faciat 216. Dico *hunc quoque esse Cubum*.

Probatur. Nam si 8. multiplicet se productus 64. cubus erit ex præced. & quia 8. multiplicauit duos numeros 8. & 27. & generauit 64. & 216. eadem proportio erit ex 17. l. sept. inter genitos 64. & 216. quæ est inter generantes 8. & 27. sed inter istos duo medij proportionales cadunt numeri, cùm sint cubi ex propos. 19. l. oct. Ergo ex propos. 8. inter 64. & 216. Quapropter ex prop. 21. l. oct. cum primus 64. ex præced. sit Cubus etiam secundus 216. Cubus erit.

THEOR. VI. PROP. XI.

Si Cubus numerum aliquem multiplicans faciat Cubum, ille multiplicatus Cubus erit.

CVbus numerus 27. multiplicans aliquem v.g. 8. faciat Cubum 216. Dico 8. *quoque Cubum esse*.

Probatur eodem argumenti methodo: Nam 27. multiplicet se; & faciat 729. Itaque, quia 27. multiplicauit 27. & 8. generantes, & protulit genitos 729. & 216. eadem proportio erit ex propos. 17. sept. inter 27. & 8. quæ reperitur inter 729. & 216. Verùm 729. & 216. sunt Cubi; hic quidem ex hypothesi, ille autem ex propos. 9. & hac de causa ex propos. 19. lib. oct. inter eos duo medij proportionales interponuntur. Ergo etiam ex 8. lib. 8. inter 27. & 8. Vnde ex propos. 21. l. 8. cum primus 27. ex hypothesi sit cubus, etiam secundus 8. cubus erit.

THEOR. VII. PROPOS. XII.

Si numerus quispiam se multiplicet, & genitus sit Cubus, generans quoque Cubus erit.

SI 64. genitus ex multiplicatione 8. in se Cubus est. Dico, *& numerum 8. qui fuit in se multiplicatus Cubum esse*.

Multiplicetur rursus 64. per 8. & fiant 512. qui cubus erit; quia est productus ex multiplicatione numeri 8. in se, rursus numeri 8. in productum 64. ex sui multiplicatione exortum. Qua re, cùm numerus 64. numerum aliquem multiplicans generet Cubum, multiplicatus 8. ex præc. propos. Cubus erit.

EXPENSIO III.

De numeris quadratis inueniendis.

AD libri 9. demonstrandas propositiones ista omninò Expensio est necessaria, cùm enim ibi agatur de inuentione irrationalium multatum, inter eas quædam sunt, quarum inuentio in inuentione numerorum, qui cum alijs numeris, vel quadratum efficiant, vel etiam non efficiant, prout res postulauerit, consistit.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Duos numeros quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis quadratus quoque sit.

EX propos. 17. lib. 8. reperiantur duo numeri plani similes, quorum vterque, vel par sit, vel impar V. g. 10. & 40. detrahaturque minor à maiore, & reliquus par erit, nam etiam detracto impare, ab impari residuus numerus par reperitur, quia auferendo impar aufertur differentia vnitatis, quâ differebat maior à pari, & sic relinquitur par. Quare cum residuum sit par 30. diuidatur per medium, vt sit 15. Si ergo 40. planus numerus maior multiplicet minorem planum 10. fiet numerus quadratus 400. ex 6. propos. h. Deinde multiplicetur 15. in se, medietas residui, & fiet quadratus 225. Dico igitur, quod si duo hæc quadrata addantur simul, *Quod fiet numerus quadratus, qualis est 625.*

40. ablatus 10. Resid. 30. med. 15.
10. in 40. dat 400. 15. in 15. dat 225.
Additi 225. & 400. Sunt 625. quad.
cuius radix 25. ideft 10. & 15.

Prob. ex propos. 4. huius. Nam ibi ostendimus, quod si aliquis numerus dimidius sit, cui addatur aliquis numerus, & summa in se multiplicata faciat quadratum, quod hoc erit æquale quadrato ex ipsius dimidio, sine adiectione sumpto, & plano numero consurgenti ex summa

addiecti, & totius pro vno latere, & adiecti tantùm pro alio.

Sic itaque hic fecimus. Sumpsimus numerum 30. addidimusque 10. planum numerum, & fecimus planum 40. constitutumque est ex 10. ipso adiecto, & multiplicato in 40. (nempe in totum 30. cum adiecto 10.) numerum 400. Deinde assumpta est medietas 15. numeri 30. & factum est quadratum 225. Quare, si addamus 400. & 225. fiet quadratus numerus; Erit enim ille numerus æqualis quadrato ex medietatis 15. & adiecti 10. summâ 25. in se multiplidata consurgens, qui est 625. Numeri verò coniuncti simul 400. & 225. sunt quadrati, & 225. quidem ex effectione, & 400. ex 6. huius; quòd duos numeros ex quorum multiplicatione generatur, assumpserimus planos similes.

PROB. II. PROPOS. XIV.

Numerum quadratum inuenire, qui subductus ab altero quadrato, relinquat quoque quadratum numerum.

COnstruantur omnia, vt supra, nimirum assumantur duo plani similes 10. & 40. pares ambo, vel ambo impares, & subducatur alter 10. ab altero 40. & residuum 30. bifariam secetur, & sit medietas 15. & habebimus duos numeros requisitos 15. nimirum medietas, & 25. eadem numeri 30. medietas cum addito 10. multiplicentur In se numeri 15. & 25. & sint 225. & 625. geniti. Dico, *quòd si minor 225, subducatur à maiore 625, relinquet 400. qui est numerus quadratus.*

Prob. Nam subducto quadrato 225. à quadrato 625. reliquitur planus numerus ex toto 30. cũ addito 10. & additi 10. multiplicatione generatus 5. 400. ex prec. Sed totus, cum addito nempe 40. & additus 10. fuerunt duo plani similes ex constructione, ergo planus numerus ex eorum multiplicatione progeneratus erit quadratus ex 6. huius.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Inuenire duos numeros quadratos, quorum excessus non sit quadratus.

ELlige duos planos non similes, V.g. 8. & 30. nempe totum 22. cum addito 8. qui multiplicati inuicem dabunt numerum planum non quadratum 240. medietas verò numeri 22. nempe 11. multiplicetur in se, fiet numerus quadratus 121. qui simul additi, vt sint 361. ex propos. 7. huius, erunt æquales quadrato ex medietate 11. & addito 8. nempe numero 19. quod quadratum est 361. Ergo 361. & 121. erunt duo quadrati numeri, quorum minor subductus à maiore relinquet pro excessu numerum non quadratum 240.

PROBL. IV. PROPOS. XVI.

Duos numeros quadratos inuenire ita, vt compositus ex ipsis non sit quadratus.

18. Ablat. 8. Resid. 10. Med. 5.
8. in 18. dat 144. * 5. in 5. dat 25.
Additi 144. & 25. dant Quad. 169.
Cuius radix 13. ideſt 5. & 8.

Præceptum 1. Eadem constructio fiat, quæ priùs & assumptis duobus planis similibus paribus, vel imparibus, vt 8. & 18. quorum latera sunt proportionalia 2. & 4. primi, & 3. atq; 6. secundi. Subducatur; alter ab altero, & residuetur 10. qui diuidatur per medium, & sit medietas numerus 5. Eritque quadratum 25. ex multiplicatione numeri 5. in se, simulque planus numerus 144. ex 8. in 18. æqualis quadrato ex summa 13. numerorum 5. & 8. qui est 169. quadratus.

Auferatur deinde ex latere 5. vnitas, & relinquuntur 4. fiatque quadratum A 16. Dico, *quod hæc numerus 16. compositus cum quadrato 144. non facit numerum quadratum, nimirum eorum quadratorum summam 160. non esse quadratum.*

Totum D 16. Ablat. 8. B. Resid. 8. E Med. 4. B 8. in D 16. dat C 128. * 4. in 4. dat 16. Quad. Additi 128. & 16, æquant Quad. 144. C. Cuius Radix 12. ideſt B 8. & 4.

Præceptum 2. probationis gratiâ. Assumatur duplum numeri 4. & fiant 8. & iuxta constructionem præcedentem adiciatur numerus 8. vt priùs, & fiat totum D 16. Itaque habemus numerum totum 16. D. ideſt B 8. cum adiecto 8. B. Diuidantur per medium B 8. & sit 4. Deinde multiplicetur 4. in se, & sit quadratus 16. & multiplicetur postea totus numerus B 8. & E 8. adiectus in vnam summam redacti hoc est 16. D. per ipsum E 8. adiectum, & erunt C 128. qui duo numeri quadratus 16. & 128. planus numerus ex 6. huius æquabunt quadratum 144. C numerum, ex summa dimidij 4. & adiecti B 8. nempe 12. se multiplicantis, qui quadratus numerus 144. C appelletur ob distinctionem quadrati item 144. prioris præcepti.

Itaque aduertendum est quadratum 16. coniunctum cum plano secundi præcepti C 128. minore, vtpote à minori latere 16. per multiplicationẽ 8. producto æquat quadratum C 144. & coniunctus cum plano maiore 144. primi præcepti effecto, qui à lateribus 8. & 18. prouenit æquat numerum 160.

Obseruandum quoque est, quod quadratum 144. C & anteced. prec. 169. habent latera, quæ sola vnitate differunt nimirum 12. & 13.

Prob. Nunc propos. Itaque numerus A 16. est quadratus, vtpote ex 2. prec. productus ex multiplicatione 4. in se, sic 144. quadratus est, quòd sit productus ex duobus numeris planis ex propos. 6. huius, qui simul additi faciunt numerum 160. non quadratum. Si enim numerus 160. quadratus, foret aut esset æqualis quadrato 169. prioris præcep. aut eo maior. Seu esset æqualis quadrato posterioris præcepti C 144. aut ipso minor, aut esset quadratum quoddam inter hos numeros quadratos medium: sed neutrum ex istis esse potest; Ergo non erit quadratum.

Singulæ itaq; propositiones ostenduntur. Non potest esse æqualis quadrato 169. vel ipso maior, eo quod ex 1. præcept. planum ex lateribus 8. & 18. consurgens 144. & quadratum 25. nascens ex latere 5. ei sit æquale. Hic verò numerus 160. generatus est à dicto plano, sed quadrato 16. cuius latus est tantummodo 4. & ideo minor, quam quadratus 25. cuius latus est 5.

Non potest esse minor hic numerus 160. quadrato C 144. nec ei æqualis; Eo quia huic numero est æquale planum 128. à lateribus 8. & 16. exurgens ex posteriori præcept. vna cum quadrato 16. cuius latus est 4. hic verò numerus 160. nascitus à dicto

à dicto quadrato 16. Sed plano 144. cuius latera sunt maiora 8. & 18. & ideo etiam ipsum 160. necesse est, quòd sit maius.

Tandem. Non potest esse quid medium. Quoniam si esset quadratum medium inter quadrata 169. prioris præcepti, & quadratum C 144. posterioris præcepti consequeretur latera media inter latus huius, & latus alterius. Sed id non potest esse; Idcirco neque potest esse quadratus numerus medius. Quod ostenditur: Nam vt prædiximus, latera horum duorum quadratorum 169. & C 144. sunt 13. & 12. qui sola vnitate ex constructione differunt: Vnde nullus numerus inter eos intercipi potest, ex quo consurgat tanquam à latere medio quadratum 160. Quamobrem non erit quadratum.

COROLLARIVM

EDucitur hinc compositum hoc modo ad illos duos quadratos non habere proportionem, quam quadratus ad quadratum. Quia ex propos. 22. lib. 8. cùm componentes sint quadrati, ob proportionem eam quadrati ad quadratum ipse quoque compositus quadratus esset.

PROBL. V. PROPOS. XVII.

Numeros non quadratos inuenire, ita vt compositus ex ipsis sit quadratus.

SEcetur numerus quadratus in duas partes non quadratas, & erit factum, quod quæris; siquidem illæ duæ partes non quadratæ erunt tales, quæ compositæ rursùs numerum quadratum efficient.

PROBL. VI. PROPOS. XVIII.

Inuenire numerum, qui ad numerum quadratum, & ad alterum non quadratum, non habeat proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

NVmero non quadrato addenda est vnitas, ita tamen, vt per hanc vnitatis additionem nõ reddatur numerus quadratus, vt si sint 4. quadratus, & 5. non quadratus; adde vnitatem numero 5. & fiant 6. & quia 6. non est quadratus habebis numerum, quem quæris: si quidem neque ad 5, neque ad 4. proportionem habebit, quam quadratus numerus ad quadratum numerum. At si daretur numerus talis, cui addita vnitas faceret quadratum, vt 8. cui additus 1. facit 9. tunc deme vnitatem, vt sit 7. & obtinebis, quod desideras. Dico itaque; quod iste numerus 6. aut 7. proportionem non habet cum numero 4. & 5. quam quadratus ad *quadratum numerum*.

Nam talem non habet respectu numeri non quadrati; quoniam non potest cadere inter eos aliquis numerus, qui sit medius proportionalis; cùm sola vnitate differant; & ideo nullus numerus inter eos cadere possit; sed nec cùm numero quadrato 4. hac de causa; quod si cõsequeretur eam proportionem, cùm primus 4. sit quadratus ex 22. propos. lib. 8. esset quoque quadratus ipse, seu 6. seu 7.

PROBL. VII. PROPOS. XIX.

Duos numeros non quadratos inuenire, vt compositus ex ipsis non sit quadratus, neque cum ipsis proportionem dicat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

ID faciliter fit, si diuidatur numerus quilibet non quadratus, vt 14. in duos numeros inter se primos 3. & 11. & erunt numeri quæsiti. Nam cũ primi sint inter se proportionem non habent, quam quadratus ad quadratum numerum, & cum numerus 14. ex quo per diuisionem euenere non sit quadratus; neque ipsi sunt; aut possunt esse quadrati; Ideoq; nec ad eos habere proportionem quadrati ad quadratum.



TRACTATVS XII.

IN X. LIBRVM EVCLIDIS

De Lineis irrationalibus.

VT Tractatus linearum irrationalium intelligeretur, neceſſe fuit priùs aliqua ſaltem de numeris cognoſcere. Vnde tres de numeris libri huic libro præmittendi fuerunt; nulloque modo fieri potuit, vt immediatè hæc tractatio ſuccederet, aut ſexto libro, aut præcedentibus. Cognitio verò harum linearum eſt etiam elementaris. Siquidem cũ ſint complurimę magnitudines latera irrationabilia obtinentes, tàm planę, quàm ſolidæ; multoties, quis errorem acciperet, dum putat lineam, ſeu latus alicuius figuræ ſe poſſe numeris exprimere, quòd inexprimibile eſt; & quia inſuper oſtendit Euclides ſpatia quædam æqualia quadratis irrationabilibus, V. g. parallelogramma applicata lineæ rationali alterum latus irrationale efficere talis, vel talis rationis: nos illam cognitionem tanquam minus neceſſariam ab elementis ablegauimus ſola generica cognitione contenti.

EXPENSIO I.

De Principijs.

ANtequam ipſum de Incommenſurabilibus librum aggrediamur, quædam principia ad eum ſpectantia præcognoſcere oportet: hæc autem ſunt.

DEFINITIO I.

COmmenſurabiles magnitudines dicuntur, quas eadem menſura metitur.

Sint lineæ altera quatuor palmorum, altera ſeptem palmorum; quia palmus metitur vtraſque commenſurabiles appellantur.

DEFINITIO II.

INcommenſurabiles verò, quarum nulla communis menſura contigit reperiri. Ergo duę lineæ tales eſſent, quarũ vna ſex palmos contineret, altera verò, nec palmo ex æquo menſurari poſſet quantumcumque multiplicatis ipſius partibus aliquotis, nec ſemipalmo, nec quarta palmi, nec ſeptima, nec octaua, nec decima, nec quacunque alia; illa linea irrationalis reſpectu lineæ ſex palmorum appellatur; cum tamen reſpectu altetius lineæ rationalis eſſe queat. Vnde irrationabilitas alicuius lineæ, ſeu quantitatis ſemper reſpectiuè ſumitur.

DEFINITIO III.

REctæ lineæ potentia commenſurabiles ſunt; cum quadrata earum idem planum metitur.

Sint duo quadrata primum AB, quod capiat nouem quadrata, alterum ED quatuor, hæc quadrata dicentur commenſurabilia, & latera eorum, potentiâ commenſurabilia. Sunt verò lineæ, vt infra oſtendam, quæ longitudine, & potentiâ commenſurabiles ſunt; aliæ ſolum potentiâ, quòd quidem earum quadrata aliquâ communi menſurâ dimetiri poſſint; ſed non ipſe lineæ, & iſtæ vocantur potentiâ tantùm commenſurabiles.



DEFINITIO IV.

INcommenſurabiles lineæ potentia ſunt, cum quadrata earum nulla communi plana menſura menſurantur.

DEFINITIO V.

ALicui lineæ, aliquæ erunt longitudine commenſurabiles; aliæ potentia tantùm; aliæ erunt quoque incommenſurabiles omninò.

Hæc itaque linea, cui aliæ ſecundùm commenſurabilitatem, & incommenſurabilitatem comparantur, dicenda eſt *Rationalis*. Itaque totà rationalitas, & irrationalitas ſumitur relatiuè ad aliquam lineam propoſitam; cùm alioquì etiam irrationales illi propoſitæ, alijs lineis ab illa diuerſis, rationales dici poſſint.

DEFINITIO VI.

ET huic commenſurabiles, ſiue longitudine ſiue potentia tantùm, Rationales dicantur.

DE-

DEFINITIO VII.

VT illi omninò incommenſurabiles, irrationales. Nimirum tum potentiâ, tum longitudine.

DEFINITIO VIII.

ET quadratum, quod à propoſita recta linea ſit, dicatur Rationale.

Quemadmodum linea dicitur Rationalis, quæ notæ quantitatis eſt, ſic quadratum ab ea deſcriptum rationale dicitur, & reſpectu eius cæteræ planities commenſurabiles, ſeu incommenſurabiles dicuntur, ſi nulla planitie, quæ communis menſura ſit tum propoſitæ planitiei, tum alterius reperiatur.

DEFINITIO IX.

ET quadrata huic commenſurabilia rationalia.

DEFINITIO X.

ET huic incommenſurabilia paritèr irrationalia appellantur, ſiue ſint quadrata, ſiue alicuius alterius figuræ.

DEFINITIO XI.

REctæ verò, quæ illis quadratis irrationalibus latera ſunt, vel quadratis quibuſcumque æqualibus ſpatio irrationali cuiuſcumque figuræ ſit, illæ dicantur irrationales.

Si ſpatia itaque incommenſurabilia fuerint, quadrata: latus illorum irrationalis eſt linea, ſi quadrata non fuerint, tunc illis figuris irrationalibus quadratum æquale, habebit latus, quod linea irrationalis appellanda eſt.

AXIOMATA I.

MAgnitudo quamcumquè magnitudinem menſurans, etiam compoſitam ex ipſis magnitudinibus menſuratis, menſurat.

II.

Magnitudo menſurans, aliquam, menſurat quoque omnem aliam, quam illa menſurata menſurat.

III.

Magnitudo menſurans totam, & ablatam; menſurat quoque reliquam magnitudinem.

EXPENSIO II.

De commenſurabilibus quantitatibus.

VT irrationales quantitates euidentiùs innoteſcant, prius de rationabilibus, & earum commenſurabilitate agendum, & ad numeros habitudine. Quare id præſenti expenſione præſtabimus.

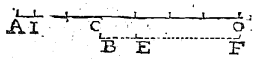
PROBL. I. PROP. I. Euc. 2.

Duabus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram reperire.

DVÆ magnitudines dentur, quæ ſint commenſurabiles, quarum oporteat maximam menſuram reperire.

Linea detur punctata BF, & alia continua linea OA: Detrahaturque minor punctata à maiore, quoties fieri poteſt, & remaneat AC, quæ iterum ſubducatur à punctata FB, quoties fieri poteſt, vel totam auferet, & ſic AC, erit maxima communis menſura, vel non, ſed remanebit aliquid ſ. EB: Hoc iterum ſubducatur ab AC, & remaneat IA: Iam tandem, cùm ſit, commenſurabilis, aliquod reſiduum adæquatè menſurabit præcedentẽ magnitudinem; Et ſic *hæc erit maxima communis menſura, quæ eſt in datis lineis* IA, quæ menſurat EB diuidens eam in duas partes nihilo remanente.

Probatur primò, quòd IA metiatur vtramque. Nam IA metitur BE, ſed BE metitur IC: Ergo, & IA metitur IC ex 3. Axiomate. Rurſus IC metitur EF; Sed IA, vt modo probatum eſt, metitur IC; Ergo ex eodem principio metitur quoque IA partem EF; Sed metiebatur EB quoque alteram partem, ergo totam BF metitur. Sed hæc partem CO in linea continua metitur; Ergo, & IA metitur CO. Sed metiebatur etiam CI compartem, & IA ſe ipſam, quæ ſimul componunt totam AO. Ergo IA totam lineam continuam metitur; igitur AI totum BF, & totum AO metietur.



Probatur quoque, quòd ſit maxima communis menſura: Nam ſi adeſſet alia maior: hæc metietur IA minorem, quòd fieri nequit; Nam metietur AO, & BF, hæc autem metitur CO, ergo hæc aſſignata metiretur CO; ſed metiebatur ex ſuppoſito totam AO; Ergo, & reſiduum CA ex 2. princ. Sed reſiduũ CA ſ. IA, & IC menſurat FE; Ergo hæc aſſignata metiretur quoque EF; quare, & reſiduum EB; ſed EB menſurabat CI, Igitur EB metiretur CI; quare, & reſiduum IA; ergo illa maior, quæ aſſignaretur, menſura metiretur tandem IA minorem, quod eſſe nequit.

COROLLARIVM

HInc patet. Quod magnitudo aliqua metiens duas magnitudines, metitur etiam earum communem menſuram: Nam aſſignata illa maior, ad hoc, vt ambas totas poſſet menſurare, debebat, & earum maximam communem menſuram tandem menſurare; vt in demonſtratione oſtenſum fuit.

Non ponimus hic duas primas propoſitiones Euclidis: Quoniam ſine ipſis poſſumus omnia oſtendere, quæ in hoc libro aſſumpſimus oſtendenda: & alioquin in ſecunda propoſit. ponat id, quod fieri poſſe, aliqui dubitent, nempe perpetuam detractionem ab aliqua quantitate. Illam autem ponimus alibi ex Ambroſio à Sancto Vin-

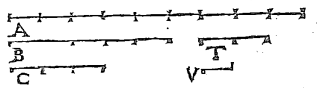
centio

centio efficatiùs demonſtratam Tract. de progreſſionibus linearum.

PROBL. II. PROPOS. II.

Tribus magnitudinibus commenſurabilibus datis, maximam earum communem menſuram inuenire.

SInt datæ tres magnitudines commenſurabiles A, B, C. Sitq; ex preced. 1. propoſ. reperta maxima menſura duarum A, & B, quæ ſit T, ſi ergo T metiatur quoque C; habebimus maximam menſuram omnium trium A, B, & C; quòd ſi non metiatur ſaltem B, & T ex præced. Coroll. commenſurabiles erunt, & dabitur aliqua magnitudo, quæ menſurabit A, B, & E cum ſint commenſurabiles; Quamobrem & menſurabit quoque T duarum A, & B maximam communem menſuram. Inuenietur ergo ex præced. propoſ. maxima menſura ipſarum C, & T, & ſit V. Dico *magnitudinem* V *eſſe trium* A, B, C *maximam communem menſuram.*



Probatur, quod ſit menſura: Nam V eſt menſura magnitudinis T, & C; Ergo ex 3. pron. & magnitudinum B, & A, quas T menſurat.

Probatur quoque: Quòd ea ſit maxima; Nam aſſignata quædam V. g. palmus, vel quælibet alia; quæ maior dicatur, quam V. Menſurabit B, & A; Quare, & maximã earum menſuram T ex Coroll. præced. Metitur quoque C. Quare, & earum T, & C menſuram communem V. Ergo palmus maior, quam V, metiretur lineam V; quod fieri nequit.

COROLLARIVM

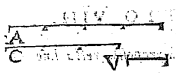
COlligitur hinc quoque; Quòd magnitudo metiens tres magnitudines, & earum maximam communem menſuram metitur. Nam palmus, ſi metiretur tres A, B, C, metiretur quoque menſuram communem V. Quod ſi darentur quatuor magnitudines. Repertâ trium ex præced. probl. communi menſurâ maximâ; deinde huius menſuræ repertæ, & quartæ maxima communis menſura reperiri deberet, quæ eſſet omnium quatuor maxima menſura communis, & ſic de alijs pluribus in infinitum.

THOR. I. PROPOS. III. Eucl. 5.

Commenſurabiles magnitudines inter ſe rationem habent, quam numerus ad numerum: Et ſi hanc obtineant commenſurabiles erunt.

Sicut incommenſurabiles proportionem non habent, quam numerus ad numerum; Et ſi hanc non habeant, incommenſurabiles erunt.

PRobatur prima pars. Nam ſi A, & C ſunt commenſurabiles. Inueniatur earum communis menſura V, Quotieſque ea repetita metitur A toties vnitas repetatur, & faciat numerum æqualem numero V. g. 4. partium; idemq; fiat menſurando C, & faciat 3. Tot itaque menſuras continet A, quot vnitates ſunt in numero 4. & tot C, quot vnitates in numero 3. Cum ergo æquè vnitas menſuret numerum 4. & 3. vt V metitur A, & C proportionem eandem habebit A ad C, quam 4. ad 3. & ideo, quam numerus ad numerum.



Probatur ſecunda pars. Nam ſi duæ magnitudines A, & C, proportionem habeant, quam 4. numerus ad numerum 3. quot vnitates ſunt in 4. in tot partes æquales ſit diuiſa magnitudo A, quarum vna ſit V; Erit itaque magnitudo A ad V, vt numerus 4. ad vnitatem; Sed vt 4. ad 3. ita ponitur A ad C. Ergo C tot partes obtinebit ex ijs, quibus conſtat A, nempe ex partibus V, quot vnitates ſunt in 3.. Nam menſura communis menſurans 4. & 3. iuxta quam proportionem dicunt, eſt vnitas. Ergo etiam erit V communis menſura, iuxta, quam A, & C proportionem dicunt.

Probatur tertia pars. Nam, ſi aliquæ quantitates, quæ dicuntur incommenſurabiles, proportionem haberent, quam numerus ad numerum ex probatione ſecundæ partis, commenſurabiles eſſent.

Probatur quarta pars. Nam ſi proportionem non habeant, quam numerus ad numerum, & tamen commenſurabiles credantur; ex prima partis probatione habebunt quoq; proportionem, quam numerus ad numerum contra Hypotheſim.

THEOR. II. PROPOS. IV. Eu. 9.

Quæ à rectis lineis longitudine commenſurabilibus ſiunt quadrata, inter ſe proportionem habent, quam quadratus ad quadratum numerum.

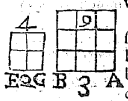
Et quadrata proportionem habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum & latera habebunt longitudine, commenſurabilia.

Quæ verò à rectis lineis longitudine non commenſurabilibus ſiunt quadrata, non habent inuicem proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Sicut quadrata proportionem non habentia, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, nec latera habebunt longitudine commenſurabilia.

PRobatur prima pars; Nam lineæ commenſurabiles proportionem habent, quam numeri: Sed ex 18. lib. 8. numerorum quadrata ſunt in duplicata proportione laterum. Sic quoque linearum quadrata ſunt in duplicata ratione ſuorum laterum ex 20. ſexti libri. Ergo quadrata linearum, & quadrata numerorum ſunt in duplicata proportione laterum: Quare ſunt in ſimili proportione, nempe duplicata laterum ſuorum.

Probatur ſecunda pars. Nam ex ijſdem citatis propoſitionibus eſt quadratum numerorum, ſicut & linearum in duplicata proportione laterum: Sed numerorum quadratorum latera ſunt numeris exprimibilia; Ergo, & partes linearum, quæ latera ijs quadratis contexunt: vt G E, & A B tales erunt.



Probatur tertia pars. Nam ſi lineæ ſunt incommenſurabiles; quadrata earum non habebunt proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum; Siquidem ex prima probatione quadrata, quæ proportionem obtinent, quam quadratus numerus ad quadratum, latera quoque obtinent longitudine commenſurabilia; & ideo illæ lineæ contra Theſim eſſent commenſurabiles.

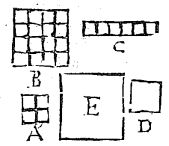
Probatur quoque 4. pars eodem tenore. Nam quadrata, quæ referuntur ad aliud vt quadratus numerus ad quadratum numerum, latera obtinent commenſurabilia; & ideo illa quadrata, quæ non referuntur proportione eâ, vt quadratus numerus ad quadratum numerum longitudine latera incommenſurabilia poſſidebunt. Aliòquin ſi latera eſſent commenſurabilia, & ipſa quadrata ſe haberent, vt quadratus ad quadratum numerum contra hypotheſim.

COROLLARIVM

SEquitur. Lineas longitudine commenſurabiles tales quoque eſſe potentiâ: Nam poſſunt conſtituere quadrata inuicem commenſurabilia.

Lineas verò potentiâ commenſurabiles; nimirum quorum quadrata commenſurabilia ſunt, poſſe quidem, & longitudine eſſe commenſurabiles, ſed non ſemper. Nam poteſt V. g. dari quadratum, quod ſit tertia pars alterius, & proportionẽ habeat, quam numerus ad numerum, vt 1 ad 3. quorum latera erunt incommenſurabilia omnino cum quadrata non ſint inuicem, vt numerus quadratus ad quadratum. Si verò detur quadratum, quòd ad aliud proportionem habeat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, illud ſemper ex propoſ. præced. habebit latera commenſurabilia reſpectu alterius. Lineas verò longitudine incommenſurabiles, quandoque eſſe, & potentiâ incommenſurabiles, quandoque verò nequaquam: Quia eorum quadrata poterunt habere proportionem V. g. quod vnum ſit duplum alterius, nimirum, quam numerus ad numerum, vt 4. ad 9. vel 10. ad 11. licet non eam, quam quadratus numerus ad numerum quadratum, quæ requiritur, vt etiam latera ſint commenſurabilia. Lineas verò incommenſurabiles potentiâ, longitudine quoque ſemper eſſe incommenſurabiles. Verùm dices. Cùm omnes numeri plani, & ſolidi proportionẽ conſequantur, quam quadratus numerus ad quadratum numerum ex propoſ. 12. l. 8. vt 6. & 24. qui proportionem habent, quam 1. ad 4. vel 4. ad 16.

An hæc quadrata, quæ inuicem hanc proportionem dicunt, initantur quoque lateribus longitudine commenſurabilibus, & Reſp. affirmatiuè; Licet enim non poſſent diuidi in eas partes, in quas latus quadrati 4. & 16. diuiditur: poſſent tamen diuidi in alias partes V. g. ſi latus quadrati 6. diuiditur in duas partes latus quadrati 24. poſſet diuidi in quatuor. Nam cum quadrata ſint in duplicata proportione ſuorum laterũ, ſi ſe habent quadrata, vt 1 ad 4. latera erunt, vt 1 ad 2. & ſicut latus ſic, & quadrata ipſa poterunt diuidi: vnum quidem in 4. alterum verò in 16. partes, non tamen commenſurabiles illis, quæ 6. plana ſimilia, & 24. conſtituant.



Sic ſi ſit quadratum partium quatuor A, & aliud partium 16. vt B, & parallelogrammum 6. ex dictis partibus complectens; cui ex documentis primi libri fiat quadratum æquale D, & huic quadrato D fiat quadratum quadruplo maius, E Quadratum D erit 6. partium reſpectu quadrati A, & B, & parallelogrammi C, cum huic ſit æquale, & quadratum E conſequenter partium 24. & ideo latera horum quadratorum; ſi ſumantur, vt conſtituta partibus 6. & 24 nullis numeris effari poſſunt, cùm non ſint 6. & 24. numeri quadrati; Verùm abſolutè, cùm ex alijs partibus quadrata D, & E conſtitui poſſint V. g. D ex 4. & E ex 16. erunt eorum latera commenſurabilia. Vnde colligitur omne quadratum, quod proportionẽ obtineat, quam ſimiles numeri plani, habere latera longitudine commenſurabilia: Si quidem ex propoſ. 12. l. 8. omnes numeri ſimiles proportionem inuicem habent, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

EXPENSIO III.

De comparatione linearum rationalium, & irrationalium.

DOcet hæc expenſio modum argumentandi in lineis rationalibus, & irrationalibus; & quomodo argumenta valeant, & deductiones de commenſurabilibus, vel è contrà. Vnde ſine hac expenſione irrationales magnitudines impoſſibile eſt cognoſcere in ſpecie.

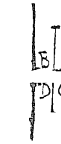
THEOR. I. PROPOS. V.

Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & fundamentum primæ combinationis ſuo termino ſit commenſurabile; fundamentum quoque ſecundæ combinationis ſuo termino erit commenſurabile, & ſi è contra fundamentum illud primæ ſuo termino ſit incommenſurabile; tale quoque erit fundamentum ſecundæ combinationis reſpectu ſui termini.

SInt qnatuor magnitudines proportionales, ita quod ſit A ad B, vt C ad D; ſ. A fundamentum primæ combinationis ſit ad ſuum terminum B, vt

fundamentum C ad terminum D. Dico, *quod si fundamentum* A *commensuraretur termino* B; *fundamentum quoque alterum* C *suo termino* D *commensurabile esse*.

Probatur. Erit enim A ad B in proportione, vt numerus V.g. 2. ad numerum 4 ex propositione 3. huius, sed eandem proportionem dicit quoque C ad D; quare ex eadem propositione erit quoque commensurabilis C cum suo termino D, cum sit, vt A ad B, & ideo vt 2. ad 4. hoc est, vt numerus ad numerum.



Si verò sit incommensurabilis A fundamentum respectu termini B. Dico, *nec esse commensurabilis magnitudo*; *& fundamentum* C *respectu termini* D.

Probatur quoque ex eadem propositione sic. Nam si A est incommensurabilis ipsi B. Ergo non dicet proportionem, quam numerus ad numerum. Sed tali quoque in proportione est magnitudo C respectu magnitudinis D; ergo neque ipsa dicet proportionem, quam numerus ad numerum, ideoque incommensurabilis erit C ipsi D.

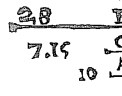
Hoc autem intelligitur non de commensurabilitate longitudinis tantùm, sed etiam potentiæ tantùm. Nam sit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt numerus 2. ad numerum 4. quia ponitur A ad B, vt C ad D, & ideo ob similitudinem figurarum ex propositione 26. l. 6. vt quadratum ex A ad quadratum ex B, sic quadratum ex C ad quadratum ex D; erunt quoque, vt 2. ad 4. sic quadratum ex C ad quadratum ex D, quare cum quadrata linearum C, & D sint vt numerus ad numerum erunt ipsę potentiâ tantùm commensurabiles ex pr. 4. huius.

THEOR. II. PROPOS. VI. Euc. 12.

Quæ eidem magnitudini sunt commensurabiles, & inter se sunt commensurabiles.

DEtur magnitudo A, & B, quæ magnitudini C commensurabilis existat. Dico, *eas magnitudines inuicem esse commensurabiles*.

Probatur. Nam cum magnitudo A ponatur commensurabilis magnitudini C, erit, vt numerus V. g. 10. ad numerum 15. Et eadem ratione, quia magnitudo B ponitur quoque commensurabilis magnitudini eidem C, erit ad magnitudinem eam C vt numerus aliquis V. g. 28. ad 7. & ideo conuertendo C erit ad B, vt numerus 7. ad alium 28. Reperiantur itaque tres numeri continuè proportionales in datis rationibus 10 ad 15. & 7 ad 28. ex propositione 3. l. 8. & sint 2.3. 12. ita quod linea A se habeat ad C, vt 2. ad 3 & C ad B, vt 3. ad 12.



Quo posito erit quoque ex æquo A ad B, vt 2. ad 12 & ideo A erit commensurabilis ipsi B, quia se geret A magnitudo ad B magnitudinem, vt numerus ad numerum.

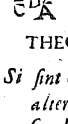
Quod & intelligitur, si duæ A, & B sint solum commensurabiles, cuidam tertiæ potentiâ. Nam tunc erit V. g. quadratum ex A ad quadratum ex C, vt numerus 10. ad numerum 15. & quadratum ex B ad quadratum ex C, vt 28. ad 7. Repertis ergo tribus numeris 2.3. 12. in continua proportione ex 3. lib. erit quadratum ex A ad quadratum ex C, vt 2. ad 3. & quadratum ex C idem ad quadratum ex B, vt 3. ad 12. ideoque ex æquo erit, vt 2 ad 12. sic quadratum ex A ad quadratum ex B: cum quæ sit quadratum ex A ad quadratum ex B, vt numerus ad numerum; ipsæ lineæ ex 4. huius erunt tantùm potentiâ commensurabiles.

THEOR. III. PROPOS. VII. Euc. 13.

Sint duæ magnitudines; & altera quidem sit commensurabilis cuidam tertiæ, altera verò incommensurabilis; illæ magnitudines inuicem erunt incommensurabiles.

SIt A lineæ C commensurabilis, seu longitudine, seu potentiâ, & eidem C linea altera D incommensurabilis. Dico *eas nempe* A, & D *esse inuicem incommensurabiles*.

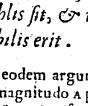
Probatur. Nam si D est commensurabilis magnitudini A; cum eidem quoque A ponatur commensurabilis C: Sequeretur, quòd cùm D, & C vni tertiæ A sint cõmẽsurabiles ex propos. antec. contrà Thesim inuicem cõmensurationem haberent, seu longitudine, seu potentiâ.



THEOR. IV. PROPOS. VIII. Eu. 14.

Si sint duæ magnitudines commensurabiles: altera verò ipsarum cuidam incommensurabilis sit, & reliqua eidem incommensurabilis erit.

PRob. eodem argumẽto, ac præcedens; quia magnitudo A potẽtiâ tantũ, seu lõgitudine, & B cõmẽsurabilis essent inuicẽ, & tamen A existente cum aliâ magnitudine, quapiam C incommensurabili esset nihilominus magnitudo B eidem ipsi C commensurabilis.



Iam magnitudo A, & magnitudo C magnitudini B essent commensurabiles. Quamobrem ex proposit. 6. huius inter se quoque A, & C essent commensurabiles contra id, quod præsupponitur.

COROLLARIVM

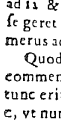
QVæ incommensurabilibus inuicem sunt commensurabiles, sunt inter se etiam incommensurabiles, quia eadem militat ratio de duabus, aut pluribus, & de vna, vt patet.

THEOR. V. PROPOS. IX. Eucl. 17.

Si duæ magnitudines commensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique earum commensurabilis erit.

Quòd, si tota magnitudo vni earum commensurabilis sit, & magnitudines, quæ compositæ à principio fuerunt, commensurabiles erunt.

DEntur A B, & B C magnitudines, quæ componantur in B. *Dico nas, vt prius, licet compositæ sint, esse commensurabiles.*



Nam eadem communis mensura D metitur vtrasque diuisas. Ergo etiam compositas metietur ex pronunciato 1. Quare cum diuisæ, & compositæ habeant eandem communem mensuram erunt AB, BC, & tota AC commensurabiles.

Probatur secunda pars, quia si tota AC commensurabilis erit vni ipsarum V. g. magnitudini BC, ergo eadem communis mensura D, metietur totam, & ablatam BC: Quare, & reliquam BA ex 3. pronunc. & ideo BA erit commensurabilis toti AC.

COROLLARIVM

HInc sequitur. Quod si tota magnitudo ex duabus composita cõmensurabilis sit vni ex suis partibus; quòd etiam reliquæ cõmensurabilis sit; Nam mensura, quæ metitur totum, & ablatum metitur, & reliquum ex pronunc. 3.

THEOR. VI. PROPOS. X.

Si duæ magnitudines inuicem incommensurabiles componantur, & tota magnitudo vtrique ipsarum incommensurabilis erit. Quod si tota magnitudo vni ipsarum incommensurabilis fuerit, & quæ à principio compositæ magnitudines, inuicem erunt incommensurabiles.

PRobatur prima pars. Quia si detur aliqua mensura metiens totam AC, & ablatam AB, in schemate præced. propos. metiretur quoque, & reliquam BC, ex pronunc. 3. quòd est contra hypoth. ponuntur enim A B, & BC incommensurabiles.

Probatur secunda pars; Quia si ab initio magnitudines, quæ fuere compositæ dicantur commensurabiles; sequitur, quod si tota magnitudo AC vni ipsarum sit commensurabilis, quod etiam sit alteri, ex propos. præced. contra Thesim.

COROLLARIVM

HInc sequitur. Quòd, si tota magnitudo ex duabus composita sit incommensurabilis alteri partium componentium, hæc etiam erit incommensurabilis reliquæ; Nam ex Coroll. præc. si esset commensurabilis vni esset, & alteri.

Magnitudines autem, quæ componuntur, debent esse re ipsa commensurabiles, quæ nempe possint dimetiri communi mensura maxima, alioquin ratio non valeret, quæ à communi mensura desumitur, vnde non intelligitur de lineis potentiâ commensurabilibus.

EXPENSIO IV.

De inuentione linearum rationalium.

ANtequam irrationales inuenlantur, prius de inuentione rationalium agendum est; ex harum enim cognitione gradus sternitur ad irrationales diuersas inueniendas. Vnde in primis diuersas species harum linearum, vt singulas deinde docemus inuenire; distinguere opus est.

Rationales inuicem lineæ in plura genera secundum diuersam comparationem, quâ cum linea aliqua tertiâ conferuntur, quæ dicitur ob id Rationalis, nempe illa, ex cuius cæterarum mensura æstimantur, & est velut Cubitus, seu Pes in vsitata rerum vendibilium mensuratione. Nam eiusmodi lineæ comparatæ cum illâ sunt inuicem longitudine commensurabiles, quatenùs ex eius partibus, vel vna, vel ambæ integratæ inuicem quoque consentiunt longitudine, vel non, sed solùm potentiâ. Si longitudine commensurabiles, tunc poterit accidere, quòd vna ex istis sit Rationali æqualis; & ecce *primum genus*, quòd si omnes sint inæquales illi, sed solum secundum partes in linea Rationali existentium longitudine commensurarentur. Erit *secundum genus*: Si verò inuicem sunt solùm potentiâ commensurabiles, tunc altera ex istis potest reperiri, vel æqualis, vel saltem commensurabilis lineæ Rationali, si æqualis reperitur erit *tertium genus*, si inæqualis, sed tamen commensurabilis erit *quartum genus*. At si ne dum inuicem, sed etiam cùm linea Rationali comparatæ sunt, tantùm potentia commensurabiles erit *quintum genus*. Et tandem potest accidere, quod hæ lineæ sint commensurabiles inuicem, sed cum linea Rationali comparatæ illi solum sint potentia commensurabiles, & erit *sextum genus*.

Primum genus, vt docebimus reperitur ex Corollario propos. 11. sicut, & secundum.

Tertium verò genus, & quartum reperitur, si primo inueniatur rationali aliqui commensurabilis aliqua, vel æqualis ex propos. 11. sequentis Corollario, & huic reperiatur alia potentiâ tantum commensurabilis, ex propos. 12. nam duæ repertæ erunt inuicem potentiâ tantùm commensurabiles, sed altera ex istis erit lineę Rationali cõmensurabilis, altera verò potentia tantũ, ex prop. 7.

Quintum genus reperitur ex propos. 12. si nempe expositæ Rationali, inueniatur aliqua potentia tantum commensurabilis B, & huic inuentæ alia item reperiatur potentiâ tantum commensurabilis C, nam, cum rationalis A, & hæc secundo inuenta C, primo inuentæ B sint potentiâ tantum commensurabiles erunt, inuicem potentiâ tantum cõmensurabiles ex propos. 6.

Sextum verò genus reperitur ex Corollario propos. 12.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Inuenire rectam, ad cuius quadratum, ita se habeat quadratum alterius, vt numerus ad numerum.

SInt duo numeri 3, & 5. & linea A. Debeat inuenire lineam aliquam, cuius quadratum, ita sit in proportione, cum lineæ B quadrato, vt est numerus 3. ad numerum 5.

Diuidatur linea A in tot partes, quot habet numerus oblatus 3. V.g. in tres partes; deinde assumatur linea C, quæ quinque partes æquales illis, obtineat, eritque linea A, ad lineam C, vt numerus 3. ad 5.

Inter istas autem, lineas media proportionalis inueniatur ex 16. propos. lib. 6. quæ sit B. Dico quadratũ ex A ad quadratum ex B esse sicut 3 ad 5.

Probatur ex Corollario propos. 21. lib. 6. Nam

A, E, C. tres lineæ sunt continuæ proportionales, & ideo, cum quadrata omnia sint similia, similiterq;



que describta erit, vt latus A ad latus C, ita quadratum factum ex A ad quadratum factum ex E ob proportionem laterum duplicatam; Sed A se habet ad C, vt 3. ad 5. Ergò, & quadratum ex A ad quadratum ex E se habebit in proportione, vt 3. ad 5.

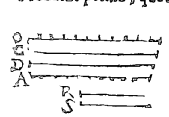
COROLLARIVM

Hinc enascitur modus inueniendi lineas longitudine alteri commensurabiles. Nam nihil aliud agendum, quam diuidere datam A (quæ quoniam ab ea cæterarum mensuræ desumuntur, vocatur Rationalis,) in partes, quas voles, & ex illis partibus alias componere lineas; siue alias æquales Rationali in diuersas partes diuidere, & eas partes, tanquam lineas assumere, omnes enim datæ Rationali A, erunt similiter Rationales.

PROB. II. PROPOS. XII.

Propositæ rectæ lineæ inuenire duas rectas lineas incommensurabiles, alteram quidem longitudine tantùm, alteram verò etiam potentiâ.

Sit recta proposita A, cui inuenienda primo sit linea incommensurabilis longitudine tantùm. Inueniantur duo numeri proportionem non habentes, quam quadratus numerus ad quadratum numerum V. g. 50. & 18. ex propos. 19. lib. 9. vel ex 16. pr. Coroll. 4. l. 8. Deinde ex præced. inueniatur linea, cuius quadrato ita se gerat in proportione quadratum ex C confectum, vt 50. ad 18. numeri, vel vt linea A ad O lineam. *Dico esse* C *lineam lineæ* A *incommensurabilem potentia tantùm.*



Probatur primo, quod sit incommensurabilis longitudine. Nam ea quadrata habent etiam latera longitudine cõmensurabilia, quæ proportionem habent, quã quadratus numerus ad quadratum numerum ex propos. 4. huius. Sed quadratum factum ex A ad quadratum ex C, illam non habet proportionem, cùm sit solùm proportio, quam habet numerus 50. ad numerum 18. non quadratos: Ergo eorum latera, nempe linea A, & C, erunt incommensurabilia.

Probatur secunda pars, nempe quod sit tantùm longitudine incommensurabilis. Nam earum quadrata commensurantur, cùm habeant proportionem, quam numerus ad numerum.

Secundò sit inuenienda altera linea D, quæ sit quoque potentiâ incommensurabilis. Inuenietur linea D inter duas A, & C longitudine incommensurabiles media proportionalis ex 13. lib. 6. Dico D *esse incommensurabilem, tam longitudine, tum potentia lineæ* A *primo positæ.*

Probatur ex propositione 21. lib. 6. Nam ea proportio intermedia, inter quadratum ex A factum, & quadratum ex D, quæ est inter lineas, & latera A, & C. Sed illæ sunt incommensurabiles. Ergo etiam quadrata ex propos. 5. huius erunt incommensurabilia, & ideo ipsæ rectæ incommensurabiles erunt potentiâ. Vnde, & longitudine ex prop. 4. huius.

COROLLARIVM

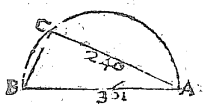
Colligo modum, quo, & plures lineæ inueniantur datæ rationali potentiâ tantùm incommensurabiles. Nam sufficit huic inuentæ reperire aliam longitudine commensurabilem V. g. R, vel S ex Corollario præcedenti: Nam erunt etiam datæ Rationali potentiâ tantùm commensurabiles.

Siquidem A est longitudine incommensurabilis C, cui tertiæ sunt commensurabiles lineæ inuentæ R, & S; Quare ex propos. 7. linea Rationalis A, & inuentæ R, aut S erunt inuicem incommensurabiles.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

Inuenire duas rationales potentia tantùm commensurabiles, ita vt maior possit efficere quadratum maius, quàm lineæ minoris, quorum differentia, seu excessus quadratus habeat latus dictæ maiori lineæ longitudine commensurabile.

Proponatur aliqua linea Rationalis AB, & inueniantur ex propos. 15. lib. 9. duo numeri quadrati, quorum excessus non sit quadratus, vt 361. & 121. quorum excessus 240. non est quadratus. Deinde ex propos. 11. reperiantur duæ lineæ AB, & CB potentiâ tantùm commensurabiles, quorum nimirum quadrata se habeant, vt numerus 361. quadratus, ad numerum non quadratum 240. Deinde super maiori AB fiat semicirculus, & accommodetur in semicirculo, connectaturq; recta CB. *Dico* AB *plus posse quàm* AC, *ambo* ex constitutione potentiâ tantùm commensurabiles, quadrato rectæ lineæ CB; quæ ipsi AB longitudine est commensurabilis.

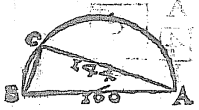


Probatur. Nam quadrata linearum AB, & AC sunt æqualia quadrato ex linea AB confecto ex propositione 11. lib. 2. sed vt numerus 361. ad 240. ita est quadratum lateris AB ad quadratum lateris AC. Ergo *per conuersionem rationis* erit 361. ad 121. complementum numeri 240. vt sit æqualis numero 361. Ita quadratum ex latere AB ad quadratum ex latere CB, quod cum quadrato AC, sit æqualis quadrato ex latere AB, sed quadrata numerorum 361. & 121. habent latera commensurabilia, alioquin non essent numeri quadrati, ergo, & latus AB, cum latere CB erit commensurabile ex propos. 5. huius.

PROBL. IV. PROPOS. XIV.

Inuenire duas rectas potentiâ tantùm commensurabiles, quarum maior possit efficere quadratum maius, quàm efficiat minor; quorum differentia, seu excessus quadratus habeat latus dictæ maiori lineæ longitudine incommensurabile.

Sit linea rationalis AB, inueniantur ex propos. 16. lib. 9. duo numeri quadrati 16. & 144. ita quod compositus ex ipsis, nempe 160. non sit quadratus: Fiatque, vt compositus non quadratus 160. ad quadratum V. g. 144. ita linea AB ad aliam AC, ex propositis huius. Deinde super maiorem AB fiat semicirculus, accommodeturque AC in eo à puncto A, connectaturque recta CB. *Dico* CB *esse lineam lineæ* BA *longitudine incommensurabilem latus quadrati, quo* A *superat* AC *quad.*



Probatur. Quia BA est ad AC, vt non quadratus numerus 160. ad quadratum 144. Ergo quadratum ex BC, erit ad AB, vt compositus non quadratus 160. ad quadratum numerum 16. per conuersionem rationis. Quoniam quadrata duo ex BC, & CA ex propos. 11. lib. 2. æquant quadratum ex BA, sicut quadratus numerus 144. & 16. æquant numerum 160. quare ita se habebit, vt numerus 160. ad 16. ita BA ad BC. Sed 160. ad 16. cum non sit quadratus, nó habet proportionẽ, quã quadratus numerus ad quadratum numerum. Ergo neque latera BA, & CB ex propos. 11. huius, & ideo non erunt cómensurabilia. Quare quadratum ex BA superabit AC quadratum, & excessus quadrati latus BC incommensurabile erit.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Si quatuor lineæ sint proportionales, & fundamentum relationis, seu antecedens in prima combinatione superet consequentem, & terminum quoad potentiam quadrato, cuius latus sit fundamento illo commensurabile: Alterum quoque proportionis fundamentum in secunda combinatione eodem excessu superabit suum terminum: At si excessus primæ combinationis fuerit lateris incommensurabilis, talis quoque erit excessus in altera combinatione fundamenti respectis sui termini.

Sit BA ad BC, vt DE ad DG. Dico, quod si quadratum BA superet quadratum BC, & excessus, seu gnomon niger sit tale spatium, quod in quadratum redactum latus eius fundamento lineæque maiori BA sit commensurabile; taleque quoq; erit latus quadrati æquantis gnomonem nigrum, in quadrato DE. Quòd illud quadratũ si gnomoni nigro in AB quadrato æquale, habeat latus incommensurabile ipsi BA, tale quoque erit latus quadrati æquantis gnomonem nigrum in quadrato DE.

Probatur, vt est BA ad BC, ita DE ad DG. Ergo ex 26. lib. 6. vt est quadratum ex BA ad quadratum ex BC, ita assimilatur in proportione ob similitudinem figurarum, (quia omnia sunt quadrata,) quadratum ex DE ad quadratum ex DG. Ergo conuertendo erit etiam totum quadratũ ex BA ad aliam compartem, nempe gnomonẽ nigrum, & excessum suum HA, sic quadratum ex DE ad aliam compartem, & excessum suum gnomonem nigrum FI; Ergo, & ad quadrata gnomonibus æqualia, eritque quadratum ex BA ad duadratum nigrum BL æquale gnomoni nigro AH, vt quadratum ex DE ad quadratum nigrum DM æquale gnomoni nigro FI, ideoque erit quoque latus BA ad latus BL illius quadrati nigri, vt latus DE ad latus DM huius quadrati nigri ex 26. lib. 6. si ergo BA, & LB sint lineæ commensurabiles, tales quoque erunt DE, & DM; quod si fuerint incommensurabiles longitudine BA, & BL tales quoque erunt DE, & DM longitudine incommensurabiles ex propos. 5. huius.



EXPENSIO V.

De Binomijs.

Agitur de compositione linearum potentiâ tantùm commensurabilium in vnam lineam coalescentium, ex quarum compositione resultat linea tota, quæ Binomium appellatur, vel ex Binis nominibus: eo quia resultet à compositione duarum linearum potentiâ commensurabilium: Est quæ primum genus linearum irrationalium. In quatuor enim genera secedunt irrationales lineæ. Aliæ enim exoriuntur ex cõpositione, vt prędicę. Allæ à subtractione, vt Apotome, duarum linearum potentiâ tantùm commensurabilium. Aliæ Irrationales procedunt à proportionali interpositione mediæ alicuius proportionalis inter duas commensurabiles potentiâ tantùm. Et vocantur Mediæ; Aliæ tandem ex diuisione lineę in partes irrationales, & ab irrationalibus simpliciter exoriuntur, quæ postrema duo genera, & per subductionem alias producunt pariter irrationales. Agemus autem primo de Binomijs, vtpote de facilioribus.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

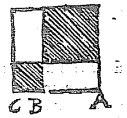
Si duæ rationales potentiâ tantùm inuicem commensurabiles componantur, tota irrationalis erit, vocetur autem ex Binis Nominibus.

Componantur duæ rationales AB, & BC potentiâ tantùm inuicem commensurabiles ex

propos.

propoſ. 12. huius inuentæ. Dico *totam* AC *irrationalem eſſe*.

Probatur. Quoniam enim ex propoſ.1. lib.6. rectangulum ſub AB, & BC; quale eſt album ad quadratum BC nigrum ſe habet, veluti reſpicit baſis AB baſim BC: Quoniam ea rectangula ſunt eiuſdem altitudinis: ſequitur, quòd ſint incommenſurabilia, qualiter ſunt ipſæ baſes. Addatur rectangulo eius duplum, quòd certè ei commenſuratur, & fient duo rectangula æqualia alba. Addatur quoque quadrato nigro aliud nigrum ex AB, eruntque quadrata inuicem commenſurabilia; quòd lineæ AB, & B C ex hypotheſi ſint inuicem potentiâ commenſurabiles. Nam factâ hac compoſitione ex propoſ. 10. duo rectangula à duobus quadratis incommenſurabilitate diſſidebunt; quia magnitudinibus, quæ priùs erant incommenſurabiles, vt rectangulo albo, & quadrato nigro commenſurabiles; quælibet ſuę magnitudines addidimus, quadrato quidem nigro quadratum aliud nigrum ſibi cõmenſurabile, rectangulo verò aliud rectangulum ſibi æquale. Sed componantur ſimùl hæc duo rectangula, quæ incommenſurabilia ſunt quadratis, & ipſa duo quadrata; ex propoſ.10. tota magnitudo CE incommenſurabilis erit, cum alterâ magnitudine partium incommenſurabilium; & ideo rectangula alba, cum duobus quadratis nigris ſimul erunt incommenſurabilia ipſis met quadratis nigris ſeorſim ſumptis.



Verùm duo rectangula prædicta cùm duobus quadratis nigris ex propoſ.6. lib.2. ſunt æqualia quadrato ex tota AC, tanquam vna linea. Hoc itaque quadratum maximum ex tota AC erit incõmenſurabile duobus quadratis altero ex AB, altero ex BC: cum ergo quadratum ex tota AC ex duabus AB, & BC coalitâ ſit irrationale quadratis ipſarum componentium AB, & BC; etiam ipſa tota AC erit irrationalis ex propoſ. 9. huius, ipſis partibus componentibus AB, & BC. Cuius nomen erit Binomium, quia ex duabus integratur.

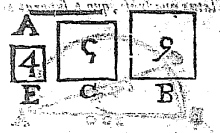
Quod præcedenti propoſ. explicauimus Binomium, eſt genus quoddam, quod ſex differentias Binomiorum ſub ſe complectitur. Illæ verò exoriuntur à comparatione duarum, ex quibus componuntur potentiâ tantùm ſibi inuicem commenſurabilium comparatarum lineæ Rationali, reſpectu, cuius dicuntur rationales, ſeu longitudine, ſeu potentiâ; & quia in ſuperioribus vidimus duas differentias linearum commenſurabilium potentiâ tantùm, primam propoſ. 13. nempe, cùm maior excedit minorem in quadrato ſui conſtituendo ſpatio tali, quòd ſi in quadratum rediga tur, latus eius ſit longitudine maiori commenſurabile; inde eſt, quòd, ſi hoc primum genus lineæ Rationali comparetur, & maior illi Rationali ſit longitudine commenſurabilis hinc prima differentia conſtituatur; Quod ſi minor ſit Rationali commenſurabilis iam ſecundam differentiam obtineamus. Quod ſi, nec maior, nec minor, ſed ſicut ſunt incommenſurabiles inuicem, ita quoque ſint Rationali, & tertia differẽtia habetur.

Secundum verò genus linearum ſibi inuicem incommenſurabilium eſt; quando vna alteram excedit tali ſpatio quadrato, quod habeat latus eidem maiori incommenſurabile ex propoſ. 14. & eodem ordine dat tria alia Binomia. Nam vel maior linea, ſeu Nomen eſt commenſurabile datæ Rationali, & ecce. Quartũ, vel minor ei commenſuratur, & ecce Quintum; vel neutra incommenſurabilium, ei commenſuratur, & ecce. Sextum. Docebimus itaque modum in ſequentibus reperiendi hæc omnia Binomia, ob quæ neceſſarium eſt priùs refricare memoriam eorum, quæ diximus lib. 9. Expenſ. vltima.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Inuenire ex Binis Nominibus primam.

OPortet primò reperire duas lineas longitudine commenſurabiles A, & B ex Corollario propoſ.11. huius, quarum prima A ſtatuatur pro Rationali. Alteri verò B inueniatur altera C longitudine ſolùm incommenſurabilis, & gaudeat conditionibus, quas aſſignauimus propoſ. 13. huius, nempe repertis duobus numeris quadratis 4 & 9.



quorum exceſſus 5. non ſit quadratus. Maioris B quadratum obtineat ad minoris C quadratum eam proportionem, quam maior quadratus numerus 9. ad exceſſũ 5. non quadratũ. Nã ſi duę iſtæ potentiâ tantùm commenſurabiles componantur, linea tota ex illis duabus coaleſcens, erit primum Binomium.

Probatur. Nam potitur duabus conditionibus ad primum Binomium requiſitis. Prima eſt, quòd rationali A ſit maius nomen B commenſurabile, vt ex conſtructione conſtat.

Secunda eſt, quòd eſt de genere illarum linearum potentiâ tantùm commenſurabilium, quarum quadratum, quod poteſt efficere, maior B excedit minoris C quadratum exceſſu quodam quadrato; quòd habet latus commenſurabile ipſi maiori, cùm eius B quadratum, quod eſt, vt numerus 9. ſit ad quadratum minoris C, vt numerus 5. ex propoſ. 11. huius, & ideo exceſſus E ſit vt 4. numerus quadratus ad ipſum 9. numerum quadratum. Vnde latus illius exceſſus, in quadratum redacti ad quadratum ipſius B maioris erit commenſurabile ex propoſ. 4. huius. Si ergo B, & C componantur ex 16. efficient Binomium, quod ex dictis requiſitis erit primum.

PROBL. II. PROPOS. XVIII.

Inuenire ex Binis Nominibus ſecundam.

SIt Schema præcedens. Et ſumantur, vt priùs duæ commenſurabiles A, C, & A ſtatuatur pro Rationali; huic verò C inueniatur potentiâ tantũ commenſurabilis B eadem arte, ac modo, quo propoſ. 13. huius; ſed cum hac differentiâ ab anteced. quod vt exceſſus numeri 5. non quadratus, ad quadratum numerum maiorẽ 9. ſic quadratum ex C minori, & commenſurabili linea ipſi Rationali ad quadratum ex B maiori erectum. *Latera enim horum quadratorum in vnam lineam compoſita exhibebunt Binomium ſecundum.*

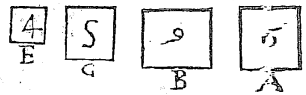
Probatur. Nam minus nomen, nempe latus minoris quadrati C eſt ex conſtructione commenſurabile Rationali datæ A, eſt autem minus latere B, quod ſit quadratum ex C ad quadratum ex A, vt exceſſus non quadratus, & reliquus 5. ad numerum excedentem, & totum 9. & ideo ad maiorem. Quare, & latus C, vtpote quadrati minoris erit minus latere B.

Secundam verò conditionem ex effectione propoſ. 13. adipiſcitur, cùm non obtineant proportionẽ earũ quadrata, vt numerus quadratus ad numerũ quadratũ. Et quadratũ maius B ſuperet C quadrato E ſibi B in latere commenſurabili, vt propoſ. 13. oſtenſum eſt; Vnde ſi componantur B, & C ex 16. efficient Binomium, quòd erit ex dictis ſecundum.

PROBL. III. PROPOS. XIX.

Inuenire tertium Binomium.

PRæcept. 1. Inuentis duobus numeris quadratis 4 & 9. eâ conditione, qua propoſ. 13. vt exceſſus 5. non ſit quadratus; Sumatur ex prop. 18. l. 9. numerus alius, qui ad neutrũ eorum 5. & 9. proportionem dicat, quam quadratus numerus ad quadratum numerum, qui ſit 6. Deinde vt eſt numerus non quadratus 6. ad quadratum 9. ſic quadratum Rationalis A ad quadratum, cuius latus B; nec ſit quadratum Rationalis A proportionatus ad quadratum ex B, vt quadratus numerus ad numerum quadratum. Ideoque licet quadrata ſint rationalia, quia ſunt, vt numerus ad numerum; ipſa tamen latera A, & B potentiâ tantùm erunt commenſurabilia, non longitudine ex propoſ. 4. huius.



Præcept. 2. Deinde fiat iuxta propoſ.13. huius vt quadratus numerus 9. ad ſuum exceſſum 5. non quadratum: ita quadratum eiuſdem rationis, cuius latus B, ad aliud quadratum ex propoſ. 11. huius, & ſit huius quadrati latus C. Dico, *quod ſi* C *&* B *componantur erit Binomium tertium.*

Prob. Progr. 1. Quoniam primam conditionẽ genericam conſequitur ex conſtructione. Quia quadratum B ſuperat quadratum C quadrato quodam E, cuius latus eſt maiori B commenſurabile, quia eſt vt 9. ad 5. cuius reſiduum vſque ad 9. eſt 4. numerus quadratus, & ideo etiam quadratum C habet reſiduum, cum quo æquat quadratum B, vt numerus quadratus 4 & 5. numerum quadratum 9. ex propoſ. 13. Vnde ex propoſ.4. latus exceſſus E erit commenſurabile lateri B.

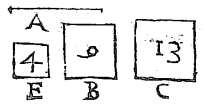
Progreſſ. 2. Habet quoque conditionem ſpecificam nempe, quod ambæ B, & C ſint incommenſurabiles Rationali A: Et B quidem ex Præcept. 1. id conſequitur. De linea verò C oſtenditur; Quadratum ex A eſt ad quadratum ex B, vt 6. ad 9. ex effectione, nempe non dicit proportionem eam, quam quadratus numerus ad quadratum numerum: At quadratum ex B dicit proportionem ad quadratum ex C, quam 9. ad 5. ſ. non eam quam quadrati numeri ad numerum quadratum. Ergo ex æquo erit vt 6. ad 5. ita quadratum ex A ad quadratum ex C, & ideo non erit illa, quam quadrati numeri ad quadratum numerum. Vnde nec lineę A, & C inuicem commenſurabilitatem conſequuntur. Cum ergo B, & C ad Rationalem A ſint incommenſurabiles, maiorque B ſuperet minorem C quadrato E, ſibi maiori commenſurabilis lateris, facient, ſi componantur Binomium quod ex 16. propoſ. huius, & ex alijs conditionibus erit tertium.

PROBL. IV. PROP. XX.

Inuenire ex Binis Nominibus quartam.

VSque adhuc vſi ſumus pro fundamento Binomiorum propoſ.13. huius: nunc vtendum eſt propoſ. 14. Iuxtaque ipſius documenta duo numeri quadrati aſſumendi ſunt, ita quòd compoſitus ex ipſis non ſit quadratus, vt 4. & 9. cuius compoſitum eſt 13. non quadratus; ideoque nec proportionem dicit, quam quadratus ad numerum quadratum ex prop.16. lib.9. Deinde reperiatur A Rationalis, & C ei commenſurabilis. Fiatque vt compoſitus non quadratus 13. ad quadratum alterum ex componentibus, puta 9. ex propoſ.11. huius; ita quadratum commenſurabilis C ad quadratum alterius B componaturque B, & C, *& erit Binomium quartum.*

Probatur. Nam B, & C ſunt commenſurabiles ſolùm potentiâ, cùm eorum quadrata ſe habeant, vt numerus ad numerum.



Sibi verò vindicant conditionem genericam Binomiorum. Quoniam maius Nomen C, vtpote latus maioris quadrati ſuo quadrato ſuperat quadratum minoris lateris B quadrato quodam ſibi longitudine incommenſurabili, vt oſtenditur citata propoſ. 14.

Obtinent quoque requiſitum ſpecificum: Etenim C maius nomen acceptum eſt ex effectione commenſurabile Rationali A. Cum ergo C ſit cõmenſurabilis rationali A & potentiâ tantùm commenſurabilis reſpectu B, quam ſuperat ſuo quadrato, exceſſu tali quadrato E, cuius latus ſibi eſt longitudine incommenſurabile, ſed ſolùm potentiâ: Si hæ duæ lineæ B, & C coniungantur, efficient ex propoſ. 16. Binomium, & hoc ex requiſitis prælegatis erit quartum.

PROBL. V. PROPOS. XXI.

Inuenire ex Binis Nominibus quintam.

ADhibeatur idem Schema, & repertis duobus numeris, vt priùs, eadem fiat conſtructio numerica, vt in antecedenti, vel 14. prop.h. Deinde accepta quadam Rationali A ipſi commenſurabilis inueniatur B; fiatque deinde, vt numerus quadratus V. g. 9. ad compoſitum ex duobus quadratis non quadratum 13. ſic ex propoſ. 11. huius quadratum ex B, quod erit minus ad quadratum alterum, cuius latus C, quod erit maius, vt numerus quadratus eſt minor compoſitorum quadrato, & B, & C *latera in vnam lineam conflata facient Binomium quintum.*

Pro-

Probatur. Quoniam obtinent conditionem generícam Binomij: quia eadem conſtructio facta eſt, quæ propoſ. 14. & ideo B ſuperat C quadrato quodam E, cuius latus ſibi maiori B eſt longitudine incommenſurabile: Lineæ quoque B, & C ſunt potentia tantùm commẽſurabiles; eò quòd earum quadrata ſint, vt numerus ad numerum, hoc eſt, vt 9. ad 13.

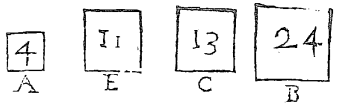
Et tandem obtineat conditionem ſpecificam: nã, & Minus Nomen B eſt ipſi Rationali A ex conſtructione commenſurabile, ideoque B, & C compoſitæ facient Binomium, ex 16. h. & hoc quintum erit.

PROBL. VI. PROPOS. XXII.

Inuenire ſextam ex Binis Nominibus.

REperiendi ſunt duo numeri non quadrati ex propoſ. 16. lib. 9. V.g. 11. & 13. qui compoſiti faciant numerum non quadratum 24. Idcircoque, nec cum eo, quod componunt, nec inuicem dicant proportionem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum.

Aſſumaturque quilibet numerus, qui ad neutrum ipſorum proportionem habeat, quam quadratus numerus, ad quadratum numerum, vt eſt quilibet quadratus. V.g. 4. Sumatur deinde Rationalis A, & vt 4. ad 24 ſic fiat quadratum ex A ad quadratum ex alia aliqua V. g. B ex propoſ. 11, huius: eruntque B, & A tantùm potentiá commẽſurabiles. Deinde fiat, vt 24. ad 13. ita quadratum ex B ad quadratum ex alia C: eruntq; latera longitudine incommenſurabilia B, & C; quia eorum quadrata ſe habeant, vt numerus ad numerum.



Ita quoque ſe habent incommenſurabiliter cum Rationali A: & quidem B, vt diximus: Linea verò C ex hac ratione. Nam vt 4. ad 24. ſic A, quadratum Rationalis ad quadratum B, & vt 24. ad 13. ita quadratum B ad quadratum C. Ergo ex æquo, vt 4. ad 13. ita quadratum A ad quadratum C, nimirum, vt numerus ad numerum, & ideo linea Rationalis A, & C erunt inuicem incommenſurabiles, & hæc eſt conditio ſpecifica harum linearum B, & C ad Binomium requiſita. Obtinent quoque conditionem generícam. Nam quadratum ex B quadratum ex C ſuperat quadrato quodam E, quod eſt, vt 11. ad 24. tanquam numerus ad numerum, ideoque ſibi maiori B longitudine incommenſurabile. Quare ſi B, & C componantur ex propoſ. 16. facient Binomium, quod ex prædictis conditionibus erit ſextum.

EXPENSIO VI.

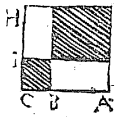
De lineis Apotomis.

COmpoſuimus vſque adhuc lineas irrationales addendo inuicem duas rationales potentiâ tantũ commenſurabiles, nunc verò auferendo vnam ab aliâ generabũtur irrationales eodem ordine, ac in præced. Expenſione.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Si à rationali rationalis auferatur potentiâ tantum commenſurabilis exiſtens toti; reliqua irrationalis erit, vocatur autem Apotome.

DEtrahatur à Rationali AC Rationalis BC, quæ ipſi AC toti potentiâ tantùm ſit commenſurabilis. Dico *reliquam* AB *eſſe irrationalem reſpectu lineæ* AC, *&* BC.



Probatur ferè eodem argumento, quo propoſ. 16. Rectangulum AI ſub AC, & BC cõtentum, cùm AC, & CB ponantur longitudine incommenſurabiles ex I. 1. 6. erit incommenſurabile quadrato nigro, EX BC conſtituto; etenim cum ſint eiuſdem altitudinis, ſunt inuicem, vt baſes.

Progreſſ. 2. Addatur rectangulo eiuſdem AI ſeminigro duplum, & ſint duo rectangula ſeminigra AI, & BH æqualia, & ideo inuicem ſibi commenſurabilia pro vna parte. Pro alia verò addatur quadrato nigro ex BC aliud quadratum AH ex tota AC, quod ei vtique eſt commenſurabile, cum lineæ ipſæ ponantur commenſurabiles potentiâ. Factaque hac additione ex propoſ. 8. huius manebunt duo rectangula ſeminigra ſumpta, vt vna quantitas, & duo quadrata nigrum ex CB, & AC ex tota pariter vt vnum quid ſumpta inuicem incommenſurabilia, vt erant priùs.

Progreſſ. 3. Addatur rurſus rectangulis quadratum nigrum ex AB: Efficiemuſque magnitudinem ex totâ AC, & ex quadrato nigro BC, ex 9. l. 2. quare magnitudo tota ex rectangulis ſeminigris duobus, & quadrato nigro BA erit tunc commenſurabilis, vtpote illi æqualis, quantitati ex duobus quadratis nempe ex tota AC, & parte BC conſtitutis, & ideo cum illa ex progr. 2. ſit rectangulis incommenſurabilis etiam hæc incommenſurabilis parti componenti, nempe rectangulis ijſdem duobus ſeminigris erit. Cum itaque tota magnitudo ex rectangulis compoſita, & quadrato AB nigro ſit incommenſurabilis vni parti componenti: nempe rectangulis duobus ſeminigris; erit etiam incommenſurabilis alteri ex Coroll. propoſ. 10. huius, ſcilicet quadrato ex AB. Et ideo etiam quadratum ex tota AC, & quadratum ex parte BC æqualia rectangulis, & quadrato alteri ex AB, erunt eidem nigro ex BA incommenſurabilia, & inſuper cum quadrata AC, & ex parte BC ex hypotheſi ſint inuicem commenſurabilia, quòd lineæ AC, & BC ſint potentia commenſurabiles, & ideo etiam toti ex propoſ. 9. huius, erit etiam vnumquodque eorum eidem quadrato, ex BA incommenſurabile ex prop. 8. h.

Igitur

Igitur, cùm quadrata ex BC, & AC ſint incommenſurabilia, quadrato ex AB; Lineæ ipſæ, & latera erunt irrationalia ex propoſ. 4. huius. Vnde ablata BC ex AC relinquet reſiduum AB incommenſurabile, & toti AC, & ablato BC, & ideo dicetur Apotome.

Sex ſpecies Apotomarum, quæ exoriuntur à lineis potentiâ tantùm commenſurabilibus, vt Binomiorum, reperiuntur.

Nam, vel maior plùs poteſt, quàm minor linearum potentiâ tantùm commenſurabilium, & differentia potentialis eſt quadratum, cuius latus maiori eſt commenſurabile, & hoc genus parit tres ſpecies Apotomum, prout comparantur cum aliâ quadam Rationali. Nam ſi maior ſit Rationali commenſurabilis eſt prima Apotome, ſi minor exoritur ſecunda Apotome, ſi nec vna, nec altera oritur tertia Apotome dummodo minor harum linearum ad Rationalem comparatarum auferatur à maiore, vt Reliqua Apotome ſit.

Secundum genus linearum potentiâ tantùm commenſurabilium explicatum propoſ. 14. ex illud, quarum vna poteſt magis, quàm alia, & differentia eſt quadratum quoddam, cuius latus eſt maiori incommenſurabile, & hoc genus parit tres ſpecies Apotomum eodem ordine. Nam vel maior eſt commenſurabilis expoſitæ Rationali, & obtinemus quartam ſpeciem, vel minor, & conſequimur quintam, vel nulla Rationali commenſuratur, & ſextam Apotome habebimus.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Apotomum ſex ſpecies reperiuntur.

REperiuntur eodem modo, ac Binomia, ſolumque in hoc differenti; quòd repertis lineis duabus nempe maiori, & minori Nomine; deinde, vt Binomium efficiatur, coniunguntur ſimul. Hic verò minor linea, quæ dicitur Congruens, ſubducitur à maiori, quæ dicitur Tota, & quod reſtat, vocatur Apotome, ſeu Reliquum. Ita primum Binomium paritur per coniunctionem duarum linearum ex propoſ. 17. quarum minor, ſi ſubducatur à maiori efficitur Apotome prima, & ſi duæ lineæ repertæ propoſ. 18. coniunctæ factunt Binomium ſecundum, ſi minor earum ſubducatur à maiori faciet Apotomem ſecundam. Sic dicas de aliis: Vnde ſingulas propoſitiones non replicabimus; ſed propoſ. 19. dabit Apotomem tertiam, propoſ. 20. Apotomem quartam. prop. 22. Apotomem quintam. Tandem propoſ. 21. Apotomem ſextam docebit inuenire.

EXPENSIO VII.

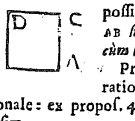
De Irrationalibus Mediis.

HIc agimus de lineis Irrationalibus, quæ reſultant per relationem ad alias, & proportionem, & in duplici genere ſunt. Vel enim ad lineas, quæ potentiâ tantùm ſunt inuicem commenſurabiles referuntur, & vocantur mediæ, eò quòd ſint medium proportionale inter duas potentiâ tantùm commenſurabiles. Vel non ſunt mediæ inter duas incommenſurabiles, ſed naſcuntur per æquipotentiam ad ſpatia irrationalia; & hoc ſecundum eſt genus, quod ſub ſe habet ſpecies de quibus infra. Porrò Mediæ in duplicem ſpeciem ſecernuntur, Aliæ enim ſunt; quarum duæ ſumptę faciunt rectangulum ſub ipſis contentum Rationale, licet ſingularũ quadrata ſint irrationalia Quadrato Expoſitæ Rationalis, quas explicamus 29. & aliæ quarum rectangulum eſt irrationale, quas docemus inuenire propoſ. 30.

THEOR. I. PROPOS. XXV.

Recta linea potens quadratum irrationale, irrationalis eſt.

POſſit recta AB quadratum ABCD, ſcilicet ex ea fiat, vel factum ſupponatur, & hoc ſit irrationale ſcilicet comparatum, cum quadrato alicuius lineæ FE, ſit irrationale, nulláque communi menſurá dimetiri poſſit. *Dico, quod etiam linea* AB *ſit irrationalis comparata cùm linea* FE.

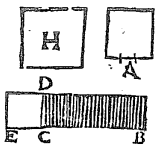


Probatur. Nam ſi dicitur rationalis eius quadratum erit rationale: ex propoſ. 4. huius, quòd eſt contra Theſim.

THEOR. II. PROP. XXVI.

Quod ſub rationalibus potentiâ ſolùm commenſurabilibus rectis lineis continetur rectangulum irrationale eſt, & recta linea ipſum potens; nempe potens efficere quadratum illi æquale, irrationalis. Vocatur autem Media.

SIt data rationalis A, cui adſint duæ aliæ potentia tantùm commenſurabiles BC, & CD, ex quibus rectãgulum nigrum componatur. Dico, *quod hoc rectangulum eſt irrationale comparatum cum quadrato lineæ* A. Inſuper, & aſſero, quòd, ſi fiat quadratum H æquale dicto rectangulo, *linea recta latus huius quadrati erit irrationalis reſpectu lineæ* A, & quòd vocanda ſit *Media*.



Probatur prima pars. Nam deſcripto quadrato ex altera illarum, & ex DC, quod erit rationale, & quadrato lineæ A commenſurabile; cum lineę datę BC, & CD ſint ei potentiá commenſurabiles; ideſt earum quadrata ſint commenſurabilia, eritque inſuper eiuſdem altitudinis ob latus idem CD, quare ex 1. lib. 6. erunt in eadem proportione ita latera, vt quadrata, & eodem modo referentur latus CB lateri EG, vel æquali DC, vt rectangulum nigrum ad quadratum album; ſed hæ lineę, lateraque ſunt incommenſurabilia. Idcircò etiam incommenſurabilia erunt rectangula album, & nigrum ex propoſ. 5 huius. Sed quadratum DE album eſt commenſurabile quadrato ex Rationali A conſtructo; Ergo rectangulum nigrum erit eidem quadrato Rationalis incommenſurabile ex propoſ. 7. huius.

Probatur secunda pars. Nam cum rectangulum nigrum fuerit ostensum irrationale, etiam quadratum H; quod ei supponitur æquale, erit irrationale comparatū quadrato Rationalis A, & ideo latus eius ex anteced. propos. erit irrationale.

Probatur tandem latus huius quadrati H sit vocandum Linea Media. Nam ex propos. 19. lib. 6. illa linea media proportinalis est inter alias duas, cuius quadratum est æquale rectangulo ab illis duabus constituto. Quare cum quadratum H sit æquale rectangulo nigro lineis BC, & CD constituto, erit latus eius media proportionalis, inter huius rectanguli latera BC, & CD.

COROLLARIVM I.

HInc videre est spatium medio spatio commensurabile medium esse, idest irrationale. Nam postquam demonstratum est spatium DB incommensurabile esse spatio DE; ostensum quoque est medium esse, cum ipsum potens sit media fillicet latus quadrati H.

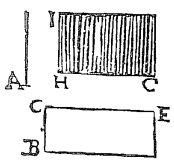
COROLLARIVM II.

HInc quoque educes omnia spatia sub irrationalibus duabus, seu longitudine, seu potentiá contenta esse vni earum quadrato incommensurabilla, & irrationalia, quod, ita sint quadratum DE ad rectangulum DB, vt ipsæ lineæ EC ad CB; sed ipsæ ponuntur irrationales. Quare etiam rectangulum nigrum albo quadrato erit irrationale.

THEOR. III. PROP. XXVII.

Si ex Rationali fiat rectangulum æquale quadrato Mediæ; alterum latus erit ei Rationali potentiá tantùm commensurabile.

SIt data Media A, & Rationalis BC, siue longitudine, siue tantùm potentiá, ex qua tanquàm ex vno latere, vel per propos. 43. lib. 1. vel reperiendo extremam BC, & A lineis proportionalem CE. Nam rectangulum ex 9. lib. 6. ex extremis CE, & CB constitutum erit æquale quadrato mediæ A. Dico, *quod hæc tertia proportionalis* CE *est Rationalis potentia tantum Rationali* BC *commensurabilis*.



* Probatur. Nam quadratum ex Media est æquale rectangulo sub duabus rectis lineis potentiá tantùm commensurabilibus comprehenso, vt ex propos. ant. Sit ergo illud GI habens lateri CB, latus HI potentiá tantùm cõmensurabile. Modo sic arguo. Rectangula BE, & GI sunt æqualia, vtpote vni tertio æqualia; nimirum quadrato ex media A. Ergo habebunt latera ex propos. 10. l. 6. reciprocè proportionalia. Quare eandem proportionẽ dicet HI ad CB, quã CE ad GH: Sed HI, & GB sunt potentiá tantùm commensurabiles: Ergo etiam GH, & CE ex 5. h. Sed HI cõmensuratur ipsi HG ex Thesi. Ergo ex 6. h. inuicem IH, & CE: sed CB cõmensuratur eodẽ modo HI, & CE quoq; Ergo, & inter se.

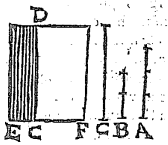
THEOR. VI. PROP. XXVIII.

Mediæ commensurabilis media est.

SIt recta A mediæ B commensurabilis, Dico, & B mediam esse, idest incommensurabilem.

Detur itaque Rationalis, respectu cuius B media est, & sit C. Appliceturq; ei C, vel quod idem est, fiat ex eá, tanquám ex vno latere rectangulum nigrum ED, quod sit æquale quadrato mediæ per propos. 43. lib. 1. Et ex præced. EC erit Rationalis potentiá tantùm commensurabilis. Deinde ex Rationali C, tanquam ex vno latere ex eadem propos. 43. lib. 1. fiat rectangulum æquale quadrato datæ A. Cum ergo media B, & A recta data ponantur commensurabiles, earum quadrata erunt commensurabilia ex propos. 4. huius; quamobrem rectangula quoque quadratis æqualia erunt commensurabilia, quibus suppositis.

Probatur. Rectangula DE, & DF ob eandem Rationalem DC, quæ vtriusque latus contexit, sunt eiusdem altitudinis: Ergo ex propos. 1. lib. 6. se habebunt inuicem, vt Bases EC, & CF; cum ergo Rectangula album, & nigrum sint cõmensurabilia ex hypothesi; bases quoque erunt inuicem cõmensurabiles EC, & CF. Sed



EC Rationali DC est incommensurabilis longitudine; sed solum potentiá, vt dictum est ex præc. propos. Ergo etiam talis erit CF ex propos. 8. h. Sunt ergo hæc duo rectangula nigrum, & album contenta sub incommensurabilibus longitudine, quia EC est incommensurabilis ipsi C, & eidem quoque CF ostensa est incommensurabilis. Quare & rectæ lineæ, quę quadrata æqualia istis rectãgulis efficere possunt, ex propos. 25. huius. Sed talis est A, Quoniam fecimus rectangulum album, illius quadrato æquale: Ergo erit Media.

COROLLARIVM

HInc educitur spatium quoque medio spatio commensurabile medium. Quia rectangula nigrum, & album ponuntur commensurabilia, & tamen probantur media, dum ostenditur contineri sub lineis potentia tantum commensurabilibus. Vnde ex propos. 25. erit spatium irrationale, & linea ipsum potens media B, & consequenter appellabitur spatium medium ab ipsa linea, quæ ipsum potest accipiendo denominationem.

PROBL. I. PROP. XXIX.

Medias inuenire potentiá tantùm commensurabiles, quæ rationale contineant.

SInt duæ potentiá tantùm commensurabiles ex proposition. 12. huius A, & B, inter quas media proportionalis sumatur C, ex propos. 16. lib. 6. & ex propos. 15. lib. 6. reperiatur huic quarta proportionalis D; ita quod ita sit in proportione A ad B, vt C ad D. Dico C, & D *esse medias potentia tantùm commensurabiles*. Secundò, *quòd si fiat ex eis rectangulum, illud erit rationale.*

Probatur prima pars. Nam A, & B potentiá tantùm

tantùm sunt commensurabiles. Ergo, cùm eandem proportionem dicant A ad B, vt C ad D, erunt etiam C, & D inuicem commensurabiles ex prop. 5. huius solùm potentia.

Probatur secunda pars: Nam fundamentum proportionis A est ad suum terminum B, ex constructione. vt fundamentum C ad terminum D. Ergo *permutando* referetur fundamentum A ad fundamentum C, vt terminus B ad terminum D.



Sed ex constructione, cùm C sit media proportionalis, ita est A ad C, vt C ad B. Ergo etiam erit, vt C fundamentũ ad B terminũ, ita B ad terminum D, quòd sit eadem proportio C ad B, quæ A ad C, & quæ A ad C eadem, talis sit B ad D ex ostensione superiori Et ideo etiam B erit media proportionalis inter C, & D; Propterea que eius quadratum erit æquale rectangulo ex C, & D ex 19. propos. lib. 6. Est autem quadratum ex linea B constructum Rationale cùm B sit Rationalis potentiá tantum commensurabilis: Ergo, & rectangulum, ex rectis C, & D tanquam lateribus compactum erit Rationale.

COROLLARIVM.

SI A, & B sint lineæ tales potentiá commensurabiles; ita quòd quadratum maioris superet quedratum minoris spatio quodam, quod in quadratum redactum habeat latus commensurabile ipsi maiori, vt docemus propos. 13 Etiam mediæ adiumento earum repertæ simili conditione gaudebunt, & C maior poterit plùs, quam D minor quadrato lineæ rectæ maiori commensurabilis. Nam ita est A ad B, vt C ad D; potest verò A plusquam B quadrato rectæ sibi longitudine commensurabilis. Ergo etiam C plus, quam D eodem genere quadrati poterit, vt ex propos. 15. huius Reperientur autem duæ cum hac conditione ex prop. 13. huius.

PROBL. II. PROPOS. XXX.

Medias inuenire potentiá tantùm commensurabiles, quæ spatium irrationale contineant.

SInt tres Rationales potentia tantum commensurabiles A, B, C, & inter A, & B media D proportionalis inueniatur ex propos. 16. lib. 6. Deinde reperiatur ipsi D quarta proportionalis E ex propos. 15 sexti; ita quòd, sicut B refertur ad C lineam, tali quoque proportione D referatur ad lineam E. Dico D, & E *esse medias proportionales potentia tantùm commensurabiles*. Secundo Dico, *quòd spatium irrationale contineant, quòd appellatur medium*.

Probatur A, & B sunt lineæ ex hypothesi potentiá tantùm commensurabiles. Ergo rectangulum factum ex ipsis ex propos. 26. huius erit medium. Sed D est inter easdem A, & B media proportionalis: Ergo ex propos. 19. lib. 6. eius quadratum rectangulo ex lineis A, & B facto erit æquale, & etiam quadratum ex D erit medium, & irrationale, & D media. Quippe quod rectangulo irrationali sit æquale.

Sed B refertur ad C, vt D ad E. Illæque B, & C sunt potentiá tantùm commensurabiles; Quamobrem, & B ipsi D erit potentiá tantùm commensurabilis ex propos. 5 huius. Propterea erit quoque E media ex propos. 28. huius. Ergo D, & E mediæ sunt potentiá tantum commensurabiles.

Probatur quoque 2. pars. Nempe quòd, si ex E, D lineis fiat rectangulũ, illud sit mediũ.



Fundamentum B refertur ad terminum C, vt fundamentum D refertur ad terminum E, ex constructione. Vnde *permutando*, ita erit fundamentum B ad fundamentum D, vt terminus C ad terminum E. Sed D est media proportionalis inter A, & B. Qua ex rè, vt est A ad D, sic erit D ad B in proportione. & *inuertendo* eá proportione respiciet B ipsum D sicut D ipsum A. Cum itaque sit B ad D, vt D ad A: Ergo etiam referetur terminus C ad terminum E, vt D refertur ad A: quia est ipsorum D, & A proportio eadem, quæ fundamenti B ad fundamentum D, & ideo eadem, quæ termini C ad terminum E.

Cum ergo istæ quatuor lineæ sint proportionales, & D sit ad A, vt C ad E; rectangulum ex propos. 18. l. 6. quod continetur sub extremis D, & E erit æquale rectangulo à medijs contento A, & C: sed rectangulum hoc ex lineis C, & A est medium ex propos. 26 huius. Ergo etiam rectangulum factum ex lineis E, & D ei æquale.

COROLLARIVM.

HInc nascitur, quod si maior B plus possit quã C quadrato habente latus commensurabile ipsi maiori B: quod etiam sic se habebit D ad E, & suo quadrato superabit quadratum ipsius E quadrato tali, quod habebit latus sibi commensurabile Ratioque est eadem, quæ præced. Coroll. quia ponitur, sic esse B ad C, vt D ad E in proportione. Potest verò B plus, quam C quadrato rectæ lineæ sibi maiori incommensurabili: ergo etiam D plus poterit, quam E eodem genere quadrati, ex 15. huius: Porrò reperientur duæ B, & C cum ea conditione ex propos. 14. huius.

EXPENSIO VIII.

De irrationalibus, quæ nascuntur à medijs.

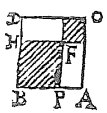
MEdiæ licet respectu Rationalis irrationales sint, inuicem tamen commensurabiles sunt, ex propos. 28. huius. Idcirco penes diuersos respectus & relationes possunt dici, & rationales, & irrationales; irrationales quidem respectu Rationalis expositæ, at rationales inuicem: De istis verò duo genera assignauimus: Primum propos. 29. quæ rationale spatium continent: Secundum propos. 30. quæ medium spatium amplectuntur. Nunc ex isto duplici genere mediarum; Quatuor species oriuntur irrationalium linearum; duæ per compositionem, duæ per subtractionem, vt supra ex rationalibus potentia tantùm Binomia, & Apotomes nascebantur. Si ergo potentiá commensurabilis mediæ, ei addatur; quæ ambæ rationale spatium contineant, vocabitur ex Binis Medijs prima, seu primum Binomium Medium. Si verò vna subducatur ab aliá, vocabitur media

Apotome prima. Si verò duæ mediæ inuicem potentia commensurabiles medium contineant spatium, & vna addatur alteri vocabitur ex binis medijs secunda; seu Binomium Medium secundum: Si verò vna subducatur ab alia, dicitur media Apotome secunda.

THOR. I. PROPOS. XXXI.

Si duæ mediæ potentia tantùm commensurabiles componantur, quæ rationale contineant, tota irrationalis erit, quæ vocatur ex Binis Medijs Prima.

COmponantur duæ Mediæ PA, & PB superiùs inuentæ propos. 29. quæ rationale rectangulum contineant. *Dico totam irrationalem esse.*



Probatur. Nam rectangulum album AF ex medijs AP, & PB ita refertur ad quadratum nigrum ex BP ex 1. l. 6. cum sit eiusdem altitudinis, vt bases; Sed bases sunt incommensurabiles: Ergo etiam Rectangulum AF album est incommensurabile quadrato nigro PH.

Addatur rectangulo aliud æquale FD, & ideo sibi commensurabili; Quadrato verò PH nigro ex PB, quadratum nigrum OF ex AP, quod vtique ei erit commensurabile; cùm mediæ inuicem ponantur potentiâ commensurabiles. Illa duo rectangula alba AF, & FD adhuc erunt incommensurabilia quadratis nigris, ex propos. 8. huius. Verùm si omnia hæc aggregentur simul, duo rectangula alba, cum duobus quadratis nigris, ex propos. 10. hoc aggregatum ex magnitudinibus irrationalibus vtrique parti aggregatæ irrationale erit, & signanter duobus rectangulis albis, quæ magnitudo est vna pars aggregata.

Tota autem hæc magnitudo irrationalis, nempe duo rectangula alba, & duo quadrata nigra æquant ex propos. 6. l. 2. quadratum AD ex tota AB: Ergo hoc quadratum AD ex tota AB erit irrationale respectu rectangulorum alborum, quæ sunt rationalia, & ideo etiam respectu quadrati Rationalis. Quaderè etiam ipsa tota AB, latus ipsius, erit incommensurabilis lineæ Rationali.

Vocatur autem *Binomium medium*; quod componatur ex duabus medijs, & *primum* ad differentiam secundi.

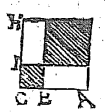
THEOR. II. PROPOS. XXXII.

Si à media media auferatur potentiâ tantùm ei commensurabilis, quæ rationale contineant, Reliqua irrationalis erit; vocatur autem Media Apotome prima.

ACciplantur duæ mediæ potentiâ tantùm commensurabiles, quæ spatium rationale contineant inuentæ propos. 32. huius CB, & AG, & minor BC subducatur à maiori AC. *Dico residuum* AB *esse lineam irrationalem.*

Probatur. Rectangulum AI sub maiori AC, & minori BC est rationale: Quare etiam duplicatum erit rationale, vt sunt AI, & BH. Quadrata verò nigra ex medijs AH, & BI irrationalia respectu Rationalis quadrati, licet inuicem rationalia, & ideo etiam irrationalia respectu rectangulorum AI, & EH, vt pote illi quadrato Rationalis commensurabilium ex Thesi.

Si verò totum ex duobus quadratis AH, & BI sumatur erit vtique singulis quadratis commensurabile: cum partes ipsæ nempe quadrata sint inuicem commensurabilia, & ideò respectu rectangulorum AI, & BH erit totum irrationale ex propos. 8. huius.



Verùm, si rectangulis duobus addatur quadratum ex AB, ex 9. secundi fit magnitudo æqualis magnitudini duorum quadratorum BI, & AH; ideoque sicut duo quadrata AH, & BI sunt rectangulis ostensa incommensurabilia, sic erit hoc aggregatum ex rectangulis, & quadrato BA ipsis AH, & BI nigris quadratis æquale, rectangulis eisdem AI, & BH seorsim sumptis erit irrationale.

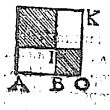
Cùm itaque tota magnitudo ex rectangulis, & quadrato ex AB sit incommensurabilis suæ parti, nempe rectangulis seorsim: Erit etiam incommensurabilis reliquæ parti nempe quadrato nigro ex AB ex parte 2. propos. 10. Quare Quadratum ex AB erit incommensurabile Rectangulis ipsis; sed rectangula ponuntur rationalia respectu Quadrati lineæ Rationalis: Quaderè etiam quadratum ex AB erit irrationale ex propos. 8. respectu quadrati lineæ Ratinalis; Et idcirco etiam ipsa AB ipsi Rationali, irrationalis erit.

THEOR. III. PROPOS. XXXIII.

Si duæ mediæ potentiâ tantùm commensurabiles componantur, quæ medium contineant, tota irrationalis erit; vocatur autem ex Binis Medijs Secunda.

COmponantur duæ mediæ potentiâ tantùm inuicem commensurabiles AB, & BC, quæ medium spatium contineant. *Dico totam* AC *irrationalem esse.*

Præassumptum. Vt propos. ostendatur præsupponendum est, Duo rectangula alba inuicem æqualia esse media; quia alterum ex ipsis sub AB, & BO ex Thesi est medium, & ideo eius duplum, eique commensurabile, medium est ex Coroll. propos. 30.

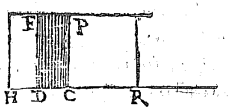


Sic quoque quod quadrata nigra sunt media, quia lineæ AB, & BO eorum latera contexentes ex Thesi sunt mediæ respectu rationalis, licet inuicem comparatæ commensurabiles sint potentiâ; ideoque eorum quadrata inuicem sibi erunt commensurabilia, & hinc compositum ex ipsis ex propos. 10. erit medium, & irrationale, sicut ipsa seorsim irrationalia sunt.

Deinde Rationali ED expositæ applicandum est rectangulum BH, silicet ex cá, tanquam ex vno latere, efficiendum est EH ex propos. 43. primi; quod rectangulum sit æquale duobus medijs rectangulis albis, & eidem aliud rectangulum PD applicandum est, quod sit æquale duobus quadratis nigris item medijs.

Primo itaque est ostendendum spatium totum PH

PH esse Irrationale respectu quadrati lineæ Rationalis; & hoc demonstrabitur ex eò, quòd contineatur sub CD, & DH, quæ ostendetur potentiâ tantùm commensurabiles, quæ compositæ facient ex propos. 16. h. lineam Irrationalem CH; linea verò DE, vel æqualis CP Rationalis est. Ideoque spatium PH erit irrationale, vt ostendetur: Quibus omnibus suppositis, cum spatium PH Irrationale, sit æquale quadratis nigris, & albis rectangulis, ex effectione, quæ ex propos. 6. lib. 2. faciunt quadratum ex tota AO, erit quadratum AK ex tota AO irrationale: Quamobrem etiam latus, & tota AO erit irrationale.



Primo itaque progressu ostendendum est duas CD, & DH esse rationales potentiâ tantùm commensurabiles, & ostendetur primo esse incommensurabiles longitudine. Nam in figura primò proposita rectangulum AI ex AB, & BO album quadrato nigro ex BO incommensurabile est; quòd ex 1. lib. 6. rectangulum sit ad quadratum eiusdem altitudinis, vt basis AB ad basim BO; Ideoque cum bases sint incommensurabiles, etiam rectangulum AI album ex AB, & BO erit nigro quadrato ex BO incommensurabile. Ideoque etiam duo rectangula duobus quadratis erunt incommensurabilia, qua rectangulum rectangulo æquali. Quadratumq; quadrato commensuratur ad præassump. Ideoque spatium quoque nigrum PD æquale quadratis erit incommensurabile spatio albo EH æquale rectangulis. Ipsæ ergo lineæ erunt incommensurabiles, cum sit rectangulum nigrum ad rectangulum album, vt basis ad basim ex 1. l. 6.

Probatur deinde 2. Progr. Quod etiam sint potentiâ commensurabiles. Nam spatium nigrum PD est medium, vtpote æquale quadratis nigris medijs ex præassumpt. & DE Rationalis. Ergo alterum latus CD erit Rationale saltem potentiâ, ex propos. 27. Et ex eadem cum spatium album EH sit medium, vtpote medijs rectangulis albis AI, & IH æquale, latus eius alterum HD erit potentiâ commensurabile; quia ED Rationalis est; itaque lineæ CD, & DH sunt incommensurabiles longitudine quidem, vt supra ostensum est: Verùm, vt modo ostendimus, commensurabiles potentiâ, compositę facient lineam CH irrationalem ex propos. 16. huius, Ideoque spatium PH concluſum sub rationali DE, vel CP, & sub Irrationali CH erit irrationale: Quod consequens modo demonstrandum est.

Progress. 3. Si spatium CH esset rationale spatium, latus quoque CH esset rationale; & sic rationale, & irrationale; quod repugnat. Irrationale quidem, vt probatum est progress. 2. Rationale verò, vt ostendetur ex sententiâ aduersariorũ, si spatium ex CH asserunt rationale. Nam facto quadrato PR ex Rationali CP, ita erit quadratum PR ad rectangulum HP, vt RC ad CH: sed rectangulum HP comparatum quadrato PR. ex aduersarijs est rationale: Ergo latus RC, vel æquale DE respectu lateris CH ob eandem altitudinem CP erit rationale, contra quòd ostensum est progress. 2. cum itaque hoc spatium PH sit irrationale, & sit æquale quadrato AK etiam quadratum illud erit Irrationale, & linea AC Irrationalis erit respectu rationalis DE, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM

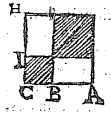
HInc est, quod medium spatium non superet medium spatium spatio rationali: sed irrationali spatio. Siquidem quadratum AK est Irrationale, & medium, cui æquatur rectangulum PH & ideo irrationale est. Rectangulum quoque nigrum PD est irrationale, & medium, quòd superatur à rectangulo PH spatio EH, quòd ostensum est irrationale; siquidem si spatium EH esset Rationale, etiam rectangula AI, & IK æqualia essent rationalia.

THEOR. IV. PROP. XXXIV.

Si à mediâ media auferatur potentiâ tantùm commensurabilis existens tota, quæ cum tota medium contineat reliqua irrationalis erit, vocatur verò mediæ Apotome secunda.

DEtrahatur à media AC media BC, ei AC tantùm potentiâ commensurabilis; quæ cum tota AC medium rectangulum contineant. *Dico reliquam* BA *irrationalem esse lineæ alicui expositæ Rationali, cui* BC, *& AC mediæ sint.*

Probatur. Nam, cum latera AC, & BC potentiâ tantum sint commensurabilia, efficient sua quadrata cõmensurabilia: Quare etiam cõposita ex 9. huius, magnitudo ex compositione resultans vtrisque seorsim commensurabilis erit. Quamobrem, cùm ea quadrata ex hypothesi media sint, tota magnitudo eis commensurabilis media erit ex propos. 9. huius.



Progress. 2. Rursùs, qula rectangulum sub AC, & BC medium, & Irrationale est ex Thesi; si accliplantur duo ex ipsis AI, & BH; Tota quoque magnitudo media erit ob eandem rationem, quòd dupla sit singulis partibus, & duplum suæ parti dimidiæ commensurabile sit.

Progress. 3. Sciendum verò est ex 8. lib. 2. Duo quadrata, totum ex AC, & nigrum ex CB prædicta esse æqualia duobus rectangulis AI, & BH addito eis quadrato ex BA: Spatium itaque medium ex 1. progr. nempe duo quadrata superant spatium medium ex 2. progr. nempe duo rectangula, quadrato ex AB: sed ex præc. Coroll. medium non superat medium; nisi spatio medio: Ergo illud spatium reliquum quadratum ex AB erit medium, & irrationale; & linea AB; quæ eius latus contexit, erit Irrationalis, quæ vocanda est media Apotome secunda.

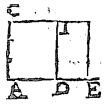
THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXXV.

A mediâ infinitæ irrationales fiunt, & nulli antecedentium eſt eadem.

SIt media DA. Dico *ex ea fieri irrationales infinitas, quæ nulli ex primo factis eædem ſint.*

Expoſita enim Rationali AC. Contineatur ſub rationali AC, & mediâ AD ſpatium DC: hoc erit irrationale. Poſſit illud recta DE, ideſt ſit latus quadrati illi ſpatio æqualis; hoc erit rurſus irrationale quadratum, & DE erit media inter DA & AC ex prop. 19 lib. 6. Addatur DE ipſi Rationali, vel æquali DI, & fiat ſpatium EI, hoc iterum erit irrationale cum contineatur ſub media ED, & rationali DI. Poſſit illud EF, quæ rurſus erit media proportionalis inter ED & rationalem DI, & ſic in infinitum.



Quod vero ED non ſit eadē, ac AD patet, quia EI eſt rectangulum, linea verò ED eſt latus quadrati ei rectangulo æqualis, ſic EF eſt latus quadrati rectangulo EI æqualis: vnde EF non poteſt æquari ipſi ED, ſed nec ipſi DA; cum ſemper proportio, vel creſcat, vel diminuatur. Eſt enim rectangulum ED minus, quam DA ob latus minus ED altero DI ſemper eodem perſiſtente, & ſic de alijs in infinitum.

Quòd verò rectangulum ſub rationali, & irrationali contentum ſit irrationale patet. Nam rectangulum ex media AD, & AC Rationali eſt ad quadratum ipſius Rationalis AC ob eandem altitudinem, quam ipſa Rationalis præſtat, vt baſis AD ad latus AC: ſed ex Theſi ſunt irrationales, ergo etiam ipſum ſpatium erit irrationale quadrato Rationalis, & ſic dicas de omnibus alijs.

EXPENSIO IX.

De lineis in partes commenſurabiles, ſeu incommenſurabiles, & omninò irrationales ſecandis.

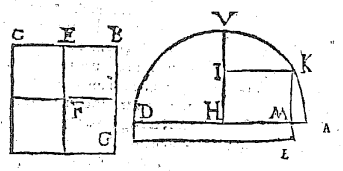
VIſis inuentionibus linearum potentiâ incōmenſurabilium; modo docere oportet, quomodo in qualibet exhibitâ lineâ partes commenſurabiles, ſeu incommenſurabiles reperiatur pro qua indagine neceſſaria eſt propoſ. 30. & 31. lib. 6. in qua docemus applicare rectangulum æquale dato rectilineo alicui lineæ, quòd ad implendam totam eius longitudinē figurâ quadratâ deficiat. Verùm quia propoſitio, vtpote vniuerſalis eſt difficilior, nos verò ſolum indigemus applicatione ad lineam datam rectanguli tantum æqualis quadrato; inde ponemus Lemma faciliùs ad inſtitutum deſeruiens.

LEMMA I. PROP. XXXVI.

Datæ rectæ maiori rectangulum applicare æquale quartæ parti quadrati à minore deſcripti: ſed taliter, vt per totam non ſe extendat; ſed ſpatium relinquat, cui quadratum applicari poſſit.

SIt linea maior AD, minor CB, quæ diuiſa biſariam in E; quadratum ex medietate CE deſcriptum, vt CF erit quarta pars quadrati à tota deſcripti CG, ex propoſ. 6. ſecundi Coroll. Huic ergo quartæ parti CE ſit applicandum ad lineam AD maiorem æquale parallelogrammum.

Secetur AD biſariam in H, & deducta perpendiculari ad AD, quæ ſit HV à puncto H detruncetur æqualis ipſi CE, & centro H interuallo HD medietate ducto ſemicirculo AKVD ab I ducatur IK perpendicularis ipſi HI, & eo puncto, quo ſecat ſemicirculum in K, deducatur alia perpendicularis ad AD, quę ſecet eam in M; ſegmentoque AM æqualis ſint reliqua ML, & tandem perficiatur rectangulum LD.



Dico hoc parallelogrammum LD applicatum rectæ AD eſſe, æquale quadrato CF, & deficere figura quadrata AL vſque ad occupandam totam lineam AD.

Probatur ex propoſ. 16. l. 6. MK eſt media proportionalis inter MD, & MA. Ergo eius quadratum ex propoſ. 19. eiuſdem eſt æquale parallelogrammo LD ex lineis MD, & ML confecto: ſed huius KM quadratum eſt æquale quadrato CF, quod ſit MK latus æquale ipſius lateri CE ex effectione. Ergo rectangulum DL eſt æquale quadrato CF: patet verò deficere figura quadrata ad occupandam lineam AD; quia latus LM eſt æquale ſegmento MA.

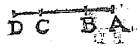
THEOR. I. PROPOS. XXXVII.

Si recta ſecetur in partes inæquales, & ab eadem detrahatur pars æqualis parti minori: ſi illæ partes fuere commenſurabiles, reliquum erit commenſurabile toti; ſin minus, reliquum erit toti incommenſurabile.

SIt recta AD, cui detrahatur minor pars AB, & rurſus huic æqualis pars CD. Dico reliquum BG commenſurabile eſſe ipſi primitiuæ AD; ſi tamen partes primo factæ AB, & BD ab initio fuere commenſurabiles.

Pro-

Probatur. Quoniam partes AB, & BD ponuntur primò commenſurabiles ſuo toti AD: Etiam tota linea AD vtrique ipſarū cōmenſurabilis erit ex propoſ. 9. Componantur AB, & æqualis CD: eritque compoſita commenſurabilis ſuæ parti dimidiæ AB, & ideo tota AD etiam huic toti ablato AB, & CD commenſurabilis erit. Quare totū AD, etiam reliquo commenſurabilis erit ex Coroll. prop. 9.



Probatur ſecundus caſus eodem genere argumenti. Nam, ſi pars AB eſt incommenſurabilis parti BD, erit que compoſita ex tota AD ex propoſ. 10. incommenſurabilis ſingulis ſuis partibus AB, & BD. Addatur parti AB pars æqualis CD, vt ideo ei commenſurabilis, & huic toti adhuc erit incommenſurabilis tota AD ex propoſ. 8. & ideo ex Coroll. propoſ. 10. erit quoque incommenſurabilis reſiduo BC.

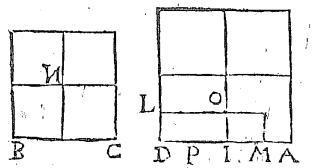
COROLLARIVM

DEducitur. Conuerſam huius propoſitionis quoad vtraque partes eſſe quoque veram: nempe, quòd ſi BC ponatur commenſurabilis ipſi toti DA, etiam BA, vel CD, vel vtraſque ſimul commēſurabiles, ipſi DA futuras; quoniā ſi tales nō eſſent, deberet dici, quòd eſſent incommenſurabiles BA, ſeu CD ipſi DA: quare ſequeretur quoque iuxta præced. BC eſſe incommenſurabilem ipſi AB contra Theſim. Similiter ſi CB incommenſurabilis ponatur ipſi DA; Erit etiam BA, vel CB, vel vtraque ſimul incommenſurabiles ipſi AD ob eandem rationem; quia, ſi eſſent commenſurabiles ſequeretur contra Theſim iuxta anteced. oſtenſionem, BC non eſſe incommenſurabilem.

THEOR. II. PROPOS. XXXVIII.

Si fuerit linea quædam maior, cui fuerit applicatum rectangulum æquale quartæ parti quadrati à minore deſcripti, & fecet lineam in partes inæquales; exceſſus, ſeu differentia, qua maius ſegmentum ſuperat medietatem, erit latus quadrati, cuius quadruplum eſt exceſſus quadrati lineæ totius maioris ſuper quadratum minoris.

SIt linea AD, cui fuerit applicatum ex Lemmate præcedenti rectangulum ML æquale quartæ parti CN quadrati à minore CB deſcripti. Dico, *quod differentia MI erit latus quadrati, cuius quadruplum æquat exceſſum, quo quadratum lineæ AD ſuperat quadratum lineæ CB.*



Quòd, vt probetur, diuidatur maior AD biſariā in I, & ex ea ſumatur DP æqualis lineæ, & ſegmento AM, quo facto cum AI, & ID ſint medietates, & ideo æquales, & MA, & PD ablatæ æquales; reliquæ MI, & IP æquales remanebunt.

Progr. 1. Recta AD eſt diuiſa biſariam in I, & & non biſariam in M: Quare ex propoſ. 7. lib. 2. rectangulum ML ſub MA, & MD contentum vnà cùm quadrato ex MI erecto erit æquale quadrato ex medietate IA deſcripto.

Progr. 2. Sed rectangulum hoc ex hypotheſi, & conſtructione eſt æquale quartæ parti hoc eſt CN quadrati ex minore CB deſcripti, Ergo hoc rectangulum ML quater acceptum æquabit totum quadratum ex CB deſcriptum. Et quadratum ex MI, vt ex Coroll. propoſ. 6. lib. 2 conſtat æquabit quadratum ex MP quater acceptum, quòd ſupra MI, & IP oſtenſæ ſint æquales.

Progreſſ. 3. Sed quadratum ex AI æquat rectangulum ML ſimul cum quadrato ex MI, & dixi progreſſ. 1. & hoc quadratum quater acceptum æquat quadratum totius AD, ex Coroll. propoſ. 6. lib. 2. Ergo etiam rectangulum ML ex ſegmentis, & quadratum MI quater accepta æquabunt quadratum ex linea tota AD deſcriptum.

Progreſſ. 4. Sed ex ſecundo progr. Rectangula quatuor ſunt æqualia quadrato ex CB, & hæc eadem ſimul cum quatuor quadratis ex 3. progreſſ. æquant quadratum ex AD. Ergo AD quadratum excedet quadratum ex CB quatuor quadratis ex MI differentia, quod erat probandum; Quatuor autem quadrata ex MI æquant quadratum ex MP, vt progreſſ. 2. dictum eſt.

PROBL. I. PROPOS. XXXIX.

Diuidere datam lineam in partes incommenſurabiles.

SIt data recta AD in præced. ſchemate, quam oporteat diuidere in partes incommenſurabiles. Huic primò reperiatur alia tantùm potentiâ commenſurabilis minor CB, qua minori poſſit efficere ipſa data maior AD quadratum maius tali exceſſu quadrato, qui habeat latus ſibi maiori incommenſurabile ex propoſ. 14. huius. Applicetur autem rectangulum æquale quartæ parti quadrati ex minore CB deſcripti, quòd defficiat ad eius longitudinem occupandam figurâ quadratâ, & ſit ML. Dico MD eſſe partem in linea AD incommenſurabilem ipſi AD, & etiam compartem AM talem eſſe ipſi AD actu, & potentia, ſed inſuper inuicem eſſe incommenſurabiles.

* Probatur. Quia ex præced. MI, qua maior pars ſuperat medietatem eſt quarta pars quadrati, quo linea AD ſuo quadrato ſuperat quadratū lineæ CB. Ideoque MP erit linea ſubtendens totum quadratum, quò maioris AD ſuperat minoris CB quadratum: Ergo MP erit incommenſurabilis, quia ex hypotheſi exceſſus iſte quadratus obtinet latus incommenſurabile ipſi AD. Sed ex propoſ. 37. Coroll. ſi MP ſit incommenſurabilis ipſi AD etiam MA & PD erit incommenſurabilis toti lineæ AD. Ex propoſ. 10. autem, ſi tota magnitudo ex duabus conflata vni earum incommenſurabilis ſit, erit, & alteri ex partibus, & ipſæ partes ab initio aſſumptæ incommenſurabiles erunt. Quare AM, & PD ipſi AD toti, & etiam comparti MP incommenſurabilis erit. Quòd ſi componatur MP, & AM, vel æqualis PD tota quoque magnitudo MD erit incommenſu-

mensurabilis parti MA. Quamobrem portiones AM, & MD incommensurabiles erunt longitudine, tum toti AD. tum inter se.

Præsupp. Pro ostens. 2. partis, silicet, quòd sint, ne dum actu incommensurabiles, sed etiam potentiâ, tum respectu lineæ AD, tum inuicem incommensurabiles, præsupponendum est; Quòd rectangulum ML est commensurabile quadrato CB, cum sit eius quarta pars, & ideo quadrato AD, cui ex CB quadratum ex Thesi commensuratur. Deinde, quòd etiam quadratum ex MP est commensurabile eidem AD. Quia, cùm quadratum ex CB sit commensurabile toti quadrato ex AD, erit etiam reliquum ex MP eidem commensurabile; quòd autem ex MP sit reliquum ostensum est in præced. Tandem rectangulum ML esse eiusdem altitudinis, ac quadratum ex AM, & quadratum ex MD, nam vnum latus DL æquat AM ex hypothesi, & MD est latus etiam quadrati ex MD.

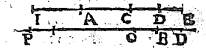
* Probatur, quòd AM, & MD sint incommensurabiles potentiâ ipsi AD Rectãgulum LM est cõmensurabile quadrato CB, cum sit eius quarta pars: Ergo etiam quadrato AD, cui ex CB commẽsuratur quadratum. Sed vt est AM, ad MD Incommensurabiles ex 11 6 sic est quadratum ex AM ad rectangulum ML ob eandem altitudinem DL æqualẽ PD: Ergo etiam quadratum ex MA erit incommensurabile quadrato ex CB, & ideo ex AD. Idem ostenderur de quadrato MD. Quia est eiusdem altitudinis ob latus MD idem, ac rectanguli ML. Ergo erit incommensurabile rectangulum ML, & quadratum ex MD, quales ipsæ bases sunt AM, & MD, & ideo quadratum ex MD erit incommensurabile ipsi quadrato ex CB, & quadrato ex AD.

* Probatur. Etiam, quòd quadrata ex AM, & MD sint inuicem incommensurabilia: Nam rectangulum ML duplicatum, cum quadrato ex MP, ex 9. secundi æquant quadratũ ex MD cum quadrato PD. Cũ autẽ rectang. ML, & quad. MP ex præsupp. sit commensurabile ipsi AD. Etiam illa rectangula ML duplatum, & quadratum MP sunt commensurabilia quadrato CB, & AD: Ergo etiam totum quadratum ex MD simul cùm quadrato ex PD, vel AM, commensurabilia erunt, quæ illa æquant quadrato ex CB, & AD, sed quadratum ex AM est ostensum incommensurabile quadrato ex CB, vel AD. Ergo etiam erit incommensurabile toti quãtitati aggregatæ quadratorum AM, & MD: Quare ex propos 10. ipsa quadrata erunt inuicem incommensurabilia.

THEOR. III. PROPOS. XL.

Si linea extrema, & media ratione secetur, vtrumque segmentum irrationalis linea est, quæ vocatur Apotome.

* PRobatur de maiori segmento. Nam si tota linea AB ponatur rationalis; etiam dimidium erit rationale. Sed ex propos. 35. l. 6. si hoc dimidium reperiatur coniunctum cum maiori segmento facit quadratum quintuplo maius; quã à dimidio descriptum quadratum. Quare dimidij CB, vel æqualis AI, & maioris segmenti AD tanquam ex vnica linea, idest DI factum quadratum erit vt 5. respectu quadrati ex sola dimidia AI, quod erit vt 1. Eritque proportio tanquam numeri ad numerum, vnde lineæ ipsæ dimidia AI, & segmentum AD simul respectu dimidij tantum, idest AI, vel CB erunt potẽtia tantum commensurabiles, cum earũ quadrata habeant proportionem, quam



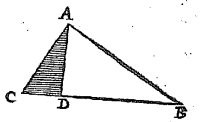
numeri ad numerum: Si ergo dimidia IA auferatur ab ID, reliquum remanebit AD segmentum maius ex propos. 19. huius Apotome.

* Probatur quòque secunda pars. Nam si addatur PB tota minori segmento, & fiat DP efficit ex propos. 38. lib. 6. quadratum quintuplo maius, quàm quòd efficitur à maiori segmento PO; si ergo auferatur maius segmentum à totâ, cum minori segmento DB, remanebit duplex minus segmentum; nempe, quòd erat prius DB, & id, quod relinquitur ex hac ablatione BO. Quare DO est Apotome, sed DB est dimidium BO: Ergo DB est Apotome, quòd erat probandum. Quoniam irrationali commensurabilis irrationalis linea ex prop. 8. huius est, & Apotome quoque, quòd exoriatur ex ablatione minoris à maiori linearum, quæ inuicem potentia commensurantur, cùm earũ quadrata sint, vt $\frac{1}{4}$ quad. ad quinque, ex 6. l. 2.

EXPENSIO X.

De irrationalibus simpliciter.

TErtium genus irrationalium est earum, quæ nascuntur ex equipotentia ad duas lineas incõmensurabiles, ne dũ longitudine solùm, sed etiã incõmensurabiles potentiâ; & huius generis sunt tres species. Prima species est earũ, quarum quadrata simul posita faciunt spatium rationale; rectangulum verò ab ipsis contentum medium. Secundum genus se habet è contrà; nam rectangulum sub ipsis contentum est rationale, spatium verò ex earum quadratis conflatum est irrationale. Tertium genus est earum, quæ faciunt rectãgulum sub ipsis contentum medium, & spatium quoque, quòd conflatur ex eorum quadratis medium, quæ quomodo inueniãtur docere oportet.



Obseruandum est ex 29. l. 6. quod perpendicularis in rectangulo ab angulo recto demissa secat basim tali modo, vt rectangulum sub tota, & maiori segmento sit equalis quadrato maioris lateris, at rectangulum sub tota, & minore segmento sit æquale quadrato minoris lateris.

Quod patet ex Corol 2. pr. 8. l. 6. Nam latus BA maius est medium proportionale inter totam basim BC, & maius segmentũ BD: Ergo ex propos. 19. lib. 6. eius quadratum erit æquale rectangulo, quod totâ basi BC maiori segmento BA ambitur. Eadem ratio est de totâ BC, & minori segmento DC inter, quæ medium proportionale est minus latus CA.

Sic obseruandum est, quòd quadratum perpendicularis est æqualis rectangulo segmentorum, quòd ex eiusdẽ 8. Cor. 1. l. 6. ppedicularis sit mediũ proportionale inter duo basis segmenta.

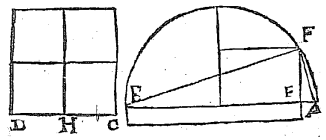
Sic

Sic rectangulum sub tota basi, & sub perpendiculari esse æquale rectangulo crurum: Patet, quia ob similitudinem triangulorum, ita est CB ad crus maius AB, vt crus minus, & basis AC in triangulo CAD est ad perpendicularem AD, crusq; maius in eodem triangulo, ideoque ex propos. 19. lib. 6. rectangulum contentum sub extremis proportionalibus erit æquale mediarum rectangulo.

PROBL. I. PROPOS. XLI.

Inuenire duas rectas lineas potentia incommensurabiles, quæ faciant quidem compositum ex ipsarum quadratis rationale; rectangulum verò sub ipsis contentum medium.

REperiantur duæ Rationales potestate solùm commensurabiles, ex propos. 14. huius, quarum maior AB plus possit, quam minor CD quadrato rectæ ipsi maiori AB incommensurabilis. Deinde ex propos. huius 36. applicetur maiori parallelogrammum deficiens figurâ quadratâ, quod sit æquale parti quartę quadrati à minore CD descripti, cuius latus est medietas CH, diuidatque eam in EIN partes incommensurabiles, ita quòd rectangulũ contineatur sub AE, & EB. Descripto tandem semicirculo super AB, erigatur à puncto E perpendicularis EF, ad AB, quæ secet semicirculum in F; iunctis ergo punctis extremis AF, & BF erunt rectæ AF, & FB duæ incommensurabiles, quarum quadrata composita facient magnitudinem rationalem; *rectangulum verò ab ipsis conclusum medium.*



Probatur primò: Quòd sint *incommensurabiles* ex propos. 39. huius. Partes AE, & EB sunt incommensurabiles, sed vt est segmentum AE ad segmentum EB; ita est rectangulum sub tota, & minore parte EA ad rectangulum sub tota, & maiore parte EB ex 1. sexti; quòd sint eiusdem altitudinis ob idem latus AB totius, commune vtrisque. Ergo etiam hæc duo rectangula erunt incommensurabilia, vt sunt bases AE, & EB. Sed hoc rectangulum ex tota, & maiore parte EB est æquale quadrato ex FB, vt suprà notaui, sicut, & rectangulũ ex tota, & minore parte AE, vt suprà est æquale quadrato ex latere AF minore. Ergo quadratum cruris maioris BF, & quadratum minoris AF erunt incommensurabilia; & ideo rectæ AF, & FB, quæ horum quadratorum contexunt latera, erunt incommensurabiles eodem modo, quo AE, & EB, nimirum toti rationali AB, & inter se.

Probatur secunda pars. Quod earum quadrata composita efficiant spatium rationale. Nam ex 11. secundi efficient spatium æquale quadrato ex AB ob rectangulum triangulum AFB: Basis verò AB ponitur potentiâ commensurabilis ipsi CD minori, & ideo eius quadratum erit rationale. Quadrata ergo ex AF, & FB simul posita illi quadrato æqualia efficient spatium rationale.

Probatur tertia pars, quòd rectangulum sub ipsis AF, & FB contentum sit medium. Rectangulum sub AE, & EB contentum, vtpote, quæ sint potestate solùm commensurabiles medium est prop. 26. huius. Ergo etiam omne aliud, quòd ipsis sit commensurabile ex propos. 28. Coroll.

Sed rectangulum ex totâ basi AB, & perpendiculari EF illi commensuratur, quòd sit medietas eius, ergo hoc rectangulum erit medium.

Quòd verò sit medietas rectanguli ex CD, & AB incommensurabilibus rectangulum ex AB, & EF ostenditur; quia EF horthogonalis est medietas lateris CD. Vnde, cùm rectangulum ex tota AB, & FE sub totâ AB, & medietate lineæ CD contineatur erit dimidio minor; quàm rectangulum sub totâ AB eâdem, & totâ CD.

Quòd verò orthogonalis sit medietas lateris CD, sic ostenditur, perpendicularis FE quadratum ex præassumpt. æquale est rectangulo ex partibus AE, & EB basis; sed hoc ex effectione est æquale quadrato ex dimidia CH totius CD: Ergo quadratum perpendicularis FE, & quadratum ex HC erunt æqualia. Vnde, & latera erunt æqualia, & perpendicularis EF erit equalis medietati CH lineæ CD. Rectangulum ergo sub EF, & AB, vtpote medietas rectanguli medij, & irrationalis sub AB, & BC contenti erit medium, & irrationale: Sed huic ex prænotatis est æquale rectangulum ex cruribus AF, & FB; Igitur rectangulum ex cruribus AF, & FB erit medium, & irrationale. Duæ itaq; AF, & FB faciunt quadrata simul posita rationalia, at rectangulum sub ipsis contentum medium, & irrationale, & ipsę sunt incommensurabiles potentiâ ipsi AB Rationali potentiâ commensurabili.

PROBL. II. PROPOS. XLII.

Inuenire duas rectas potentiâ incommensurabiles; quæ faciant compositum ex ipsarum quadratis medium: rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale.

INueniantur duę *Mediæ* ad differentiam propos. anteced. AB, & CD potentia tantùm inuicem commensurabiles, quæ Rationale spatium amplectantur ex propos. huius 29. sed hac conditione, quòd AB maior plùs possit, quàm CD minor quadrato rectæ sibi maiori longitudine incommensurabilis, quas docuimus inuenire Coroll. prop. 30. Deinde applicetur maiori rectangulum æquale quartæ parti quadrati ex CD minori descripti, & omnia peragantur, vt priùs vtendo eadem figura. *Dico primo* AF, & FB *esse incommensurabiles.*

Probatur eadem ratione, quâ ostensa est prima pars preced. propos. ex eo principio, quòd partes AE, & EB sint incommensurabiles. Vnde, & eorum rectangula sub tota AD, & ipsis AE, & EB comprehensa, vtpote eiusdem altitudinis: ideoque quadrata ex AF, & BF eis æqualia: Ideircoque, & ipsa latera AF, & BF erunt incommensurabilia. Dico secundo. *Compositum ex ipsarum quadratis esse medium, & irrationale.*

Probatur eodem modo, quo ostensa est secunda pars præced. Ex eo, quod sit æqualis ea magnitu-

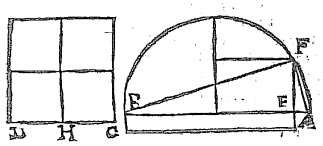
do quadratorum compositorum ex AF, & FB quadrato ex AB media. Vnde illud spatium duorum quadratorum medium erit ex Coroll. propos. 28.

Dico tertio *rectangulum sub ipsis contentum esse rationale*. Probaturque eadem deductione, qua tertia pars præced propos. Nempe ex eo, quia rectangulum earum AF, & FB æquale est rectangulo ex perpendiculari FE, & tota BA; quod est medietas rectanguli sub AB, & CD, & ideo ipsi commensurabili. Idcircoque, cùm rectangulum illud ex AB, & CD ex Hypothesi sit rationale, cùm medias assumpserimus spatium rationale continentes, etiam dimidium eius erit rationale, & ideo rectangulum ex AF, & FB huic dimidio æquale, erit quoque rationale.

PROBL. III. PROPOS. XLIII.

Inuenire duas rectas potentiâ incommensurabiles, quæ faciant compositum ex earum quadratis medium, & rectangulum sub ipsis comprehensum medium.

REperiantur duę Mediæ potemtiâ tantùm commensurabiles AB, & CD; quæ medium contineant spatium, & irrationale ex propos. 30. huius, & maior plus possit, quàm minor quadrato cuiusdam rectæ maiori incommensurabilis. Deinde omnia fiant, vt propos. 41. habebimus intentum,



Nam ijsdem probationibus vtendo, primo AE; & EB erunt incommensurabiles ob quadratum, quo maioris superat minoris quadratũ maiori ipsi incommensurabile, & ideo AE, & EB sunt incommensurabiles, & hinc earum rectangula AB tota pro altero latere inseruiente erunt incommensurabilia; Idcirco etiam quadrata linearum AF, & FB eis æqualia. Vnde ipsæ AF, & FB erunt incommensurabiles.

Secundo aggregatum quadratorum AF, & FB erit medium, quòd sit æquale quadrato ex AB medio propter suum latus AB medium.

Tertiò rectangulum sub AF, & FB erit medium; cum sit medietas rectanguli sub AB, & CD medij ex Thesi, & irrationalis, quòd sit æquale rectangulo ex perpendiculari dimidia datæ CD, & altera data AB, facto, & ideo rectangulum ex lineis AF, & FB erit medium, & irrationale, vt ex suppositione est rectangulum ex AB, & CD.

EXPENSIO XI.

De lineis irrationalibus, quæ ab irrationalium simpliciter additione, vel subductione resultant.

VIdimus, quomodo tres species irrationalium reperiantur in anteced. Expens. quæ certis conditionibus discriminantur. Si ergo istæ inuicem addantur constituunt tres species irrationalium *Maior* prima; Secunda *Rationale, & Medium Potens*. Tertia *Bina Media potens*, Si verò altera alteri subducatur relinquunt tres species alias irrationalium. Nempe *Prima, quæ dicitur minor*. Secundam *cùm Rationali medium totum efficiens*. Tertiam *Cum medio medium totum efficiens*; quas omnes demonstrabimus esse irrationales.

THEOR. I. PROPOS. XLIV.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, quarum quadrata aggregata rationalia sint, Rectangulum verò irrationale. Tota est irrationalis, quæ vocatur Maior.

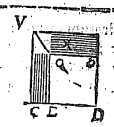
COniungãtur duæ rectę AB, & AC potẽtiâ commensurabiles, quarum quadrata aggregata CI, & HI rationalia sint Rectangulum verò ab ipsis effectum irrationale sit BI. Dico *totam* CB *esse irrationalem*.

Probatur ratione, quâ vsi sumus propos. 25. Rectangulum nigrum BI sub AB, & AC conclusum est medium ex hypothesi; Vnde, & duplicatum

H



addito ei altero nigro medium, & irrationale perseuerabit ex Coroll. propos. 28. cùm sit commensurabile parti componenti. Sed aggregatum quadratorum alborum CI, & IH, quibus pro lateribus inseruiunt, ponitur rationale. Rectangula nigra igitur quadratis duobus albis erunt incommensurabilia. Et si rectangula cum quadratis componantur totum aggregatum ex propos. 10. erit vtrique parti componenti irrationale. Hoc autem totum est æquale ex propos. 6. secundi quadrato ex CA, & AB, tanquam vnâ lineâ constituto. Ergo hoc quadratum totius compositæ AB erit incommensurabile quadratis duobus nigris: Sed quadrata duo ex lineis seorsim sumptis ex Thesi ponuntur rationalia: Ergo quadratum ex tota CB quadratis albis erit irrationale. Vnde, & tota CB erit irrationalis ipsis CA, & AB, quam placuit appellare *Maiorem*.



THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XLV.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur. Quorum quadrata aggregata faciant spatium medium; Rectangulum verò, quod claudunt, Rationale tota irrationalis erit; vocatur autem Rationale, & medium potens.

COmponantur duæ rectæ DE, & CE potentiâ incommensurabiles, quas docuimus reperire propos. 35. quæ compositum quadratorum faciunt medium; rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale. Dico *has compositas facere lineam Irrationalem.*

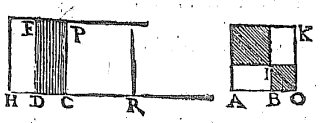
Probatur eâdem ratione adhibitâ, quæ in præcedenti. Nam rectangulum nigrum CQ est Rationale, quod claudũt inuẽtæ ED, & CE, & cũ alio nigro æquali rectangulo est adhuc rationale. Quadratorum verò alborum aggregatum ex Thesi est irrationale. Ergo si simul omnia ponantur tota quantitas, & magnitudo aggregata singulis partibus erit irrationalis, sicut, & ipsis quadratis. Sed hæc tota aggregatio quadratorum, & rectangulorum æquat quadratũ DV ex CD ex prop. 6. l. 2. Ergo hoc quadratum magnum ex CD erit irrationale, & idcirco eius latus tota composita BC ex duabus repertis CE, & ED erit irrationalis, quæ apellabitur *Rationale, & medium potens*, quia potest efficere suis partibus, quibus componitur rectangulum rationale, & quadratorum partium aggregatum medium, nempe irrationale.

THEOR. III. PROPOS. XLVI.

Si duæ rectæ potentiâ incommensurabiles componantur, quorum quadrata compositum spatium medium efficiant, & rectangulum quoque, quod continent medium sit, tota irrationalis erit; vocatur autem bina media Potens.

PRobatur eadem ratione, qua vsi sumus ad ostendendam propos. 33.

Vt ergo probetur applicandum est alicui rationali DE rectangulum DP nigrum, quod sit æquale rectangulis duobus albis ex hypothesi medijs duarum datarum AB, & OB; & eidem Rationali PE applicetur aliud rectangulum æquale duobus quadratis nigris ex hypothesi medijs, quæ fiant ex AB, & OB.



Quo facto probabitur eodem modo, ac ibi propos. Totum spatium PH esse irrationale; quòd sit confectum ex duobus rectangulis, quorum vnum est æquale rectangulo medio duplici albo, & alterum quadratis nigris, quæ quantitates sunt incommensurabiles; quòd rectangulum album ad quadratum nigrum ob eandem altitudinem, quam cum illis habent, sit vt bases AB, & OB; quæ ponuntur incommensurabiles, & ideo quadrata ipsa rectangulis nigris erunt incommensurabilia. Quare rectanguli PH, partes DP, & FH, vtpote æquales quantitatibus inuicẽ incommensurabilibus constans, erit incommensurabilis altera, alteri: Quare lineæ ipsæ erunt incommensurabiles CD ad DH.

Erunt autem potentiâ commensurabiles Quoniam ED est rationalis, & spatium medium rationali applicatum facit aliud latus potentia commensurabile; ex propos. 27. Quamobrem duæ lineæ potentiâ tantùm commensurabiles sunt, quæ compositæ facient lineam irrationalem ex propos. 16 huius. Spatium verò, quod continent progr. 3. propos. 33. ostensum est irrationale: quia ibi demonstratur: quod, si spatium contineatur sub rationali, & irrationali, illud est irrationale.

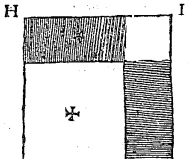
Hoc autem spatium, ex effectione æquant rectangula alba, & quadrata nigra, quæ simul faciunt quadratum AK, ex AO. Ergo quadratum ex AO erit Irrationale; & ideo ipsa AO irrationalis erit.

THEOR. IV. PROPOS. XLVII.

Si à linea recta auferatur alia potentia incommensurabilis existens illi toti, sit autem compositum ex ipsorum quadratis rationale: at rectangulum ab ipsis clausum medium: reliqua irrationalis erit, quæ vocatur Minor.

DIcit propositio quod si detur AC linea maior, & tota, & OC minor, quorum quadrata sint rationalia; at rectangulum sub ipsis contentum, vt est semialbum OI, sit medium: Dicit inquam, quod si minor OC auferatur à maiori AC, *reliqua* AO *erit irrationalis.*

Probatur eodem modo, ac propos. 23. huius. Rectangulum sub AC, & OC seminigrum inuentis lineis iuxta propos. 41. est ex Hypothesi medium; ergo duplicatum erit quoque medium ex Coroli. propos. 28.



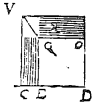
Compositum verò ex quadratis datarum AC, & OC Rationale: Igitur prædictis rectãgulis OI, & PI semialbis quadrata album ex linea OC, & aliud totum CH erunt irrationalia, & incommẽsurabilia. Si verò rectangulis prædictis addatur quadratum ex residuo AO ex 7. secundi efficietur magnitudo æqualis duobus quadratis prædictis CH ex CA toti, & alteri ex linea OC. Ideoque incommensurabilis rectangulis duobus OI, & PI. Cum ergo tota magnitudo quadrati OA, & rectangulorum duorum seminigrorum PI, & IO sit incommensurabilis rectangulis seorsim sumptis ex propos. 10. erit, & incommensurabilis quadrato ex AO. Quapropter erit hoc quadratum cruce insignitum ex AO irrationale. Vnde ipsum

residuum linea AO erit irrationalis, quod apellandum est linea Minor.

THEOR. V. PROPOS. XLVIII.

Si recta linea à rectâ auferatur incommensurabilis existens toti, quæ cum tota faciat compositum ex ipsorum quadratis medium; rectangulum verò sub ipsis contentum Rationale, Reliqua irrationalis erit. Vocatur autem, cum Rationali medium totum efficiens.

DEtrahatur à rectâ CD maiori recta CE minor, quæ inuentæ sint iuxta propos. 42. Dico *reliquum* ED *esse irrationale.*



Probatur eadem ratione, ac antecedens. Rectangulum sub CD, & CE contentum ex hypothponitur rationale, vnde, & duplicatum tale erit, vt OV, & EV: Sed duorum quadratorum DV, & QV ex duobus EC, & CD lateribus factorum compositum est irrationale. Ergo hoc compositum duplicatis rectangulis OV, & EV erit irrationale, & incommensurabile: Sed si rectangulis addatur quadratum album DQ, ex ED ex 9. secundi efficitur magnitudo æqualis magnitudini ex conflatis quadratis DV, & QV; ideo quadratis seorsim sumptis incommensurabilis, ex propos. 10. huius. Quare incommensurabilis quoque quadrato residui albo ex QD. Ideo reliqua ED irrationalis erit, quę vocatur. *Cum rationali medium totum efficiens.*

THEOR. VI. PROPOS. XLIX.

Si à rectâ auferatur recta potentiâ incommensurabilis existens toti, quæ faciat compositum ex ipsorum quadratis mediam, & rectangulum sub ipsis contentum medium, & quadratis incommensurabile; Reliqua irrationalis erit, quæ vocatur, cum medio medium totum efficiens.

SIt recta AC, à qua detrahatur OC, & sint eiusdem rationis, quas docuimus reperire prop. 43. additâ eâ conditione, quod rectangulum non commensuretur quadratis ex AO, & AC. Dico residuum OC esse incommensurabile, & irrationale.

Probatur eadem ratione, quâ vsi sumus prop. 34. Tota magnitudo ex repertarum AC, & OC quadratis conflata media est ex Thesi, sicut, & rectangulum seminigrum sub ipsis contentum, etiam si duplicatum, vt sunt duo rectangula nigra, cum duplici quadrato minori, & quia rectangulum seminigrum duobus quadratis albis ponitur incommensurabile; tale quoque erit compositum ex rectangulis duobus semiuigris.

Sed si duobus Rectangulis addatur quadratum maius ex residuo OC ex propos. 9. secundi efficietur magnitudo æqualis magnitudini ex duobus quadratis AC toto, & AO: Ergo hęc tota magnitudo quadratis duobus seorsim sumptis erit media, & incommensurabilis iuxta propos. 10. superant itaq; quadrata media magnitudinem rectangulorum compositorum nigrorum quadrato ex residua OC.



Sed medium non superat medium rationali, aliquâ quâtitate ex Coroll. prop. 33. Ergo quadratum ex residua OC non est rationalis quantitas: Vnde erit irrationalis, & linea illud quadratum subtendens OC erit irrationalis, quæ vocatur. Cum media medium totum efficiens, quia nascitur à partibus, quæ efficiunt tum quadrata composita: tum rectangulum, quod ambiunt medium, & irrationale.

COROLLARIVM VNIVERSALE.

HAbemus itaque 26. inuentiones diuersarum linearum irrationalium. Primò sex Binomiorum, quæ nascuntur à compositione linearum potentiâ tantùm commensurabilium. Secùdò sex Apotomes ex subtractione potentiâ tantùm rationalium. Deinde habemus mediam irrationalem, quæ inter duas potentiâ tantùm commensurabiles media proportionalis est, ex quâ nascitur quatuor species irrationaliũ duę per subductionẽ, quę dicũtur Apotome media prima, & Apotome media secunda, duæ per additionẽ quę vocantur Binomium mediũ primũ, & Binomiũ mediũ secundũ. Tandẽ inuenimus tria genera irrationalium simpliciũ, ex quibus prodiere, sex species irrationalium; nempe duæ à singulis generibus; vna quidem per additionem, vt sunt, quas hic descripsimus prima *Maior*. Secunda *Rationale, ac medium potens*. Tertia *Bina Media potens*. Altera verò per ablationem nempe Prima *minor*. Secunda *Cum rationali medium totum efficiens*, & Tertia *Cum medio medio totum efficiens*, quæ omnes, si simul ennumerentur erunt 26. nempe 22. per additionem, & ablationem, & aliæ genericæ, nempè Mediæ, & irrationales simplicìter, & si placeat reperire etiam plures ex media infinitæ mediæ fiunt, vt supra diximus.

Addit verò Euclides multas harum linearum proprietates, quæ exoriuntur ab applicatione spatiorum irrationalium ad ipsas, seu ad aliquam rationalem: sed cum visum nobis sit, ea non pertinere ad elementa, noluimus in plura hunc tractatum extendere, cum hæc sufficiant ad naturam irrationallum, exortumque intelligendum: neque amplior earum cognitio ad prosecutionem Mathematices dessideretur.

EXPENSIO XII.

De commensurabilibus ad lineas irrationales.

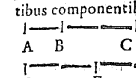
FÆcundum germen linearum irrationalium sunt lineæ ipsæ irrationalibus commensurabiles: nam ipsæ quoque illarũ naturam inducunt, & irrationales sunt: Vnde ad multiplicandas irrationales sufficiet multiplicare alicui irrationali semel repertæ commensurabiles.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. L.

Alicui ex Binomijs commensurabilis, ipsa quoque Binomium est.

IRrationalitas Binomiorum consistit in eo, quod totum sit incommensurabile omnino suis partibus componentibus, cùm partes ipsæ sint potentiâ commensurabiles. Sit ergo Binomium AC diuisum in sua nomina AB, & BC, & ei linea commensurabilis longitudine DF; ostendendum est DF esse quoque Binomium, & ostenderetur ex eò, quòd possit DF in duas partes diuidi, quibus totum erit irrationale, cùm ipsæ partes inuicem sint potentiâ commensurabiles.



Fiat itaque ex propos. 15. lib. 6. vt AC ad DF; sic AB ad DE. Eritque etiam ex propos. 22. quinti cum sit totum AC ad totum DF, vt ablatum AB, ad ablatum DE, reliquum quoque BC ad reliquum EF, vt totũ ad totũ, & vt ablatũ AB ad ablatũ DE. Quare ex 5. huius erunt commensurabiles AB, & DE, sicut etiam BC, & EF. Sed BC, & AB ponuntur incommensurabiles toti AC: Ergo etiam DE, & EF ipsi toti AC tales erunt, sed AC, & DF sunt commensurabiles, ergo ex propos. 8. huius. & ipsi suo toti DE, & EF erunt incommensurabiles.

Progr. 2. Probatur quoque esse DE, & EF duas tantùm potentiâ inuicem incommensurabiles. Nam ita ponitur AB ad DE, vt BC ad EF. Ergo *permutando* AB ad BC, vt DE respondet in proportione ad EF; sed AB, & BC sunt potentia commensurabiles. Ergo etiam ex 5. huius tales erunt DE, & EF. Quare cum DE, & DF sint duæ potentiâ tantùm commensurabiles ex ijs constet DF, etiam DF erit Binomium.

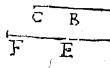
THEOR. II. PROPOS. LI.

Apotome commensurabilis, etiam ipsa Apotome est.

SIt AB Apotome, & BC congruens, & DE ipsi AB commensurabilis. *Dico, quod etiam hæc ipsa* AB *Apotome sit*; Scilicet ex subductione duarum Rationalium potentia tantum, irrationalis quædam linea resultans respectu ipsarum, à quibus subduci poterat.

Fiat itaque AB ad DE, vt AC ad DF ex propos. 15. lib. 6.

Quia itaque est totum AC ad totum DF, vt pars AB ad partem DE ablatas, erit quoque ex prop. 22. lib. 5. reliquum BC ad reliquum EF, vt totum ad totum, & vt ablatum ad ablatum, & ideo inuicem commensurabiles lineæ. Sed AB ablatum ponitur, vtpote Apotome incommensurabile ipsi comparti BC, & toti AC. Ergo etiam DE ex huius 5. erit incommensurabile ipsi DF, & EF. Quoniam inuicem AB, & DE sunt commensurabiles sicut, & inuicem tota AC, & DF, quare reliquum EF erit incommensurabile toti AC: vnde, & suo toti ei commensurabili DF ex propos. 8. huius.

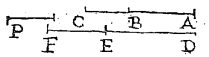


Probatur deinde, quòd DF, & EF sint potentiâ commensurabiles. Nam ostensum est, quòd sicut est AC totum ad DF totum sic, & BC pars reliqua sit ad EF partem reliquam. Ergo *permutando*, vt est AC totum ad suam partem reliquam BC in proportione, sic est DF totum ad suam partem reliquam in proportione, sed AC totum ad BC reliquam est potentiâ commensurabilis linea. Ergo ex propos. 5. huius etiam totum DF ad reliquum EF. Vnde cum DF sit residuum à subtractione Rationalis EF potentia tantùm commensurabilis respectu illius DF, à quâ subducta est, ipsa erit Apotome quoque, & respectu illarum, à quibus emanat eâdem naturam Apotome sortitur.

THEOR. III. PROPOS. LII.

Binomio medio commensurabilis, & ipsa Binomium medium est.

SIt P Rationalis, & AC Binomium medium diuisum in sua nomina AB, & BC & DF, toti Binomio AC commensurabilis. Et ex 15. lib. 6. fiat, vt tota AC ad totam DF, sic pars AB ad partem DE. Erit ergo ex 22. quinti etiam reliquâ BC ad reliquam EF, vt tota AC ad totam DF, & ideo, cùm DF ponatur commensurabilis ipsi AC; talis erit pars DE commensurabilis parti AB, ex propos. 5. huius, & sic EF commensurabilis parti BC. Quare respectu Rationalis P, erunt incommensurabiles, & mediæ DE, & EF; vt sunt AB, & BC ex propos. 28. huius. Secundo ostendetur esse inuicem potentiâ tantùm commensurabiles DF, & EF, sicut, & illæ sunt AC, & BC.



Quæ enim est, vt pars AB ad partem DE, sic pars BC ad partem EF, erit *permutando* pars AB ad partem BC, vt pars DE ad partem EF: Sed partes AB, & BC potentia tantùm ponuntur commensurabiles; Ergo etiam DE, & EF ex prop. 5. h. Quare, cum sint mediæ efficient aliquam ex ijs irrationalibus, quæ resultant per compositionem mediarum.

THEOR. IV. PROPOS. LIII.

Apotome media commensurabilis, & ipsa Apotome media est

SEd sit AB Apotome media in fig præced. & ei congruens BC, & fiat, vt AC ad DF, ita AB ad DE. Quia ergo, vt totum AC correspondet proportione ad totum DF, sic pars AB ablata ad partem ablatam DE. Ergo etiam ex propos. 22. lib 5. BC reliqua pars correspondebit ad reliquam EF, vt ablata AB ad ablatam DE, sed pars ablata AB est cõmensurabilis parti DE ablatę ex Thesi. Ergo ex propos. 5. h. reliqua BC, reliquæ EF, & totum AC toti DF erit commensurabile, & quia AC, & BC ponuntur medi; erunt etiam DF, & EF mediæ ex propos. 28. h. respectu rationalis P.

Probatur deinde, quòd sint inuicem potentia commensurabiles DF, & FE.

Nam ita est AC ad DF, vt BC ad FE; Ergo *permutando* ita erit fundamentum AC ad fundamentum BC, vt DF terminus ad FE terminum: Sed AC, & BC sunt potentiâ tantùm commensurabiles: Ergo ex propos. 5. h. etiam DF, & FE.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. LIV.

Compositis lineis irrationalibus commensurabiles sunt quoque eodem modo, ac ipsæ irrationales compositæ.

SIt AB, & BC duæ omninò irrationales, quæ cõpositæ faciant lineam AC irrationalem respectu P Rationalis. Dico, & DF ei commensurabilem, seu longitudine seu potentiá tantùm esse lineam quoque irrationalem, vt ipsa est.

Probatur. Sit diuisa AC in suas partes irrationales, quibus componitur AB, & BC. & fiat totum AC ad totum DF, vt AB ad DE ex propos. 15. lib. 6. ideoque etiam erit totum AC ad DF totum, sic altera pars BC ad alteram partem EF ex 22. lib. 5., & ideo partes AB ad DE, vt BC ad EF. Quare, cùm totum AC ponatur commensurabile toti DF, erit etiam pars AB commensurabilis parti DE, sicut, & alia compars BC erit alteri comparti EF commensurabilis. Quare, cùm partes sint commensurabiles, & totum AB rationali P ponantur incommensurabile, etiam partes DE, & DF erunt incommensurabiles ipsi Rationali P; sicut, & ipsum totũ DF toti AC commensurabile, & ipsi rationali P erit incommensurabile ex prop. 8. h.

Probatur secundo. Quod etiam illæ partes DE, & EF sint inuicem incommensurabiles. Nam ita ponitur AB ad DE, vt BC ad EF. Ergo *permutando* ita erit AB ad BC, vt DE ad EF; Sed BA, & BC sunt incommensurabiles omnino. Ergo ex prop. 5. h. etiam DE, & EF.

THEOR. VI. PROP. LV.

Quæ Reliquis ex lineis irrationalibus commensurabiles sunt, & ipsæ irrationales, & Reliquæ, vt illæ sunt.

SIt AB reliquum ex irrationalibus duabus AC, & BC, & commensuretur ei DE. Dico, quod etiam DE est reliquum, seu Apotome ex irrationalibus duabus.

Sit enim BC altera irrationalis à cuius subtractione ab irrationali AB remanſit AC, & ex prop. 15. l. 6 fiat, vt AB ad DE, ita AC ad DF; & quia AB commensuratur ipsi DE, etiam AC totum commensurabitur ipsi toti DF, & altera pars BC alteri comparti EF. Cum ergo AC totum, & BC pars ponantur incommensurabiles omninò rationali P etiam DF totum, & EF pars reliqua ex prop. 8. h. erit incommensurabilis omnino, & irrationalis rationali P.

probatur deinde; quòd etiam DF, & FE sint duę omninò incommensurabiles: Nam vt est AC ad DF, ita ponitur BC ad EF: Ergo *permutando* erit, vt AC ad BC; ita DF ad FE: sed AC, & BC sunt incommensurabiles omninò, & irrationales: Ergo ex prop. 5. h. etiam DF, & FE: ideoque, cùm sint inuicem irrationales, & irrationales quoque respectu P rationalis remanebit lineá DE Reliquum ab irrationali DE subductá Irrationalis EF sicut AE est reliquum subductá irratinnali BC ab irrationali AC.

Et hæc dicta sint genericè de illis lineis, quæ commensurantur irrationalibus; Ilcet enim Euclides ad species singulas descendat, in illis 22. Binomiorum, & Apotomarum speciebus, & probet singulas commensurabiles vnicuique speciei Binomio, vel Reliquo ad illam speciem pertinere, cui commensuratur; nobis tamen visum est, adeo specificam cognitionem necessariam non esse, maximè, quia irrationales minùs in vsum veniant in rebus mathematicis.

TRACTATVS XIII.

IN NVMERIS PROPORTIONALIBVS. PARS I.

De Numerorum Ratione.

POST Elementa primus scopus, in quem Mathematica tendit, sunt proportiones numericæ, vtpote, quæ cum sint rationales, magis etiam cognitioni sunt obuiæ, & proportionibus corporum maximè affines, illis ianuam aperiant. Sed priùs de numeris ipsis proportionalibus, vt qui proportionum Arithmeticarum sint fundamenta, agere opus est, & sub hac ratione fundamenti proportionum de illis sermonem facere. Possunt autem considerari, vt fundamenta proxima, & vt fundamenta remota, vt remota considerantur cum rationes ipsorum, quatenus se gerunt, vt continens, & contentum speculationem subeunt, at vt fundamenta proxima, cùm non iam sub ratione simplici, sed sub ratione relata ad aliam, & similitudinem alij rationi dicente animaduertuntur. Ibi interueniunt duo numeri solum; hic quatuor requiruntur, quoniam iam non considerantur, vt obtinent rationem; sed proportionem. Si ergo, vt rationem dicentes numeri accipiantur, tunc vocantur fracti: nempe partes alterius numeri, qui se tanquam totum, & continens gerit, & de istis prima hac tractatus parte peragemus, numeris, vt rationem dicentibus in secundam partem reseruantes.

EXPENSIO I.

De minutiarum proportionibus.

ANtequam ipsarum minutiarum Algorithmum proponamus, necesse est cognoscere ipsarum proportionem, quam hic breuiter indicabimus.

DEFINITIO I.

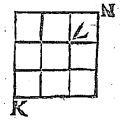
FRactio, minutiaue, aut numerus fractus est vna pars, seu plures partes alicuius totius; vel plurium totorum sub vnius ratione consideratorum.

Si enim totum sit sectum in 4. partes æquales, duæ ex ipsis, vel vna erunt numerus fractus: Item si tres aurei secti sint in 8. partes æquales, & ex illis accipiantur tres, illæ tres partes erit numerus fractus trium aureorum.

Constat verò quælibet fractio duobus numeris alter est, qui partes acceptas exprimit, & super lineolam ponitur, alter est, qui totius exprimit partes, & sub lineola ponitur hoc modo.

$\frac{1}{7}$ $\frac{4}{7}$ Qui super lineolam ponitur dicitur Numerator; quòd numeret partes, quæ accipiuntur ex partibus totius; qui verò sub lineola collocatur dicitur Denominator; quòd denominet, ex quo toto illæ partes sũptæ sint; ita in minutia $\frac{1}{7}$, in qua sunt tres quintæ partes vnius integri quinque partibus constantis, tres est Numerator quinque Denominator.

Præassumpt. 1. Oriuntur numeri fracti sæpius à diuisione integrorum, in quã, aut illa, quæ diuidũtur sunt integra singula, vt numerus diuidendus accipitur, vt plures partes plurium integrorum, vt vnius, & diuisio instituitur ad hoc, vt illæ partes in integros rediganꝰtur, vt 103. Iulij diuiduntur per 10. Iulios, quibus constat Aureus quilibet, vt Aurei fiant & sic fractio $\frac{3}{10}$, quæ remanet à diuisione significat vnius aurei tres partes, ex 10. ex quibus constat. Vel diuiditur aliquis numerus ad hoc; vt singulis distribuatur, V. g. 103. Aurei, vt distribuantur 10. Militibus, & tunc significat fractus $\frac{3}{10}$ tres Aureos in 10. æquales partes distributos. Ita si dentur V. g. in quadrato KN partes 9. ex quibus accipiantur 4. & fiat minutia $\frac{4}{9}$ KL constabit ex quatuor quadratis, quorum quodlibet est 9. pars totius; quare si singulæ partes in 9. partes iterum intelligantur diuisæ numerus 4. est etiam huius totius nona pars. Nam, si hæ singularum nouenæ partes simul erant quatuor nouenarios, etiam singulis diuisis in nouem partes, quatuor ex ipsis erunt quatuor nouenariorum nona pars. Nam fient 36. cuius 4. est nona pars, nempe earum nouem in quibus 4. partes intelliguntur diuisæ, vt fiant 36. Vnde est illud, quòd minutia ideſt 4. est pars numerato-



ris

tis silicet ipsius 4. à denominatore denominata, nempe nona pars.

THOR. I. PROPOS. I.

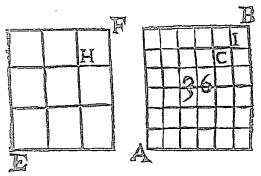
Minutia est ad suum integrum, vt numerator ad denominatorem.

*PRobatur. Quia numerus numerans exprimit partes totius, & tot habet vnitates, quot partes sunt in ipsa quanticate non integra, nempe minutiâ, sicut & denominator tot habet vnitates, quot integrum partes; Ergo vt est minutia ipsa ad integrum, ita est numerator ad denominatorem.

THEOR. II. PROPOS. II.

Minutiæ æquales, vel eiusdem integri quæ ad suas integras quantitates eandem habent proportionem, inuicem sunt æquales; quæ verò habet maiorem proportionem, illa maior est.

*SIt integri eiusdem AB 36 minutia AC, seu pars 16. nempe $\frac{1}{1}\frac{6}{6}$ sitque integrum prædicto æquale EF 9. cuius minutia sit 4. EH, ita vt sit $\frac{4}{9}$. *Dico minutias esse æquales si ad sua integra æqualia sint in eadem proportione.*



Probatur. Quia ex propos. 9. quinti, quæ magnitudines ad eandem, seu ad æquales eandem habent rationem æquales sunt inter se; sed minutia HE 4. & AC 16: ad æqualia integra EF, & AB similè habent rationem; Ergo sunt inuicem æquales.

Probatur secunda pars. Quia maior ratio ea est, cùm aliqua quantitas alterius plùs comprehendit, sed AI 25. dicit ex hypothesi ad suum totum AB 36. maiorem rationem, quam EH 4. ad EF 9. ergo plùs comprehendit AI 25. ex integro AB; quàm EH 4. ex integro BE 9. quæ integra sunt æqualia: Quare erit maior AI, quam EH.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si ad sua integra inæqualia minutiæ similem dicant proportionem erunt inuicem in proportione, vt sua tota, & integra existunt.

*SIt minutia KL 4. ad suum integrum KN 9. vt in schemate præced. præsupp. vt minutia AC ad integrum maius priori integro AB. *Dico, quòd minutia KL ad AC est, vt integrum KN ad AB.*

Probatur. Ita est KL minutia ad KN totum, vt AC minutia ad AB totum ex hypothesi. Ergo permutando erit KL ad AC, vt totum KN ad totum AC.

COROLLARIVM

HInc eruitur minutias, quarum numeratores eandem proportionem habent ad suos denominatores esse æquales; si denominator integri æqualis quantitatis exprimat; cum enim denominator vices integri obeat, & partes, quæ in ipsa quantitate sunt, exprimat, patet; quòd eadem ratio est de denominatoribus, ac de totis ipsis: Vnde, & minutia ad suum denominatorem maiorem rationem dicens maior erit, & ita Aurei $\frac{3}{9}$, & $\frac{4}{12}$ erunt minutiæ æquales. Quia ita se habet 3. ad 9. vt 4. ad 12. At $\frac{4}{5}$, & $\frac{4}{12}$ sunt minutiæ, quarum prima $\frac{4}{9}$ cum habeat maiorem rationem ad suum denominatorem; quam $\frac{4}{12}$ maior erit.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Duæ minutiæ eundem habentes denominatorem, eandem proportionem habent, quam numeratores, dummodo de eodem vel æquali toto verificentur.

DEtur minutia $\frac{3}{4}\frac{6}{4}$, & $\frac{5}{4}\frac{1}{4}$. Dico, *quòd habent eandem inuicem proportionem, quam numeratores 16. & 25.*

* Probatur, vt numerus 16. ad 36. ita est minutia AC partium 16. nempe ipsa quantitas in schemate præc. ad integram quantitatem BA ex 1. h. vt autem numerus 36. ad 25. ita est AB ad AL. Ergo *ex æquo* ita erit 16. ad 25. relicto medio 36. vt quantitas AC ad quantitatem AI.

EXPENSIO II.

De fractionum valore.

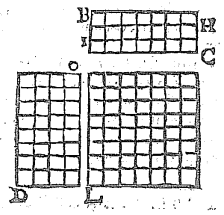
CVm à proportione, quam dicunt numeratores ad denominatores minutiæ, pro vt vidimus valore crescant, & maiores sint, videndum modo est; quomodo earum valor dignosci queat.

PROBL. I. PROPOS. V.

Duas minutias diuersarum denominationum ad eandem reducere denominationem.

SInt datæ minutiæ $\frac{4}{7}$, & $\frac{1}{8}$. Velimusque cognoscere valorem harum minutiarum, ideſt quænam ad suum idem, cuius sunt minutiæ, maiorem proportionē dicat. Alternatim denominatores vnius cum numeratoribus alterius multiplicentur V. g. 3. per 7. & fiant 21. & è contra 4. per 8. & fiant 32. deinde denominatores inuicem, qui exprimāt partes ipsius totius, & fiat 56. Dico eandem esse minutiam $\frac{3}{5}\frac{2}{6}$ quæ $\frac{1}{8}$, & $\frac{3}{5}\frac{2}{6}$ quę $\frac{4}{7}$.

* Probatur. Nam, cùm sint numerator 3. & denominator 8. multiplicati per eundem numerum 7. erit ex 17. l. 7. elem. eadem proportio 3. ad 8. quam 21. ad 56. ex prima vero propos. h. minutiæ, quæ ad suum totum idem, habent æqualem proportionem, æquales sunt; quare CB minutia constans tribus octauis partibus CI, & IH, & HB erit æqualis CB ipsi toti, prout constat 24. partibus minoribus ex 2. h. propos. cùm ad CL totum eandem dicat proportionem.



Sic in OD cōstante quatuor partibus septimis, cū sit 4. multiplicatus per numerū eundem 7. & sit factus 32. & item totum 8. sit multiplicatum per 7. & factum 56. habebit eandem proportionem 4. ad 7. quam 32. DO minutia ad 56. CL totum: Ergo ex 1. propos. h. $\frac{3}{5}\frac{2}{6}$, & $\frac{4}{7}$ erunt æquales, & erit eadem minutia DO. Quare duæ minutiæ $\frac{1}{6}$, & $\frac{1}{7}$ erunt redactæ ad eundem denominatorē, cum $\frac{3}{5}\frac{2}{6}$, & $\frac{3}{5}\frac{2}{6}$ illis sint æquales.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Plures, quàm duas minutias diuersarum denominationum ad eandem reducere.

SInt datæ minutiæ $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, quę ad eandem denominationem redigendę sint. Multiplicentur simul ordinatim denominatores, nempe 2. cum 7. vt fiat 14. & cum hoc producto 14. numerus 3. vt fiant 42, & cum hoc producto 42. numerus 5. vt fiat 210. Deinde diuidatur numerus productus per ipsum denominatorem. Diuidatur V. g. per primum 2. & erunt 105. qui multiplicetur per 1. numeratorem, & prodibit prima minutia $\frac{1}{2}\frac{0}{1}\frac{5}{0}$. Deinde idem numerus diuidatur per secundum denominatorem 7. & prodibit 30. multiplicetur hic numerus per numeratorem 4. & erit $\frac{2}{4}\frac{3}{1}\frac{0}{0}$. Idem fiat de tertio 3. nam diuiso 210. per 3. erit 70. qui multiplicetur per 2. & erit $\frac{1}{4}\frac{4}{1}\frac{0}{0}$. Sic diuidatur per 5. & erit 42. qui multiplicetur per 3. & erit vltima minutia $\frac{1}{2}\frac{3}{1}\frac{6}{0}$. Dico omnes datas minutias reuocatas esse ad alias $\frac{1}{2}\frac{1}{1}\frac{5}{0}$ $\frac{1}{2}\frac{4}{1}\frac{0}{0}$ $\frac{1}{2}\frac{3}{1}\frac{0}{0}$ $\frac{1}{2}\frac{3}{1}\frac{6}{0}$, eiusdem denominationis, quæ prædictis $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$ æquiualent.

* Probatur. Nam, cùm multiplicauerimus denominatores simul, habebit primus numerus tot duenarios, quot vnitates sunt in 7. & tot septenarios, quot vnitates sunt in 2. & sic habebit partes, quas numerus 2. & quas 7. habent, idem dicas de numero 7. multiplicato cum 3. & de 3. multiplicato cum 5. Vnde productus numerus 210. eas habebit partes, quas habent denominatores; nempe secundam, septimam, tertiam, quintam. Poterit itaque mensurari numero 5. 3. 7. & 2. reperiantur itaque istæ partes per diuisionem, & sic V. g. quinta pars 42. Quia ergo 42. est quinta pars, habebit eam proportionem 42. ad 210. quam 1. ad 5. Si ergo multiplicetur 42. per 3. & fiunt 126. & per 5. vt sint 210. erit eadem proportio 3. ad 5. multiplicatorum, quæ 126. ad 210. genitorum; cum per eundem numerum 42. multiplicati sint; quare ex propos. 15. erit eadem minutia $\frac{3}{5}$ & $\frac{1}{2}\frac{1}{1}\frac{5}{0}$, & sic de alijs.

PROB. II. PROPOS. VII.

Datas minutias diuersæ denominationis, vel eiusdem æstimare, quæ maior sit.

SIt data minutia $\frac{1}{7}$, & $\frac{2}{9}$, & volumus cognoscere, quænam maior sit. Multiplicentur inuicem numeratores vnius cum denominatoribus alterius, & consideretur, cuiusnam numerator maiorem numerum producat. Nam illa minutia est maior. Sic quia multiplicatus 4. per 5. producit 20. & 3. cum 7. producit 21. maior erit minutia $\frac{3}{7}$, quam $\frac{4}{5}$.

* Probatur. Nam si inuicem denominatores multiplicentur, & fiat 35. erit eadem minutia $\frac{2}{7}\frac{5}{5}$, quæ $\frac{2}{5}$, & $\frac{2}{7}\frac{0}{1}$, quæ $\frac{2}{7}$ ex 5. huius prop. Sed 21. maiorem proportionem dicit ad suum totum 35. quam 20. ex propos. 8. lib. 5. quia plures partes eius comprehendit. Ergo 21. erit maior, quam 20. ex secunda propos. huius. Vnde etiam erit maior $\frac{3}{7}$, quam $\frac{4}{7}$ ex propos. 12. lib. 5. Coroll.

COROLLARIVM I.

QVod, si iam sint æquales denominatores paret, eam minutiam fore maiorem, quæ denominatorem habet maiorem; ita est maior $\frac{1}{2}$, quam $\frac{2}{5}$, & cæt. Quod si numeratoribus ijsdem denominatores inequales sint, vt $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, erit illa minor minutia, cuius denominator maior est ex prop. 8. lib 5. quia suo toti minorem proportionem dicit. Nam $\frac{1}{6}$ minutiæ denominator superat numeratorem vnica parte tantum; at minutia $\frac{1}{7}$ denominator superest numeratori duabus vnitatibus: Vnde 3. magis comprehendit de integro 4. quam 3. de integro 5.

COROLLARIVM II.

HInc etiam est; Quod, si in aliquâ minutia numerator, aut æquet, aut superet denominatorē, quòd illa minutia æquet, aut superet integrū, cùm partes integri numerator exprimat, ita $\frac{2}{2}$, & $\frac{1}{1}$ sunt integra; at si essent $\frac{2}{3}$ tunc esset vnus integer, & insuper $\frac{2}{3}$, & sic propriè esset scribendum I $\frac{2}{3}$.

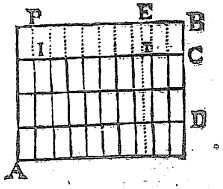
PROBL. III. PROPOS. VIII.

Valorem alicuius minutiæ, secundùm alias partes non à denominatore denominatas explorare.

SIt minutia $\frac{1}{4}$ vnius quadrati, quod constet 20. partibus. Volo scire, quot partes sint tres quartę illius quadrati: multiplico per partes 20. datas numeratorem 3. & facit 60. diuidoque per denominatorem 4. & productum erit 15. Tot ergo partibus constat minutia $\frac{1}{4}$, estque æqualis $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{5}\frac{5}{0}$.

* Probatur. Nam multiplicetur per 20. numerus 4. denominator, & quia 20. multiplicat 4. & facit 80. & 3. & facit 60. erit eadem proportio, ex 17. lib. 7. n. 3. ad 4. quæ 60. ad 80. Diuidat rursùs 4. eundem numerum 60. & 80. & generet 15.

& 20. eadem quoque proportio erit 15. ad 20. quæ 60. ad 80. ideſt, quæ 3. ad 4. Quare æqualis erit minutia ex 3. huius propoſ. $\frac{1}{4}$, & $\frac{1}{5}$.



Sic ex 10. parallelogrammis, quibus conſtat AB ob multiplicationem per 4. factum eſt AB totũ 40. minorum, & AC minutia æqualis priori ex tribus parallelogrammis, quorum vnum eſt AD factũ eſt 30, & tandem per diuiſionem per 4. diuiſum eſt totum in 10. parallelogramma, quorum vnum eſt AP, & item minutia, & facta eſt AE æqualis minutiæ AC.

Quod ſi minutia intelligatur diuiſa per denominatorem, vt def. 1. aduertimus V. g. remanſerint ex aliqua diuiſione facta per 4. tres integri: vt ſint $\frac{3}{4}$, tunc tria V. g. parallelogramma intelliguntur diuiſa in 4. partes, quorum trium parallelogrammorum ſimul ſumptorum minutia eſt tertia pars, aut tres illarum amplectitur, & aliquis deſiderat ſcire, quot ex decem partibus, in quas illa tria parallelogramma intelliguntur, diuiſa comprehendant $\frac{1}{4}$ ipſorum. Tunc eodem modo agendum eſt. Ratio eſt, Quia accepta vnitate V. g. AD, ea habet eandem rationem ad 3. cũ 1. multiplicando 3. faciat 3. ex 17. lib. 7. quam 10. ad 30. item per 3. multiplicatus: Si verò diuidatur per 4. eadem ratio erit $7\frac{1}{2}$ ad 10. quæ 3. ad 4. cum 30. diuiſus per 3. faciat 10. & idem 30. diuiſus per 4. faciat $7\frac{1}{2}$. cumque idem numerus vtrobique diuidatur quotientes $7\frac{1}{2}$ & 10. habebunt eandem rationem, quam numeri diuidentes 3. & 4. Quare minutia AT erit tres quartæ partes minutiæ AC tribus parallelogramis conſtantis, quorum vnum eſt AD.

Aduerte tamen; quòd ſi quando, vt hìc $7\frac{1}{2}$ numerus, qui prouenit non ſit integer; tunc propriè non poteſt ad eam denominationem redigi minutia; quia ſilicet minutia non ſolet per numeratorem, cui fractus adhæreat exprimi; vt fieret, ſi numerator ſtatueretur $7\frac{1}{4}$; ideoque minutia redigetur ad aliã æquialentem $\frac{1}{2}\frac{1}{0}$, vel ſi detur 10. & velit aliquis, exhiberi minutia, cuius numerus 10. ſit denominator, tunc reſpondebitur, quod propriè nequit fieri, ſed æquialenter,

PROBL. IV. PROPOS. IX.

Tam numeratoris, quam denominatoris maximam communem menſuram inuenire.

SIt datus numerus $\frac{1}{7}\frac{8}{7}\frac{3}{7}\frac{4}{8}$, cuius tum numeratoris, tum denominatoris maxima communis menſura ſit reperienda. Diuidatur denominator 2758 per numeratorem 1970. & reſiduum V. g. 788. diuidat rurſùs numeratorem, & 394. diuidat rurſus reſiduum præcedens 788. aut nihil remanet, aut aliquid: ſi aliquid remaneat; rurſùs idem faciendum, diuidendo reſiduum maius per reſiduum minus, donec ad vnitatem deuentum ſit, & ſi ad eam peruenietur, erit ea cõmunis menſura, nec aliam communem menſuram ij numeri habebunt, & ideo vocabuntur inter ſe primi; at ſi ad vnitatem non peruenietur, vt hoc exemplo, in quo diuiſo reſiduo 788. per reſiduum minus 394. nihil remanet, ideo 394. erit communis amborum menſura maxima.

Prob. ex propoſ. 2. lib. 7. elem. Nam iam 394. menſurat ex æquo 788. reſiduũ: hoc autem reſiduum 788. menſurat 1970. & hoc menſurat 2758. Ergo 394. menſurat etiam 2758. Quod vero etiam ſit maxima communis menſura patet, & probatur eiuſdem prop. 2. l. 7. elem.

PROBL. V. PROPOS. X.

Minutiam ad minorem denominationem redigere.

MInutię aliquando adeo magnis numeris proponuntur, vt non facilè earum proportio intelligatur, quis enim non faciliùs intelligat $\frac{1}{7}$ quam $\frac{1}{4}\frac{5}{7}\frac{7}{9}\frac{0}{8}$. Imo aliquando magna minutia alicuius reſidui diuiſionis per minimos exprimitur, cùm tamen computus apparenter hoc non exhibeat, V. g. ſit numerus 24822. diuiſus per 2758. quotiens erit 9. & reſiduum erit $\frac{1}{4}\frac{5}{7}\frac{7}{4}\frac{0}{8}$, qui numerus apud auctores reperietur expreſſus per hunc $\frac{8}{7}$ minimum numerum illi minutiæ æquialentem: Vnde oportebit cognoſcere eandem minutiam ſub diuerſis numeris poſſe exprimi; ne aliquis putaret errorem irrepſiſſe in computo aliquo apud Mathematicos breuiſſimis terminis expreſſo.

Ita igitur, ſi reducenda ſit aliqua minutia ad minimos terminos, erit agendum: Repertâ maximâ communi menſurâ ex antecedenti diuidatur per eam, tum numerator, tum denominator V. g. datę minutię $\frac{3}{7}\frac{5}{7}\frac{7}{7}\frac{0}{8}$ diuidatur per maximam menſuram 394. tam numerator 1970. & prodibit pro numeratore 5. tum denominator, & exeret pro denominatore 7. ita erit noua minutia $\frac{5}{7}$ quam Dico æquialere minutiæ $\frac{1}{4}\frac{5}{7}\frac{7}{7}\frac{0}{8}$.

* Probatur eadem proportio eſt 5. ad 7. quam 1970. ad 2758. cum vterque numerus ſit per 394. diuiſus, & quotietes ſint 5. & 7. ex pr. 17. lib. 7. Quare ex 3. propoſ. Cor. huius erit æqualis minutia $\frac{1}{7}$ minutiæ $\frac{5}{4}\frac{5}{7}\frac{7}{7}\frac{0}{8}$.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Integros ad minutiam redigere.

SInt dati integri 7. qui reducendi ſiut ad minutiam denominatam à numero 9. multiplicetur 7. per 9. & erit productus 63. qui erit numerator, ſtabitque minutia $\frac{6}{9}\frac{3}{1}$.

* Probatur. Denominator exprimit integrum in eas partes, quas habet, ſeu numeros diuiſum. Ergo tot erunt nouenarij, quot Integri. Sed integri ſunt 7. Ergo nouenarij erunt quoque 7. Numerus verò 9. ſepties acceptus facit 63. vnde erunt $\frac{6}{9}\frac{3}{1}$.

EXPEN-

EXPENSIO III.

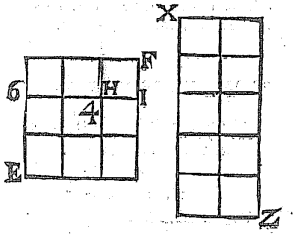
De fractorum numerorum additione.

ADditio fractorum facilis eſt, & ferè eadem, quæ integrorum; quare ad eam declarandam vnica propoſitio ſufficiens erit.

PROBL. I. PROPOS. XII.

Minutias eiuſdem denominationis, aut diuerſæ ſimul addere.

SInt primo addendæ minutiæ eiuſdem denominationis $\frac{5}{9}$, & $\frac{6}{9}$. Simul colligantur numeratores, & ſint 10. & ſupponatur denominator, & ſint $\frac{1}{9}\frac{0}{0}$, ideſt 1. & $\frac{1}{9}$. Dico *duas minutias eſſe ſimul additas*.



* Probatur; vt eſt numerator numerus 6. ad denominatorem 9. ita eſt minutia EI ad integrum EF ex propoſ. 1. Et vt eſt numerus 4. ad denominatorem 9. ita eſt minutia EH ad integrum EF ex 1. huius. Ergo ex propoſ. 25. lib. 5. compoſitus numerus 6. prima quantitas cum 4. quinta, habebit eandem rationem ad denominatorem 9. ſecundam, quam EI tertia cum EH ſexta ad integrum EF quartam quantitatem: ſed 6. & 4. numerus eſt ad 9. vt 10. ad 9. ſed vt 10. ad 9. ita fiat ZX minutia ad integrum EF. Ergo ZX ad integrum EF erit, vt EI, & EH ad integrum EF. Vnde ZX erit minutia æqualis EI. & EH. & dicet eandem proportionem ad integrum, quam 10. ad 9. Vnde bene quoque exprimetur per numerum $\frac{1}{9}\frac{0}{0}$, vt requiritur in expreſſione minutiæ ex prima propoſ. huius.

Idem verò agendum etiã, ſi ſint plures minutię, quam datæ, vt $\frac{1}{7}\frac{2}{7}\frac{4}{7}\frac{5}{7}$. Nam omnes iſtæ minutiæ ſimul collectæ efficient $\frac{7}{7}\frac{3}{7}$ ideſt 2. & $\frac{3}{7}$, ſic agito in cæteris.

Si verò denominatores minutiarum ſint diuerſi; tunc redigentur ex ſupradictis ad eãdem denominationem, & eadem ſeruabitur regula, eademque oſtenſio valebit.

EXPENSIO IV.

De Minutiarum ſubductione.

EAdem prorſus ratio eſt de ſubductione, quæ de additione.

PROBL. I. PROP. XIII.

Minutiam minorem à minutia maiore ſubducere.

SI duæ minutiæ, quarum minor à maiore ſubducenda ſit. Subducatur numerator minoris à maiore, & reſiduum erit minutia, quæ poſt ſubtractionem remanet. Ita ſi $\frac{1}{4}$ à $\frac{4}{7}$ ſubducenda ſit, deducto 1. 3. à 4. reſiduum erit $\frac{3}{7}$ ſic ſi $\frac{6}{9}$ à $\frac{7}{9}$ deducatur, reſiduum erit $\frac{1}{9}$.

Probatur. Quia enim 4. detractus à 7. relinquit 3. erit 3. & 4. æqualis numero 7. Ergo, & minutia 3. & 4. expreſſa erit æqualis quantitati minutiæ expreſſæ numero 7. Vnde ablata quantitate reſpondente numero 4. remanebit quantitas reſpondens numero 3.

At ſi ſint minutię diuerſorum denominatorum. Priùs in vnam denominationem ſunt reuocandæ, vt ſupra docuimus, & ſic inſtituenda eſt, vt priùs, operatio.

EXPENSIO V.

De fractorum multiplicatione.

MInutia multiplicatur, aut per minutiam allam, aut per numerum integrum cum minutia, aut per numerum integrũ, aut mutuò duo integri cum duabus minutijs, &c.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

Inuicem Minutias multiplicare.

SInt multiplicandæ minutiæ $\frac{4}{5}$, & $\frac{6}{5}$ multiplicentur inuicem numeratores, & fiat 24. Deinde denominatores, ſeu ſint eiuſdem, ſeu diuerſæ denominationis, & fiant 81. Ergo numerus ex multiplicatione $\frac{4}{5}$, & $\frac{6}{5}$ productus eſt minutia $\frac{2}{5}\frac{4}{1}$ ſic $\frac{1}{5}$, & $\frac{1}{5}$ multiplicantur ex numeratorum multiplicatione faciendo 6. & denominatorum faciendo 12.

* Prob. Illa eſt multiplicatio, in qua toties componitur is, qui multiplicatur, quot ſunt in multiplicante vnitates; vnde genitus V. g. 15. eam habet proportionem ad multiplicatum 5. quã habet 3. multiplicans ad vnitatem. Data ſit ergo minutia $\frac{3}{7}$, & $\frac{1}{7}$ multiplicetur 2. per 3. numeratores, & fiant 6. & 5. per 7. denominatores, & fiant 35. Dico *quod minutia* $\frac{6}{1}\frac{5}{7}$ *ita eſt ad minutiam* $\frac{1}{7}$, *vt* $\frac{3}{7}$ *eſt ad vnitatem*, & ideo minutiam $\frac{6}{1}\frac{5}{7}$ eſſe genitam ex minutia $\frac{1}{7}$ per minutiam $\frac{3}{7}$.

Probatur. Nam; cùm 7. multiplicatus per 5. produxit 35. erit eadem proportio producti 35. ad multiplicatum 7. vt multiplicantis 5. ad 1. Idem dicas de numeratoribus; nam 6. ad 3. erit, vt 2. ad 1. ob eandem rationem. Cum ergo tam denominator 35. ad denominatorem 7. generantę, quã numerator genitæ minutiæ $\frac{6}{1}\frac{5}{7}$, nimirum 6. ad numeratorem 3. minutiæ generantis $\frac{1}{7}$ dicat eam proportionem, quam numerator 2. dicit ad 1. & denominator 5. dicit ad 1. minutiæ $\frac{3}{7}$ multiplicãtis, tota minutia, nempe ſimul numerator, & denominator $\frac{6}{1}\frac{5}{7}$ generata erit ad totum $\frac{1}{7}$ multiplicatã, & generantem, vt minutia tota multiplicans

$\frac{2}{3}$ est ad 1. ideo erit ea, quæ multiplicabit $\frac{1}{3}$, & generabit $\frac{6}{3}$.

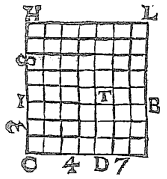
COROLLARIVM

HInc vides maiorem esse rationem in minutiâ genitâ denominatoris ad numeratorem, quàm in minutijs generantibus denominatorum ad numeratores: si quidem 3. ad 2. est proportio sesquialtera, & 4. ad 3. est proportio superparticularis sesquitertia, at verò 6. ad 12. est dupla, ad quod explicandum.

THEOR. I. PROP. XV.

Genitus numerus in multiplicatione minutiarum habet proportionem compositam, ex proportione minutiarum generantium.

SIt $\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{4}$ docet regula multiplicationem numeratorum simul, & denominatorum simul, sed hoc est proportiones componere. Siquidem ex def. 1. lib. 8. per mutuam multiplicationem duorum denominatorum fit planus numerus, item fit alius planus numerus per multiplicationem numeratorum; sed ex propos. 10. lib. 8. elem. duo plani numeri inter se rationem habent ex lateribus compositam: Ergo, & hi duo numeri denominator, & numerator habebunt proportionem



a lateribus compositam inuicem. Sic si adsit numerus $\frac{2}{5}$ DH, & alius $\frac{1}{7}$ CB, si multiplicauerimus latus 8. per 7. efficiemus planum num. 15. CL, & 3. per 4. planũ 12. CT, qui habebunt eam proportionem compositam ex $\frac{2}{5}$, & $\frac{1}{7}$. Quoniam si multiplicentur 3. numerator per 8. denominatorem efficiemus 24. & 12. ad 24. erit eadem proportio, vtpotę multiplicati per eundem 3. quæ 3. ad 8. sic 24. & 56. erit eadem proportio, quæ 3. ad 7. vtpote multiplicati per eundem numerum 8. sed proportio 12. ad 57. est composita ex proportione (defin. 4. lib. 7.) n. 12. ad 24. & 24. ad 57. ergo etiam ex proportione 4. ad 8. & 3. ad 7.

COROLLARIVM

HInc elicito non esse mirum; si magis augeatur proportio denominatoris ad numeratorem in genitis, quam ea, quæ est in generantibus. Nam genitæ minutiæ denominator ad numeratorem, cum sit composita ex proportionibus generantium minutiarum est maior. Vnde numerator geniti debet plurles, vel saltem plus cõprehendere suum numeratorem ob maiorem proportionem, quam ei dicit, quàm denominator minutiarum generantium ad suum numeratorem, ad quem dicunt proportionem simplicem.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Minutiam per integrum, cuius est minutia multiplicare.

ACcipitur integer tanquam minutia supponendo integro 1. vt fiat ex ea, velut fractio ab vnitate denominata; deinde regula præcedens adhibeatur. Sic si sit multiplicanda minutia $\frac{2}{3}$ per numerum 7 fiat $\frac{2}{3}$, & adhibita regula tradita fient $\frac{14}{21}$, vel 4. $\frac{2}{3}$.

* Prob. Tum ex antecedenti, tum quia, cum in minutiâ integrũ exprimat denominator diuisũ in tot partes, quot in eo sunt vnitates, integra 7. si numerator sit 3. continebũt septies trinas partes, seu septem ternarios, ex quibus singulis ternarijs duas partes tantùm æquat minutia $\frac{2}{3}$. Si ergo tot tertiæ partes ex singulis septem integris tribus partibus compositis accipiantur, quot vnitates sunt in 2. erunt 14. tertiæ partes, vtpote, quòd à singulis septem duæ tertiæ partes accipiantur. Vnde conficient minutiam $\frac{14}{3}$, & numerum $4\frac{2}{3}$.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Numerum integrum cum integro minutiæ adnexo multiplicare.

INteger ad minutiam reuocetur, & fiat deinde, vt supra, sic, si sint multiplicandi 7. per 2. & $\frac{2}{3}$; integer 2. cui adhæret minutia in tertia proiicietur multiplicando per denominatorem, vt fiant $\frac{6}{3}$: deinde numero 7. ad modum minutiæ accepto, $\frac{2}{3}$ prima regula adhibeatur, fientque $\frac{14}{3}$.

Probatur ex 14. propos. ac etiam eodem modo velut præcedens. Nam integrum quodlibet ex duobus intelligitur diuisum in tres partes, ex quibus minutia $\frac{6}{3}$ octo tertias partes comprehendit. Si ergo ex illis accipiantur 8. tertiæ partes toties, quot vnitates sunt in 7. non est dubium; quòd fient 56. tertiæ partes; nempe minutia $\frac{14}{3}$.

COROLLARIVM

HInc est, quod eodem modo multiplicetur integer cum minutia per minutiam solùm. V. g. 2. $\frac{2}{3}$ per $\frac{2}{3}$ reducendo integrum ad minutiam, & faciendo $\frac{6}{3}$, & $\frac{2}{3}$. Deinde multiplicando numeratores simul, & denominatores simul, & efficiendo minutiam $\frac{4}{9}$.

Sic, si multiplicanda sint inuicem integra duo, quibus minutiæ adhęreant idem præstabitur V. g. sint 2. & $\frac{2}{3}$ multiplicandi per 4. $\frac{2}{3}$: reducetur ad minutiam suam vtrumque integrum; primum quidem ad $\frac{8}{3}$, secundum verò ad $\frac{12}{3}$; & deinde eodem modo res præstabitur, & fient $\frac{32}{9}$.

* Quod sic ex dictis propos. 14. probo. Quia 8. multiplicat 22; ita erit genitus 176. ad 22. vt 8. ad 1. Rursùs, quia 3. multiplicat 5. ita erit genitus 15. ad 5. vt 3. ad 1. ex defin. 16. Tract. 8. Quare etiam simul 176. & 15. ideſt $\frac{32}{9}$ erit ad 22. & 5. ideſt ad minutiam $\frac{4}{9}$, vt 8. & 3. simul nimirũ $\frac{8}{3}$ ad vnitatẽ; vnde $\frac{4}{9}$ minutia erit multiplicans.

COROL-

COROLLARIVM.

HInc est videre numeratores in minutijs siue ex additione collectis, seu ex multiplicatione genitis aliquando prodire maiores suis denominatoribus, & ideo superare minutias ipsas sua tota, quod in multiplicatione præcipuè tunc solùm aduenit, cum iam numeratores multiplicandi erant denominatoribus in aliquo maiores. Si verò quis cupiat in integra, vt priùs restituere hoc consequetur; si ipsos numeratores per denominatores diuidat. Sic, si quis cupiat agnoscere, quot integra in minutia $\frac{14}{3}$ $\frac{6}{3}$ contineantur, diuidat per 15. & inueniet integra 11. & $\frac{4}{15}$.

Porrò Multiplicatio probatur per diuisionem. Vnde operę pretium erit, priùs addiscere diuisionem, quam modo trademus.

EXPENSIO VI.

De Minutijs diuidendis.

QVi intellexerit minutiarum multiplicationem, facilis el euadet diuisio, quòd fere idem sit, vt modo videri poterit.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Minutiam, quam alia data minutia per aliam minutiam mensuret, reperire.

SIt data minutia $\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{3}$, & iubeatur quis reperire minutiam aliquam, quam minutiæ datæ metiantur. Multiplicentur vnius inuicem numerator, & denominator, vt 3. & 7. & fiant 21. & per hunc numerum multiplicetur numerator 2. & denominator 5. alterius, & fiat minutia $\frac{2}{21}$.

* *Dico hanc minutiam metiri minutia* $\frac{1}{3}$.

Probatur. Quia 21. multiplicat 2. & 5. Ergo producti 42. & 105. erunt inuicem, vt 2. ad 5. ex 17. lib. 7. & sic 42. metietur 105. vt 2. mensurat 5. Sed etiam 3. & 7. mensurant 21. qui per 2. mensurat 42. & per 5. metitur 105. ergo etiam $\frac{5}{3}$ metietur $\frac{2}{105}$ ex 9. pronunc. Tract. 8.

Reperiemus secundò numerum per quem minutia $\frac{1}{3}$ metitur minutiam $\frac{2}{105}$. Sic fiat 2. per 7. & prodibit 14. numerator, deinde 3. per 5. denominatores vnius cum numeratoribus alterius minutiæ multiplicando, & habebimus 15. denominatorem, & habitque minutia $\frac{14}{45}$, per quam dico minutiam $\frac{1}{3}$ metiri minutiam $\frac{2}{105}$.

Et probatur. Nàm idem 2. multiplicauit 7. & fecit 14. multiplicauit quoque 21. in præced. probatione, & fecit 42. ergo, ex 17. septimi, ita est 7. ad 21. vt 14. ad 42. Quare ex def. 18. Tr. 8. talis pars erit 7. numeri 21. quæ 14. 42. sed 7. metitur 21. per 3. ex ostensione 1. partis, ergo etiam 14. metietur 42. per 3. & ideo etiam è contra 3. metietur 42. per 14. Rursus Quoniam 3. multiplicauit 5. & fecit 15. & 5. multiplicauit 21. vt supra, & fecit 105. ita erit 3. ad 21. vt 15. ad 105. sed 3. metitur 21. per 7. Ergo etiam 15. metietur 105. per 7. & ideo etiam 7. metietur 105. per 15. Ideoque $\frac{1}{3}$, metietur minutiam $\frac{4}{105}$ per minutiam $\frac{14}{45}$.

COROLLARIVM

MInutiam, seu numeros, per quos altera minutiarum $\frac{2}{3}$ mensurat productum $\frac{4}{105}$ & quotientes $\frac{14}{45}$ confurgere à decussata datarum minutiarum $\frac{2}{3}$, & $\frac{1}{3}$ multiplicatione, nempè denominatorum vnius per numeratores alterius, & vice versa. Nam 2. per 7. facit 14. qui ter acceptus mensurat 42. & 3. per 5. facit 15. qui septies acceptus facit 105. Vnde quotientes 14. à numeratore vnius 2. per 7. alterius denominatore, & 15. à numeratore 3. per denominatorem alterius 5. confurgit. Quare minutia $\frac{14}{45}$ mensurat à minutia $\frac{2}{3}$ per minutiam $\frac{1}{3}$ nempe per $\frac{1}{3}$ inuersè sumptam.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

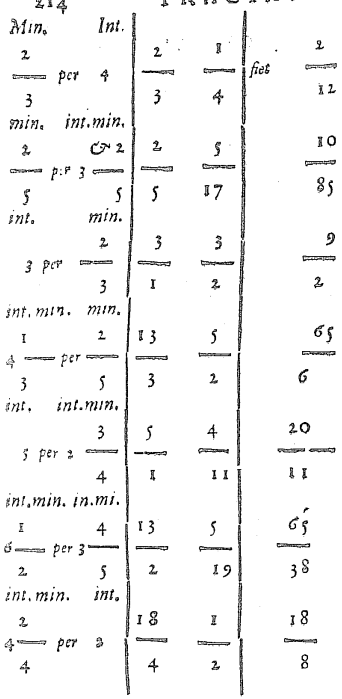
Minutiam per minutiam diuidere.

POtest diuisio fieri, ac multiplicatio, & eodem pacto præstari hac solum conditione seruata, vt diuisoris minutiæ numerator sumatur pro denominatore, & denominator pro numeratore sedibus eorum commutatis. Sint diuidendi $\frac{2}{3}$ per $\frac{1}{3}$ diuisoris $\frac{1}{3}$: numeri sedes mutent, & fiat $\frac{2}{3}$. Deinde multiplicentur inuicem numeratores, & fiat minutia $\frac{2}{105}$. Dico Minutiam $\frac{2}{3}$ esse per minutiam $\frac{1}{3}$. diuisam.

Fiat 3. in 7. numeras 21. & 3. in 21. fiat 42. sic 7. in 21. fiat 105.

* Probatur. Cum 42. se habeat ad 105. vt 2. ad 5. erit eadem minutia $\frac{42}{105}$ ac $\frac{2}{5}$ ex prima parte anteced. propos. Sed minutia $\frac{1}{3}$ mensurat $\frac{42}{105}$ per minutiam $\frac{14}{45}$ ex præced. 2. parte. Ergo etiã minutia $\frac{1}{3}$ mensurabit minutiam $\frac{2}{5}$ per $\frac{2}{3}$. Hęc autem minutia $\frac{14}{45}$ ex Coroll. confurgit ex multiplicatione vnius denominatoris per alterius numeratorem, & è contra, vel à multiplicatione vnius minutiæ per aliam multiplicantem sumptam inuersè. Ergo si sumatur minutia diuidens inuersè vt $\frac{3}{1}$, & multiplicetur per aliam producetur quotiens alterius V. g. $\frac{15}{14}$, qua mensurabit $\frac{42}{105}$ minutia $\frac{1}{3}$, & ideo etiam minutiam $\frac{1}{3}$, quæ est eadem cum ipsâ.

Eodem autem modo agemus, si voluerimus diuidere quamlibet minutiam per integrum, seu per integrum, cui minutia adhęreat, seu integrum per minutiam, vel integrum, cui minutia hæreat per minutiã, vel integrũ per integrum cũ minutia, vel tandem integrum cum minutia per integrũ solùm, vel cum minutia, qui sunt casus 7. Id verò reducendo semper integra quæcunque ad minutiam agemus, & more minutiarum ea assumendo, vt hic vides.



Obseruandum verò est diligenter, quinam numerus sit diuisor, vt eius numerus inuertatur; alioquin, si non diuisoris, sed diuidendi numerus inuertatur contrarium eueniet, vt experimentum docebit.

THEOR. II. PROPOS. XX.

Numerus, seu minutiæ quotiens potest esse aliquando maior minutiâ diuisâ.

SIt data minutia $\frac{6}{7}$ diuidenda per minutiam $\frac{2}{7}$. Factâ operatione $\frac{4\ 3}{1\ 6}$ minutia erit quotiens, & demonstrabit, quoties $\frac{2}{7}$ ingrediuntur in minutiâ $\frac{6}{7}$, quæ minutia $\frac{4}{1}\ \frac{3}{6}$ est minutia maior minutiâ diuisâ $\frac{6}{7}$.

* Probatur. Nam quotiens est numerus indicans, quot vicibus diuisor in numero diuidendo capiat: sed minutia diuidens multo minor, quam diuidenda potest capere tot vicibus, vt quotiens vel superet denominatorē proportionis minutię diuidēdę: Ergo potest esse maior ipsa exCor pr. 3 huius. Sic minutia $\frac{2}{7}$ in $\frac{6}{7}$ capit ter perfectè; & ideo 42. numerator etiam capit denominatorem 14. ter. At è contrà, si diuideretur $\frac{2}{7}$ per $\frac{6}{7}$ nam 6. non capit in 2. nisi pro tertia sui parte; & ideo esset quotiens $\frac{1}{3}$. Nam 14. minus est numero 42. pro tertia ipsius 42. parte, & ad illum habet proportionem, quam 1 ad 3 & quam $\frac{2}{7}$ diuisus numerus habet ad $\frac{6}{7}$ numerum diuidentem.

COROLLARIVM.

HInc itaque collige. Quod minutiæ quotientis numeratoris proportio ad denominatorem exprimit proportionem, quam habet minutia diuisa ad diuisorem. Nam, si numerator contineat denominatorem etiam minutia diuisa continebit diuidentem, vel semel, vel pluries prout numerator quotientis denominatorem continet, quod, si non continet; sed minor sit numerator denominatore in minutia quotiente, tunc exprimit proportionem minoris inæqualitatis, quam habet minutia diuisa ad diuidentem, vt $\frac{2\ 6}{4\ 7}$ exprimet proportionem subtriplam, quam habet $\frac{2}{3}$ ad $\frac{6}{7}$, & ideo exprimit, quod $\frac{2}{7}$ non continet, nisi tertiam partem numeri $\frac{6}{7}$, vt 14. non continet, nisi tertiam partem numeri 42. at è contra, si diuideretur $\frac{6}{7}$ per $\frac{2}{7}$ tunc quotiens esset $\frac{4\ 2}{1\ 4}$ exprimens, quod minutia diuisa continet diuidentem ter, & habet ad eam proportionem maioris inæqualitatis triplam.

EXPENSIO VII.

De Minutijs minutiarum.

ALiquando fracti numeri quoque suas fractiones habent, quæ duplici sensu accipiūtur, vel enim sunt fractiones vnius partis, quæ numero fracto reperitur. Sic, si dico duæ tertiæ partes vnius dimidij diuisum significo illud dimidium in 3. partes ex quibus possideo duas.

Alio verò modo accipitur, tanquam non vna pars numeri fracti, sed omnes partes simul per modum vnius essent diuisæ in alias partes, ex quibus omnes non assumerem, sed aliquas, vt, si dicerem $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{5}$ significo duas tertias partes, ac si essent vnica pars, diuisas esse in 6. partes ex quibus assumo 5. Scribitur autem fractio fractionum interiecto puncto pro linea sic $\frac{2}{3}$.$\frac{2}{5}$.

PROBL. I. PROPOS. XXI.

Fractiones fractionum ad simplices fractiones reuocare.

VT fractiones fractionum secundo sensu intellectæ ad simplicem fractionem reuocemus, numeratores inuicem sunt multiplicandi, & vltimus terminus genitus erit numerator minutię omnibus illis fractionibus fractionum equialentis; denominator autem erit numerus à multiplicatione mutuâ denominatorum genitus. Sic $\frac{2}{3}$.$\frac{4}{5}$ reducetur ad hanc $\frac{8}{15}$, & minutia reducetur ad hanc 6. $\frac{2\ 4}{6\ 0}$ multiplicatis inuicem numeratoribus 2. 3. 4. & denominatoribus 3. 4. 5.

A	B	C
2	3	4
3	4	5

* Probatur hanc regulam esse bonam, Nam quia intelligitur minutia secundò sensu. Ergo duæ partes totius 3. A erunt diuisæ in 4. Si ergo minutiæ minutiarum denominator 4. mensurat 2. numeratorem ex hypothesi; meosurabit etiam ex pronunc. 9. Tract. 8. denominatorem simplicis minutiæ A, qui est 3. qnem 2. mensurat. Ergo redigatur denominator A 3. in partes, quas continet denominatoris B 4. & in easdem partes A 2. numerator, fietque minutia $\frac{8}{12}$. & quia 3. & 2. A fuerunt multiplicati per eundem numerum 4. ita ex 17. sept. erit 2. ad 3. multiplicati, ac geniti 8. & 12. Sic numerator minutiæ minutiarum 3. B mensurat suum denominatorem B 4. & hic ex hypothesi numeratorem A 2. simplicis minutiæ. Redigatur itaque A 2. in partes, quas continet numeri B 4. & 3. & gignetur minutia $\frac{6}{12}$; quia autem 2. multiplicauit 4. & fecit 8. & 3. fecit 6. erit eadem proportio 3. ad 4. quæ 6. ad 8. Cum ergo sit 6. ad 8. vt B minutiæ minutiarum 3. ad 4. & 8. ad 12. vt A minutiæ simplicis 2 ad 3. Ergo etiam erit ex *æquo* 6. ex 2. in 3. genitus ad 12. ex 4. in 3. nascentem, vt numerator minutiæ minutiarum B 3. ad minutiæ simplicis denominatorē A 3. quare $\frac{6}{12}$ equialebit tribus quartis duarū tertiarū partiū. Nam vt magis res pateat, duę quartę partes numeri 12. sunt 8. quarum tres quartæ partes sunt 6.

At si in primo sensu minutia intelligatur, & de vnica parte minutiæ simplicis intelligatur fractus secundus, & minutia minutiæ: Tunc alio pacto oportebit procedere. Nam numerator idē persistet, 9 minutia minutię, at denominatoris cū denominatore minutię simplicis, vel antecedentis multiplicatio denominatorem dabit. Sic si sint $\frac{2}{3}$.$\frac{3}{5}$ fractionis secundæ idem 3. numeratoris vices obibit; at denominator consurget ex multiplicatione 5. cum 3. vt fiant 15. & stabit minutia $\frac{1}{1\ 5}$.

Prob. Nam, cùm numeri 2. intelligatur diuisa quælibet vnitas in 5. partes: Ergo 5. toties mensurabit 2. quot vnitates sunt in 2. & ideo etiam mensurabit 3. quot vnitates sunt in 3. ideoque si habeo tres quintas vnitatis, quæ est in 2. habeo etiam 3. quintas partes vnius vnitatis quæ est in 3. & quia omnium vnitatum 3. simul sumptarum quinque partes faciunt 15. habebo itaque minutiam $\frac{3}{1\ 5}$.

PROBL. II. PROPOS. XXII.

Minutiam minutiæ in primo sensu, minutiæ inserere, seu simul addere.

DIffert insitio à reductione. Nam ibi quærimus minutiam, quæ eiusdem valoris sit, ac minutia minutiæ, hic verò addimus minutiam minutiæ simplici minutiæ, ita vt ibi non interuenit prima, & simplex minutia, nisi tanquam denominator minutiæ secundæ, nec auget eam, sed restituit eandem non re, aut numero; sed valore: hìc autem minutia simplex additur minutię minutiarum, vt fiat maior etiam valore, & est propriè additio.

Fit ergo sic. Detur minutia $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$, & debeamus simul addere quatuor quintas partes vnius tertię, ad duas tertias. Numerator minutię simplicis in denominatorem minutiæ minutiarum ducatur. Nempe 2. in 5. vt fiat 10. & huic addatur numerator 4. minutiæ minutiarum, & sint 14. & hic erit numerator; denominatorem verò exhibebit mutua denominatorum multiplicatio, & erunt 15. stabitque minutia ex minutia simplici, & minutia minutiæ coaugmentata $\frac{1\ 4}{1\ 5}$.

* Probatur. Nam cùm 5. multiplicet 3, & multiplicet 2. & fiat minutia $\frac{1\ 0}{1\ 5}$ erit eadem ac $\frac{2}{3}$ sed quia 5. idem est, ac vna pars denominatoris 3. minutiæ simplicis ex præc. propos. parte secunda ideo $\frac{4}{1\ 5}$ erit eadem minutia, ac $\frac{2}{3}$.$\frac{4}{5}$ nimirum minutia $\frac{4}{5}$ simplicis $\frac{2}{3}$; cùm ergo habeamus $\frac{4}{1\ 5}$, $\frac{1\ 0}{1\ 5}$ poterimus simul addere, vt fiant $\frac{1\ 4}{1\ 5}$, quod est inferere.

Et idem agendum, si sint plures minutiæ minutiarum, vt si $\frac{2}{3}$.$\frac{3}{5}$.$\frac{4}{6}$ proponantur addendæ. Ex 2. in 5. fiunt 10. additō 4. fiant 14. ex 14. in 8. fiunt 112. additō 5. fiunt 117. & hic erit numerator: Denominator verò exeret ex mutuâ denominatorum multiplicatione 120. & erit minutia $\frac{1\ 1\ 7}{1\ 2\ 0}$ summa minutiarum $\frac{2}{3}$.$\frac{3}{5}$.$\frac{4}{6}$.

Aduerte autem minutiam nullam esse reducendā ad minimos terminos, dum vna alteri additur, licet valde augescat; sed tunc, cum omnino completa est operatio; alioquin sensus variaretur, & nihil recti colligeretur, sic $\frac{2}{3}$.$\frac{3}{5}$.$\frac{4}{6}$ prius ad 2. per 3. fiunt 6. additō 1. fiant 7. deinde per secundum 3. 7. fiunt 21. & additō 2. fiant 23. deinde 23. per 4. fiunt 92. additō 3. fiunt 95. pro numeratore, cum denominator ex multiplicatione denominatorum mutua colligatur 180. & fiat minutia summa prædictarum minutiarum $\frac{9\ 5}{1\ 8\ 0}$, quæ deinde potest rediri ad denominationem minorem per regulas traditas $\frac{5}{9}$.

PROBL. III. PROPOS. XXIII.

Minutiam minutiæ minutiæ simplici in secundo sensu addere, aut inserere.

SInt exhibitæ minutiæ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ intellectæ in secundo sensu, quæ sint simul addendæ. Minutiæ simplicis numerator 3. cum denominatore minutiæ secundæ 5. multiplicetur, vt fiant 15. deinde ipsi numeratores inter se multiplicentur 2. & 3. & sint 6. ad iunctaque simul 15. & 6. & fiant 21. pro numeratore; denominator verò erit numerus ex multiplicatione denominatorum 4. & 5. procreatus nempe 20.; stabitque minutia $\frac{2\ 1}{2\ 0}$, quæ erit summa prædictarum minutiarum $\frac{3}{4}$.$\frac{3}{5}$.

* Probatur. Nam quia 5. multiplicauit 3. & 4. ex 17. lib. 7. ita erit 3. ad 4. vt 15. ad 20. Quare ex 3. huius Coroll. eadem minutia erit $\frac{1}{4}$, quæ $\frac{1}{2}$.$\frac{5}{0}$. Rursus, quia 5. multiplicauit 4. qui sunt denominatores, & fecit 20. & 2. multiplicauit 3. numeratores, & fecit 6. ex propos. 21. huius eadem minutia erit $\frac{6}{2\ 0}$, quæ $\frac{3}{1\ 0}$.

Cum ergo habeamus eandem minutiam minorem $\frac{3}{1\ 0}$ expressam minutia $\frac{6}{2\ 0}$, & minutiam $\frac{1}{4}$ maiorem, & simplicem expressam numero $\frac{5}{2\ 0}$. Si eas addamus simul efficient minutiam $\frac{1\ 4}{2\ 0}$ summam minutiarum $\frac{1}{4}$, & $\frac{3}{1\ 0}$. At si plures minutiæ adsint, idem prorsus agendum. Sic, si habeamus $\frac{2}{3}$.$\frac{3}{5}$.$\frac{4}{6}$.$\frac{5}{7}$ nempe $\frac{3\ 5}{4\ 2}$, & 2 quintas trium quartarum duarum tertiarum, & tres quartas duarum tertiarum addendas ad duas tertias, ita agemus. Multiplicabimus 2. numeratorem primæ $\frac{2}{3}$ per denominatorem maximæ minutię minutiarum 4. & fiant 8. & deinde numeratores inuicem, & erunt 6. quibus simul additis conficient 14. hunc verò per denominatorem 5. sequentis minoris multiplicabimus, & fiet numerus 70. deinde omnes tres numeratores inuicem 2. 3. 2. & fient 12. quibus numero 70. additis erunt 82. quem numerum per denominatorem postremæ 6. multiplicabimus, & fiet 492. & deinde omnes quatuor numeratores inuicē 2. 3. 2. 4. vt sint 48. qui numerus addendus est numero 492. & erit numerator 540. Denominator verò erit numerus ex mutuâ multiplicatio-

plicatione denominatorũ productus, nempe 360. & minutia summa omnium prædictarum ſtabit $\frac{5}{6}\frac{6}{7}\frac{8}{8}$ ideſt $\frac{1}{2}$.

Porrò in hac Inſitione, ſeu additione terminj ante totalem additionem ad minimos numeros reduci poſſunt, ſi tamen numerator ſit minor quàm denominator, alioqui illa reductio eſſet potius cauſa confuſionis.

TRACTATVS XIII.

PARS SECVNDA.

De Numeris proportionalibus inueniendis.

HIc iam ipſos numeros, non vt rationem, ſed vt proportionem dicentes exquirimus, & docemus, tum numeros extremos proportionales inuenire, & conſequenter Auream regulam proportionum; tum mediam proportionalem, vnde extractionem Radicis quadratæ, tum etiam duos medios proportionales, & cubicam radicem inuenire docemus. Tractatus omninò, & abſolutè neceſſarius, ſine quo in Mathematicis proficere nemo poteſt.

EXPENSIO I.

De inueniendo datis tribus quarto proportionali, vel de regula proportionum.

HÆc regula, quâ datis tribus numeris quartus quæritur, dicitur Aurea ob eius vſum mirificum, ne dum in mathematicis; ſed & in omnibus humanis comercijs, vt ferè nihil in negotijs cõtractibuſue agatur, niſi hęc regula interueniat.

PROBL. I. PROP. I.

Tribus datis numeris quartum proportionalem inuenire, qui ita ſit ad tertium, vt ſecundus ad primum.

DIſponantur tres numeri dati in ſeriem, ita vt tertius, cui annexa eſt quæſtio, & cui quæritur quartus, qui ſit ei proportionalis, vt eſt ſecundus ad primum ſit vltimo loco, & huic ſimilis primo loco, cui verò quartus, qui deſideratur, debet aſſimilari ſecundo loco, V.g. ſit datus numerus 6. & 9. & 12. numero verò huic vltimo quartus proportionalis quæritur, nempe aliquis numerus, qui ſit in proportione ad 12. vt eſt 9. ad 6. Primo ergo loco ponendus eſt numerus 6. ſecundo 9. tertio 12. dicendo ſi 6. tanquam fundamentum habet pro termino numerum 9: numerus 12. acceptus, vt fundamentum, quem numerum proportionalem habebit, qui illi ita correſpondeat, vt 9. ad 6.? Sicque diſpoſiti, vt hic vides ſtabunt numeri, ſi 6. dant 9. quid 12.? Multiplicabitur, itaque numerus 12. per 9. & fient 108. genitus autem numerus diuidetur per 6. & prodibunt 18. hicque numerus erit quartus proportionalis.

Probatur ex 19. propoſ. ſeptimi Eucl. cum quatuor numeri proportionales fuerint, qui ex medijs generatur eſt æqualis ei numero, qui ex extremis conficitur; cùm ergo hìc ſint quatuor numeri proportionales, & ſit 6. ad 9. vt 12. ad 18. genitus numerus à medijs 12. & 9. qui eſt 108. erit æqualis numero, qui producitur ab extremis 6. & 18. Itaque habemus eundem numerum, qui ab extremis produceretur per multiplicationem mutuam mediorum: quare ex defin. 15. multiplicationis Tract. 8. numerus 108. toties continebit numerum 18. quot vnitates ſunt in 6. quia eſt idẽ numerus, qui produceretur à 6. & à 18. inuicem multiplicatis: Si ergo diuidatur per numerum 6. prodibit numerus, qui perquiritur, nempe numerus 18.

COROLLARIVM I.

COllige ex propoſ. 4. octaui non omnes numeros habere quartum proportionalem; eo quòd minimi ſint in datis rationibus: vnde enaſcuntur minutiæ in diuiſione geniti ex ſecundo, & tertio per primum ferè ſemper, quæ eodem modo ponendæ ſunt, vt in diuiſione integrorum tract. 8. monuimus Coroll. propoſ. 22. & more fractorum.

PROBL. II. PROP. II.

Datis numeris, cuius primo adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

SIt V. g. qui emerit 3. palmos ſerici cum $\frac{1}{7}$ quinque aureis, quæratur quot nummis aureis emet 32. palmos?

Si $3\frac{5}{7}$ dant 5 quid 32.?

Primo

Primo multiplicabimus integros ſecundum, & tertium. Nimirũ 32. p quinque, & facient 160. Iſte ergo numerus per integrum 3. & $\frac{1}{7}$ eſt diuidendus ex doctrina propoſ. 19. part. 1. Tract. huius. Supponemus itaque numero 160. vnitatem, & deinde redigemus integrum 3. in minutiam: multiplicabimuſque 3. per 7. vt fiant 21. addemuſque numeratorem 5. & fient 26. itaque minutia erit $\frac{26}{7}$, & ſic numeri diſpoſiti erunt.

160 $\frac{26}{7}$ diuiſoriſque mutato loco 7 $\frac{26}{1}$

Multiplicabimus 160 per 7. & prodibit genitus quotiens $\frac{7\,2\,0}{2\,6}$, quem, vt redigamus ad integra diuidemus per 26. & prodibit numerus $43\frac{1\,2}{2\,6}$. Itaque 32. palmi ſerici venient aureis, $43\frac{1\,2}{2\,6}$ ſi 3 $\frac{5}{7}$, quinque aureis venduntur.

PROBL. III. PROPOS. III.

Datis duobus numeris, cuius ſecundo adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

Si Equi 5. aureis 35 $\frac{4}{9}$ quid 27?

SInt V.g. Equi quinque, qui empti ſint 35. aureis, & $\frac{4}{9}$. Quæritur, quot aureis Equi 27. conſtabunt. Ex Tract. h.p. 1. prop 11. integra in fractiones proiciãtur, nempe 35 $\frac{4}{9}$ in $\frac{3\,1\,5}{9}$, & numero 27. ſupponatur 1. & ſic ſtent numeri inuicem multiplicandi.

27 & 309 / 1 9

Qui generabunt numerum $\frac{8\,3\,4\,5}{9}$. qui diuidentur per numerum 5. Equorum ex propoſ. 19. Tr. h. 1. & erunt $\frac{8\,3\,4\,1\,1}{4\,5}$, quæ fractio ad integra redacta erit 185. & $\frac{1\,8}{4\,5}$, ideſt $\frac{6}{15}$. Ita Equi 27. conſtabunt aureis 185. & $\frac{6}{15}$.

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Datis tribus numeris, cui tertio adhæreat minutia, quartum proportionalem inuenire.

QVæratur, quot aureis 57. libræ, & $\frac{2}{3\,5}$. Zaccari veneant? dum tres libræ 14. ſolidis emuntur itaque numeri diſponentur.

Libræ 3. dant 14. ſolidos, quot reſtituent libræ 57. & $\frac{2}{1\,5}$?

Igitur, vt in anteced. numerus $57\frac{2}{15}$ in minutias proiciendus, vt ſint $\frac{8\,5\,2}{15}$; ex inde ſecundus numerus 14. per hunc tertium multiplicandus, & genitus prodibit $\frac{2\,1\,4\,2\,8}{15}$, qui deinde per 3. primum diuidendus erit ex part. 1. propoſ. 19. h. Tract. de fractis, fientq; $\frac{7\,1\,4\,2\,6}{4\,5}$, qui ad integra redacti dabunt 268. & $\frac{26}{45}$, ideſt $\frac{13}{45}$. Obſeruandum verò eſt, quòd fracti non ſunt ad integra redigendi, neque in hac, neque in antecedenti operatione; donec ſit completa operatio, ne impediatur, & confuſio enaſcatur.

PROBL. V. PROPOS. V.

Datis tribus numeris, cui primo, & ſecundo adhæreant fractiones, quartum proportionalem inuenire.

QVæratur, quid veneant 12. vlnæ panni; ſi $3\frac{1}{7}$ veneunt aureis 2. & $\frac{1}{7}$, itaque ita diſpoſiti ſtabunt numeri.

$3\frac{5}{7}$ dant $2\frac{3}{5}$ quid 12?

Multiplica ex prop. 17. huius Tract. par. 1. numerum 12. per $2\frac{3}{7}$ redigendo ad fractiones $\frac{2\,3}{7}$ & deinde ducendo 12. in $\frac{2\,3}{7}$, & fient $\frac{2\,7\,6}{7}$; deinde ex exponſ. 5. Tract. huius p. 1. diuido fractionem $\frac{2\,7\,6}{7}$ per integrum, & fractionem $3\frac{5}{7}$ nempe $\frac{2\,6}{7}$ multiplicando 7. per 156. & 26. per 5. & erit minutia $\frac{1\,3\,0}{1\,3}\frac{2\,6}{5}$ nimirum ad integros redacta 8. & $\frac{7\,8}{3\,5}$, ideſt $\frac{3\,4}{1\,7}\frac{6}{5}$ itaque 12. vlnæ panni conſtant aureis 8. & $\frac{3\,4\,6}{1\,7\,5}$.

PROBL. VI. PROPOS. VI.

Datis tribus numeris, cui ſecundo, & tertio minutia adhæreat quartum proportionalem inuenire.

SInt quatuor pedes muri, qui fiant pretio 6. aureorum, & $\frac{1}{2}$; quot aurei perſoluentur ob opus pedum muri 9. & $\frac{1}{2}$?

Redigentur ad fractiones 6. $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1\,3}{2}$, & 9 $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1\,9}{2}$; & deinde multiplicentur, & fient $\frac{2\,4\,7}{2}$ diuidantur deinde ex ſupra cit. propoſ. $\frac{1\,2\,3\,5}{2\,0}$ per 4. & fient $\frac{1\,2\,3\,5}{8\,0}$, quæ minutia ad integrũ redacta, fient aurei 16. & $\frac{15}{80}$; itaque 9. pedes muri, & $\frac{1}{4}$ efficientur pretio 16. aureorum, & $\frac{15}{80}$.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Datis tribus numeris, cui tertio, & primo adhæreat fractio quartum proportionalem inuenire.

EOdem modo fit. Quæratur V. g. ſi 4. vlnæ, $\frac{3}{8}$ emũtur pretio 20. aureorum, quot aureis $\frac{3}{7}$ vnius vlnæ ementur?

Si $4\frac{5}{8}$ vlnæ aureis 20. quid $\frac{3}{7}$?

Itaque multiplica 20. per $\frac{3}{7}$ ex expenſ. 4. ſupercitata, eruntque $\frac{6\,0}{7}$, qui fracti diuidentur per integrum, & fractionem $4\frac{5}{8}$ multiplicando, vt docetur propoſ. 9. expenſ. 5. ſupracit. eruntque $\frac{4\,8\,0}{3\,7\,0}$, itaque pretium erit 1. aureus, & $\frac{3\,7\,4\,0}{3\,7\,0}$, qui redigi nequeunt ad minorem denominationẽ, ideſt inſuper dandæ erunt 221. partes vnius aurei ex 259. in quas diuideretur.

PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

Datis tribus numeris, in quibus omnibus inuentatur fractio, quartum proportionalem reperire.

QVis tribus diebus, & ſeptem horis, nimirum in 3. & $\frac{7}{24}$ conficit 93. milliaria, & $\frac{1}{24}$; quæritur, quot milliaria conficiet 5. diebus, & 11. horis nimirum 5 $\frac{11}{24}$? Itaque redigentur integri 5. ad ſuam minutiam, & fiant $\frac{120}{24}$, ſic etiam 93 $\frac{7}{24}$ redigentur ad $\frac{2231}{24}$ & inuicem multiplicabuntur, eruntque $\frac{267720}{576}$, quæ minutia diuidetur per minutiam 3. & $\frac{72}{24}$ redactam ad $\frac{1728}{576}$, vt docemus expenſ. 5. huius de fractis, & producet $\frac{154656000}{1658880}$. Quæ minutia ad integros redacta dabit milliaria 155 $\frac{480000}{1658880}$ nimirum ferè $\frac{1}{3}$, itaque viator quinque diebus, & 11. horis conficiet milliaria 155 $\frac{1}{3}$, qui confecit diebus 3. & 7. horis milliaria 93. & $\frac{1}{6}$.

EXPENSIO II.

De probatione regulæ aureæ.

MOdus inueniendi quartum numerum proportionalem indiget frutinâ aliquâ, ob quam, quis certò agnoſcat ſe benè operatum fuiſſe; pro quo ſciendum eſt duobus aliis modis æquivalentibus quartus proportionalis inueniri, quos hic explicabimus; deſeruientque pro lydio lapide ad captandum experimentum de operationis rectitudine.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Datis tribus numeris quartum proportionalem aliter inuenire.

SIt numerus 10. cui quærendus quartus proportionalis, qui ad illum ita ſit proportionatus, vt 8. ad 12. diuidatur per primum ſecundus numerus, & quotiens multiplicet tertium numerum 10. ſic.

Si 8. dat 12 quid 10.? dabit 15.

diuiſus numerus 12 per 8. dat quotientem $\frac{12}{8}$, per quem multiplicatus 10. dat numerum quartum proportionalem 15.

Probatur. Quia enim, vt eſt 8. ad 12. ita eſſe debet 10. ad 15. & quotiens $\frac{12}{8}$ exprimit proportionem, ſecundum quam 8 continetur in 12. eſt quæ denominator proportionis; & ideo eam ipſam deſignat, iuxta quam 10. debet contineri in quarto proportionali; quare ſi 10 multiplicetur per quotientem $\frac{12}{8}$ producet illum numerum, qui toties continebit 10. vt 12. continet 8. quia quotiens numerat vices, quibus multiplicatus continetur in numero genito.

Si verò fracti adſint eadem regulâ valebit. V. g. velit quis capere experimentum, an computus præced. expenſ. propoſ. 7. ſit bene deductus, in quo quærebatur, quid ſioli vellent $\frac{1}{3}$ vnius vlnæ; ſi 4 vlnæ & $\frac{1}{8}$ pretio 20. aureorum vendebantur. Itaque diuidendus erit ſecundus numerus per primum 4. $\frac{1}{8}$ ideſt $\frac{33}{8}$, & numerus prodibit $\frac{660}{33}$. qui multiplicabuntur per $\frac{1}{3}$, & dabunt $\frac{660}{99}$, vt priùs.

Placeat deinde capere experimentum operationis propoſ. 6. in qua quæritur, cum habeamus per 4. pedes muri aureos $\frac{1}{10}$; quid ſimus lucraturi ſi ſint pedes 9 $\frac{1}{4}$, vel $\frac{37}{4}$, diuidemus itaque $\frac{37}{4}$ per 4. & producent $\frac{37}{40}$: deinde multiplicabimus per $\frac{9}{4}$, & generabunt $\frac{333}{160}$.

PROBL. II. PROPOS. X.

Alio quoque modo datis tribus numeris quartum proportionalem inuenire.

DAtis tribus numeris 30. 55. 89. quæratur quartus proportionalis, qui ſit ad 89. vt 55. eſt ad 30. diuidatur tertius per primum, & quotus erit 2. $\frac{29}{30}$. Multiplicet deinde hic quotus ſecundum 55. & producit $\frac{1595}{30}$, qui diuiſus per 30. dabit 163 $\frac{5}{30}$; ideſt $\frac{1}{6}$.

I. 30. II. 55. III. 89. IV. 163. $\frac{1}{6}$.

Probatur. Ita eſt primus ad ſecundum, vt tertius ad quartum: Ergo quoties continetur tertius in primo, toties continebitur quartus in ſecundo; quoniam *permutando*, ita quoque erit primus ad tertium, vt ſecundus ad quartum, & *inuertendo*, ita erit tertius ad primum, ita quartus ad ſecundum; quamobrem primus toties continebitur in tertio quoties cõtinebitur ſecũdus in quarto, vel è contrà. Quapropter ſi diuidatur tertius per primũ, quotiẽs indicabit ſuis vnitatibus vices ſecundũm quas continetur primus in tertio, & ideo ſecũdum quas continetur ſecundus in quarto, eritque denominator proportionis. Quare ſecundum eas vices, & per illum quotum ſecundus multiplicatus erit 8. defin. tract. 8. reſtituet quartum ignotum; cùm genitus ex multiplicatione contineat multiplicatum toties, quot vnitates habet multiplicans, qui, vt prædiximus, quotus eſt, & proportionis denominator.

COROLLARIVM

HInc autem habes, quomodo regulæ aureæ operatio tentari poſſit. Nam poſtquam perfeceris eam primo modo, poteris hoc ſecundo, & tertio expiare, & experimentum ſumere; an eundem numerum pariat; moraliter enim impoſſibile eſt, vt per diuerſas operationes procedendo in eundem errorem delabaris.

Sit V. g. accipiendum experimentum, an prop. 5. præced. Expenſ. calculus ſit ritè confectus, in quo proponebatur quæſtio.

Si 3 $\frac{1}{7}$, dant 2 $\frac{1}{7}$, quid expoſcet 12?

Itaque tertius numerus 12. diuidendus erit per primum 3 $\frac{1}{7}$ in fractiones redactum $\frac{22}{7}$, & quotiens erit $\frac{84}{22}$, qui deinde multiplicandus erit per 2 $\frac{1}{7}$ in fractiones redactum $\frac{15}{7}$, & pariet numerum $\frac{1260}{154}$, vt priùs.

Rurſus velit quis examinare prop. 4. operationem in quâ dantur lib. 8. zaccari emendæ ſolidis 14. & quæritur librarum 57 $\frac{2}{3}$ pretium. Diuidatur vltimus in minutias redactus $\frac{172}{3}$ per primum 3 & erunt $\frac{172}{9}$. Rurſuſque hic quotiens multiplicet ſecundum 14. & prodibit genitus $\frac{2408}{9}$ requiſitus quartus proportionalis; eruntque ſolidi 268 $\frac{4}{9}$.

EXPEN-

EXPENSIO III.

De regula trium inuerſa.

DIximus primum numerum ad ſecundum in regula proportionum ita reſpondere proportione, vt tertius ad quartum, qui quæritur, & ideo, vt ex propoſ. 12. lib. 5. Euclidis conſtat eò maior eſt quartus ſecundo, quò maior eſt tertius primo, & pari ratione quò minor eſt tertius primo, ſic, & eſſe debeat quartus ſecundo. Verùm aliquando etiam deſideratur numerus quartus qui tantò ſit minor ſecundo quantùm eſt tertius maior primo, vel è contra quartus expetitur, qui tantò ſit maior ſecundo, quantò tertius eſt minor primo. Si tamen in priori ordine numeri diſponuntur, ita vt primum locum occupet numerus, qui ſignificat id, quod etiam tertius 9. ſecundum verò occupet, cui quæritur eiuſdem ſignificationis numerus, qui ita ſit ad tertium, vt ipſe eſt ad primum. Sic verò inuerſa ratio ſtat.

Proportio recta.				Inuerſa			
I.	2.	3.	III.	I.	2.	4.	III.
II.	4.	6.	IV.	II.	6.	3.	IV.
Recta.				Inuerſa.			
I.	4.	6.	III.	I.	4.	2.	III.
II.	2.	3.	IV.	II.	3.	6.	IV.

Itaq; erit proportio inuerſa cum vltimum conſequens ſecundæ ponitur loco conſequentis ſeri ei ſecũde, & ſecundũ conſequens loco antecedentis ſecundæ ſeriei, & tertij termini.

THEOR. I. PROPOS. XI.

In planis numeris æqualibus tantò eſt latus maius latere vnius plani, quantò eſt minus latus aliud huius latere alio primi plani;

SIt planus numerus A, & B. Dico, *quod quanto eſt 6. numeri* B *maior* quàm 4. numeri A; tantò, 4 & 2. eiuſdem B minor erit quam 3.

	A	B	
	* * *	* *	
	* * *	* *	
	* * *	* *	6
	* * *	* *	
	3	* *	
		2	

Probatur. Nam ita eſt ex propoſ. 17. primi reciprocè 4. ad 6. vt 2. ad 3. Ergo ex 12. lib. 5. Elem. ita 4. erit minor quam 6. ſicut 2. quam 3. Quare 3. conſequenter tantò erit maior, quam 2. quantò 2. eſt minor, quam 3. & conſequenter, quantò 4. minor quam 6. tantò maior erit 3 quàm 2.

COROLLARIVM.

HInc eſt poſſe dari caſum, quòd cognoſcamus plani numeri latera 4. & 3. & alterius 6. & hinc velimus cognoſcere ipſi 6. per regulam auream latus tale, quod faciat cum ipſo numerum talem planum, qui exequet numerum planum ex 3. & 4. Ideoque debeat inquiri numerus, qui ſit tanto minor, quam 3. quanto 6. eſt maior, quam 4. & ideo ſit inuertenda regulâ.

THEOR. II. PROP. XII.

Inuerſa regula ad rectam reduci poteſt.

QVoniam, vt declarauimus, Conſequens primæ ſeriei pro antecedente ponitur in ſecũda ſerie, & conſequens ſecundæ ſeriei pro conſequente in prima in 2. regula inuerſa. Ideo erit, vt conſequens 2. primæ ſeriei *conuertendo* ad antecedentem ſuum 4. Ita conſequens ſecundæ ſeriei 3. ad ignotum antecedens 6. Eritq; proportio ex conuerſione terminorum proportioni rectę reſpondens. Ibi enim referebatur Antecedens 4. ad conſequentem 2. vt quiddam ignotum ad conſequentem 3. Sed conuerſio terminorum proportionem eorum non immutat, & adhuc antecedens aſſumptũm, quod priùs erat conſequens. Si dicebat proportionẽ maioris inæqualitatis ad ſuũ antecedens in prima ſerie, talem, & dicit conſequens in ſecunda ſerie ad antecedentem ſuum alioquin non eſſet eadem proportio, ſi eſſet in vna ſerie maioris Inæqualitatis, in altera minoris: Ergo Proportio inuerſa conuerſis terminis erit recta, & conſequens, ac antecedens aſſumptum 2. erit minus antecedẽte 4. vicem termini occupante in prima ſerie, vt antecedens 3 priùs conſequens ignoto altero termino minus erat.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Quærere quartum proportionalem, qui ſit maior ſecundo, vt eſt tertius minor primo; Vel etiam minor ſecundo, vt tertius eſt maior primo.

IVxta præcedentem Regulam rectam proportionum ſint diſpoſiti numeri, & quæratur; ſi 3. palmi latitudinis 9. vlnas ſerici expoſcunt ad conficiendam lacernam; quot vlnæ 2. palmi latitudinis requirent.

3. 9. quid 2?

Inuertantur termini, & qui habet annexam quæſtionem primus conſtituatur, medius medium teneat; primus tertium locum, ſic.

Quid 2.? ſi 9. dant 3.

Deinde eodem prorſus modo procedatur, multiplicetur vltimus per ſecundum, & erit 27. qui diuidatur per primum 2. & erit quartus proportionalis 13 $\frac{1}{2}$. Et ita erit 2. ad 9. vt 3. ad 13 $\frac{1}{2}$: quoniam ſicut 9. quater cum dimidia eiuſdem partę continet 2. ſic 13 $\frac{1}{2}$ quater cum dimidia eiuſdem ternarij parte continet 3.

Itaque 3. vlnæ latitudinis dant 9. longitudinis; quare 2. vlnę latitudinis exibebũt vlnas longitudinis 13 $\frac{1}{2}$, cùmque 2. primus ſit minor, quam 3. tertius, quartus tamen 13 $\frac{1}{2}$ eſt maior ſecundo 9. cum in regula recta deberet eſſe minor: Si enim regula recta adhiberetur proueniret numerus 6. qui eſſet tanto minor, quam 9. ſecundus, vt tertius 2. minor eſt primo 3.

Sed iam huius regulæ capiamus experimentum in fractis.

Operarij 30. perficiunt opus 11. diebus, 15. horis, quot diebus conficient 50?

30. 11. D. H. 15. quid 50?

Quo maior hic numerus operariorum, & minor numerus dierum requiritur ad opus perficiẽ-

dum, & ideo quantò est tertius maior primo, nempe 50. numero 30. tantò erit tempus, qui desideratur, & quartus numerus minor secundo 11. qui etiam tempus exprimit.

Vnde regula aurea; sed euersa adhibenda est: atque numeri inuersò erunt dispositi.

15
50? 11 —— 30.
24

Itaque multiplicabitur 30. per 11 $\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ in minutias redactum $\frac{2}{2}\frac{2}{5}$, & efficient $\frac{8}{1}\frac{2}{2}\frac{2}{0}\frac{0}{0}$, qui deinde diuidentur per 50. & efficient $\frac{8}{2}\frac{1}{1}\frac{2}{0}\frac{0}{0}$ nimirum dies 6. & $\frac{1}{2}\frac{2}{5}$.

Quæ regula inuersa etiam probari poterit, tum primo, tum secundo modo præcedentis expensionis, & quidem primo; si numerus secundus, $\frac{2}{2}\frac{2}{5}$ diuidatur per primum 50. & fiant $\frac{2}{1}\frac{2}{2}\frac{0}{0}$ deinde quotiens hic multiplicet tertium 30. & fiant $\frac{8}{1}\frac{1}{2}\frac{7}{0}\frac{0}{0}$. Sic etiam secundum examen poterit adhiberi diuidendo per primum 30 tertium numerum 50. vt fiant $\frac{1}{1}\frac{}{}\frac{}{}\frac{}{}\frac{}{}$, deinde multiplicando hanc minutiam cum minutia media $\frac{2}{2}\frac{2}{4}\frac{}{}$ dabit enim $\frac{8}{1}\frac{1}{2}\frac{7}{0}\frac{0}{0}$.

Cognoscetur autem ex ipsâ quæstione propositâ, cùm adhiberi oportebit regula proportionum Inuersa; nam ipsum lumen naturæ dictabit, quãdo requiretur quartus terminus tantò minor secundo, quantò tertius maior primo, quòd tertius ex sui natura non possit dare maiorem terminum, sed minorem. V. g. si saccus tritici, cum emitur quatuor aureis dat panem vnius solidi 10. vnciarum, quot erunt ũnciæ, si triticum cariùs ematur; nempe 6 aureis: nam ipsa rei natura dictat, quòd quantò cariùs emitur frumentum, tantò panis debeat esse minoris ponderis, vt eodem pretio semper vendatur, & numero æquet pretium maius, cum panis semper vendi debeat vnico solido, ideoque hic cognoscitur, quod regula Inuertenda sit, quia, quo maior est 6. tertius numerus, quàm 4. eo minus debeat esse pondus panis, qui exposcitur, pondere dato 10. vntiarũ.

EXPENSIO IV.

De Regula Aurea composita.

COmponitur regula Aurea, cum geminâ vice adhibetur eo, quòd quæstio proposita talis naturæ sit, vt non nisi gemina vice adhibita regula proportionis solui queat.

THOR. I. PROPOS. XIV.

Quando proponuntur magis, quam tres termini; tunc gemina vice regula proportionum est adhibenda.

SVnt quinque operarij, qui murum 23 pedum construunt 7. diebus: si ergo sint 10. quot diebus construent murum 39. pedum? Vides hic plures, quàm tres terminos esse propositos, nempe quinque operarios 23. pedes, dies 7. & rursus 39. pedes, & decem operarios. Dico itaque, quod regula trium gemina vice adhibenda sit: Nam exquirendum est, si 5. operarij, vt faciant 23. pedes 7 diebus operantur, quod insument temporis in conficiendis 39. pedibus ijdem met operarij. Ita, vt operarij non veniant sub quæstione, cum ijdem semper ponãtur, cognito deinde tempore V. g. 11. dierum, & $\frac{2}{2}\frac{0}{5}$ partium vnius diei. Postea exquiremus, si 5 operarij temporis 11 $\frac{2}{2}\frac{0}{5}$ conficiunt murum 39 pedum quanto tempore 10. conficient eundem met murum. Itaque murus hic non venit sub quæstione; sed idem præsupponitur. Sicut multa alia licet possent reuocari ad quæstionem, quòd tamen eadem præsupponantur in vtraque proportionalium serie, tam in primo, & secundo, quam in tertio, & quarto non reuocantur ad quæstionem, vt altitudo muri, & longitudo, quæ, si proponeretur, quælibet semel adhibitâ regulâ esset exquirenda, vt infra.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Regulam trium rectam compositam dato capaci quæstione adhibere.

SIt propositum saxum, cuius altitudo sit pedes 2. latitudo pedes 4. $\frac{1}{2}$, faciatque 9. pedes superficiei; quæritur quot pedes faceret, si latitudo esset 6. altitudo esset 5. pedum. Itaque quæremus primo de altitudine, si ita placeat, deinde de latitudine. Itaque dicemus ita. Si saxum altum pedes 2. latitudine posthabita, pedes 9. superficiei exhibet. Quot daret si esset altum pedes 5? & multiplicato 9. per 5. generabitur 45. quẽ diuidemus per 2. & prodibit quotiens 22 $\frac{1}{2}$. Deinde quæremus de latitudine; dicemusque si saxum pedum 4 $\frac{1}{2}$ dat longitudinis 22 $\frac{1}{2}$ quid si esset 6. & dabit 30. pedes.

PROBL. II. PROPOS. XVI.

Regulam auream inuersam compositam dato capaci subiecto exercere.

SIt Rupes 13. pedibus lata, alta 22. ex quâ longitudinis desũpsi pedes 32. ad conficiendũ murum. Debeo conficere alium murum eiusdem magnitudinis, & habeo aliam Rupem altam 17. pedes, & latam 18. Quæritur, quid debeam de illa desumere in longitudinem. Quærama igitur primo, si pedes 13. latit. dant 32. longitudinis, quid dabunt 11? Certum est, quòd dabunt magis, quàm 32. licet 11. sit minus, quam 13. eò, quia sit minor latitũdo; vnde debeo desumere magis secundùm longitudinem; ideoque regulam inuertam.

Quid 11.? si 32. dant 13.

Et facto computo prodibit 37. $\frac{9}{11}$. Itaque, si 13. dant longitudinem 32 5 oportebit, quòd ex saxo minoris latitudinis desumam longitudinem maiorem 37 $\frac{9}{11}$: Deinde Rursùs dicam, si 22. dant 37. $\frac{9}{11}$, quid 17? & vtique debet esse maior numerus, qui quæritur, quam 37 $\frac{9}{11}$ licet 17. sit minor, quam 22; quia minor altitudo dat magis longitudinis. Vnde inuertam regulam sic.

9
Quid 17.? si 37 —— dant 22.
11

Et inuenies numerum $\frac{2}{1}\frac{1}{9}\frac{7}{7}\frac{2}{7}$, ideſt 48. & $\frac{7}{7}\frac{5}{7}$; itaque longitudo huius rupis debebit esse 48. & $\frac{7}{7}\frac{5}{8}\frac{4}{8}$, & patet: Nam producunt 13. 22. & 32. molem æqualem nimirum 9152. vt producunt 17. 11. & 48 $\frac{2}{1}\frac{7}{9}\frac{4}{0}$, qui etiam producunt 9152. & ita ex mole æquali saxea possum conficere murum æqualem.

PROB.

PROBL. III. PROPOS. XVII.

Regulam Auream compositam ex inuersa, & recta dato capaci subiecto exercere.

SInt quinque operarij, qui murum conficiant diebus 25. pedum 32. Quæritur, quanto tempore conficient, si essent operarij 7. & murus pedum 40.

Primo itaque inquiratur, si diebus 25. Operarij 5. dant murum pedum 32. quid si essent 7. & sic stabit quæstio.

Si 5. diebus 25. perficiunt opus, quid 7?

Sed quia, quò plures sunt operarij eò minori tempore opus perficiunt, quare licet 7. sit maior numerus, quam 5. numerus tamen, qui quæritur debet esse minor, quam 25. ideoque inuertenda est regula sic.

Quid 7.? si 25. diebus 5. opus perficiunt.

Et adhibita regula eueniet tempus 17 $\frac{5}{7}$ dierum.

Deinde inquiremus; si murus 32. pedum conficitur diebus 17 $\frac{5}{7}$; quanto tempore perficietur si esset 40. pedum, & sic erit exemplum.

6
Si 32. diebus 17 ——, quid si 40. pedum?
7

Et quia, quò opus est maius, eo maius est tempus insumptum in opere, ideo, vt est maior 40. quam 32. ita erit maior numerus exoptatus, quam 17 $\frac{5}{7}$: Vnde hæc operatio recta erit, & multiplicato vltimo numero, cum medio prodibit numerus $\frac{1}{7}\frac{0}{}\frac{0}{}\frac{0}{}\frac{5}{7}$, & si diuidatur per 32. numerus erit $\frac{1}{2}\frac{0}{2}\frac{0}{4}\frac{0}{6}\frac{0}{8}$, ideſt facient opus diebus 22 $\frac{7}{2}\frac{}{4}\frac{}{}$; ideſt $\frac{}{8}\frac{0}{8}$. Propterea perficient opus, si sint 7. operarij, & opus 40. pedum, si 5. faciunt pedes 32. diebus 25.

EXPENSIO V.

De numeris æquè potentibus.

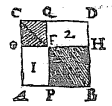
ANtequam ad inuentionem radicis quadratæ accedamus, & inuentioni medijproportionalis, opus est vtile licet non necessarium, de numeris æquè potentibus agere, qui fundantur in lib. 2. Eucl. & 8. siquidem hæc maxime faciunt ad radicem quadratam intelligendam.

Præass. Iam quidem de numeris æquè potentibus latè egimus lib. 8. Verum hic faciliùs, eaq; quæ demonstrauit Euclides de lineis, numeris applicantur. Siquidem vnica ostensione omnes 10. propositiones lib. 2. numeris conuenire ostenditur. Quia longitudo, seu linea commensurabilis alteri est sicuti numerus ad numerum ex prop. 3. decimi, & ex propos. 4. quę à lineis longitudine commensurabilibus fiunt quadrata sunt, vt quadratus numerus ad quadratum numerum, & consequenter, quæ ex lineis longitudine commensurabilibus fiunt rectangula, se habebunt vt planus numerus ad numerum planum. Hinc euenit; quòd, si latera cuiuscumque, seu quadrati, seu rectanguli, cuiuscumque propositionis secundi libri ponantur rationalia, quòd se habebunt inuicem, vt numerus ad numerum, & eorum quadrata, & rectangula, vt quadratus numerus ad quadratum numerum; & ideo etiam, vt planus numerus ad planum numerum: Vnde si linea sit ad lineã, vt numerus ad numerum, etiam quadratus ad quadratũ, vt numerus quadrat. ad numerũ quadratum, & planum ad planum, vt planus numerus ad planum numerum; Sed propositiones secundi Euclidis de lineis commensurabilibus intelligi possunt, cum sectio permittatur vt libet de 1. vsq; ad 10. Ergo eadem ratio, quæ de lineis, & quadratis, rectangulisque erit de numeris, eorumque quadratis, & planis: sed vt etiam pateat quomodo ijs propositionibus singulis, hæc vniuersalis doctrina applicetur sub exemplum veniat propos. 4. quæ, & nostra interest.

THEOR. I. PROP. XVIII.

Si numerus diuisus sit, vtcumque quadratus totius est æqualis quadratis partium, & insuper rectangulis earundem.

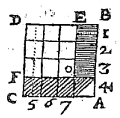
SInt partes AB 8. cuius 3. assumantur, & fiat quadratum 9. & 5. & fiat quadratum 25. deinde partes ipsæ multiplicentur simul, & fiat planum 15. & geminetur, fintque 15. & 15. duo plana. Dico, quod hæc duo plana 15. & 15. & duo quadrata 25. & 9. sunt æqualia quadrato ex toto numero 8. nimirum quadrato 64.



Patet. Nam ita est, vt ex præassumpto ostensum est, quadratum AD ad quadrata nigra, & rectangula 1. & 2. vt numerus quadratus 64. ad duo quadrata 9. & 25. & plana 15. & 15. sed illud AD est æquale quadratis nigris, & rectangulis 1. 2. ergo etiam quadratus 64. erit æqualis quadratis 9. & 25. & planis 15. & 15.

COROLLARIVM I.

HInc est modus reperiendi quadratum numerum, cum quo quilibet numerus quadratum quoque numerum constituat. Sit V. g. numerus 7. constituaturque hic vice gnomonis in quadratum ABCD, vt per quadrata parua nigra exprimitur. Ad hoc itaque, vt reperiatur numerus quadratus cum hoc gnomone, quadratum quoque efficiens, reperiendus erit quadratus albus EF. Vt igitur reperiatur ex numero 7. demetur 1, vt auferatur quadratum seminigrum angulare ad A, remanebuntque 6, qui numerus duo parallelogramma ni-



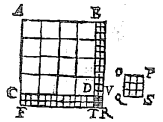
gra

gra exprimit ; ad hoc itaque, vt vnum habeatur, diuidatur bifariam,& erunt 3. : multiplicetur ideo 3 in se ipsum, quia latus plani est æquale lateri quadrati albi,& obtinebis quadratum album 9. cum quo 7.faciet quoque quadratum numerũ 16.

Si verò velis plana seu parallelogramma nigra plures series quadratorum continere, & numerus datus sit capax , tunc ita efficies dato numero 351. subtrahes ab eo numerum quadratum, quem elegeris, cuius sit capax, vt 169.cuius radix & latus est 13. nempe latus o 7. quadrati parui seminigri; remanetque numerus 182.pro parallegrammis nigris oc, & ob. Diuidatur bifariam, quia sunt duo; & erit 91. diuidaturque per latus 13. nempe 03. & prodibit latus oe, nempe quotus 7. Multiplicabitur itaq; in se quotus 7.& generabitur 49.qui numerus cum 35. constituet quadratũ 400. cuius radix est 20. Verum id non potest semper fieri præcisè , sed proximè in numeris maximè,in quibus fractiones interueniunt.

COROLLARIVM II.

*Hinc etiam regula ellicitur alia , quâ inueniatur numerus,qui cum numero quadrato quadratum quoque efficiat . Ob cuius declarationem ponamus quadratum abcd non habere, nisi 16. partes, & ideo in se toto non continere, nisi quadrata parua 256. si vellem addere quadrata tot eiusdem rationis,quæ componerent quadratum maius , deberem addere 16. pro vno quoque



latere ; at insuper in angulo 1 quadratum. Vnde essent addenda 3. quadrata . Quod si in geminam seriem essent addenda quater 16. quadrata nempe 64.& insuper 4. quadrata in angulo. Vnde regula prodit. Sit datus numerus quilibet 9. & radix 16. quadrati 256. per illum 9. multiplicetur, & producet 144. & productus numerus bis assumatur , & sit 288. ob duos planos numeros bv , & ct , deinde 9. in se multiplicetur,& sit 81. ob quadratum seminigrum dr, qui cum 288. faciat summam 369. hic numerus additus quadrato 256. quadratum quoque efficit 625.cuius radix est 25. nimirum 16 & 9.

Et hac regula potest fieri tabula radicum , & quadratorum. Nam si quadrato 1 velimus addere quadratum numeri 2. accipiamus gemina vice radicem numeri 1 , quæ est 1, & addamus 1, & fient 3. qui cum quadrato 1 facient 4. cuius latus est 2 Deinde accipiemus gemina vice 2. & addemus 1. vt fient 5. qui additus quadrato 4.facit 9 quadratum numeri 3. Deinde gemina vice acceptus 3. cum vnitate facit 7. qui additus quadrato 9 facit quadratum 16. numeri radicalis 4. & sic consequenter procedendo singulorum numerorum naturaliter procedentium, singula quadrata obtinebimus ; quorum tabulam dat Clauius Geom. prac, l.8. & Maginus tab. Tetragonica.

COROLLARIVM III.

TAndem eruitur,quomodo dato quadrato reperiamus numerum ; qui subductus relinquat quoque quadratum ; nam si à latere 16. quadrati 256. auferatur 3. & reliquus 13. per 3. multiplicetur , & fiant 39. & gemina vice accipiatur, & sit 78, cui addatur quadratum 9. numeri 3.subducti à 16. fient 87. Numerus itaque 87. subductus à numero quadrato 256. relinquit quadratum 169. cuius radix 13.

PROBL. I. PROPOS. XIX.

Numero dato æquipotentes numeros alios, quos , quis iusserit, reperire.

SIt numerus aliquis 6. diuidendus in numeros 3. qui possint efficere quadrata, quæ simul æquent quadratum numeri 8. Reperiantur tres numeri 5. 4. 3. ex propos. 13. lib.9. Elem. quorum duo 4. & 3. æquent quadratum numeri 5. Deinde vtere regula aurea, & dic si 5. dant 4.quid dabit datus numerus V. g. 8.? & si 5. dant 3. quid 8? Inueniesque $\frac{1}{5}\frac{2}{5}$, & $\frac{3}{5}\frac{6}{5}$, qui erunt radices duorum quadratorum quadrato numeri 8. æqualium.

* Nam ita ponitur 5. ad 4. vt 8. ad $\frac{1}{5}\frac{2}{5}$ Ergo ex 18. l.8. cum quadrati suorum laterum proportionem habeant duplicatam; ita erit quadratum ex 5. ad quadratum ex 4. vt quadratum ex 8. ad quadratum ex $\frac{1}{5}\frac{2}{5}$. Et sic pariter quadratum ex 3. ad quadratum ex 5. vt quadratum ex $\frac{2}{5}\frac{4}{5}$ ad quadratum ex 8. Cum ergo ex 25. l.5. prima, & quinta quantitas ad secundam eandem obtineat rationẽ, quam tertia,& sexta ad quartam. Erit quadratum ex 4. & 3. ad quadratum 5. vt quadratum $\frac{1}{5}\frac{2}{5}$, & $\frac{2}{5}\frac{4}{5}$ ad 8. sed quadrata ex 4. & 3. sunt æqualia quadrato ex 5. Ergo etiam quadrata ex $\frac{1}{5}\frac{2}{5}$, & $\frac{2}{5}\frac{4}{5}$ æquabuntur quadrato 8.

Sed rursus quæratur si 5. dat 4. & 3. quid $\frac{2}{5}\frac{4}{5}$? Inuenienturque $\frac{4}{5}\frac{8}{5}$, & $\frac{2}{5}\frac{3}{5}\frac{6}{5}$, qui æquabunt quadratum numeri $\frac{2}{5}\frac{4}{5}$, & consequenter cum quadrato numeri $\frac{1}{5}\frac{2}{5}$ æquabunt quadratum numeri 8.ex prædicta ratione, & sic efficies,si alios exoptabis plures ,quam tres.

EXPENSIO VI.

De radice quadrata perquirenda, & medio proportionali, tertioque percrutando datis duobus.

RAdicem quadratam exquirere est idem, ac datis duobus proportionalibus numeris medium proportionalem inuenire, quia ex prop.19. lib.7. Elem. quadratus numeri proportionalis est æqualis plano extremorum . Vnde sine cognitione huius extractionis medius numerus proportionalis venari nequit.

Præsumptum . Aduerte id quod notauimus Tract.8. de Arith. simplici locum significare proportionem , quæ per decuplam multiplicationem numeri crescit ; Ita primus numerus à dextra significat vnitates, secundus versùs sinistram decimas , tertius decimas decimarum, & cæt.

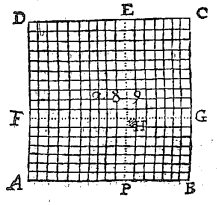
Ideo quadratus numerorum , qui primò subtrahuntur incipiendo à sinistra erit maior, quam secundus , & sic de reliquis ; quia significat , vel decimas,vel centesimas,vel millesimas. Cum itaq; quadrati numeri latus non inueniatur totum simul obstante numeri magnitudine ; sed per partes , & per diuersa quadrata : ideo primus quadratus si vnus , vel duo significat quadrata numeri simplicis, si sint tres numeri erit centesimarum,& numerus ille quadrati , qui subducitur , significabit singulis vnitatibus decimas , & idem si sint quatuor ; quia non possunt facere quadratum numerum decimarum; nisi tres, vel 4. numeri; sicut vnitatum quadratum facit vnus , vel duo numeri : Nam 10. per 10. ductus facit 100. qui tribus numeris exprimitur. At si sint quinque,vel sex quadrati radix , quæ extrahitur , erit centesimarum: nam 100.per 100.ductus facit 10000.qui quinque numeris exprimitur , nec minor numerus potest esse centesimarum quadratum ; at si sint septem, radix quadrati, quæ extrahitur, erit millium; quia 1000. per 1000. ductus facit 1000000. quadratus numerus vnitatis millenariorum, qui, & poterunt esse dualitatis earundem, & trium, & quatuor , & ideo etiam octo numeris poterit exprimi , vt quadratum quatuor millium est 16000000. qui octo numeris exprimitur, & si sit centesimarum exprimetur,vt diximus sex numeris, vt 160000. & si sit decimarũ quatuor,vt 1600. & si sit vnitatũ duobus 16.Et sic dicendũ de alijs numeris etiã maioribus.

Præsumptum 2. Aduertendum secundo ex propos. 18. lib.8. inter numerum quadratum, & alium semper cadere aliquem proportionalẽ numerum planum, qui sunt in quadrato duo complementa æqualia , vt ex propos.35. lib.1. Eucl. colligitur, & ex propos.4. expens. præced. qui cum altero quadrato complent quadratum maiorem . Cum ergo habetur quadratum aliquod maius , & ex eo subducat aliquis quadratum minus relinquit Gnomonem silicet quadratum aliud, & duo complementa : Sic si ex quadrato dcab subducatur quadratum defh , relinquet gnomonem ebf circa se, qui continet quadratum hb , & duo rectangula ch , & ha , quæ sunt media proportionalia inter quadratum defh , & quadratum hb . Quare tum hac, tum ratione supradicta non ab omnibus numeris latus quadrati subducẽdus est tum ex prima ratione , cum secundus,quartus, sextus, octauus,& cæt. consignificent cum primo, tertio, quinto, septimo , & cæt. Tum quia ex præsenti ratione , rectangula quoque sunt subducenda ; vnde semper reliquendus est vnus medius pro illis subducendis.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Quadratam radicem subducere.

SIt subducenda radix quadrata à numero 289 punctum sub dextro 9. collocabitur procedendo ad sinistram,& intermisso vno , idest 8. sub tertio 2.& sic , si alij adsint, quia ab illis propriè radix quadrata subducitur; ab intermedijs verò media proportionalia , seu rectangula. Deinde videndum est, qui nam quadratus numerus capiat in 1. ad sinistram, qui est 2. & video; quòd in numero 2. maior quadratus nõ continetur, quàm 1. quare scribo seorsim 1.& sub 2.rursùs scribo 1.in se multiplicatus , & factus quadratus 1. Et deinde subduco ab 2. & remanet 1. nempe . . | 1
subduxi quadratum decimarum,qui 289 | ---
est 100. ob locum tertium, in quo 1
est , & æquale quadratum defhe, ---
& habeo latus de , qui est 1. nu- 189
merus sepositus, qui, qula in radice ponendus est secundo loco, vt constabit, erit numerus decimarum, & significabit 10. idest latus de , remansitq; residuum 189. Sed quia rectangula etiam ipsa subducenda sunt,propter quòd numerus intermedius 8. non est punctatus, quæ sunt rectangula ch , & ah, quæ pro vno latere continent quantum continet redix quadrata , & pro alio radix illius quadrati subtrahendi adhuc incogniti, vt ex prop.4. præced. colligitur : Siquidem latus 17. sectus est vt cumque in 10. & 7. Vnde duo plani numeri, qui cum duobus quadratis ex 10. & 7. integrant quadratum ex toto numero 17. continebuntur sub 10. & 7. inuicem multiplicatis, quare vnum latus erit 10. latus iam cognitum, & aliud 7. erit exquirendum.



Ad hoc,vt ergo illa subtraham, quia sunt duo, habẽt consequenter duo latera æqualia radici eh, & hf. Quare radix duplicanda est vt faciat 2. significans 20. ob secundum locum quem occupabit radix 1. & ponendus seorsim sub radice.

Circa quem numerum 2. considero ; an capiat, & quod vicibus capiat in numero residuo 18.& video , quòd capit 9. vicibus , & esset hoc 9. aliud latus hg rectangulorũ : sed quia quantum est hoc latus hg,tantùm debet esse latus aliud quadrati incogniti subtrahendi hb: ideo videndum est; an hic numerus 9. in se multiplicatus capiat in numero residuo, & punctato, à quo illud quadratum deducendum est , & quia à 189. ablatis 2. per 9. multiplicatis, nimirum 18. residuum est 9. In quo 9. in se multiplicatus nimirum 81. non capit ideo 9. non erit alterum latus planorum ch , & ha ; quia non relinquit sufficientem numerum, qui faciat quadratum hb .

Accipiam igitur 7. pro latere hg , qui duabus vicibus continetur in 18. & relinquit insuper pro residuo 4. qui cum 9. faciunt 49. qui numerus est

. .	17
289	---
1	2

189	
14	

49	
49	

tantus, qui capiat 7. in se multiplicatum : Nam 7. ductus in 7. exhibet 49. Ideo iam reperi latus hg, vel ec planorum . Vnde ambo subducenda sunt; ergo 2. in 7. ducti faciunt 14. qui ob locum

æquualent numero 140 subtrahoque à 189. ita remanet, vt ſerua tuum locum, & 4. ſub 8. ſitus ſit, & 1. ſub 0. neque vltimum numerum punctatum vllo modo tangat ſubtractio. remanentq; 49. Et quia iam cognoui latus parui quadrati HG eſſe 7. ideo multiplico 7. in ſe, & faciunt 49. qui ſubducti à 49. numero reſiduo nihil remanet: Vnde 7. ponendus eſt apud radicem ſepoſitam 1. & efficiet 17. Vides itaque, quod 1. priùs ſignificabat 10. cum modo cum numero 7. ſignificet 17 qui eſt radix, ſeu latus DC 17. partium maximi quadrati capientis quadratula 289.

Sed quia aliquando caſus occurrunt, qui ambiguum poſſent reddere operatorem: niſi de illis priùs monitus eſſet, ideo libet omnes caſus, qui occurrere poſſunt recenſere.

Primus eſt; ſi numerus primus ad ſiniſtram punctum non habeat, tunc, vt diximus in præaſſ. 1. ille numerus eſt conſignificator, & tota radix à duplici numero ſubducenda eſt, vt ſi fuiſſent dati

92 89. tunc numerus 9. nõ eſſet punctatus; quare radix non eſſet ab illo extrahenda, quæ eſſet 3; ſed ab illo quidem vt cum numero 2. ideſt à 92. quæ eſt 9 cuius quadratum eſt 81. à 92. ſubducendus, & reſiduum erit 1189. Duplicetur ergo, vt ſupra radix 9. & facit 18 Video itaque, quot vicibus capiat 18. in 118 & video, quod capit quidem magis quã 6. ſed numerus 6. eſt ille, qui relinquit numerum capacem recipiendi quadratum ipſius 6. & ideo multiplico 6. per 18. & faciunt 108. quos ſubduco à 1189. ponendo 8. ſub 8. & reliqui numeri ſub reliquis verſùs ſiniſtram, & reſiduum eſt 101. Multiplico deinde 6. in ſe, & faciunt 36. quos ſubduco à 109 ponendo 6 ſub 9. & reſiduum eſt 73. fractus numerus à quo radix quadrata ſubduci nequit. Radix ergo quadrata huius numeri erit 96.

Caſus ſecundus eſt, ſi numerus, qui datur non

ſit quadratus V. g. ſi numerus datus eſſet 115. ita vt ablato primo quadrato 1. remaneat 15. à quo radix quadrata duplata pro planis proportionalibus medijs ſubduci nequit, vt hic: Nam 1. ſepoſitus duplatus non poteſt ſubtrahi ab 1. qui eſt apud 5. Vel etiam ſi capiat numeros planos proportionales medios, adhuc tamen totus reſiduus numerus à radice quadrata primo extracta, & duplata adeo abſorbebatur, vt non remaneat locus alteri quadrato, nec quidem vni-

tati, vt ſi daretur numerus 120. tunc ſubducto maximo quadrato ab 1. qui eſt 1 remanet 20. à cuius numero ſiniſtro radix quadrata 1. duplata ſubtrahi quidem poſſet; ſed nihil remanet tunc ſignum eſt, quòd non adſit tantus numerus quadratorum paruorum, qui integrent ſaltem ſeriem

vnam ipſorum pro quolibet plano; nimirum 10.

pro vno, & 10. pro alio, vt in numero 115. ſiquidem ablato maximo quadrato decimarum, nempe

100. quarum radix eſt 10. non remanent niſi 15. qui non poſſunt conficere duas ſeries æquales radici 10. proFH, & 10. proHE; vt conſtat ex Cor. 2. propoſ. 18. expenſ. præced. hæc verò ſeries gemina 10. & 10. ideſt 20. non adeſt; cum non ſint, niſi 15. Quod ſi adeſſet, at non ſupereſſet ſaltem vnitas pro quadrato paruo nigro. ad H, vt ex ſupracit. Coroll. conſtat eſſe neceſſarium ad hoc, vt duo plana, & ſeries quadratorum paruorum cum quadrato magno extracto faciant quoque quadratum. Ideo, ſi hoc occurrat, apud radicem ponendus eſt 0, vt dicat 10. & reſiduum 15. aut 20. erit numerus fractus.

Caſus tertius eſt. Si id occurrat non in fine,

ſed in medio V. g. ſi eſſet numerus 12036. à quorũ quinto 1. radix quadrata ſubducta relinquit 20. à quo ſi 1. radix duplata ſubducatur nihil remanet ſub puncto niſi 0, à quo, nec vnitas ſubduci poteſt: Signum eſt; quòd ab eo numero radix quadrata, quæ eſſet decimarum ſubduci nequit; cum nullum adſit quadratum centeſimarum, nempe nullum adeſt quadratum 100. vnitates, ſeu quadratula continens: Quare apud 2. ſepoſitam radicem, vt locum ſeruet ponendus eſt 0, & poſthabito numero medio punctato, cuius loco ponitur 0, apud radicem, iam procedendum eſt ad educendam radicem quadratam ab vltimo: Vnde conſidero numerum, qui apud eum eſt non punctatum, 203. quot vicibus capiat radicem duplatam 1. quæ eſt 20. & video quod 9. vicibus, & adhuc remanet numerus talis, qui capiat 9. in ſe multiplicatum nempe 81. Ideo multiplico 20 per 9. & faciunt 180. quos ſubduco à 203. & ſunt reſidui 23. quibus addo 6. vt ſint 236. à quo in ſe multiplicatus ſubducendus nempe 81. & reſiduum eſt 155 qui fracti ſunt, nec ab eis radix quadrata amplius ſubduci poteſt. Itaque radix quadrata numeri dati 12036. eſt 109. & remanet aliquid, quia numerus quadratus non eſt. Vnde maximi quadrati, qui eſt 11881. qui in ipſo capiat radix quadrata ſubducta eſt.

12036	109. Reſiduum 155.
11	20
203	81
180	
236	
155	

Caſus quartus eſt, ſi remaneant reliquiæ maiores; quam par ſit, & ferat regula, quomodo dignoſcatur error. Hic itaque dignoſcitur ex Cor. 2 propoſ. 18. præced. Nam reperiatur talis numerus, qui cum numero, cuius radix quadrata extracta eſt, quadratum quoque efficiat; Cùm ergo ſciamus radicem quadratam, eam duplicabimus, & ſit præcedentis quadrati duplicata radix 218. & vt reperiamus minimum numerum, qui hoc quadratum conſtituat accipiemus 1. per quem multiplicabimus 218. & dabit eundem numerum, cui addemus 1. in ſe multiplicatum, vt faciat 1. & fiet 219. & hic erit minimus numerus, qui quadrato 1188 1. poſſit addi ad hoc, vt eius radix vnitate tantùm aucta adhuc efficiat quadratum; ſi ergo reſiduum V. g. 155. æquet hunc numerum; ſignum eſt, quòd radix quadrata non bene deducta, ſit, & quòd ille, qui extractus eſt, licet ſit radix quadrata alicuius numeri, non eſt tamen maximi quadrati, qui in numero illo capiat, cum maior potuiſſet capere, cuius radix vnitate eſſet maior.

PROBL. II. PROPOS. XXI.

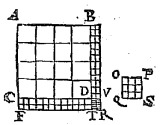
Radicem quadratam vtrum benè deducta ſit inueſtigare.

EXtracta radix quadrata in ſe multiplicanda eſt, & ſi adſint reliquiæ addendæ. Nam, ſi reſtituat numerum priorem additis reſiduis, benè eſt extracta radix quadrata alicuius quadrati, qui in numero dato capiat; Ad hoc autem, vt ſciamus, & ſecuri ſimus, illum eſſe maximum quadratum; examinandæ erunt reliquiæ; vtrum poſſint ſuperare, vel æquare numerum ex Caſu Tertio, qui cum numero à quo radix quadrata deducta eſt quadratum conſtituat; Nam poteſt eſſe, quod quadratum ſit benè deductum; ſed non maius quàm fieri poſſit, ita ſi extracta eſſet radix quadrata 16. à 289. multiplicatis in ſe 16. & additis frigmentis 33. reſtitueret priorem numerum 289. cum tamen radix quadrata non ſit 16. ſed 17.

PROBL. III. PROPOS. XXII.

A numeris non quadratis radicem quadratam proximiùs, quàm poſſit, educere.

QVoniam non omnis numerus quadratus eſt, ſi tamen quis vellit ab eo maximum quadratum, quem poſſit, proximiùs inueſtigare, ita faciendum eſt.



* Sit numerus 22. à quo radix quadrata ſubducta 4. qualis eſt quadrati ABCD reliquerit pro reſiduo quadrata 6. vt eſt OS. Volo cognoſcere, quid radici quadratæ addendum ſit propter hoc reſiduum. Multiplico radicem quadratam 4. pro vt mihi placet, V. g. per 3. (ſi per 10. vel 100. exactior erit, & facilior operatio) & faciet 12. & quia ſunt duo plana facient 24. ita vt ſint 12. pro vno, & 12. pro alio, quod nihil aliud eſt, quàm quod latus quadrati BD intelligatur diuiſum in partes 12. & ſingula quadratulorum latera in 3, & item CD in partes 12. quæ ſunt 24. Deinde me transfero ad reſiduum, nempe 6. & quia vnumquodque latus quadratorum paruorum, quę remanent, vt eſt OPQS, debet diuidi in tres partes, vt eſt diuiſum quodlibet latus quadratorum paruorum in quadrato AB, & fieri quadrata parua; ideo multiplico 3. in ſe, & reddit 9. & quia habeo 6. quadrata multiplico 6. per 9. & faciunt 54.

Radix verò eſt ſolum 24. nempe deberent addi ad hoc, vt peruenirent ad longitudinem duorum laterum CD, & BD quadrata parua 24. & inſuper vnum in angulo, quæ ſunt 25. ſed, quia numerus reſiduus eſt 54. multo maior, ideo forte potero ex iſtis quadratis adiungere duos ordines, nempe CD, & FR pro vno latere, & BD, & NV pro alio, ideo multiplico per 2. & faciunt 48. & rurſus multiplico 2. in ſe, & faciunt 4. quos addo nume- 48. & faciuut 52. Addidi verò 4 ob quadratum paruum DR, cuius latus eſt 2. ob huas teſſeras quadratulorum 24. hinc, & inde additas: hos itaq; 52. ſubduco à 54 & reſiduum erit 2. de qu bus non eſt curandum maximè, ſi ellegeris numerum maiorem, vt admonui. At quia latus multiplicaui per 3. & gemina vice duo latera radicis compleui; ideo efformo minutiam $\frac{2}{3}$. Latus ergo quadratum numeri 22. erit $4\frac{2}{3}$ ferè.

Obſerua verò. Quod hoc eſt idem, ac ſi quadratula parua omnia 22. multiplicarentur per 3. in ſe ducto, ideſt per 9. & fierent 198. & ab eis ita multiplicatis radix quadrata erueretur: Nam ſubducta radix quadrata eſt 14. à numero 198. Quare ſi rurſùs diuidatur 14. per 3. reſtituit $4\frac{2}{3}$, nempe partes 4. radicis prioris, & earum $\frac{2}{3}$. Vnde facilitatis gratia addes numero à quo radix quadrata ſubducenda eſt V. g. 22. binarium z frarum, vt faciat 1600. ita enim multiplicabis numerum 22. per quadratum 100. numeri 10 & deinde ab eo extrahes radicem quadratam, vt ſupra docui; quæ erit 46. Diuides ergo 46. per 10. & erit $4\frac{6}{10}$ numeri 22. radix quadrata. Sic ſi addas duos binarios zifrarum numero 22 vt ſint 2200 00 extrahes exactiùs: nã hęc additio habet vim multiplicationis per 10000. qui eſt quadratum numeri 100. radix verò quadrata numeri 2200 00. eſt 469. quã diuides per 100. & dabit 4. & $\frac{69}{100}$. Minor vero, ſed maxima, quę eo numero contineri poſſit. Et ſi ſi cupias etiã exactiorem, binarium, vel duos, vel tres binarios addes, parique modo operaberis. Sufficiet autem detruncare tot numeros radici, quot binarij zifrarum additi ſunt; quoniam duæ zifræ vnicum numerum in radice pariunt, & ſub ſingulis figuris, ſeu numeris, interiectã lineolã addere zifram cum vnitate ad ſiniſtram; nam hęc detruncatio habet vim diuiſionis, vt patet. Si verò velis radicem maiorem vera, addes fractioni vnitatem V. g. fractioni 6. addita vnitas, vt ſint 7 dat $4\frac{7}{10}$ maiorem vera. Sic, & fractioni $\frac{69}{100}$ addita vnitas dat 4. & $\frac{70}{100}$ maiorem vera radice.

PROBL. IV. PROPOS. XXIII.

Datis duobus numeris tertium proportionalem inuenire.

EX propoſ. 20. ſeptimi habemus, quod duo numeri extremi proportionales generant æqualem numerum inuicem multiplicati medio proportionali in ſe multiplicato, ideſt eius quadrato ſicut ex propoſ. 19. l. 6. habetur, quòd rectangulum duarum linearum proportionalium eſt æquale quadrato ex media; quòd cum ita ſit, ſi adſint duo numeri proportionales 24. 32. & tertius quęratur hic tertius quæſitus erit latus plani numeri æqualis quadrato numeri 32.. Ergo in ſe multiplicetur 32. & fiet quadratum 1024 quia ergo iſte numerus eſt etiam planus numerus, cuius latus eſt 24. & tertius proportionalis eſt aliud latus ſicut ex defin. 1. lib. 8. ſe mutuo multiplicantes planum generauerunt, ſic ſi diuidatur per alterum numerus alter reſtituetur. Ergo diuide 1024. per 24. & quotus erit $42\frac{8}{24}$ tertius proportionalis, ericq; 24. ad 32. vt 32. ad $42\frac{8}{24}$ nam 24. ad 32 & 32. ad 42. & $\frac{8}{24}$ eſt vt 3. ad 4.

PROBL. V. PROPOS. XXI.

Datis duobus numeris medium proportionalem inuenire.

QVoniam ex propoſ. 20. lib. 7 ſi ſint tres numeri proportionales, planus numerus genitus ab extremis eſt æqualis medij in ſe multiplicati quadrato; Ideo, ſi duo numeri dati inuicē multiplicentur, & ab ipſorū genito radix quadrata eruatur, hic numerus erit medius proportionalis. Sint dati duo numeri 20. & 45. Multiplicentur inuicem, & fiat 900. ſi à 900. extrahatur rad x quadrata erit 30. qui eſt intermedius proportionalis, & ita eſt 20. ad 30. vt 30. ad 45. quòd ſi numerus genitus non ſit quadratus, neque enim omnibus numeris tertius, aut quartus proportionalis inuenitur ex prop. 4. & 5. l. 8 elem. Auferendus eſt ex dato numero plano maximus quadratus, qui auferri poſſit, vt medius proportionalis vicinius, quam poſſit, obtineri queat.

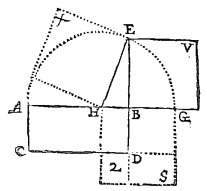
COROLLARIVM.

HInc poteris experiri illud, quod Eucl. probat propoſ. 5. lib. 8, non omnē numerū habere, aut mediū, aut tertiū proportionalē, quia sūt numeri inter ſe primi. neque compoſiti ex alijs: Quare, ſi videas radicem quadratam prima vice non eſſe erutam, licet, vt docuimus poſſis à reliquis extrahere radicem quadratam, aut veræ radici ſemper magis appropinquare, non tamen vera educi poteſt, cum illa non adſit ſaltem numeris exarabilis: Vnde tandem quieſcendum, cùm ad eas minutias peruentum ſit, quæ inſenſibiles habeantur.

PROBL. VI. PROPOS. XXV.

Numerum datum maiorem, ita diuidere, vt partes ſint reſpectu alterius extrema proportionalia.

V. g. ſit 10. qui ita debeat diuidi, vt partes ſint, reſpectu numeri 4. extrema proportionalia. Diuidatur in duas partes, & ſint 5 multiplicetur in ſe fiunt 25. ſubducatur deinde 4. in ſe ductus, nempe 16. remanent 9. cuius radix eſt 3. qui additus numero 5. facit 8. & alterum ſegmentum eſt 2. eſtque 2. ad 4. vt 4. ad 8.



PRobatur adhibito ſchemate propoſ. 16 ſecundi elem. HE quadratū medietatis AG æquale eſt quadrato EB, & HE ex 11. propoſ. lib. 2. elem. quare ablato quadrato BE à quadrato HE reſiduum erit quadratum ex HB, ſi ergo requiratur HB latus, & addatur medietati AH lineę HG conſtituet lineam AB, & reſiduū medietatis erit BG. Sed ex prop. 16. l. 6. elem. BG, & BE, & AB ſunt proportionales. Ergo etiam numeri eas proportiones exprimentes, vt notauimus præſſ. ad propoſ. 18. huius.

EXPENSIO VII.

De radice Cubica, duobuſq; numeris mediis proportionalibus.

EXtractio harum duarum radicum, nempe tùm cubicæ, tum quadratæ omnino neceſſaria eſt reliquis tractatibus; ſed hæc præcipuè pro ſolidis inueniendis, & permutandis, aut proportionaliter augendis: Cæteræ verò radices Zenſizenſica, Surdeſolida, & cæt. vix in vſum veniunt, & rarus omnino caſus dempta Algebra, & etiam in ipsâ, nec frequentior vſus; Propterea earum explicatio, & extractio huic libro parum conuenit, in quo omnia quidem Mathematica, ſed relictis ſuperfluis, & minus vtilibus tradere intendimus.

Præſſ. Cubica radix eſt numerus radicalis, qui gemina vice multiplicatus in ſe, & in genitum producit numerum cubum, V. g 2. ex defin. 2. l. 8. Elem. erit radix cubica, quia multiplicatus in ſe facit 4. & iterum idem genitum multiplicans facit 8. & 8. erit cubus. Dato itaque numero cubo, vel numerum, qui cubum comprehendat, tradenda eſt regula, quâ ex ipſo hæc radix poſſit deduci.

Aliæ verò radices ſunt numerorum, qui nedum multiplicant ſe, & productum, ſed inſuper productum producti, vt Zenſizenſica. Vel producti etiam productum, vt Surdeſolida, & ſic in infinitum. Si ergo numeri V. g. 2. & 2. adhibeantur eos vnica vice inuicem multiplicādo, numerus eſt quadratus; ſi etiam rurſus 2. adhibeatur, & multiplicet productum 4. erit productus 8. cubus: Si rurſus 2 adhibeatur ad productum 8. multiplicandū erit productus 16 Zenſizenſus. Si 2. rurſus adhibeatur erit numerus productus 32. Surdeſolidus, & ſic procedendo in infinitum.

Præſſ. 2. Quod adnotauimus in præſſ. 1. expenſ. præced. etiam hic aduertendum. Cubum numerorū, à quo primo ſubducitur à dextra ſignificare cubum vnitatum; ſecundum ſignificare cubum decimarum, tertium cubum centeſimarum; & ideo cubus vnitatum, ſilicet, cuius radix ſunt vnitates, exprimetur ad ſummùm tribus numeris. Sic numeri 9. radix erit numerus cubus 729. tribus numeris expreſſus; at, ſi ſit quatuor, iam incipit eſſe Cubus decimarum; nam numeri 10. cubus eſt 1000. quatuor numeris expreſſus, & quia cubus centeſimarum incipit à 7. numeris, quia 100. per 100. faciunt 10000. & iterum hic per 100. facit 1000000. Ideo Cubus decimarum exprimetur, ne dum quatuor numeris, ſed quinq; & ſex; cum vltimus cubus decimarum ſ. numeri 99. Sit 970299. ſex numeris expreſſus. Quare, cum ob numeri magnitudinem totus cubus extrahi ſimul nequeat, & debeat extrahi per partes; priùs extrahitur radix numeri cubi decimarum, V. g. deinde vnitatum ſi ſex, vel quinque vel quatuor numeri ſint: at, ſi ſint ſeptem vel octo, vel nouem figuræ: tunc ipſius extrahitur cubi centeſimarum radix, deinde decimarum; poſteà vnitatum, & ſic ſi adſint plures numeri.

Præſſumpt. 3. Aduertendum quoque ex prop. 19. lib. 8. inter duos cubos, duos medios differentes cadere proportionales numeros, qui ſicut in radice quadrata erant duplandi. Sic in Cubica ſunt triplandi, vt potes faciliter intelligere ex fig. Cubi hic appoſita. Cubus enim QO, cuius baſes nigræ, ſi demetur à cubo toto QT, remanet cubus OT, & remanent quoque duæ ſpecies ſolidorum; nempe ſolidum AB, quod habet ſuperficiem AO eandem ac cubus demptus OQ, & altitudinē SO, quam cubus reſiduus OT. Remanet quoque ſolidum aliud KO habens ſuperficiem cubi reſidui OT, & altitudinem SO cubi dempti OQ. Quę tamen ſolida ad cubum complendum triplicantur, nam primæ ſpeciei ſunt tria AB, & CI, & FD, ſicut & ſecundæ ſpeciei tria ſunt KO, & LH, & EI, quæ omnia extrahenda ſunt, vt habito latere, & radice FE, deinde reſiduū eius FH obtineatur, quæ eſt eadem ac TK, vel FS. Hinc eſt, quod tum propter hanc rationem, tum propter rationem prædictam non ab omni numero radix cubica extrahatur; ſed inter ſingulos duo medij prætermittendi ſint.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

Radicem Cubicam extrahere.

SIt datus numerus 7625. à quo radix cubica extrahi debeat. Super primam figuram ad dextram punctum collocabitur, & duabus intermiſſis ſuper quartam, & ſic ſemper duabus intermiſſis: quia ab iſtis punctatis propriè radix quadrata ſubducitur; ab alijs verò intermedijs ſolida proportionalia educuntur.

Videndum eſt itaque quinam maximus cubus capiat in primo numero punctato etiam incluſis præcedentibus ad partem dextram, nempe in 15. ad quod expediet habere cubos iam deductos, cùm ſuis radicibus ab vno vſque ad 10. vt hic vides.

Itaque maximus cubus,	Radix	Quad.	Cubus
qui capiat in 15. eſt 8, cuius	1	1	1
radix eſt 2. itaque ſeorſum ra-	2	4	8
dix 2. ſtatuatur, & ſubducatur	3	9	27
8. à 15. reſiduumque erit 7.	4	16	64
& ſic ſubduxi Cubum 10. ex	5	25	125
primo præſſumpto: quia nu-	6	36	216
merus punctatus, à quo ſub-	7	49	343
duxi, eſt quarto loco, qui eſt	8	64	512
milliarium: habeoque radicē,	9	81	729
& latus 2. qui in radice po-	10	100	10000
nendus eſt ſecundo loco, quod ſignifi-			2
cet decimas, tunc cùm fuerit omnino extracta radix cubica.			7625.

Accedamus modo ad alterius cubi extractionem à punctato numero 5. ſed quia priùs deducenda ſunt omnia ſolida, ideo accipiamus quadratum radicis 2. appoſita vnica zifra, vt ſit 20. quia, vt dixi eſt numerus decimarum, eritque 400. quę triplico ob tria proportionalia ſolida maiora, & ſunt 1200. Iſte ergo numerus debet capere in reſiduo 7625. & inſuper remanere aliquid, tum ob ſolida minora triplicata extrahenda; tum ob cubum numerum inſuper deducendum. Et video, quòd quinquies capit, & inſuper remanet talis numerus, qui, vt puto, erit capax recipiendi ſolida prædicta minora, & cubum. Ideoque apud radicem pono 5. vt altera radix, vt itaque faciam, & tramutem in ſolidos numeros, ſuperficies ſupra factas 1200 multiplico per 5. nempe per altitudinem inuentam, & faciunt 6000. & habeo tria ſolida maiora. Deinde, vt habeam quoque ſolida minora, & cubum. Multiplico radicem 5. in ſe, & generat planum numerum 25. habeoque baſim ſolidorum minorum, quam triplico; quia tria ſunt, & faciunt 75. quem numerum multiplico per latus 20. vt obtineam altitudinem ipſorum, & faciunt 1500. tandem, vt obtineam cubum, multiplico quadratum 25. per radicem 5. & facit 125. Quos omnes numeros ſimul colligo, nempe 6000. ſolida maiora 1500. ſolida minora, & 125. cubum; eritque numerus 7625. Quem ſubduco à numero reſiduo 7625. & nihil remanet. Radix ergo cubica extracta fuit, & reperta 25. Si verò fuiſſet numerus 15637. non fuiſſet cubus numerus; vnde ſuperfuiſſet aliquis numerus V. g. 12. à quo radix cubica vlteriùs extrahi non potuiſſet, vt ſupra de radice quadrata dixi, & illi caſus, quos ibi apoſui, ſunt & hic obſeruandi; ſed omnia triplicando.

Primus itaque caſus eſt, ſi ante primum numerum dextrùm reperiantur duo numeri, vel vnus; tunc primi ſunt conſignificatores, & illi tres pro vno ſunt accipiendi. Secundus ſi numerus, qui datur non ſit cubus V. g. ſi datus fuiſſet numerus 1330. tunc extracto cubo 1. remanet 330. à quo non poſſumus extrahere duas ſpecies proportionalium triplicatas, & cubum minorem. Nam 1. in ſe facit 1 addito 0. facit planū numerum 100. quē triplico; & facit 300. qui numerus capit in 330. vnica vice; itaque radix altera eſſet 1. Si ergo talis verè eſt oportebit, vt capiat eius cubus, & ſolida tria in reſiduo 30. multiplicatus ergo 1. in ſe facit 1. ſuperficiem, quam triplico, & multiplico per 10. & facit 30. ſolidum. Deinde 1. in ſe, & facit 1. Vnio tandem ſimul 300. ſolida maiora 30. ſolida minora, & cubum 1. & faciunt 331. maior numerus; quam 330. Itaque nec quidem cubus vnius vnitatis in reſiduo 330. capere poteſt: Quare apud radicem pono ziffram, & erit 10. & 330. erit reſiduum; quod ſi fuiſſet hoc reſiduum 331. radix cubica fuiſſet 11. & nihil reſidui fuiſſet, quia numerus exhibitus fuiſſet cubus.

Tertius caſus eſt. Si id occurrat non in fine operationis, ſed in medio: tunc appoſita, vt in præc. caſu apud radicem zifra, totum reſiduum ſequentibus numeris eſt copulandum, & videndum, an à reliquo hoc conſequentibuſque ad punctum radix cubica extrahi poſſit.

Quartus caſus eſt. Cum remanent reliquiæ, cognoſcere: an illæ ſint maiores, quam oporteat. Quod vt cognoſcatur radix cubica iam extracta V. g. 10. à numero 1333. multiplicetur in ſe, quę multiplicata triplicetur, vt ſit 300. triplicoque 1. & per radicem 10. multiplico, & facit 30. & addo 1. & facit 31. quem addo numero 300. & ſunt 331. Reſiduum verò numeri 1333. deductā radice Cubicā

bicâ 10. est 333. itaque cum numerus sit maior, quàm productus 331, signum est, quòd adhuc vnica vice Cubus vnius vnitatis capere potest, & quod radix cubica maxima sit 11. huius numeri 1333. remanetque fractus numerus 2.

PROB. II. PROPOS. XXVII.

Radicem cubicam, vtrum benè deducta fuerit? inuestigare.

HOc fit multiplicando radicem cubicam in se, & deinde in productum, & additis residuis, si consentiat cum numero exhibito erit bene facta deductio; sin minus aliquis error irrepsit; Hoc autem patet per se, nec indiget ostensione.

PROBL. III. PROPOS. XXVIII.

Dato numero non cubico, radicem cubicam proximiorem deducere.

ADdes proposito numero V g. 15862. aliquot ternarios zifrarum V.g. duos, vt fiat

. . . .

numerus 1586200,000. à quo radix cubica subducatur, & sit 2512. Quia ergo duo ternarij zifrarum additi sunt, auferantur duæ figuræ sinistræ 12. tanquam numerus fractus, & suppósito 1. cum duabus zifris iuxta ternarios 2 priorum additos, erit radix cubica numeri 1586,2. valde proxima 25 & $\frac{1}{10}\frac{3}{0}$. Ratio est eadem, quæ præcedent. Expens. prop 22. eritque hic applicanda.

* Vel multiplicabis residuum 237 subductâ radice cubicâ per cubum 100. numeri 10. & erit 237000. Deinde radicem cubicam 25. multiplicabis per 10. eritque 250. quam duces in se met, vt habeas numerum planum 62500. & ob tres proportionales interpositos per 3. multiplicabis, eritque 1875co. videbis itaque quot vicibus capiat hic numerus 187500. in residuo 237000. & capit vnica vice. Ideoque hæc vnitas in se ducta multiplicabitur cum radice 250. & erit 250. quam triplicabis, vt faciat 750. ob tres proportionales minores, deinde duces vnitatem quoq; in se, & erit 1. Ergo isti numeri 187500. & 750. & 1. simul addantur, eruntque 188251. quos subduces à residuo 237000. Et quia in hoc vnica vice capit, & radix Cubica fuit multiplicata per 10. ideo erit minutia $\frac{1}{10}$.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

Si dentur quatuor numeri continuè proportionales, quadratum primi ad quadratum secundi est veluti secundus ad quartum.

SInt quatuor numeri continuè proportionales 3. 6. 12. 24. & sit quadratum primi 9. & secundi 36. Dico, quod ita est 9. ad 36. vt secundus 6. ad quartum 24.

* Probatur. Quoniam ponitur 3. ad 6. vt 6. ad 12. Ergo Rectangulum, & numerus planus ex primo 3. & tertio 12. æquabitur quadrato ex medio 6. Quare primus 3. multiplicando se faciet suum quadratum, & multiplicando tertium 12. faciet quadratum numeri 6. Ergo ex propos. 17. septimi erit 3. ad 12. nempe primus ad tertium. Sic quadratum primi 9. ad quadratum 36. secund. Sed vt primus ad tertium, ita est secundus ad quartum. Ergo vt secundus ad quartum, sic erit quadratus primi ad quadratum secundi.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

Si sint quatuor numeri proportionales, erit solidus primi in se ducti, & in extremum æqualis Cubo secundi.

SInt quatuor numeri proportionales 2. 6. 18, 54. Dico solidum genitum ex multiplicatione primi in se, & in quartum esse æqualem Cubo secundi.

* Probatur ex præced. ita est quadratus primi 4. ad quadratum secundi 36 vt secundus ad quartum. Ergo ex 19. septimi Elem. Si multiplicetur primi quadratus cum vltimo, qui sunt extremi proportionales generabit æqualem numerum, ac secundi multiplicati in suum quadratum, qui sunt medij proportionales. Sed secundus multiplicans suum quadratum facit Cubum, & primus multiplicans se, & deinde quartum facit solidum. Ergo iste cubus, isteque solidus erunt æquales.

PROBL. IV. PROP. XXXI.

Inter duos numeros datos, duos medios proportionales adinuenire.

SInt dati duo numeri 54. & 2. inter quos duo medij proportionales sint coniciendi. Multiplico primum 54. in se, & deinde in alium 2. generabiturque numerus solidus 5832. Ab hoc itaque numero extrahatur radix cubica, & erit 18. secundus proportionalis apud primum 54. ponendus. Accipiatur deinde numerus 2. tanquam primus, & ducatur in se, deinde in vltimum 54. & generabit numerum solidum 216. Cuius radix cubica est 6. apud 2. collocandus, & sic erunt 54. 18. 6. 2. quatuor proportionales continui.

* Probatur. Nam cubus secundi proportionalis ex præced. æquatur plano numero ex primo in se, deinde in quartum ducto. Si ergo ab eo plano numero primo in se, deinde in quartum extrahatur radix cubica, illa erit secundus proportionalis post primum collocandus. Quamobrem, si accipiatur vltimus 2. tanquam primus inuerso ordine dabit secundum, qui erit idem, ac tertius, serie, vt priùs acceptâ. Etenim tertius 6. est secundus respectu 2. vltimi, vt primus accepti, vt 18. est secundus respectu primi 54.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XXXII.

A fractionibus quadratis, & cubicis radicem quadratam excerpere atque cubicam.

EXtrahatur radix Quadrata, seu Cubica, tum à numeratore, tum à denominatore, seu vera, seu propinqua: si quando non sit nec numerator, nec denominator numerus, aut quadratus, aut cubicus, & erit factum, quod desideratur; Nam illæ duæ radices numeratoris inquam, & denominatoris constituent minutiam radicem numeri propositi. Proponatur V. g. minutia $\frac{4}{9}$ à quâ deducenda sit radix quadrata. Radix numeratoris est 2. denominatoris 3. ergo $\frac{2}{3}$ erit radix quadrata minutiæ $\frac{4}{9}$, sic quoque $\frac{2}{3}$ erit radix cubica numeri $\frac{8}{27}$. Quod, si data minutia sit fractio alterius minutiæ reducenda est ex dictis ad eam minutiam. Quod, si hæreat integris, & ab integro simul cum minutia radix quadrata, vel cubica educenda sit; integer in minutiam reuocetur, & ab ea minutia radix cubica, vel quadrata eruatur. Sic si sit $5\frac{4}{9}$ primò $5\frac{8}{9}$ reducetur ad minutiam $\frac{48}{9}$, & extrahetur radix quadrata, tum à numeratore 49 quæ erit 7. tum à denominatore 9. quæ erit 3. itaque minutia $\frac{7}{3}$. erit radix quadrata minutiæ $\frac{48}{9}$, vel 5. & $\frac{4}{9}$.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIII.

A fractionibus, nec cubicis, nec quadratis radicem proximiorem cubicam, vel quadratam excerpere.

SIt data minutia $\frac{1}{7}$, à quâ oporteat radicem proximiorem excerpere. Potest id exequi præcedenti regula duas radices nempe denominatoris, & numeratoris excerpendo proximiores, & ex eis duabus radicibus numeratoris quidem pro numeratore, denominatoris autem pro denominatore vtendo ad statuendam minutiam, quæ sit radix minutiæ datæ. Sic numeratoris 5. radix quadrata est $2\frac{1}{0}$, & denominatoris 7. est $2\frac{6}{10}$ estque minutia 2.

* Verum, vt scribantur ad modum minutiæ integri reducendi sunt ad fractiones, & vt earum valor cognoscatur per denominatorem numerator dividendus, vt redigantur ad vnicam minutiam. Sic $2\frac{2}{10}$ erunt $\frac{22}{10}$, & $2\frac{6}{10}$ erunt $\frac{26}{10}$. Quia ergo ex propos. 4. huius 1. par. ita est minutia $\frac{22}{10}$ ad minutiam $\frac{26}{10}$, vt numerator ad numeratorem; ideo minutia $\frac{22}{26}$ erit ea, quæ quæritur relicto denominatore 10. qui non variat minutias. Vnde ita erunt minutiæ illæ, ac minutia $\frac{22}{26}$.

Verum, & alio modo exactiori fieri potest. Multiplicetur denominator 7. per numeratorem 5. & sint 35. eritque huius 35. radix quadrata 5. & $\frac{5}{10}$, seu $\frac{50}{100}$. Si ergo assumatur numerator 5. & statuatur pro numeratore huius radicis inuentæ $\frac{50}{100}$ eo modo, quo supra, rediggendo ad eandem denominationem, in fractionèq; proiiciendo, vt sit $\frac{50}{100}$ erit relicto denominatore

2	
10	
6	
2	
10	
22	
10	
26	
10	

io. minutia radix datæ minutiæ $\frac{50}{100}$. Sic etiam euenisset, si radix inuenta $\frac{50}{100}$ statuatur pro numeratore, & denominator supponatur, & sit $\frac{50}{100}$.

* Probatur, quod hæc minutia sit eadem radix, ac illa, quæ esset educta, tum à numeratore, tum à denominatore propositæ minutiæ, & ideò quod, & ipsa radix sit.

Nam, quia multiplicauimus duos numeros 5. & 7. extremos, & fecimus 35. cuius radix quadrata est 5. & $\frac{5}{10}$ ex prop. 20. septimi, erit eadè proportio 5. ad 5. & $\frac{5}{10}$ ac 5. & $\frac{50}{100}$ ad 7. (supponimus autè ostensionis gratia 5. $\frac{50}{100}$, esse radicem veram) Quare proportio 5. ad 7. est duplicata eius, quam habet 5. ad 5. $\frac{50}{100}$, vel 5. & $\frac{50}{100}$ ad 7. Sed etiam 5. ad 7. habet duplicatam proportionem radicis 5. ad radicem numeri 7. ex propos. 18. l. 8. Ergo est eadem proportio radicis numeri 5. ad radicem numeri 7. ac 5. numeratoris ad radicem numeri 35. vel radicis numeri 35. quam ponimus esse $5\frac{50}{100}$ ad denominatorem 7. quare erit ex Cor. prop. 3. p. 1. huius, eadem minutia radix numeratoris, & radix denominatoris V.g. $\frac{5}{7}\frac{50}{100}$ supra inuenta, ac numerator 5. cum radice numeri 35. nempe $\frac{5}{7}\frac{50}{100}$, aut ipsa radix 50. numeri 35. cum denominatore 70. cum in omnibus eadem sit proportio, quod earum omnium proportionum duplicata sit proportio numeratoris 5. ad denominatorem 7.

Ad extrahendâ verò radicè Cubicâ. Numerator 5. quadratur, & sit genitus 25. ducaturque in quadratum 25. denominator 7 & fiat 175. adiectisque zifrarum ternarijs, ab hoc numero extrahatur radix cubica. Nam si hæc statuatur tanquam numerator denominatoris 7. erit cubica radix minutiæ propositæ.

Sic numeri 175. radix cubica proxima est 5. & $\frac{6}{10}$. Si ergo hæc radice vtar pro denominatore, & numero 5. pro numeratore modo prædicto, & faciam minutiam $\frac{5}{7}\frac{0}{0}$ hæc erit radix cubica proxima datæ minutiæ $\frac{5}{7}$.

Probatur. Nam ex prop. 27. huius, radix solidi 5. in se, deinde in 7. ducti, nempe numeri 175. est secundus proportionalis post 5. primum collocandus, & 7. quartus proportionalis. Quare numerus 5. ad numerum 7. habebit triplicatam proportionem eius, quam habet 5. ad radicem numeri 175. Sed ex 19. l. 8. etiam 5. habet ad 7. triplicatam proportionem radicis cubicæ 5. ad radicem cubicam numeri 7. Ergo radix cubica numeri 5. sumpta, vt numerator ad radicem cubicam numeri 7. sumptam, vt denominator habebit eandem proportionem, quam 5. ad radicem cubicam numeri 175. Vnde ex propos. 3. huius 1. part. Coroll. erit eadem minutia, si sumatur 5. vt numerator, & radix cubica numeri 175. pro denominatore accipiatur, ac radix cubica numeri 5. vt numerator sumpta, & radix cubica numeri 7. vt denominator, quæ constituit cubicam radicem minutiæ $\frac{5}{7}$.

Potes etiam ducere numeratorem in quadratum denominatoris, & radix cubica erit numerator, cuius denominator erit ipse, qui priùs erat, constituesque minutiam $\frac{5}{7}\frac{0}{0}$.

Ratio est eadem, quæ prædicta; solumque differt in hoc, quòd denominator, vt primus assumitur, vt radix extracta sit secundus proportionalis immediatus, & numerator quartus. Ibi verò numerator, vt primus assumebatur, & radix extracta tanquam secundus proportionalis, & tandem denominator tanquam quartus.

TRA-

TRACTATVS XIIII.

IN PROPORTIONES NVMERICAS. PARS I.

De Proportione Geometrica continua.

QVoniam ipsa fundamenta proportionum, numeros inquam simli ratione se referentes in præcedenti Tractatu inuenire docuimus, nunc ipsas proportiones, rationumque similitudines opus est speculari. Tres verò species proportionis sunt; nempe Geometrica, Arithmetica, Musica, de quarum ratiuâ agere opus est. Vnde in tres partes iste Tractatus abibit, in quarum singulis, singulas species exponemus.

EXPENSIO I.

De proprietatibus proportionis Geometricæ continuæ.

PRæclpua est, & quam in primis definit. lib. 5. defin. 4. Euclides. & de qua intelligit in propositionibus quinti, & sexti est proportio Geometrica, & de hac primò agendum est; cùm sit omninò eius cognitio necessaria ad Logarithmos inueniendos, & ordinandos; ob quem scopum de ea, hic tandem pleniorem cognitionem exhibere fuit necessarium.

Proportio autem Geometrica in similitudine continentiarum consistit, quando quantitas continet vel continetur ab alia sim liter, ac aliqua alia quantitas continet aliam tertiam V.g. 4. 8. 16. sunt in proportione Geometrica, quia 8. continet 4. sicut 16. continet ipsum 8 nempe gemina vice.

Datur duplex proportio Geometrica, *Continua*, & *Discreta*. Continua est illa, quæ est eadem inter tres, aut quatuor, aut plures numeros, ita ut quilibet sit sequens, & antecedens, terminus relationis, & fundamentum V g. 4 8. 16. proportionem contiuuam habent; quòd fundamentum 4. refertur ad 8 vt terminum, qui tanquam fundamentum refertur quoque ad 16. terminum suum. At non continua est illa, in quâ nullus numerus rationem habet fundamenti simul, & termini, vt est illa, quæ intercedit inter 2. ad 4. & 5. ad 10. & 6. ad 12. Nam quælibet licet eadem proportio dupla habet suum fundamentum 2. 5. & 6. terminumq; 4. 10. 12. distinctum. Cum itaque multæ proprietates, tum de Geometrica proportione in genere, seu inter quantitates corporum, vt quinto, & sexto libro, seu inter quantitates numerorum, vt septimo & octauo, & nono ab Euclide explicatæ sint, remanet hic, vt solas proprietates Geometricæ proportionis continuæ explicemus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Non omnes numeri continuari in suis proportionibus possunt.

PRobatur. Quia ex propos. 4. lib. 8. & prop. 5. eiusdem; nec numeri duo inter se primi, nec tres, aut plures proportionem dicentes continuam; si eorum extremi sint inter se primi continuari in numeris integris possunt. Quomodo verò cognoscendum sit, an dati numeri possint continuari in suis proportionibus, ibi explicatum est propos. 7.

THEOR. II. PROPOS. II.

Numeri, qui ab vnitate continuè proportionales sunt, primus in se multiplicatus producit tertium, & primus in tertium producit quartum.

PRobatur. Quoniam vnitas per ipsum primum primum metitur: nam vnitas, V. g. ter accepta facit 3. Vt itaque referatur 3. ad alium, vt 1. ad 3. ter debet accipi ipse 3. & ita in se multiplicari, vt fiat 9. Ad hoc autem, vt 9. se habeat ad alium, vt 1. ad 3. debet ter rursus accipi, vt fiant 27. & sic prosequendo. Ergo primus numerus post vnitatem in se ducendus, vt fiat secundus. Secundus autem multiplicandus per primum, vt fiat tertius in numeris ab vnitate continuè proportionalibus.

THEOR.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si inter duos numeros, & aliquem alium numerum assumptum continui proportionales ceciderint numeri, quot inter eos, & assumptum numerum cadunt, tot, & inter ipsos medij proportionales cadent.

SInt à numero 8. continuè proportionales ABC, pro prima serie, & DEF pro secunda, & primæ numero æquali. Dico; *quòd tot inter eos cadunt numeri*, V.g. B, & E, vel C, & tquot inter quemlibet ipsorum B, vel C, & num. 8. proportionales cadunt.

C 27. 36. 48. 64 F
B 18. 24. 32 E
A 12 16 D
8
64
P 144 Q 256 R
S 20736. 3996. 66136
T V

Quod, vt probetur, quilibet ipsorum quadretur ducendo illum in se, & ex numero 8. fiat quadratus numerus Q, & quadratus numerus P ex numero A, & quadratus numero R ex numero D; Cum ergo P, & Q sint numeri quadrati cadat inter eos medius vnus proportionalis ex prop. 8. octaui Euc. Sed inter B, & 8. cadit vnus medius proportionalis nempe A 12. quare erit B ad 8. numerum, vt numerus P quadratus ad quadratum Q.

Idem dicas de quadrato R, qui inter se, & quadratum Q admittit medium proportionalem vnicum; sicut E respectu numeri 8. Quare Q respiciet R quadratum, vt 8. numerus respicit numerum E. Ideo, cum sit B ad 8. vt P ad Q, & 8. ad E, vt Q ad R erit ex æquo B ad E, vt P ad R. Sed cum P, & R. sint quadrati vnus inter eos proportionalis cadit, ergo etiam inter B, & E; Quia ergo inter B, & 8. vel E, & 8. vnus medius proportionalis cadit, vel A, vel D, inter etiam ipsos B, & E vnus medius proportionalis cadet, s. 24. & prop. 8. l. 8. Idem dicas de C, & F, inter quos duo medij proportionales cadent 36. & 48. sicut cadunt inter C, & 8. duo medij proportionales B, & A, vel sicut cadunt inter F: & 8. numeri medij B, & D. Quia inter S, & V cubos cadent duo medij proportionales.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si sint quotcumque numeri continuè proportionales eandem inuicem proportionem dicent, tres numeri in eâdem distantiâ assumpti relictis intermedijs.

SInt numeri continuè proportionales 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. Dico, *quòd si assumantur hinc tres numeri in eadem distantia*, V. g. 2. & 16. & 128. qui relictis duobus accipiuntur, *quod eadem proportio adhuc est* 2. *ad.* 16. *quæ est* 16. *ad* 128.

* Probatur. Nam vt est 2. ad 4. suum sequentem ita est 16. ad 32. suum sequentem, & vt 4. ad 8. ita 32. ad 64. & tandem, vt 8. ad 16. ita 64. ad 128. Ergo ex *æquo*, ita est 2. ad 16. vt 16. ad 128.

THEOR. V. PROPOS. V.

Trium numerorum continuâ proportione se respicientium quadratum medij est æquale rectangulo extremorum.

PAtet ex propos. 20. septimi. Nam numerus medius in se ductus, qui est quadratus ex defin. 18. septimi facit numerum genitum æqualē numero extremorum; qui est rectangulum numericum, aut planum, vt ex defin. 1. lib. octaui. Hoc idem posset probari in quantitate continua ex propos. 17. sexti.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si sint quatuor numeri continuè proportionales planum factum ab extremis æquale est illi plano, quod fit à medijs.

PAtet quoque hæc propos. ex 19. propos. sept. vbi numerus ex multiplicatione extremorum probatur æquari numero ex multiplicatione mediorum; cum verò inuicem numeri multiplicantur in plana rediguntur, vt constat ex def. 1 octau. quod etiam est intelligendum de cubo facto ex medio, cui est æquale solidum numericum factum ex extremis multiplicatum per medium. Patet enim, quod cum plana sint æqualia multiplicata per eundem numerum medium faciant idem solidum.

THEOR. VI. PROP. VII.

* *Quo maior est numerus, eò in ipso minutiores proportiones reperiri queunt continuâ proportione sibi inuicem respondentes.*

PRobatur eo, quia ibi plures possunt inueniri relationes, vbi plura sunt fundamenta; talia autem sunt in multitudine maiori. Sed possunt etiam inueniri minutiores. Nam ea est minor proportio, quæ numeri, ad quem comparatur minorem partem, vel partes continet: sed numerus paruus acceptibilis à maiori numero continebit illius minorem partem, quam numeri minoris, V.g. 2. continebit pauciores partes numeri 1000. quam numeri 100. cum huius quinquagesimam partem amplectatur, illius verò quingentesimam. Ergo in maiori numero minutiores proportiones reperiri queunt.

THEOR. VII. PROPOS. VIII.

* *Differentiæ sunt in eadem proportione, ac ipsi proportionales in continuè proportionalibus.*

SIt proportio continua 50. 60. 72. Dico differentias 10. & 12. esse in eadem proportione, ac ipsi termini, & sic esse 10. ad 12. vt 50. ad 60.

Pro-

* Probatur ; Ita ponitur 50. ad 60. vt 60. ad 72. Ergo *diuidendo* ita erit 50. ad 10. vt 60. ad 12. Ergo *permutando*, ita erit 50. ad 60. vt 10. ad 12. quod erat ostendendum.

THEOR. IX. PROPOS. IX.

Differentiæ coexcuatæ in continuis proportionalibus constituunt cum numero radicali maximum terminum.

SInt tres termini continuè proportionales 4.6. 9. & differentiæ 2. & 3 Sirque quidam numerus Ouium æqualis numero 4. & differentiæ 2. & 3. isti numero addantur. Dico fieri terminum æqualem termino 9. vltimo. Nam si addamus 2. ipsi 4. quà differt 4. à 6 fiet Ouium æqualis numerus numero 6. & sic succesſiuè. Ergo cum omnes termini semper sint æquales etiam vltima æquali additione differentiæ Ouium completus numerus, vltimo termino erit æqualis.

THEOR. X. PROPOS. X.

Datis duobus terminis proportionalibus diuiſo maiore per minorem Quotiens eſt denominator proportionis.

EXibeantur duo termini 4. & 12. & diuidatur 4. per 12. quotiens erit 3. Dico *hunc quotientem 3. eſſe denominatorem proportionis, quam habet 4. ad 12.* Nempe 4. reſpectu 12. eſſe $\frac{1}{3}$.

Probatur ex diſin. 1. ſeptimi. Nam eam proportionem dicunt numeri, cum alterius fuerit eadem pars, vel partes, & cæt. Si ergo per diuiſionem exquiratur, quæ pars ſit numerus 4. numeri 12. habebimus eius proportionem, quare ex propoſ. 40. ſeptimi, pars numeri 12, quæ eſt 4. erit à quotiente denominata, nempe à 3 & dicetur tertia pars. Sic ſi velimus ſcire, quæ pars ſit numerus maior 12. numeri 4. quia per diuiſionem 4. per 12. habetur minutia $\frac{4}{12}$, aut $\frac{1}{3}$ habebimus proportionem, quam dicit 12. ad 4. nimirum triplam.

COROLLARIVM.

HInc verò eſt, quod ſecundus terminus contineat antecedentem ipſo antecedente dempto, quot vnitates ſunt in denominatore vna abiecta, & ſic quod 12. minus 3. ideſt 9. contineat 3. toties, quot vnitates ſunt in 4. ſed demptâ vnâ.

THEOR. XI. PROPOS. XI.

* *Numerus maior in quacumque proportione multiplici continet reliquos omnes tot vicibus, quot ſunt in denominatore vnitates vna dempta, & inſuper numerum à quo denominatio incepit.*

SIt data continua multiplex denominata à 4. proportio, quæ ſit 3. 12. 48. Dico 48. continere reliquos omnes tricies nempe vna vnitate minus, quam ſint vnitates in denominatore, qui eſt quaternarius, & inſuper numerum 3. à quo incipit ſeries

Probatur. Nam progreſſ. 1. ex ſuppoſitione n. 12. continet quater 3. ergo 3. tricies multiplicatus, ideſt acceptus quater minus vna vice æquabit 12. ſi cum 3. coniungatur numero, à quo incepit proportio. Progreſſ. ſecundus ſic dicas de numero 12. qui tricies acceptus, nempe per denominatorem quaternarium vnitate mancum multiplicatus, ideſt 36. & iunctus cum ipſo 12. æquabit 48. Sed iam hoc ipſum 12. habemus, quo deficit numerus 36. ad adæquandum 48 ex primo progreſſ. ex 3. tricies multiplicato, additoque ei numero ipſo radicali 3. Ergo numerus 48. continebit reliquos tricies, nempe toties, quot vnitates ſunt in denominatore minus vno, & inſuper numerum radicalem, cùm 12. tricies acceptus cum 3. tricies accepto vna cum 3. radicali, nempe 12. æquet ipſum 48. Et idem dicas, etiam ſi ſint plures termini, quàm tres.

Sic pronuncies etiam ſi proportio ſit multiplex ſuperparticularis, ſeu ſuperpartiens: V. g. detur 9.24. 64. cuius denominator eſt 2. & $\frac{2}{3}$. Si ſubtrahas 9 à 24. remanent 15. 51 $\frac{2}{3}$. Quare 9. acceptus iuxta denominatoris vnitates vnâ excluſâ, nimirum 1. & $\frac{2}{3}$, quæ faciant 15. addito ipſo numero 9. æquant 24. Ita 24. acceptus ſemel cum duobus tertijs, & 9. cum duobus tertijs addito numero 9. radicali æquant ipſum 64.

* Probatur aliter data proportione 3. 12. 48. ſi demptur 3. à 12. erit 3. ad 9. Ratio denominata à 4. ſed diminuto vnitate, ideſt à 3. Quia ergo eſt 3. ad 12. vt 12. ad 48. erit *aimidendo* 3. ad 9. vt 12. ad 36. Quarè *permutando* erit 3. ad 12. vt 9. ad 36. & *Componendo* erit 3. ad 15. vt 9. ad 45. Quare etiam *permutando* erit 3. ad 9. vt 15. ſumma aliorum minorum ad 45. terminum maximum deducto primo. Sed 3. ad 9. habet rationem denominatam à 3. ideſt à denominatore 4. vnitate minuto. Ergo etiâ 15. ſumma ad 45. terminum maximum mancum 3. primo termino eandem obtinet.

THEOR. XII. PROPOS. XII.

Summa reliquorum in proportionalibus continuis proportionis ſuperpartientis, & ſuperparticularis excluſo maximo diuiſa per denominatorem proportionis differentiæ ad primum terminum dat quotientem, qui vnitus cum numero radicali ipſum maximum proportionalem numerum facit.

*SIt proportio data ſuperparticularis 50.60.72. cuius denominator proportionis, quam habet differentia 10. ad radicalem terminum 50. ſit $\frac{1}{5}$. Dico, quòd ſumma reliquorum dempto maximo, quæ eſt 110. diuiſa per $\frac{1}{5}$ dat quotientem 22. qui vnitus cum numero radicali 50. facit maiorem terminum 72.

Prob. ex 8. prop. h. ita eſt differetia ad differentiã 10. ad 12. vt terminus 50. ad terminum 60. Ideoq; ex Coroll. 2. prop. 19. lib. 5. ita erit 10. ad 10. & 12. ſimul, ideſt ſummam 22. differentiarum, quemadmodum 50. ad 110. ſummam terminorum. Verum ſi diuidatur ſumma 110. per denominatorem 5. & per eundem 5. terminus 50. erunt adhuc ex prop. 19. lib. 7. quotiens numeri 50. ad quotientẽ numeri 110. vt 50. ipſe terminus ad ſummam 110.

Cum

Cum ergo differentia ad ſummam differentiarũ, & quotiens radicalis termini ad quotientem ſummæ terminorum obtineat eandem proportionem, quã termini radicalis ad ſummam terminorum, erit etiam eadem proportio primæ ipſius differentiæ ad ſummam differentiarum, quæ quotientis radicalis termini ad quotientem ſummæ terminorum ex 16. lib. 5. Elem. & ideo *permutando* differentia prima ad quotientem radicalis termini habebit eam proportionem, quam ſumma differentiarum ad quotientem ſummæ terminorum. Sed Quotiens radicalis termini eſt æqualis differentiæ. Siquidem diuiſor eſt $\frac{1}{5}$ denominator proportionis, quam differentia habet ad radicalem terminum ex propoſ. 10. huius. Ergo etiam ſumma differentiarum, & quotiens ſummæ terminorum erunt æquales.

Sed omnes differentiæ additæ primo termino conſtituunt vltimum terminum ex prop. 9. Ergo etiam Quotiens ſummæ termitorum diuiſore exiſtente denominatore proportionis, quam habet differentia ad primum terminum, additus primo termino dabit vltimum terminum, vnde quotiens 22. additus termino 50. conſtituit vltimum terminum 72. Sic dicas de proportione ſuperpartiente; Datis enim tribus terminis 25. 40. 64. ſumma minorum 65. diuiſa per denominatorem $\frac{1}{5}$, quæ ſit multiplicando per 3. diuidendo per 5. dabit numerum 39. qui vnitus numero radicali 5. procreabit ipſum maiorem 64. Et idem argumentum valebit, etiam ſi plures ſit termini, vt patet.

THEOR. XIII. PROP. XIII.

Secundus proportionalis detracto numero radicali, & primo dicit eandem proportionem ad numerum radicalem, quam numerus extremus detracto eodem primo ad ſummam reliquorum.

SIt data proportio continua 3. 12. 48. detrahaturque numerus radicalis, & minimus 3. à numero 12. & remaneat 9. ſicut, & ab extremo 48. & remaneat 45. ſumma verò reliquorum eſt 85. Dico, quòd ita 9. eſt ad 3. vt refertur proportione 45 ad 15. ſummam reliquorum. Denominator autem proportionis eſt 4.

* Probatur ex propoſ. 11. huius. Nam maximus numerus continet ſummam reliquorum tot vicibus, quot denominator dempta vna habet vnitates, & inſuper numerum primum, & radicalem. Ergo hoc numero primo, radicalique excluſo continebit tot vicibus, quot repoſcunt vnitates denominatoris vna excluſa; ſed & ſecundus terminus minutus primo continet primũ tot vicibus, quot vnitates ſunt in denominatore vna vnitate minuto ex propoſ. 10. Coroll. Ergo tot vicibus continetur primus in ſecundo minutus primo V. g. 3. in 9. quot ſumma reliquorum in extremo eodem primo minuto, vt 15. in 45. quare eamdem proportionem dicent ex 1. definit. ſeptimi, & ita erit 9. ad 3 vt 45 ad 15. & ita dicas de reliquis etiam ſi plures termini ponantur.

Idem quoque in proportione ſuperpartiente, & ſuperparticulari valet. Nam, ſi dentur 8. 12. 18. 27. cuius denominator proportionis differentiæ primæ ad terminum radicalem eſt $\frac{2}{3}$. Erit ablato 8. ad 12. vt ſint 4. & à 27. vt ſint 19. eadem proportio 4. ſecundi termini dempto primo 8. ad primum terminum 8. quæ eſt extremi dempto primo 19. ad ſummam reliquorum 38.

Prob. ex 12. h. Nã quotiens ſummæ differentiarũ cum primo termino conſtituit vltimum, ergo ablato primo remanebit quotiens ſummæ differentiarum, cuius diuiſor eſt denominator prædictus $\frac{1}{5}$. Cum ergo idem diuiſor diuidat primum terminum, & conſtituat primam differentiam, & ſummã terminorum, & conſtituat ſummã differẽtiarũ, erit ſecũdus terminus ablato primo, ideſt differẽtia prima ad primũ terminum, vt ſumma differentiarum, ideſt ex propoſ. 9. vltimus terminus ablato primo, ad ſummam terminorum. Quòd autem $\frac{1}{5}$ diuidat primum terminum, & generet primam differentiam, patet ex 10. huius; quia diuiſo primo termino per differentiam dat denominatorem proportionis differentiæ ad primum terminum. Ergo diuiſo ipſo termino primo per quotientẽ, & denominatorẽ differentiam dabit ex princip. 8. Tract. 8. Elem.

THEOR. XIV. PROP. XIV.

* *Denominatores proportionum in quolibet proportionali creſcunt ab vnitate.*

SIt ſeries proportionallum 4. 12. 36. 108. & denominator proportionis 3. Dico, quod 3. in ſingulis proportionalibus reperitur creſcendo ab vnitate, nempe, quod ſemel eſt in 12. nouies eſt in 36. nonagies in 108.

* Probatur. Nam numerus radicalis 4. ter acceptus facit 12. ergo tot partes erunt in 12. quot vnitates erunt in 3. ergo 12. in ſuis partibus numerabit 3. ſemel, at 36. numerat etiam ter 12. ergo 12. ter ipſum 3. numerat, ſic 108. ter capit 36. at 36. ter capit 12. ergo ter nouies capit 3. Sic verò procedere eſt procedere continua proportione ab vnitate ex propoſ. 2. huius.

EXPENSIO II.

De ſummandis proportionalibus Geometricis continuis.

SVmma proportionalium continuè fit etiam, ſi intermedij ignorentur, V. g. datis 24. & 64. ſumma omnium, qui inter 24. & 64. intercipiuntur ſine intermedijs haberi poteſt; ideoque hìc oportet huius artis ſpecimen exhibere.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Datis terminis continuè proportionalibus primo, ſecundo, & vltimo omnium ſummam inuenire.

3. 12. —— 768.

*SInt dati termini continuè proportionales 3. 12. 768. inter quos intercipiuntur 48. & 192. continuè proportionales, qui tamen ignoti præſupponuntur, cum eorum cognitio in acquirenda eorum ſummâ non ſit neceſſaria. Detrahatur ter-

minus primus 3. à secundo 12. & residuum sit 9. sic idem 3. terminus primus detrahatur à 768. & residuum sit 765. Hoc verò residuum multiplicandum est per primum terminum adhibita regula proportionum, & diuidendum productum 2295. per residuum secundi 9. Nam quotiens erit 255. summa omnium excepto maximo. Si ergo hanc summam maximo addas, erit omnium summa cognita 1023.

* Probatur. Quia ex propos. 13. huius, est eadem proportio primi termini ad secundum, cui ipse primus demptus fuerit, quæ est summæ omnium vsque ad vltimum exclusiuè ad ipsum vltimum, & maximum, cui similiter primus demptus sit; quare plana, ex primo, & vltimo ex istis quatuor proportionalibus erunt æqualia plano ex medijs ex propos. 6. huius. Quare planum factum ex 3. minimo, & 765. maximo erit æquale plano ex 9. secundo, & summa omnium excepto vltimo; vnde si diuidatur per 9. latus cognitum, planum illud latus alterum 255. exeret, quod est omnium proportionalium summa excepto vltimo.

PROBL. II. PROPOS. XVI.

Dato termino maximo, & minimo, & denominatore proportionis summam omnium terminorum continuè proportionalium inuenire.

3. 9. 27. 81.

*SInt dati termini continuè proportionales 3. 9. 27. 81. & denominator 3. ex vltimo primus demendus nimirum 3. & erunt 78. qui diuidendus est per denominatorem proportionis, cui vnitas ablata fuerit, nempe 2. & erunt 39. qui coniuncti cum 81. efficient omnium summam, & hoc in proportione multiplici; & multiplici superparticulari, vel superpartiente.

Probatur ex prop. 11. huius. Quia numerus maior continet minores omnes, quot sunt vnitates in denominatore vna dempta vnitate ab ipso denominatore. Ergo si diuidatur per illas vnitates minus vna prodibit summa omnium aliorum.

Sic dicas de non multiplici, nam datis

8. 12. 18. 27.

Sublato primo ab vltimo remanent 19. qui per denominatorem proportionis 1. differentiæ ad primum terminum, qui est $\frac{2}{3}$ dabit 38. summam omnium, excepto primo.

* Prob. ex prop. 12. h. Nam summa omnium diuisa per denominatorem proportionis prædictum dat quotientem differentiarum, qui cum primo ipsum facit vltimum. Ergo extracto primo, & residuo per denominatorem eundem multiplicato dabit summam omnium; quia illud residuum erit quotiens ex proportionis denominatore diuidente relictus. Vnde per multiplicationem ab eodem denominatore factam in pristinam multitudinem restitutus summam omnium, dempto vltimo exhibebit, & coniunctus cum eo erit omnium summa.

EXPENSIO III.

De proportione Geometrica propaganda.

DVplici modo potest extendi in infinitum proportio Geometrica, vel diminuendo, vel augendo; ideoque de duplici hac extensione erit agendum.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Datis duobus terminis, & proportionis denominatore extendere proportionem, seu augendo, seu diminuendo in infinitum.

MVltiplicetur terminus datus maior datis duobus terminis 2. & 6. per denominatorem proportionis, quam habet minor ad maiorem, qui est 3. & producetur terminus maior tertius 18. & si per eundem denominatorem multiplicetur 18. fient 54. & sic in infinitum se augendo.

2. 6. 18. 54. 162. & cæt.

At si cupias eam extendere diminuendo diuide minorem terminum per denominatorem eundem, & habebis minorem terminum tertium $\frac{2}{3}$; & si iterum diuidas producentur $\frac{2}{9}$; & rursus enascent $\frac{2}{27}$.

$$\frac{2}{12} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{2}{3} \quad 2. \; 6.$$

Vel si dati sint 54. & 162. quorũ denominator proportionis 3. si diuidas per 3. numerum 54. acquires tertium terminum 18. & cæt.

Probatur. Nam illi numeri sunt in proportione Geometrica; qui eadem partes habent, ex def. 1. l. 7. elem. Nempe ab eodem numero denominatas; cum ergo quilibet V. g. tertius, vel quartus terminus se augendo comprehendat tres partes minoris ob multiplicationem sicut datus terminus minorem datum comprehendebat, patet esse in eadem proportione; & idem dicas de diminutione. Nam terminus tertius ob diuisionem erit tertia pars secundi dati, sicut ipse secundus est tertia pars primi.

PROBL. II. PROPOS. XVIII.

Proportionem extendere, vel in augmentum, vel in diminutionem nullo dato proportionis denominatore:

SI sit proportio extendenda in augmentum duc maiorem in se. Deinde diuide per minorem, & tertius terminus prodibit; quod si diminuendo sit procedendum, ducendus erit minor terminus in se, & diuidendus per maiorem. Sic datis 12. & 18. si ducatur 18. in se fiet 324. qui diuisus per 12. dabit tertium terminum maiorem 27. Sic si ducatur 12. terminus minor in se, erit 144. qui diuisus per 18. dabit minorem tertium terminum 8.

Probatur ex propos. 5. huius. Nam rectangulum, seu planum ab extremis confectum est æquale

le quadrato medij; Vnde medio ducto in se habebimus quadratum tale; quod erit æquale rectangulo extremorum; cùm verò vnum ex extremis habeamus, obtinemus latus huius rectanguli; quare, si diuidatur per hoc latus, aliud latus prodibit, nempe aliud extremum; sicut enim rectangula numerica fiunt ex multiplicatione laterum ex defin. 16. sept. Elem. ita habetur quilibet per diuisionem totius ab altero effectam.

THEOR. I. PROPOS. XIX.

Aliquæ proportiones per solam additionem, vel subtractionem possunt extendi.

PRobatur. Nam talis est proportio dupla vt 4. 8. 16. 32. subductus enim terminus minor à maiore dat proportionem decrescentem, at additus terminus minor ipsi minori dat proportionem crescentem.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Datâ successiuâ proportione subducendo alias proportiones successiuas reperire.

DAta proportione aliqua, subducatur minor à maiore, & ordine eodem differentiæ notentur, Nã illæ in eadẽ proportione erũt V. g. dentur proportionales 27 81. 243. 729. & 2187. crescentes in tripla proportione: Si demantur continuè minor à maiore erunt differentiæ 54. 162. 486. & 1458. similiter in tripla proportione, & si rursus horum proportionalium sumantur differentiæ, erunt eodem modo proportionales; vt 108. 324. 972.

Probatur. Nam ex 23. propos. septimi. Ita dicunt proportionem numeri proportionales, vt eorum partes aliquotæ, quæ sunt in eadem proportione: Quando verò aufertur terminus minor à maiore aufertur pars aliquota, vtpote quod sit maioris pars aliqua, quam numerat denominator; vt 3. est pars aliquota numeri 9. & 9. numeri 27. Ergo reliquæ partes aliquotæ, quæ superant, dicent eandem proportionem. Probatur etiam ex propos. huius 8.

PROBL. IV. PROPOS. XXI.

Data serie proportionali alias series diuidendo reperire.

ASsume quemlibet numerum diuisorem V. g. 4 & datam seriem partire 27. 81. 243. 729. habebisque 6 $\frac{3}{4}$, 20 $\frac{1}{4}$, 60 $\frac{3}{4}$, 182 $\frac{1}{4}$, & rursus hos diuidas, habebis alios proportionales in eadem proportione in infinitum.

Probatur ex eadem propos. 18. l. 5. & 7. vel 8. huius. In eadem enim proportione sunt totum, & partes.

THEOR. II. PROPOS. XXII.

Si summa proportionis alicuius diuidatur successiuè per terminos proportionis. Quotientes in eadem proportione inuerso ordine inuenientur.

SIt summa 155. terminorum 5. continuè proportionalium 5. 10. 20. 40. 80. & per ipsos terminos diuidatur; habebimus hos terminos continuè proportionales 31. 15. $\frac{1}{10}$, 7 $\frac{1}{2}$, 3 $\frac{3}{40}$, 1 $\frac{7}{80}$.

* Probatur ex propos. 19. septimi. Nam 155. est rectangulum, vel planum, cuius vnum latus est 5. & alterum latus 31. vel 10. & alterum latus 15 $\frac{1}{10}$, vel 20, & alterum latus 7 $\frac{1}{2}$, & cæt. Quare, cùm hæc latera faciant planum semper eundem erunt in eadem proportione 5. ad 10. vt 15 $\frac{1}{10}$ ad 31. quòd etiam ostenditur ex propos. 17. sexti, & ex dictis propos. 6.

COROLLARIVM I.

HInc est, quod si horum proportionalium postremò repertorum summam diuiseris per eosdem proportionales, efficies rursùs alios in eadem proportione, & si horum summam rursus per hos diuiseris, alios inuenies in infinitum.

COROLLARIVM II.

HInc quoque satisfaciemus exquirenti duos proportionales, quorum summa æqualis sit numero vnius in alterum procreato. Nam sumptis proportionalibus duobus, & collectis in summã, ea dabit diuisa per eosdem, duos quotientes proportionales, quorum summa æqualis erit numero ex multiplicatione vnius in alterum procreato.

Sic sũptis numeris 4. & 8. quorum summa 12. diuisa per 4. dabit 3. diuisa per 8. dabit 1 $\frac{1}{2}$, quorum summa 4 $\frac{1}{2}$ est æqualis numero per mutuam multiplicationem effecto: Nam 1 $\frac{1}{2}$, & 3. inuicem multiplicati dant 4 $\frac{1}{2}$.

* Probatur. Cum enim 3. multiplicans 4. restituat 12. & multiplicans 1 $\frac{1}{2}$ faciat 4 $\frac{1}{2}$ erit eadem proportio 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. quam 4 $\frac{1}{2}$ ad 12.

Rursus, cum sit quotientium 1 $\frac{1}{2}$ ad 3. vt 4. ad 8. ex præced. vel ex 17. l. 9. erit cõponendo 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. $\frac{1}{2}$, summam, vt 4. ad 12. quare permutando erit quoque 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. vt 4 $\frac{1}{2}$ summa ad 12. Cum ergo 4 $\frac{1}{2}$ quatenus summa, & 4 $\frac{1}{2}$, vt genitus ex mutua proportionallium multiplicatione 3. & 1 $\frac{1}{2}$ habeat eandem proportionẽ, quam 1 $\frac{1}{2}$ ad 4. ad eundem numerum 12. erit idem numerus genitus ex proportionalibus, & collectus, vel summatus ab ipsis ex propos. 9. Elem. lib. 5.

EXPENSIO IV.

De proportionalibus in Geometrica proportione interserendis.

INterpositio proportionalium difficilis est maximè si in prolixam seriem proportio debeat extendi

tendi, cum non inter quoſcunque numeros numeri proportionales cadant, ſed ſolum planos, vel ſolidos ſimiles. Vnde cum procedendo tandē plani diſſimiles euadant, neceſſe eſt tandem incidere in laborioſas fractiones, vt patebit experimentum capienti.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Inter duos numeros conſtituere medium Geometricè proportionalem.

SInt dati duo numeri 3. & 75. inter quos reperiendus ſit medius proportionalis. Multiplicentur ſimul, & ſit numerus multiplicationis 225. cuius radix quadrata 15. eſt medium proportionale, & 3. ad 15. erit in eadem proportione, ac 15. ad 75. Et ſi rurſus velimus ſcire 15. & 75. quem medium proportionalem habeant, multiplicabimus eodem modo numeros exhibitos, & ſubducemus radicem quadratam, quæ erit $33\frac{1}{2}$ proxima, ſed non vera, cum numerus ex datorum numerorum multiplicatione exerens non ſit quadratus: Ita ergo erit 15. ad $33\frac{1}{2}$, vt $33\frac{1}{2}$ ad 75.

Probatur ex propoſ. 5. huius. Quia enim quadratum medij eſt æquale plano extremorum; hinc eſt quòd ex mutua multiplicatione duorum numerorum, quos extremos volumus eſſe proueniat numerus æqualis quadrato medij: Vnde ex eo deducta radix quadrata erit latus numericum illius quadrati, & ideo dicet eandem proportionem hoc latus ſuis extremis, cùm ſit latus quadrati æqualis plano extremorum.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Inter duos datos numeros plures proportionales numeros interſerere.

ADatis duobus numeris 81. & 1296. extrahemus radices quadratas 9. & 36. & iterum ex iſtis radices quadratas 3. & 6. ſi fieri poſſit. Deinde multiplicandæ radices ipſæ, vt intermedij proportionales prodeant; ſic multiplicata radix quadrata 3. cum 9. dabit 27. & 6. cum 36. dabit 216. & habebimus duas ſeries numerorum ab vnitate continuè excreſcentium ex propoſ. 2. huius, deinde ſubſcribendæ ſingulis datis ſuæ radices, & proportionales ordinatim decreſcentes, & hinc multiplicandæ inuerſo ordine, max ma cum minima, maior cum minore, mediocris cum mediocri, & cæt. Nam numeri producti dabunt medios proportionales; ita 6. multiplicatus cum 27. dabit ſecundum proportionalem 162. & 3. cum 216. tertium proportionalem 648. & 9. cum 36. numerum 324.

81.	162.	324.	648.	1296.
27				216
9				36
3				6
1				1

Probatur hæc operatio ex propoſ. 9. lib. 8. elem. Nam tot cadunt medij proportionales inter duos datos numeros, quot inter vtrumlibet ipſorum, & vnitatem; Cùm ergo inter vnitatem, & 81. inuenti ſint cadere 27. 9. & 3. & inter 1296. cadere 216. 36. 6. Ergo, & inter 81. & 1296. tot medij proportionales cadent nempe tres. Patet autem ex illa propoſitione; quod ij ipſi ſunt qui ex mutua, & alterna multiplicatione, maximi cum minimo, & cæt. fiunt.

Nam, vt ibi probatur, habent intermedij eam propottionem, quam 3. ad 6. Cum ergo 3. multiplicando 27. produxerit 81. ergo 6. multiplicando eundem 27. producet ſecundum proportionalem, qui ſe habeat ad primum, vt 3. ad 6. ex propoſ. 17. ſeptimi, cum idem numerus 27. multiplicet 3. & 6. Verum non omnis numerus talis eſt naturæ, vt æquali proportionalium numero diſtet ab vnitate, ac alter datus, nec talis, vt radix quadrata ab eo extrahi poſſit. Vnde vt plurimum laborioſa erit hæc operatio, & non præciſa; niſi forte numeri, inter quos medij proportionales deſiderantur ab vnitate continua proportione excreſcant.

ROBL. III. PROPOS. XXV.

Numerum datum in partes iuxta datam proportionem proportionales diſtribuere.

SIt datus numerus 992. qui diuidendus ſit in partes quinque habentes proportionem duplam diſponantur numeri quinque eiuſdem proportionis 2. 4. 8. 16. 32. quorum ſumma ſit 62. per hanc ſummam diuidatur numerus 992. & habebimus numerum 16. qui multiplicatus per terminos prædictos dabit partes quæſitas 32. 64. 128. 256. 512. quæ ſimul conflatæ reſtituent numerum 992.

* Probatur autem. Quia ſumma proportionalium continet omnes proportionales, ſimul: Quotiens verò à diuiſione numeri dati 992. proueniens, qui eſt 16 ſecat ipſum in tot partes, quot vnitates ſunt in ſumma proportionalium, quæ eſt 62. quia 16. multiplicatus per 62. facit 992. Ergo, ſi ſumma hęc 62. habet tot vnitates, quot vnitates reperiuntur in omnibus proportionalibus, etiam numerus datus 992. capiet tot vicibus 16. quot vnitates ſunt in omnibus proportionalibus. Et quia ita eſt 1. ad 62. vt 16. ad 992. etiam compoſitus 1. & 1. ideſt multiplicatus per 2. ad 62. vt eodem modo compoſitus 16. & 16. ad 992. ex prop. 24. lib. 7. elem. & ſic de alijs. Cùm ergo ſit quilibet proportionalis 2. 4. & cæt. ad 62. vt 32. & 64. & cæt. ad 992. Etiam ſimul omnes ex prop. 24. lib. 7. elem. proportionales 2. 4. & cæt. ad 62. erunt vt omnes ſimul 32. 64. & cæter. ad 992. ſed illi ſunt æquales ex Theſi numero 62. vtpote ſuæ ſummæ, ergo etiam, & iſti 32. 64. & cæt erunt æquales numero 992.

Quod verò 32 64. & cæt. ſint proportionales, vt 2. 4. & cæt. Prob. quia per eundem numerum 16. multiplicati fuere, vnde ex 17. lib. 7. ita erunt multiplicati 2. ad 4. vt geniti 32. ad 64.

PROBL. IV. PROPOS. XXVI.

Numerum extremum intermiſſis multis medijs in proportione Geometrica reperire.

SInt dati aliqui termini 3. 9. 27. 81. poſſum reperire alium 2187. qui diſtet ab 81. duobus intermedijs 243. & 729. vt ipſe vltimus 81. diſtat à 3. Id verò executioni mandatur multiplicando 81. in ſe, & diuidendo per primum 3. & diſpoſiti in ſeriem erunt.

3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187.

Probatur. Quia, ita ex propoſ. 4. huius, 3. eſt ad 81. vt 81. eſt in proportione ad alium ſequentē duobus intermiſſis pro vt 3. diſtat ab 81. Ergo ex propoſ. 5. huius quadratum ex medio 81. eſt æquale plano ex extremis. Quare diuiſum per latus 3. dabit alterum latus 2187. quod diſtat ab 81. duobus intermiſſis, & à 3. quinque intermiſſis. Vnde poteris reperire ab hoc diſtantē quinque terminis multiplicando 2187. in ſe, & diuidendo per 3. &c.

TRACTATVS XIV.

PARS SECVNDA.

De proportione Arithmetica.



Cognatio arcta intercedit, vt videbimus, inter Arithmeticam, & Geometricam proportionem, vt altera alteri ritè deſeruiat, & operationibus alterius ſedulò miniſtret; Ideo poſt tractationem proportionalitatis Geometricæ ſtatim Arithmeticæ diſcurſus ſubnectendus eſt.

EXPENSIO I.

De proprietatibus Arithmeticæ proportionis.

SImiles ſunt effectiones harum duarum proportionum Arithmeticæ, & Geometricæ; niſi quòd huius multiplicatione, & diuiſione, vt plurimùm innoteſcunt; illius ex ſubtractione, & additione. Proportio verò Arithmetica conſiſtit in æqualitate exceſſuum, vt vna excedat aliam eodem exceſſu, quo hæc aliam excedit. V. g. numerus 8. excedit 6. eodem exceſſu, nempe dualitate, ſicut 6. excedit 4. quia ergo iſti tres numeri 4. 6. & 8. æquali exceſſu dualitatis ſe ſuperant, dicuntur Arithmeticè proportionales.

Præaſſ. 1. Sed in primis notandum, quod ſi ſint numeri quotcumque Arithmetico interuallo, vel etiam quocumque incerto creſcentes, vel decreſcentes, quilibet maior eſt æqualis minori, & omnibus interuallis numeſicis, quibus diſtant V. g.

Sint $7_*\ 12_*\ 17_*\ 22_*\ 27_*\ 32_*\ 37_*$ & cæt.

Dico, quod 37. eſt æqualis numero 7. ſi tamen ei addatur interuallum 5. toties quot intercapedines ſunt inter 7. & 32. quæ ſtellulis notatæ ſunt, & ſunt ſex. Si ergo multiplicetur 5. per 6. & fiunt 30. & addatur numero 7. erunt 37. quod patet; quia tot vicibus à numero 7. excreuit 37. per additionem numeri interuallaris 5.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si ſint quatuor quantitates continuæ proportione Arithmetica excreſcentes, ſummæ mediorum eſt æqualis ſummæ extremorum.

* Detur quatuor numeri, qui ſe ſuperent æqualiter, nimirum ternario 8. 11. 14. 17. Dico quod additi 8. & 17. faciunt eundem numerum, quem additi ſimul faciunt 11. & 14. nimirum 25.

Probatur. Numerus 8. excreuit vſque ad numerum 14. per continuam additionem æqualis partis ideſt ternarij. qui ſemel additus eſt numero 8. vt fiant 11. gemina vice numero 8. iterum, vt fiant 14. iuxta interuallorū multitudinem, quibus ab 8. diſtat 11. & 14. vt prænotaui in præaſſ. ergo ternarius additus ter ipſi 8. ſemel in 11. & iterum bis in 14. faciunt medios.

Sed etiam ter idem ternarius additus eſt primo 8. vt fieret extremum 17. ſemel quando excreuit ab 8. in 11. ſemel cum excreuit ab 11. in 14., & ſemel cum excreuit à 14. in 17. iuxta tria interualla, quibus diſtat à primo 8. Cum ergo ter ternarius additus primo numero 8. duplato faciat duos medios, & ter additus eidem 8. faciat extremum, patet, quod duo medij ſimul erunt æquales primo, & extremo; cùm tam medij, quàm extremus cum primo, componantur ex primo bis accepto, & ex tribus ternarijs.

THEOR.

THEOR. II. PROP. II.

Si sint tres quantitates continua proportione Arithmetica se respicientes duplum medij est æquale summæ extremorum.

SInt tres quantitates 7. 11. 15. quæ proportione Arithmetica, nempe æquali crescant augmento, & medium 11. dupletur. Dico, *quod hoc duplum erit æquale summæ extremorum*.

* Probatur. Nam diximus propos. anteced. quòd terminus tertius componitur ex duplici additione æqualis partis, quæ hic est quaternarius bis additus numero primo 7. Numerus verò secundus Arithmeticus ex numero eodem 7. & simplici additione æqualis partis, nimirum quaternarij; Ergo si bis accipiatur hoc duplum constans gemino quaternario, & gemino numero radicali 7. erit æquale extremo, primo ei addito, qui etiam semel continet primum cum gemina parte equali, nempe quaternario; & sic factet summam, quæ bis continet primum, & bis partem equalem, quâ proportio augetur.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si sit quotcunque numeri Arithmetico interuallo crescentes, seu decrescentes, primus multiplicatus per numerum interuallorum minutum vnitate iunctus cum vltimo erit æqualis secundo multiplicato per interuallorum numerum totum.

*SIt 2 ✱ 6 ✱ 10 ✱ 14 ✱ 18 ✱ 22 ✱ 26 ✱ 30 ✱ 34 &c. numerus interuallorum sit 8. quę stellulis notantur. Dico, quòd si 2. multiplicetur per numerum interuallorum vna vnitate abiectâ, nempe per 7. & iungatur extremo 34. quòd est æqualis secundo 6. multiplicato per interuallorum numerum 8.

* Progress. 1. Si primus terminus 2. multiplicetur per 8. numerum interuallorum, & fiat 16. & si per eundem 8. multiplicetur numerus differentiæ 4. & fiant 32. isti duo numeri collecti erunt æquales numero illi, qui ex multiplicatione secundi termini V. g. 6. cum numero interuallorum eodem 8. nascitur, qui erit 48. Patet, quia 6. cõponitur ex 4 interualli numero, & 2. primo radicali; vnde, siue seorsim, & deinde iuncti, siue simul multiplicati eandem summam efficient 48.

Progr. 2. Differentię numero 4. multiplicato per 8. addito 2. radicali est æqualis numerus vltimus 34 xe primo præss. Ergo abiecto numero radicali à multiplicato numero differentiali, vt restet 32. remanet 34. numerus vltimus illo 32. maior in ipso numero radicali: Quare, & si adderetur vtrisq; numerus ex interuallorũ 8. & numeri radicalis 2. multiplicatione cõsurgẽs, qui est 16. adhuc esset maior, ita auctus vltimus terminus eodẽ æqualiter aucto numero differentiali 32. in ipso 2. radicali. Quamobrem, vt sit æqualis demendus est à 16. numerus ipse radicalis, & itaerit 14. nempe numerus 2. radicalis multiplicatus non per 8. sed per numerum vna vnitate minorem, nempe per 7. Quamobrem numerus radicalis multiplicatus pẽ numerum interuallorum minus vna vnitate, V. g. per 7. vt sit 14 iunctus vltimo termino 34. erit ęqualis numero 16. ex multiplicatione interuallorum 8. & numeri radicalis 2. & numero differentiarũ 32. f. 48. Ergo etiaerit æqualis numero consurgenti ex multiplicatione secundi termini 6. cum numero interuallorum; quem ex primo progress. probauimus equalẽ numero differentiali 32. & 16. radicali per interuallorum numerũ multiplicato, & in vnam summam redacto, ideſt eidem 48.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Numeri proportione Arithmetica procedentes, dempto radicali, ita quilibet ad sequentem est in proportione, vt numerus interualli vnius ad numerum interualli alterius.

SInt numeri 2 ✱ 6 ✱ 10 ✱ 14 ✱ 18 ✱ 22 ✱ 26 ✱ 30 ✱ 34. 38. 42. & numerus interceptus inter quemlibet eorum sit 4. Dico, *quòd si à numeris immediatis* 34. & 38. numerus radicalis expungatur, vt fiant 32. & 36. interuallorum numerus 8. qui mediat inter primum 2. & 34. dicit *eam proportionem Geometricam ad* 32. quam 9. numerus interuallorum medians inter primum 2. & sequentem 38. dicit ad 38. numero radicali deducto, ideſt 36.

* Prob. Nam 4 octies continetur in 32. ex primo notabili huius, toties nempe quot sunt interualla, sicut eodẽ modo 4. nouies continetur in 36. ergo numerus octonarius interuallorum quater continetur in 32. sicut numerus nouenarius interuallorum quater continetur in 36. Quare cum 8. & 9. per eundem 4. multiplicatus sit: ita erit 8. ad 9. vt 32. ad 36. ex propos. 17. lib. 7. Elem.

COROLLARIVM.

HInc est, quod planum ex medijs 8. & 36. sit æquale plano extremorum 9. & 32.

THEOR. V. PROPOS. V.

Numeri proportione Arithmetica procedentes eandem dicunt proportionem Geometricam quilibet ad suum numerum interuallorum, si tamen ab eis numerus radicalis demat ur.

PRobatur. Nam data eadem numerorum serie, quæ in præcedenti propositione; ostensum est; ita esse numerus interualli 8. ad numerum 9. interualli alterius, vt 32. Arithmeticus ad sequẽtem numerum Arithmeticum 36. à quibus tamen Arithmeticis demptus fuit numerus radicalis 2. Quare, & *vicissim* erit 32. ad 8. vt 36. ad 9. numerum interuallorum.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

* *Si aliquis terminus Arithmeticus maior multiplicetur per numerum interuallorum carentem vna vnitate, numerus productus addito ei termino radicali est æqualis numero, qui fit ex eodem numero interuallorum toto, & termino immediato minori.*

*SIt eadem dispositio terminorum, quæ priùs 2 ✱ 6 ✱ 10 ✱ 14 ✱ 18 ✱ 22 ✱ 26 ✱ 30 ✱ 34 ✱ 38 ✱ 42. & numerus interuallorum inter 2. & 38. sit 9. Dico, quòd si multiplicetur 38. per 9. minutum vna vnitate videlicet per 8. procreabitur terminus 304. cui si addatur terminus radicalis 2. efficietur æqualis numero 306. qui fit ex multiplicatione totius numeri interuallorum 9. cum minori 34. termino Arithmetico immediatè sequente.

Probatur, si demtur à duobus terminis Arithmeticis 34. & 38. terminus radicalis 2. dicent proportionem ad inuicem, vt numerus interuallorũ, ex præced. propositione, & ita erit 8. ad 32. vt 9. ad 36. Quare, & plana eorum erunt æqualia, nempe productũ ex 32. & 9. ac productum ex 8. & 36. ex Coroll. præced. quæ sunt 288. Si verò singulis addatur terminus radicalis, & fiat 34. & 38. & deinde multiplicentur per 9. numerus 34. vt fiat 306. & per 8. numerus 38. & fiat 304. addet 9. ei plano ex 32. tot terminos radicales, quot addit 8. & insuper vnum terminum radicalem, & faciet 306. Quare maior terminus 38. multiplicatus per numerum interuallorum minus vno, vt est 8. restituet numerum addito termino radicali 2. æqualem ei numero, qui fit ex multiplicatione termini immediate minoris 34. & toto numero interuallorum 9. vt est 306.

COROLLARIVM

ELlicitur hinc, quòd idem euenit etiam, si duo numeri dati Arithmetici non sint immediati; sed secundum distantiam, ita interualla sumantur. V. g. si elligeres 30. & 38. interualla essent 7. inter 30. & primum radicalem, & inter 38. interualla essent 9. cum ergo ita se habeat 7. ad 28. vt 9. ad 36 dempto videlicet ab vtroque numero radicali; sequitur, quòd planum ex medijs 9. & 28. sit æquale plano ex extremis, nimirum 7. & 36 addito verò vtriq; numero radicali per interuallorum numerum multiplicato productùs continebit insuper, qui oritur à 9. & 28. nouem numeros radicales; qui verò à 7 & 36. septem insuper numeros radicales; Vnde erit ei æqualis, si bis addatur numerus radicalis.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

Inter quoscumque numeros Arithmeticè dispositos eadem est ratio Geometrica interualli ad interuallum, quæ est differentiarum ad differentias.

SInt numeri 3 ✱ 5 ✱ 7 ✱ 9 ✱ 11 ✱ 13 ✱ 15 ✱ 17. interualla inter 3. & 17. erunt 7. differentia subducto 3. à 17. prodibit 14. sic inter quoscumque alios inter 7. & 13. differentia est 6. interualla 3. Dico itaque, quòd ita 7. est ad 3. vt 14. ad 6. nempe numeri interuallorum, & differentiarum numeri in eadem proportione sunt.

* Probatur. Nam multiplicato numeso differentiali ex præass. 1 per interualla, dat differentias omnes, quibus distat vnus terminus ab alio. Sic 2. multiplicatus per 7. dat differentiarum numerum 14. & idem 2. multiplicatus per 3. dat differentiarum numerum 6. nempe differentias omnes, quibus 9. distat à 3. vel 17. distat à 3. Ergo ex 17. lib. 7. Elem. cum numerus interuallorum per eundem numerum 2. multiplicatus producat numerum differentiarum, habebunt eandem rationem geniti, & multiplicati. Vnde ita erit 3. ad 7. numeri interuallares multiplicati, vt 6. ad 14. differentiales geniti.

COROLLARIVM

HInc est, quod *permutando* sit quoque numerus interuallaris ad differentias aggregatas nempe 3. ad 6. vt 7. ad 14.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Numeri Arithmeticè procedentes, si æqualiter remoti ab extremis addantur simul, illi omnes sunt æquales.

SIt series 7. 11. 15. 19. 23. 27. Dico 7. & 27. esse æquales additi simul numeris 11. & 23. sicut etiam 15. & 19 additi simul, qui sunt æqualiter remoti ab extremis.

* Probatur. Nam tantùm 7. & 27. faciunt 34. ad quem numerum ad hoc, vt perueniat numerus 23. deficit ei 4. nempe numerus interualli, quo termini distant, & primus terminus; at numerus 11. continet ambos, ergo additus 23. facit 34. sic 19. vt perueniat ad 34. deficit ei numerus interualli gemini 4. & 4. & primus 7. numerus verò 15. vtpote duobus interuallis à primo distans 4. & 4. continet, & 7. Quare additus numero 15. conficiet 34. & sic de alijs.

EXPENSIO II.

De proportionalibus Arithmeticis continuis in vnam summam colligendis.

FAciliùs trahuntur in opus Arithmetici proportionales, quàm Geometrici; cùm sola additione, & subtractione tractentur.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Arithmeticos proportione continua procedentes; tum pares, tum impares in vnam summam colligere dato vltimo, & primo, & terminorum numero.

SInt dati quicumque termini impares proportione Arithmetica procedentes V. g. septem 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22. Oporteatque omnium sum-

ſummã noſcere. Vltimus terminus 22. iungatur cũ primo 4. & ſit 28. diuidatur deinde in geminas partes, quarũ vna ſit 14. numerus, qui per numerũ terminorum multiplicetur nempe per 7. dabit ſummam omnium 91.

Si vero numerus terminorum par fuerit 7. 11. 15. 19. 23. 27. Addatur ſimiliter vltimus terminus primo, vt fiant 34. & multiplicetur per numerum dimidium terminorum 3. vt fiant 102. & erit omnium ſumma.

* Probatur. Nam additi numeri æquè ab extremis remoti ſunt omnes æquales ex propoſ. 8. quare Arithmet. numerus iunctus primus extremo, & multiplicatus per numerũ terminorum æquabit numerum planum omnium numerorũ ſimul vnitorum, qui æqualiter remoti ſint ab extremis, & facti ſint omnes æquales V. g. 3. 5. 7. 9. 11. 13. facti ſint omnes æquales, nempe minimus 3. per adiectionem maximi 13. & maximus 13. per adiectionem minoris 3. Item ſequens minor 5. per adiectionẽ penultimi 9. Sicut, & 9. penultimus per adiectionem minoris 5. erunt ſex numeri æquales 16. qui multiplicati per 6. dabunt planum numerum 96. qui eſt ſumma omnium ſex cõſtantium vnitatibus 16. quia ergo numerorum ita additorũ ſumma eſt numerus 16. per numerum terminorũ multiplicatus, & addita eſt medietas; dum ſinguli ſuis correſpondentibus additi ſunt, tot enim ſunt additi, quot erant. Ergo ſumma omnium erit dimidia huius plani numeri, nempe 48. ſed ſi dimidium terminorum multiplicetur cum vltimo 16. generat dimidium plani numeri, ideſt 48. Ergo vltimus terminus V. g. 13. additus primo 3. vt fiat 16. multiplicatus cum dimidio terminorum, vt ſint 48. erit omnium ſumma. Quod autem dimidium terminorum, cum vltimo, addito primo multiplicatũ, producat dimidium plani ex toto numero terminorum, & eadem ſumma vltimi, & primi geniti, patet ex 2. prop. lib. 9. quia duo plani tales æquant planum totius.

F	E	A	B	C	D
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
3	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	5	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	7	*	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	9	*	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	11	*
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	13
*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*
13	11	9	7	5	3

Nec intereſt, ſi dimidium terminorum multiplicetur cum toto extremo, ſeu dimidium extremum multiplicetur cum omnibus terminis, nam ſemper conficiet dimidium planum, ex 2. propoſ. lib. 9. Elem. ita ſeu 3. multiplicetur cum 4. ſeu 2. multiplicetur cum 6. dimidium planum 12. conſtituent. Hoc autem dimidium planum erit ſumma omnium terminorum Arithmeticorum.

COROLLARIVM

IN progreſſionibus naturalibus ab 1. incipientibus quadratum maximi dempta radice, & dimidiatũ eſt ſumma omniũ ipſo dempto. Sic ſi ſint 1. 2. 3. 4. 5. quadratũ 25. numeri 5. dempta radice 5. vt faciant 20. dimidiatum nempe 10. eſt ſumma omniumquatuor. Quia addita vnitate numero 4. fit 5. qui multiplicatus per dimidium terminorum daret ſummam omnium, idem verò eſt multiplicare per dimidium, & per totum ſi genitum poſtea diuidas, & idem eſt multiplicare per 4. & per 5. ipſum 5. ſi à genito auferas ipſum 5. vt fiant 20.

EXPENSIO III.

De proportione Arithmetica propaganda.

FAcilis eſt propagatio huius proportionis, vnde breuiter eam explicabimus.

PROBL. I. PROPOS. X.

Data differentia proportionem Arithmeticam extendere.

HOc faciliter fit addendo illam ſucceſſiuè ſingulis terminis, ſic ſi 4. addatur 5. differentia fient 9. ſecundus terminus, & ſi eidem 9. addantur rurſus 5. fient 14. eruntque 4. 9. 14. tres termini Arithmetici.

Ratio quoque euidens; quia proportio Arithmetica oritur ab additione eiuſdem partis.

PROBL. II. PROP. XI.

Datis duobus terminis Arithmeticis tertium inuenire.

A Maiore duplicato detrahe minorem, eritq; reſiduum tertius terminus maior, vel è contrà à minore duplicato detrahe maiorem, & minor terminus exeret; ita datis duobus terminis 8. 15. ſi duplices maiorem, erunt 30. à quo detractus minor reſiduum exhibebit terminum maiorem 22. & è contra, ſi duplices 8. & detrahas 15. remanebit 1. terminus minor.

Probatur ex propoſ. 2. huius. Quia medius terminus duplicatus eſt æqualis ſummæ extremorum; vnde, ſi ab eo alterum ex extremis deducatur, alterum prodire neceſſe eſt.

PROBL. III. PROPOS. XII.

Datis numero terminorum, maiori ſeu minori extremo, & differentia reperiemus alterum extremum.

SInt dati 10. Termini Arithmetici, quorum primus ſit 7. differentia 2. Dico, quòd reperiemus aliud extremum maximum, ſi ducamus differentiam 2. in terminorum numerum proximè minorem V. g. in 9. vt fiant 18. & huic genito primum terminum adijciamus, vt fiat 25. nam hic numerus 25. erit terminus maior.

Probatur. Differentiæ ſunt additæ, primo termino, tot, quot ſunt interualla. Nã interualla tot ſunt, quot termini vno dempto. Ergo ex primo præaſſ. vltimus terminus factus eſt, cum vltimus ſit æqualis primo, & differentię per interualla multiplicatę.

Aduerte, quòd ſi progreſſio incipiat à zifra, quod ipſa, vt numerus eſt auferenda ſicut, & in ſequenti Probl.

PROBL.

PROBL. IV. PROPOS. XIII.

Dato primo, & ſecundo termino, & numero interuallorum reperire vltimum, quem elegeris.

MVltiplicetur ſecundus per numerum interuallorum, & à genito dematur primus per interuallorum numerum minus vno multiplicatus.

Probatur. Quia ex propoſ. 3. iſti geniti ſunt æquales; nempe primus per interuallorum numerum minutum vnitate, cum vltimo, & ſecundus per numerum interuallorum multiplicatus. Quare ſi à genito ex ſecundo, & numero interuallorum detrahatur ille genitus: reſiduum erit vltimus terminus; ſic ibi 6. ſecundus multiplicatus per 8. interuallorum numerum dat 48. à quo demptus 14. nimirum 2. multiplicatus per 7. interuallorum numerum vnitate minorem dat 34. vltimum terminum.

PROBL. V. PROPOS. XIV.

Dato vltimo, & penultimo termino, & numero interuallorum reperire primum.

MVltiplicetur penultimus per numerum interuallorum, & ex ipſo genito deducatur vltimus multiplicatus per eundem interuallorum numerum; ſed minutum vna vnitate, & reſiduum erit primus terminus.

Probatur ex propoſ. 6. huius. Nam iſti duo ſunt æquales, vltimus multiplicatus per interuallorum numerum minus vno iunctus primo, & penultimus per interuallorũ numerũ multiplicatus. Vnde ſi ex hoc genito deducatur ille genitus prodibit primus: Sic ibidẽ penultimus 34. per interuallorũ numerũ 9. ductus dat 306. à quo dẽptus 304. ex 8. interuallorũ numero vnitate minori, & 38. vltimo prouenlens dat 2. primum terminum.

Aduerte in iis omnibus, quod ſi progreſſio Arithmetica incipiat à 0. vt 0. 4. 8. 12. 16. 20. 24. tunc ex hac operatione proueniet 0. oſtendens primũ terminũ zifrã eſſe, vt 6. numerus interuallorum dat 120. multiplicatus per penultimũ 20. ſed 24. vltimus multiplicatus per interuallorum numerum minus vno, nimirum per 5. dat 120. at 120. iſte deductus ab illo relinquit 0.

PROBL. VI. PROPOS. XV.

Datis duobus terminis extremis, & numero interuallorum reperire differentiam.

MInorem à maiori ſubducito, & reſiduum diuide per numerum interuallorum.

Probatur, quia tot ſunt ex primæ Expen. huius præaſſ. differentiæ additæ primo, quot interualla vt fieret vltimus; Ergo vt fiat differentia ſubducendus eſt primus, & reliquum per interuallorum numerum diuidendum.

EXPENSIO IV.

De proportione Arithmetica interſerenda.

INterpoſitio terminorum in Arithmetica proportione non eſt grauis laboris, eamque iſtis præceptis in opus reducemus.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Inter duos terminos Arithmeticos medium proportionalem inuenire.

COniũgatur primus 5. cum altero 9. & ſumma 14. diuidatur per medium, & medietas 7. erit medium proportionale inter 5. & 9. eritque arithmeticè 5. ad 7. vt 7. ad 9. ſic ſi ſint 9. & 8. ſumma erit 17. & medietas 8. & ½. erit medius terminus.

Probatur ex propoſ. 2. huius partis. Nam duplum medij eſt æquale ſummæ extremorum. Vnde ſumma extremorum diuiſa per medium dabit medium terminum Arithmeticum.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Inter duos terminos Arithmeticos plures medios inuenire.

HOc executioni mandatur reperiendo differentiam, quæ inter terminos illos debet mediare. Sit ergo 5. & 68. inter quos debeant inueniri 8. proportionales. Subducatur 5. à 68. & reſiduum erit 63. aſſumatur verò numerus terminorum minutus vnica vnitate, nempe 7. & diuidatur numerus reſiduus 63. per 7. & fiet differentia 9. Si ergo numero 5. addas differentiam 9. continuè ſeptem vicibus. efficies 8. terminos; quorum primus erit 5. vltimus 68. vt 5. 14. 23. 32. 41. 50. 59. 68.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datum numerum Arithmeticum in partes proportionales Arithmeticas diſtribuere.

DAtum numerum 152. diuidemus per dimidium numerũ terminorũ 4. & quotiens erit 38. hunc quotiẽtem in duas partes inæquales diuidemus, vt placet in 3. & 35. quos conſtituemus pro extremis, inter quos vt libet volumus eſſe 8. proportionales. Horum differentiam proportionalem inueniemus, vt propoſ. 17. huius part. quæ erit 5. cum iam habeamus electos terminos primum 3. & nouiſſimum 35. & numerum terminorum 8. & conſequenter interuallorum 7. cum tot ſint, quot termini minus vna vnitate: Si ergo differentiam repertam 5. addamus primo termino ſucceſſiue efficiemus terminos arithmeticè progredientes 3. 8. 13. 18. 23. 28. 33. 38. quorum ſumma erit 152.

Probatur ex 9. propoſ. huius partis. Nam vltimus terminus iunctus primo multiplicatus per diuidium terminorum facit ſummam omnium; Ergo diuiſa per dimidium terminorum ſumma

omnium, qualis debet esse numerus 152. dabit numerum, qui in se continebit maius, & minus extremum. Et hinc possumus diuidere in duas partes inæquales, vt placet, cum possimus eligere maius, & minus extremum, vt voluntas erit; Vnde dato maiori, minorique extremo, & numero terminorum habebimus interuallorum numerum quapropter rectè differentiam reperiemus.

Si verò numerus interuallorum sit impar, nec commodè in duas partes possit diuidi, per ipsum totum poterimus partire numerum datum, & quotiens duplicatus erit numerus terminorum, qui rursus in duas partes inæquales diuisus dabit maius, & minus extremum, & cæt,

Sic 152 diuisus per 8. dat quotientem 19. qui duplatus restituit 38.

Ratio est, quia maius, & minus extremum ex propos. 9. in vnam summam collectum, & bifariam diuisum dat, si hæc eius medietas multiplicetur cum numero omnium terminorum, summam omnium. Vnde etiam summa omnium diuisa per totum numerum terminorum dabit dimidium numerum, in quo maius, & minus extremum latet.

THEOR. IX. PROPOS. XIX.

* *Data terminorum Arithmeticorum serie, aliam similem inuenire.*

ID facilliter operi consignantur multiplicando per eundem numerum proportionales Arithmeticos datos. Sic si dantur 2. 5. 8. 11. reperiemus allam seriem Arithmeticam eos per numerum 3. placitum multiplicando, & producti erunt 6. 15. 24. 33. Arithmetici.

* Probatur. Quoniam 3. multiplicauit 2. & 8, eadem proportio erit genitorum 6. ad 15. quæ generantiũ 2. ad 5. & 15. ad 24. quæ 5. ad 8. Quare ex *æquo* erit 2. ad 8. vt 6. ad 24. Et *diuidendo* erit 2. ad residuum 6. ex 8. proportio, quæ est 6. ad 18. residuum ex 24. & *permutando* erit 2. ad 6 vt 6. residuum ad 18. Et pariter. Quia respondet 2. ad 5. vt 6. ad 15. erit *diuidendo*, 2. ad residuum 3. ex 5. vt 6. ad residuum 9. ex 15. Et *permutando* 2. ad 6. vt 3. residuum ad residuum 9. Cum ergo residuua 6. ad 18. & 3. ad 9. dicant eandem proportionem, quæ est 2. ad 6. erit etiam inter eosdem eadem proportio, & 6. erit ad 18. vt 3. ad 9. Quare *permutando* 6. erit ad 3. vt 18. ad 9. Numerus verò 6. est differentia, inter 2. & 8. & ideo dupla differentiæ 3. quæ est inter 2. & 5. terminos datos; & ideo etiam 18. differentia, quæ est inter 6. & 24. erit dupla differentiæ 9 quæ est inter 6. & 15. quare 6. 15. 24. erunt Arithmetici, vt sunt 2. 5. 8.

TRACTATVS XIIII.

PARS TERTIA.

De Proportione Harmonica.

PRoportio Harmonica in eo existit; quòd eadem proportio Geometrica sit inter extrema, quæ est inter differentias, quibus numerus medius dissidet ab extremis; Ita inter 2. 3. 6. est proportio harmonica; quia extrema 2. & 6. ita geometricè proportionalia sunt, vt est 1. ad 3. quæ sunt differentiæ, quibus dissidet extremum 2. à medio 3. & extremum 6. ab eodem 3. Hæc autem proportio, licet dicatur Harmonica, est tamen potiùs Optica vt suo loco ostendemus; pro nunc ipsius vniuersalia tantùm simptomata adferemus.

EXPENSIO I.

De proportione Harmonica inuenienda, & aliquibus eius proprietatibus.

PRoportio Harmonica videtur quiddam inter Geometricam, & Arithmeticam. Nam in comparatione terminorum Geometrica est; quoad verò originem, ab Arithmeticâ ortus suos desumit, vt modo videre licebit.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. I.

Datis tribus numeris Arithmeticè proportionalibus, tres alios Harmonicè proportionales inuenire.

SInt dati 3. 7. 11. continuè Arithmeticè proportionales, & differentia sit 4. multiplicentur extremi inuicem, & sint 33. Multiplicetur deinde medius cum extremis, & erunt 21. & 77. Dico itaque 21. 33. 77. esse inuicem in Harmonica proportione.

* Probatur. Quia 3. extremum multiplicauit medium 7. & fecit 21. Multiplicauitque aliud extremum, & fecit 33. erit 7. ad 11. ex prop. 17. l. 7. vt 21. ad 33. Quare *diuidendo* erit 7. ad 4. differentiam, vt 21. ad 12. differentiam.

Rursùs. Quia 11. multiplicauit extremũ 3. & mediũ 7. & generauit 33. & 77. erit 3. ad 7. vt genitus 33. ad genitum 77. ex prop. 17. l. 7. elem. Quare *diuidendo* erit 3. ad 4. differentiam, vt 33. ad 44. differentiam. Quapropter etiam *componendo* erit 3. cum 4. nempe 7. ad 4. differentiam, vt 33. cum 44. scilicet 77. ad 44. differentiam. Cùm ergo sit 7. ad 4. vt 21. terminus, ad 12. differentiam, & 7. ad 4. vt 77. terminus ad 44. differentiam ex propos. 13. quinti erit eadem proportio 21. ad 12. quæ est 77. ad 44 Propterea que *permutando* 21. terminus primus ad 77. vltimum terminum erit proportio, quæ est differentiæ 12. ad differentiam 44. Quamobrem erunt tres termini 21. 33. 77. continuè harmonicè proportionales ex definit.

COROLLARIVM I.

HInc est. Quod ita sit 3. ad 11. termini Arithmetici, vt 21. ad 77. terminos musicos, & vt 12. ad 44 differentias. Patet. Medius 7. multiplicauit 3. & genuit 21. & 11. & genuit 77. Ergo ex propos. 17. septimi eadem proportio est 3. ad 11. quæ est 21. ad 77. sed vt est 21 ad 77. Ita est 12. ad 44 quæ sunt differentiæ, ergo ex *æquo*, vt 3. ad 11. ita est differentia 12. ad differentiam 44.

COROLLARIVM II.

HInc emanat illa proprietas, quòd differentia primorum multiplicata in tertium, seu extremum generet numerum æqualem differentiæ posteriorum ductæ in primum, vt hic vides.

12 44
21 33 77
924

Ratio petitur ex propos. 19. lib. 7. Elem. Quoniam extrema dicunt eãdem proportionem, quam differentiæ, & ita est 21. ad 77. vt 12. ad 44. Ideoque multiplicati medij inuicem 77. & 12. & extremi inuicem 21. & 44. dabunt genitos æquales, & idem dicas ob eandem proportionem de extremis arithmeticis, & differentijs Harmonicis, seu extremis Harmonicis.

3 7 11 3 7 11
21 33 77 12 44
231 132

Nàm, quia, ita est 3. ad 11. vt 21. ad 77. ex Coroll. 1. ideo multiplicati inuicem 21. & 11. sicut 3. & 77. dant 231. Et quia ita est 3. ad 11. vt differentiæ 12. ad 44. ex Coroll. 1. ideo 11. & 12. inuicem ducti sicut, & 3. & 44. dant 132.

COROLLARIVM III.

COlligitur Arithmeticos tres esse in eadem proportione Geometrica; ac Harmonici, sed conuerso ordine. Quia enim 3. V. g. generauit 21. & 33. primos Harmonicos. Multiplicando duos extremos Arithmeticos 7. & 11. ideo isti postremi erunt in eadem proportione, ac Harmonici primi 21. & 33. Rursus; quia 11. multiplicando duos primos Arithmeticos 3. & 7. produxit Harmonicos postremos 33. & 77. ideo in eadem proportione erũt isti postremi Musici cum Arithmeticis primis.

PROBL. II. PROP. II.

Datis duobus terminis tertium in Harmonica proportione reperire, siue maiorem, siue minorem.

TErminorũ datorũ differentiâ à minore subductâ termino, diuidẽdus est residuo genitum ex eorũ multiplicatione, nam quotiens cum datis duobus constituet Harmonicum maiorem. V. g. sint dati 6. & 8. quorum differentia est 2. quæ deducta à minore termino 6 relinquit 4. Numerus verò genitus ex eorum multiplicatione terminorum est 48. qui diuisus per 4. relinquit 12. tertium terminum; dico itaque quod 6. 8. 12. sunt in proportione Harmonica.

* Probatur. Nam subducta differentia à minore termino dato relinquit residuum, qui cum duobus antecedentibus proportionem Arithmeticam habet; nempe 4. 6. 8. differentia enim, quę subducto 6. ab 8. remanet, eadem à termino minori 6. subducitur. Vnde multiplicati, vt superius in 1. propos. producent tres terminos in proportione Harmonica. Nempe 6. multiplicando 4. & 8. extrema, dabit 24. & 48. & extrema 4. & 8. se multiplicando facient medium 32. Si ergo omnes diuidantur per 4. patet quotiẽtes in eadem proportione mãsuros esse. Sed iam quotiẽtes 24. & 32. diuisorum per 4. residuũ sũt ipsi multiplicati 6. & 8. Ergo reliquus diuisus quoq; per 4. residuũ dabit tertium Harmonicum proportionalem 12. Siquidem diuisio æquiualet multiplicationi, & sicuti multiplicati numeri per eundem numerum ex propos. 17. septimi faciunt genitos in eãdem proportione, in qua ipsi multiplicati se respiciunt, ita etiam diuisi generant quotientes in eadem proportione, in qua ipsi erant. Si verò cupias reperire vtroque dato minorem: Differentiam eorum maiori adde, & per hanc summam numerum ex eorum mutuâ multiplicatione genitum diuide; quotiens enim erit terminus vtroque dato minor, vt si dentur 6. & 9; addo differentiam eorum 3. maiori 9. & summa fit 12; diuido deinde numerum 54. ex eorum multiplicatione genitum per hanc summam 12. & prodit tertius terminus minor $4\frac{1}{2}$.

* Probatur eodem modo. Nam addita differentia eorundem, maiori V. g. ipsi 9. ex ipsis fiunt tres termini in proportione Arithmetica, vt 6. 9. 12. idem enim interuallum 3. mediat: quare sient ex ipsis Harmonici 54. 72. 108. ex prima propos. qui, si diuidãtur per maiorem 12. dabunt quotien-

tes eiusdem Harmonicæ proportionis: sed iam 6. & 9. sunt quotientes duorum 72. & 108 ex diuisione per 12. consurgentes; si quidem & ipsi 72. & 108. ex multiplicatione 6. & 9. per 12. consurgunt: ergo reliquus quotiens inuentus 4. $\frac{1}{2}$ ex diuisione primi proportionalis 54. prouenies erit primus terminus ipsorum 6. & 9.

COROLLARIVM.

*Hinc est quod non semper duobus datis tertius Harmonicus proportionalis inueniri queat vtroque maior; licet possit reperiri vtroque minor in infinitum.

* Ratio est, quia quandoque occurrere potest, vt differentia datorum à minore subduci nequeat, eò quòd sit maior, quàm ipse minor numerus, vel ipsi æqualis, vt essent 3 & 9. nam 6. differentia non potest subduci à 3. & sicuti si darentur 4 & 8. differentia ipsa 4. non posset subduci à 4. quia nihil remaneret. At potest diminui in infinitum, quòd differentia semper possit addi maiori termino, & sic semper numerus ex eorum multiplicatione genitus per eum diuidi possit.

EXPENSIO II.

De proportione Harmonica continuanda.

DVplici modo Harmonica proportio continuatur. Prima est, cùm datis tribus terminis Harmonicis tertio, duo alij in eadem proportione Harmonica adiunguntur. Secunda quando tribus datis, duobus extremis tertius Harmonicè proportionalis adiungitur, quæ, seu prima, seu secunda non potest dici propriè continua. Non quidem prima, eo, quòd secundus, tertius, & quartus deinde non habeant proportionem Harmonicam, vt 2. 3. 6. 9. 18. Nam 2. 3. 6. & 6. 9. 18. eam, & eandem Musicam proportionem possident; non autem 3. 6. 9. qui distant Arithmeticè. Secunda verò non est eadem priorum trium, quæ posteriorum, nam 3. 4 6. & 4. 6. 12. sunt secundo modo continuè proportionales; sed non eadem proportione 3. refertur ad 6. vt 4. ad 12.

PROBL. I. PROPOS. III.

Proportionem Harmonicam datis tribus terminis primo modo continuare.

DEnominator proportionis inter extremorum ducitur in duos terminos medium, & extremũ, duoq; alij adiungẽtur tertio termino, qui in eadem proportione erunt cum eo, ac tres dati inuicem V.g. datis 2. 3. 6. si per 3. denominatorẽ proportionis, quã habet 2. ad 6. multiplicetur 3. mediũ & 6 extremum producentur 9. & 18. qui in eadem proportione erunt ad 6. quã tres dati 2. 3. & 6. ita vt sint 2. 3. 6. 9. 18. continuè modo primo proportionales: & sic si multiplices hos vltimos per eundẽ proportionis denominatorẽ, erũt numeri geniti 27. 54. alijs quoq; adiũgendi, ita vt sint continuè proportionales harmonicè 2. 3. 6. 9. 18. 27. 54.

* Præass. Antequam deueniamus ad probationem obserua priùs, quòd denominator ternarius rationis numeri 2. ad numerum 6. multiplicando 2. facit 6. Quare si adhuc 3. vt iussimus, multiplicet 6. & faciat 18. erit eadem proportio 2. ad 6. quæ 6. ad 18. Sed idem ternarius multiplicauit quoque, vt præcepimus, intermedium numerum 3. & fecit 9. quare ita erit 3. ad 9. vt 2. ad 6, & ideo; vt 6. ad 18. quæ est ob proportionem Musicam eadem, ac differentiarum 1. ad 3

* Quo supposito in propos. probanda sit primus progress. Primus terminus 2. ad extremum 6. est vt medius terminus 3 ad inuentum 9. Ideo *permutando* erit 2. ad 3. vt 6. ad 9. & *diuidendo* residuum 1. erit in proportione ad totum 3. vt residuum 3, ad totum 6. Quare *permutando* rursus erit residuum 1. differentiaque datorum numerorum ad differentiam 3. extremi dati 6. ab inuento 9. vt 2. ad 6. primus, & vltimus datus.

Progress. 2. Eodem modo, ita erit 3. medius ad 9. inuentum, vt 6. extremus datus ad 18. inuentum. Ergo *permutando* erit 3. ad 6. vt 9. ad 18. & *diuidendo* differentia 3. ad terminum 6. vt differentia 9. ad terminum 18. & *permutando* erit differentia 3. ad differentiam 9. vt 6. ad 18. termini, quę est eadem, ac 2. ad 6. terminorum, vt progr. 1.

Progress. 3. Cum ergo sit 1. differentiâ primi, à medio termino 3. ad differentiam 3. extremi termini 6. ab inuento 9. veluti 2. ad 6. ex primo progr. & ex secundo differentia 3. medij 3. ab extremo 6. ad differentiam 9. inuenti minoris 9. ab inuento maiore 18. sit vt 2. ad 6. Erit itaque eadem proportio 1. differentia minor datorum ad 3. differentiam minorem extremi ab inuento minore quæ est differentia 3. maioris datorum ad 9. differentiam maiorem inuentorũ. Quare *permutando* erit minor 1. ad maiorem 3. datorum, vt minor 3. ad maiorem 9. inuentorum terminorum. Differentię verò 1. minoris ad 3. maiorem proportio est, vt 2. terminus primus datus ad vltimum datum 6. & ex præass. vt 6, ad 18. quare erit differentia 3. ad differentiam 9. inuentorum, vt terminus vltimus 6. datus ad vltimum inuentum 18. Quadere 6. 9. 18 erunt in Musica proportione, vt 2. 3. 6. quòd erat tandem probandum, cùm sit 6. ad 18. vt differentia 3. termini 6. à 9. ad differentiam 9. termini 9. à termino vltimo 18.

COROLLARIVM.

HInc est, quòd secundus, tertius, & quartus in istis harmonicis, & quartus, quintus, sextus, sint Arithmetici. Quòd vt pateat.

* Aduerte idem esse multiplicare numerũ p numerum suarũ partiũ, & deinde per numerũ illas partes numerantẽ productum multiplicare, ac in se multiplicare; quia numeri plani facti ex toto numero, & eius partibus, si simul sumantur, æquant ipsum quadratum numeri in se ducti ex propos. 2. lib. 9. Vnde, si habeamus numerum partium, & rectangulum sub vna ex ijs partibus, & toto numero comprehensum, & hunc planum per numerum, earum partium multiplicemus, habebimus omnia rectangula, quæ ipsum quadratum dati numeri exequant. Sic si 2. tertiæ pars numeri 6 multiplicet 6. & faciat 12. deinde hunc numerum planum multiplicemus per numerum partium, qui est 3. ponemus tres numeros planos duodenarios simul, qui æquabunt quadratum numeri 6. Sint ergo Arithmetici 2. 4. 6. à quibus Musici prodeunt 8. 12. 24 36. Quia 6. multiplicauit 2. & genuit 12. & rursus 4. & genuit 24. & tandem 6, & genuit 36. ex propos. 19. præc. partis

erunt

erunt 12. 24. 36. Arithmetici. Multiplicauit autem se numerus 6. vt diximus supra: nam multiplicauit priùs 2. & fecit numerum planum 12. deinde fuit multiplicatus per denominatorem 8. ad 24. ex propos. 3. quæ ex Coroll. 1. propos. 1. est idem, ac denominator proportionis 2. ad 6. & cõsequenter cum fuit multiplicatus numerus planus 12. per numerum continentiarum 2. in 6. fit quòd genitus æquet quadratum numeri 6. & virtualiter in se ipsum fuerit multiplicatus, quia per numerum partes numerantem fuit multiplicatus.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Proportionem Harmonicam secundo modo continuare.

SEcundo modo continuabitur proportio Harmonica. Datis enim tribus terminis Harmonicè proportionalibus 2. 3. 6. inueniemus duobus vltimo, & penultimo alium proportionalem iuxta ea, quæ docuimus propos. 2.

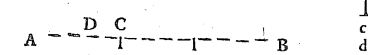
PROBL. III. PROPOS. V.

Etiam alio modo proportionem Harmonicam propagare.

*DIsponantur fracti ab vnitate incipientes, aut quoquo alio numero, & erunt in proportione Harmonica, ita erunt Harmonici.

$\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$, & cæt. Sic $\frac{1}{4}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{16}$, & cæt.

Patet primo. Si ad eandẽ denominationem reducantur $\frac{60}{240}\ \frac{40}{240}\ \frac{30}{240}\ \frac{24}{240}$, & $\frac{20}{240}$, qui omnes proportionem consequuntur harmonicam secundo modo continuatam.



Vt autem probetur monendum. Si eadem quãtitas AB diuidatur in tres partes, quarum vna AC, & rursus in quatuor, quarum vna AD; certum est, quòd ablatis à tertijs partibus minores quartæ relinquent differentias æquales, vtpote, quòd æquales ab æqualibus demptæ sint; & quia sunt tres tertiæ partes, tot etiam relinquent differentias, quas, dico, tres differentias esse æquales vni quartæ parti. & ostẽdo. Nam tres tertiæ partes æquãt AB, à quibus auferuntur tres quartæ, vt DC, & relinquunt tres differentias, sed auferãtur tres quartæ partes à tota AB æquali tribus tertijs relinquet vnam quartam partem AD: Ergo 3. differentiæ æquant vnam quartam partem; quia ambo residua sunt ablationis æqualium trium quartarum ab æqualibus tota AB, & eius tribus tertijs.

Ergo tres differentiæ æquant quartam partem, & addita vna, quatuor differentiæ æquabunt partem maiorem tertiam.

* Sint ergo $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ eiusdem totius. Dico hos numeros musicos esse: Nam differentia vnius tertij ab vnico quarto erit vnius quartæ partis $\frac{1}{3}$, & rursus differentia, quæ est inter vnam quartam, & vnicam quintam partem totius, est vnica quinta pars eiusdem totius, nempe vnius quartæ ex præc. præassumpto. Ergo differentiæ erunt $\frac{1}{1}$, & $\frac{1}{2}$ sui totius, sicut fracti dati extremi sunt $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$ eiusdem totius; cùm ergo sint differentiæ eadem minutia, ac extremi fracti dati, erunt in eadem proportione; vnde $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ erunt Musici ex pr. 3. Cor. Tract. 3.

COROLLARIVM

HInc est quoque, quod numerus factus ex differentia maiori Harmonica, & minori extremo, vel è contrà minori differentiâ in maius extremum ductâ facere numerum, qui continet tres harmonicos, tanquam suas partes; ideoque Harmonici sunt fractiones, cuius genitus est denominator, vt $\frac{2}{3}\ \frac{2}{4}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{6}$, & $\frac{7}{3}\ \frac{7}{4}$, quòd enim cõtineat duo extrema, patet quia fit ex eorũ multiplicatione; quod autem contineat medium 33. Prob.: Nam illius partes continentur in extremis, cùm ex mutua Arithmeticorum extremorum multiplicatione sit genitus; quæ produxere etiam extrema Harmonica multiplicata per medium Arithmeticum, vt ex 1. propos. huius part. constat; imò, & si tres Arithmetici simul ducantur; numerus productus erit denominator, cuius numeratores erunt Harmonici: Nam Harmonici, cum generentur ex multiplicatione Arithmeticorum non possunt continere allas partes, quam quæ in ipsis sunt, cum autem Arithmetici omnes simul ducuntur, patet, quòd genitus omnes partes, quas ipsi continent, obtineat: Vnde & continebit omnes partes Harmonicorum, sic 231. qui fit ex ductione 3. in 7. & 7. in 11. Arithmeticos continent 21. vndecies 33. septies 77. tricies.

EXPENSIO III.

De proportione Harmonica interserenda.

NOn potest prætermitti Interstitio proportionis harmonicæ, vtpote aliquando eius continuationi necessaria, huicque cognitioni addemus etiam diuisionem dati numeri in Musicos terminos.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Inter duos datos numeros medium Harmonicum reperire.

ISTud operi mandatur Regula aurea. Nam primo eorum differentiam reperies, & deinde eos in vnam summam rediges, quæ resque summa, & minore termino, & differentia, differentiam, quæ debet esse inter primum, & medium, quã repertã ipsi minori addatur, vt constituatur terminus medius. Sint pro exemplo dati 15. & 25. Inter quos medius proportionalis harmonicè sit inueniendus; Differentia est 10. summa 40. Dico itaque si 40. dant 15. quid dabit 10. differentia? & multiplicatis 10. per 15. & diuisis per 40. prodibit differentia 3. $\frac{1}{8}$, quę addita minori termino 15. faciet 18. $\frac{1}{8}$ pro medio, ita vt sint tres harmonicè proportionales 15. 18. $\frac{1}{8}$, & 25.

* Probatur ex propos. 24. septimi elementorum. Nam si diuisi numeri proportionales fuerint, hi quoque compositi proportionales erunt; Quia ergo ita est extremum ad extremum, vt medij differentia à primo ad eiusdem differentiam ab vltimo, sequitur, vt eadem proportio sit aggregati extremorum ad vnum ex extremis, quæ est

aggre-

ag gregati ex differentijs ad vnã earundem. Datis autem duobus terminis habes per additionem eorum aggregatum per ſubductionem verò ſummã differentiarum, vt probabo: Ergo habes tres terminos proportionales: nam ita eſt aggregatum extremorum ad vnum ipſorum, vt aggregatum differentiarum ad alteram ex ipſis, quę debet inquiri per regulam proportionum.

Quòd verò differentia inter duos numeros extremos ſit aggregatum differentiarum, patet: medius enim numerus non poteſt magis differre ab ambobus maiori, & minori, quam ipſi inuicem differant V. g. datis 3. 7. 11. non poteſt 7. magis differre à 3. & à 12. quã, quòd ipſi differunt, nempe à 3. num 4. & à 12. numero 5. quæ ſimul faciunt 9. differentiã ipſorum, vt per ſe patet alioquin eſſet diſtantia maior, vel minor, quàm quod eſſet, namque eſſet 9. vnitatum, at menſurata per 4. & 5. diſtantiam eorundem à medio, non eſſet talis.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Datum quemlibet numerum in proportionem Harmonicam diſtribuere.

SIt datus quiſque numerus V. g. 54 & oporteat ſecundùm proportionem Harmonicam illum diſtribuere, diuidatur per terminos Arithmeticos V. g. 1. 2. 3. 4 eruntque partes in proportione Harmonica, quæ ſunt 54. 27. 18. 13. $\frac{1}{2}$.

Probatur. Quia 54. numerus, vel quilibet alius reſpectu partium, in quibus diuiſus eſt, eſt veluti integer, cuius vna pars eſt quotiens. Ergo dicent partes ſingulę, & quotientes eandem proportionem, quam $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$, de quibus probatum eſt prop. 5. dicere proportionem Harmonicam.

COROLLARIVM.

HInc eſt; quòd ſi numeri Arithmetici 1. 2. 3. 4. vel quilibet alij in vnam ſummam continua multiplicatione redigantur, & ſumma deinde per ſingulos diuidatur, quòd producentur Harmonici continuè proportionales ob eandem rationem, quòd ſumma ſe habeat veluti integer, & denominator, cuius numeratores ſint partes diuiſæ, ſic 24. ſumma numerorum Arithmeticorum 1. 2. 3. 4. ex mutua multiplicatione reſultans diuiſa per eoſdem numeros, dat 24. 12. 8. 6. in Harmonica proportione continuos.

EXPENSIO IV.

De comparatione Proportionum.

TRibus modis inuicem proportiones comparari poſſunt; vel vt eorum differentiæ dignoſcantur, vel vt inuicem termini intermiſceantur, vel vt omnes, aut aliquas proportiones ipſi termini obtineant: Tribus itaque expenſionibus breuiter ab iſta ſpeculatione nos expediemus; cum nihil de cætero Mathematicę deſeruiat.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Conueniunt in hoc omnes proportiones, quòd per eundem numerum termini multiplicati generent numeros eiuſdem proportionis.

SIc 2. 4. 6. Arithmetici multiplicati per quemlibet numerum V. g. 4. generant 8. 16. 24. terminos quoq; Arithmeticos; Sic 3. 4. 6. Harmonici per 4 multiplicati generant 12. 16. 24. Harmonicos ſic dicas de Geometricis.

Probatur verò propoſitio ex præcedentibus, & ex propoſ. 17. ſeptimi Elementorum.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Differunt proportiones; quod Arithmetica progrediatur in infinitum creſcendo, non decreſcendo, niſi incidat in fractos. Harmonica ſolum decreſcendo, Geometrica creſcendo, & decreſcendo.

PRobatur ex dictis, & maxime da Harmonica ex Coroll. propoſ. 2.

THEOR. III. PROPOS. X.

Differũt quoq; Quod Arithmeticæ proportionis differentiæ æquales ſint, & proportiones inæquales, ideſt diſſimiles: at Geometrica proportiones habet ſimiles, & terminorum differentias ſimiles cum differentiæ in eadem proportione ſint, & Harmonica neque differentias ſimiles, neque proportiones poſſidet ſimiles in ſuo continuo progreſſu. Patet ex dictis.

SVnt aliæ, quæ oriuntur ex eorum multiplicatione, diuiſione additione, & ſubtractione ſupra explicatis praxibus, quas, ſi voluerit, poteſt quilibet conferre, & differentias etiam in iſtis operationibus tractandis agnoſcere.

EXPENSIO V.

De maxima, & minori Harmonia.

CVm quatuor termini, ita ſunt ordinati; vt in ipſis omnes tres proportiones inueniantur, dicunt Mathematici habere Harmoniam maximam, quòd ſi ſolum duæ inueniantur, dicunt, Harmoniam minorem poſſidere. Oportet itaque docere modum inueniendi quatuor terminos, qui vel duas, vel omnes proportiones conſequantur.

PROBL. I. PROP. XI.

Quatuor numeros habentes proportionem Arithmeticam, & Geometricam inuenire.

CApe tres terminos, quorum extrema, vel paria ambo ſint, vel ambo imparia; ſed Geometricã proportione nexos, vt 16. 24. 36. interque iſtos extremos numerum Arithmeticum, interijce eos vtlendo, vt docuimus, & deinde bifariam diuidendo, & erit numerus 30. itaque in quatuor numeris 16. 24. 30. 36. proportio Geometrica, & Arithmetica reperietur, vt ex ipſa conſtructione eſt manifeſtum.

PROBL. II. PROPOS. XII.

Quatuor numeros reperire, in quibus Harmonica proportio, cùm Geometrica reperiatur, vel cum Arithmetica.

ACcipe tres numeros continue Geometricè proportionales, vt 16. 24. 36. & ex dictis propoſ. 5. vel 4 h exquire inter extrema 16. & 24. Harmonicum proportionalem numerum, eritque 19. $\frac{1}{5}$. Vnde quatuor termini 16. 19. $\frac{1}{5}$ 24. 36. duas proportiones propoſitas obtinebunt, vt patet ex conſtructione. Si verò cupias inter 16. & 36 extremos idem ages, eritque 22. $\frac{8}{11}$.

Eodem modo inter duos Harmonicos 4. & 6. extremos trium 3. 4. 6. intericietur terminus Arithmeticus 5. eruntq; quatuor termini 3. 4. 5. & 6. Harmonicè, & Arithmeticè proportionales.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

Quatuor terminos reperire, in quibus omnes proportiones ſint, & extrema proportionem datam Geometricam conſequantur.

EX tribus Arithmeticis paribus, vt docuimus propoſ. 3. huius creentur tres Harmonici proportionales, quorum extrema proportionem habeant datam, & inter extremos horum ſtatuatur terminus Arithmeticè proportionalis, & erunt quatuor termini in Maximã Harmonia, vt expoſcis.

Sint V. g. tres numeri Arithmetici 4 6. 8. ex quibus creo tres Harmonicos 24. 32. 48. interque extrema 24. & 48. interpono Arithmeticum in ſe 6. multiplicando, vt fiat 36. Sunt ergo termini 24. 32. 36. 48. habentes omnes proportiones requiſitas.

Probatur. Nam primo 24. & 48. ſunt in proportione data 4. ad 8. vt patuit ſupra propoſ. 1. huius, & Coroll.

Secundo obtinent proportionem geometricam non continuam, & ita eſt 24 ad 36. vt 32. ad 48. Nam quia 6. multiplicauit 4. & fecit 24. & ſe & fecit 36. Ergo eadem proportio erit inter 4. & 6. quæ eſt inter 24. & 36. Sic quia 8. multiplicauit 4. & 6 ex prop. 17. ſeptimi elementorum, ita erunt geniti 32. & 48. vt 4. ad 6. Ergo, cùm proportionem eandẽ, quam 4. ad 6. dicant 24. & 36. ac 32. & 48. eandem Geometricam rationem habebunt. Sunt etiam 24. ad 32. vt 36. ad 48. in eadem ratione. Nam 4. multiplicauit 6. & 8. Ergo geniti 24. & 32. habebunt eandem rationem, quam 6. ad 8. & quia 6. multiplicauit ſe, & 8. geniti 36. & 48. habebunt eandem rationem, quam 6. ad 8. Ergo & inter ſe eandem, quam 6. ad 8. conſequentur.

Probatur tandem de proportione Arithmetica numerus enim 6. multiplicauit ſe, 4. & 8. Ergo geniti 24. 36. 48. erunt in eadem proportione, quam 4. 6. & 8. ſed hæc ex Hypotheſi eſt Arithmetica, ergo, & genitorum 24. 36. 48. ex 19. prop. part. præced. 2.

Probatur tandem de Harmonica ex ipſa conſtructione. Imperatum eſt enim ex tribus datis Arithmeticis 4. 6. 8. tres Harmonicos reperire 24. 32. 48.

TRACTATVS XV.

De Linearum, Segmentorumque proportionibus.

QVamuis quædam fundamentalia de lineis secandis lib. 6. Expens. 3. tetigerimus; ea tamen fuere pauca, & quæ solùm elementi necessitas exposceret. Verùm linearum amplioribus terminis clauditur speculatio, latiorque admodum est, & quæ cognitionem multarum propositionum, quæ deinde ostensæ sun, requirat, & ideo earum speculationem, necesse fuit, in hunc locum reicere.

EXPENSIO I.

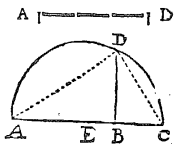
De linearum proportionali inuentione in proportione Geometrica.

QVamuis supra cum Euclide lib. 6. Expens. 3. inuenerimus lineas proportionales datis lineis. Quia tamen faciliter id, alio modo executioni demandatur; ideo ad tractatus perfectionem hic eum docebimus, & præter hoc docebimus quoque reperire alias lineas proportionales, seu potentia, seu commensurabilitate, vel inæqualitatis, vel æqualitatis, vt plena linearum proportionalium cognitio habeatur.

PROBL. I. PROPOS. I.

Datis duabus lineis alteram proportionalem Geometricam, seu extremam, seu mediam reperire.

SIt inquirenda media proportionalis datis AB, & AC. Fiat super AC semicirculus, & erigatur perpendicularis à puncto B in peripheriam, ducaturque AD punctata: nam hæc ex 2. Coroll. propos. 8. sexti inter AC & AB est media proportionalis, diciturque diuidere proportionem AB, ad AC *per interpositionem* AD *in duas partes æquales.*

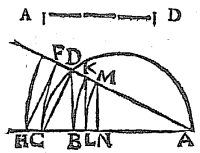


Si verò datis maiore AC, & media AD exquiratur minus extremum; facto super AC semicirculo accommodetur media AD in ipso, & à puncto D. cadat perpendicularis. Nam AB ex cit. Coroll. erit minus extremum. Si verò dato minore extremo AB, & mediâ AD seorsim expositâ exquiratur maius extremum, ex B excitetur perpendicularis BD; prolungeturque AB quantum opus est, & cêtero altero extremo A interuallo AD media ducatur circulus, licèt fig. non exprimat, qui secet perpendicularem BD in D. A puncto ergo D, quo illâ secat, excitetur perpendicularis DC, quę secabit minus extremum productum in C. Dico ergo AC ex eodem Coroll. esse maius extremum.

PROBL. II. PROP. II.

Datis duabus rectis lineis proportiones earum progagare in infinitum.

DEntur duæ AB, & AD, & secundùm proportionem minoris ad maiorem crescendo fit propaganda proportio: Quia datur minus extremum AB, media AD seorsim data; ideo ex propos. anteced erecta perpendiculari BD centro A interuallo AD ducatur circuli portio L in fig. non sit, & à pũcto D quo secat exeat data A D in A, & ei normalis DC, & CA erit tertia proportionalis ex prec. Rursusque ex puncto C ducto arcu CF interuallo AC: ab F, in quo secat, ducatur rursus perpendicularis F H ad AF, seu parallela primò ductę CD, *& in* H *erit quarta proportionalis, ita vt* AB *sit* AD, *vt* AD *ad* AC, *& quia* AD *sit ad* AC, *vt* AC *ad* AH.



Probatur, quia AB est ad AD, vt AD ad AC ob rectum angulum D ex Coroll. 2. prop. 8. lib. 6. Ergo etiam AD erit ad AF, idest AC, quæ ei vtpote radius, æquatur, vt AF ad AH ob rectum angulum H, ex dict. Coroll. propos. 8. & sic in infinitum crescendo.

Si verò requiratur proportio continuata in decrescendo maioris AD ad minorem BA. A puncto B interuallo AB ducatur portio circuli BK, & à puncto K demittatur perpendicularis KL. Rursusq; à puncto L ducatur portio circuli LM; & à puncto M demittatur perpendicularis MN. Dico hoc modo do proportionem continuari in se diminuendo, & AD esse ad AB, vt AB ad AL, & AD esse ad AL; vt AL ad AN; & sic quousque placuerit.

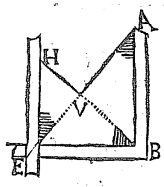
Probatur. Nam ex præced. vt est AD ad AB hoc est ad æqualem AK; ita est AK ad AL. Rursusque, vt AB hoc est AK ad AL ob rectum angulum L sic AL, idest AM ad AN; & sic quousque placeat, poteris continuare. An verò hæc continuatio possit verè in infinitum produci infra videbimus, cum de proportionum progressione.

PROBL. III. PROPOS. III.

Duobus datis extremis proportionalibus inter ea duas medias continuè proportionales in data proportione conijcere.

HOc problema antiqui, non nisi organicè soluere potuerunt ob infinitam, linearum multitudinem, quæ inter lineas possunt poni; Multas autem eorum inuentiones singulari ingenio excogitatas Clauius affert lib. 6. propos. 15. Geometr. pract. & quasdam valde amplificat Betinus Aerarij Math. propos. 13. tom. 2. Nos afferemus modum facillimum Platonis.

Sit regula lignea, vel cuprea AB placitæ longitudinis, cui alia regula BE eiusdem rationis rectangulè infixa sit, & stabiliter. Huic verò rectangulè altera inseratur EH tali modo, vt per illam mota, nunquam tamen ab angulo recto deficiat, & ecce instrumentum paratum erit.



Vsus verò instrumenti talis est. Sint duæ datę extremę lineę AV, & VH, quę rectangulè uniãtur in V, & producantur per punctatas, quantum satis erit. Applicetur verò instrumentum extremo A regula AB, & ita accommodetur trasferendo regulam HE, vel vicinìùs, vel longinquiùs vsq; dum alterum extremũ H alterius datæ VH extremum ipsa regula mobilis lambat, & simul continuatæ punctatę VE, & VB transeant per angulos rectos, regularum; nempe VE per angulum E, & VB per angulum B. Dico *quatuor* AV, *&* BV, *&* VE, *&* VH *esse quatuor continuè proportionales.*

Hocque, diciturque à Mathematicis diuidere in tres partes æquales proportionem AV ad VH.

Prob. Nam triangula AVB, & BVE, & EVH sunt æquiangula. Anguli enim ad V recti, & anguli nigri æquales; Cum albus, & niger ad basim AB in triangulo AVB vni recto sint æquales; & ideo, cum totus apud B sit rectus, residuus ãgulus niger ad B erit æqualis nigro ad A, & idem dicas de alijs.

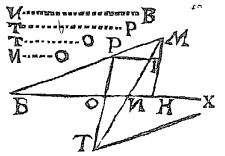
Cum ergo triangula æquiangula sint, erit AV crus maius ad BV minus in triangulo AVB, vt BV idem; sed maius in triangulo BVE ad crus minus VE, & hoc BV maius ad suum minus VE erit, vt ipsum VE maius in triangulo VEH ad minus VH. Quare BV, & VE sunt duæ mediæ proportionales inuentę inter extremas AV, & VH.

PROBL. IE. PROPOS. IV.

Datam lineam exhibere, quæ ad aliquam compositam habeat proprortionem ex duabus lineis ad duas alias, cum fieri potest.

SIt data proportio BN ad NO, & proportio TP ad TO non eadem, ac precedens, sed diuersa, vt proportio composita sit, non duplicata.

Ductis lineis BH, & TP, vtcumque, quæ faciant quemcumque angulum in O: mensuretur NO punctata super alteram earum V. g. super continuam NB à puncto O in N, & à puncto N altera punctata ei correspondens NB; Sic in altera TP punctata TO mensuretur super OT à puncto O in T, & à puncto T altera punctata TP correspondens perque extrema P, & B ducatur MB, & per N, & T linea TN, quę conuenient in M, *& erit reperta* MB, *quæ ad* PM *habebit proportionem compositam, ex proportione* NB *ad* NO, *&* OT *ad* PT.



* Probatur primo, quod MB, & MT conuenient, in M. Nam si non conuenient, essent TM, & MB parallelæ; Quare triangula POB, & NOT essent proportionalium laterum, vtpote æquiãgula V. g. si TX esset ipsa TN parallela ipsi BP; esset OB ad OX, vt OP ad OT, & *componendo* OB ad OB simul, & OX esset, vt OP sola ad OP simul, & OT: Quare contra præsuppositionem proportio esset similis datarum linearum, quòd nolumus: nam posuimus NB ad ON dissimilem à proportione TO ad TP. Quare non erunt parallelæ; idcircò conuenient E. g. in M.

Probatur. Quod proportio BM, ad PM sit composita ex proportione NB ad NO, & TO ad TP. Ducaturque parallela PI ad NB V. g. à puncto P.

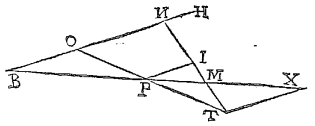
Eritque ex 4. lib. 6. MB ad MP, vt NB ad IP. Interponatur quælibet, vt aduertimus posse fieri Tract. 9. part. 1. Expens. 3. Scilicet NO, quæ interponatur inter IP, & NB. Erit igitur proportio NB ad IP composita ex duabus, sc. ex proportione NB ad NO, & NO ad IP: Sed ex 4. lib. 6. vt NO ad IP ob parallelismum linearum ON ad IP; Sic est in proportione TO ad TP: Ergo (posita proportione TO ad TP loco proportionis NO ad IP) proportio MB ad MP eadem, quæ NB ad IP erit composita ex proportione NB ad NO, & TO ad TP, quod si cupias proportiones componentes ambas esse maioris ad minorem vtere figura prop. seq.

PROBL. V. PROPOS. V.

Data linea, quæ dicatur componi ex proportione vnius lineæ ad aliam exhibere duas lineas, quæ reliquam proportionem contineant.

DIcatur linea BM ad MP composita ex proportione BN ad ON; & ex alia, quæraturque reliqua proportionum, quæ proportionem MB ad PM compleat.

Accomodetur in hac, seu prec. fig. NB longior, vt faciat cum MB quemcumque angulum, & ducatur indefinita MT ab M per N. Deinde ab N, mẽsuretur NO super NB, & à puncto P parallela ducatur ad NB, quæ sit IP, & à P per O transeat PT conueniens cum TM. *Dico proportionem* TP *ad* TO *esse proportionem, quæ componit cum proportione* NB *ad* NO *proportionem* BM *ad* PM.



Probatur. MB est ad MP, vt NB ad IP interponatur NO; eritque proportio NB ad IP composita ex proportione NB ad NO, & NO ad IP. Quare, & proportio BM ad MP erit composita ex proportione NB ad NO, & NO ad IP, scilicet ex TO ad TP, vel TN ad TI, & aduerte, quod si TP non conueniet cum TM versùs T conueniet versùs M; cum in proportione composita, vt dixi in præcedenti TP, & TM non possint esse parallelæ, vt est BN, & XT.

PROB. VI. PROPOS. VI.

Datâ mediâ trium in continua ratione existentium, & aggregato extremarum proportionalium primam, & vltimam exhibere.

SVper aggregato HI duarum extremarum fiat circulus ACBD, & mediâ datâ duplâ BC accommodetur in circulo; siquidem oportet aggregatum extremarum, quæ diametrum faciunt circuli esse maius Ipsâ mediâ duplatâ, quia duæ extremæ sunt maiores, quàm mediæ, & tantò magis cùm mediæ sunt inuicem æquales ex propos. 13. lib. 5. Elem.



Deinde ipsi CB erigatur perpendicularis AD ab eius medietate E. *Dico factum esse id, quod desiderabatur.*

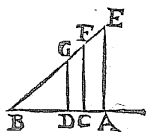
Probatur. Quia AE est ad EC, vt EC ad ED ex Coroll. propos. 16. lib. 6. Linea AD verò, vt diameter æquatur aggregato HI.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Datis duobus excessibus trium magnitudinum in continuâ proportione existentium exhibere tres continuas.

SInt dati excessus AC, & CD, qui in vnicam lineam ponantur AD, quę, & extendatur ad placitum vsque ad B: Deinde à punctis A, C, D erigantur perpendiculares, quę ex 14. lib. 6. eandem proportionem seruent, quę AC ad CD, & ducatur EG per puncta E, F, G, donec cum altera AB conueniat in B. *Dico factum esse id, quod exposcitur, & esse* BD *ad* BC, *vt* BC *ad* BA.

Probatur, vt AB ad CF, sic est AB ad CB ex propos. 4. lib. 6. sed AE ad CF, effecta est sic vt AC ad CD; Ergo vt est AC ad CD, sic ex 16. l. 5. est tota AB ad CB.



Sed, vt est CF ad DG, ita est CB ad DB; ex propos. 4. lib. 6. At CF respicit in proportione BG, vt AE respicit CF, vt AC respicit CD ex effect. & ideo vt proportionatur AB ipsi CB. Ergo proportionata est AB ipsi CB, vt CB ipsi DB. Quare tres AB, & CB, & DB sunt in continua analogia.

PROBL. VIII. PROPOS. VIII.

* *Dato termino maiori, & differentia termini maioris à medio reperire ipsum medium terminum, atque minorem.*

SIt datum maius extremum AB in propos. præced. figurâ, & differentia AC: Detrahatur hęc differentia AC à maiore extremo AB, & residuum CB erit medius terminus; Rursus ex propos. 15. sexti, fiat, vt AB ad suam differentiam AC est in proportione, sic CB ad aliud; & inuenietur CD. *Dico itaque, quod* AB, & CB, & DB *erunt in continua proportione.*

* Probatur, vt AB est ad AC; sic CB est ad CD. Ergo componendo, vt AB est ad AC cum CB; sic CB est ad CD cum DB: Quare diuidendo, vt AB est ad CB; sic CB erit ad DB: quapropter AC, & CB, & DB, erunt in continua proportione.

EXPENSIO II.

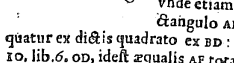
De proportionali linearum additione.

ADditio proportionalis lineaꝝ maximas in Geometria secum fert vtilitates, & plurimis prębet speculationibus fundamentum, interque multas propositiones, quę exhibentur, hę sunt vtiliores, & admodum necessarię.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Datam lineam rectam, vtcumque sectam tali segmento augere, vt tota cum adiuncta sit ad adiunctam, vt maius segmentum ad minus.

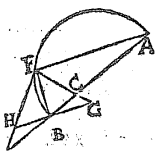


SIt linea AB secta, vt cumque in C, & iubeatur adiungere talem partem V. g BD; quæ faciat rectam AD; & hæc tota AD sit ad adiunctam, & segmẽtum BD, vt maius segmentum primitiuum AC est ad minus CB.

Ponatur CE æqualis ipsi CB: Fiatque per 15. propos. lib. 6. vt AB ad EC: Sic tota AB ad BD: reperieturque BD: *Dico itaque totam* AD *esse ad* BD *adiunctam veluti proportionatum segmentum maius* AC *segmento minori* CB.

Probatur. Quoniam enim AB respicit EC veluti AB respicit BD; erit quoque componendo AB, & BC ad EC, vt AB, & BD ad BD: sed EC est æqualis ex effectione minori segmento CB: Ergo erit etiam, vt AB, & EC, hoc est AC ad CB; sic AB cum BD, ideſt tota AD ad BD.

* Poteſt etiam fieri allo modo. Sit data AB diuisa, vt eumque in C. Facto super AB semicirculo, à puncto C erigatur, si placet perpendicularis CF. & fiat triangulum rectangulum AFB, lineęq; AB ducatur GH parallela per punctum B, & occurrat ipsi CF in G. Sit deinde BH æqualis ipsi GB, & ducatur per H linea FH, vsque ad L; & AB prolungetur, vsque ad L. *Dico* BL *esse eam additionem, quæ requiritur; &* AL *esse ad* BL, *vt* AC *ad* CB.



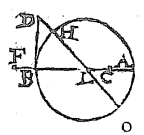
Probatur AF est ad BH, vel æqualem GB ob earum parallelisimum in triangulo AFL, vt AB ad BL: sed vt AF ad GD; sic AC ad CB, ob triangulorum AFC, & GCB similitudinem: cum sint ad verticem, & inter parallelas ex 9. sexti: Ergo vt tota AL ad adiunctam BL, sic AC segmentum maius ad CB segmentum minus.

PROBL. II. PROPOS. X.

Datæ lineæ, vtcumque sectæ tale segmentum addere, vt tota cum addita sit ad totam, vt segmentum ad ipsam additam.

INter AB, & AC media proportionalis inuenietur BD; Eritque quadratum ex BD factum æquale rectangulo ex AC segmento, & tota AB effecto ex propos. 19. lib. 6. Erigatur itaque hæc media ex B perpendiculariter, & facto super AB totâ datâ circulo, per centrum eius L ducatur à vertice D linea OD: *Dico, quòd portio* HD *inter mediæ inter* DB *tangentem, & peripheriam intercepta est illa, quæ addita ipsi* AB *facit* AF, *quæ est ad totam* AB, *vt segmentum* AC *est ad additam* BF.

Probatur. Quia rectangulũ ex tota, & addita pro vno latere AF, & addita BF pro alio est æquale rectãgulo ex DO tota, & segmento HD ob æqualitatem laterum HD, & BF. Rectangulum verò ex OD, & HD est æquale quadrato BD, ex 36. lib. 3. vnde etiam erit æquale rectangulo AB, & AC, quod æquatur ex dictis quadrato ex BD: Quare ex prop. 10. lib. 6. OD, ideſt æqualis AF tota cum additâ erit ad AB totam, vt eius segmentum AC ad additam HD ideſt æqualem BF.

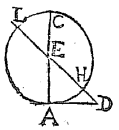


PROBL. III. PROPOS. XI.

Datis duabus lineis, alteram ipsarum, ita continuare, & tota cum additâ sit ad alteram, vt altera ad additam, ideſt sint continuè proportionales.

SIt data recta maior AC, & minor AD, quæ orthogonaliter ad verticem A coniungantur. Diuisâque bifariam alterâ ipsarum, puta AC minorem, dimidiæ EA interuallo describatur circulus, & ducatur ex D per centrum E linea DL. Dico totam HL, ideſt AC datam cum adiunctâ HD simul, Ideſt LD esse ad datam AD, vt AD ad AC.

Probatur. Nam ex DL tota adiecta cum HD pro latere, & adiecta HD solum pro alio fiet rectangulum equale quadrato tangentis AD ex 36. lib. 3. Euel. Ergo ex propos. 10. lib 6, vt DL ad AD; sic AD erit in proportione ad DH; quare AC æqualis HL aucta eodem incremento DH erit ad DA, vt DA ad DH.



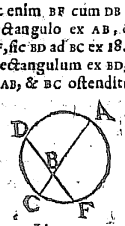
PROBL. IV. PROPOS. XII.

Lineæ datæ adiungere talem partem, vt alterius segmentis data, & adiuncta sint proportionales.

SIt linea AC secta in B, & alia DB, cui oporteat addere talem partem, vt ipsa DB sit ad segmentum BC, vt AB segmentum alterum ad additam BF: Addatur linea BD lineæ AC ad punctum B, & faciat cum AC, quemcumque angulum. Per tria verò puncta ADC reperiatur circulus transiens ex 5. lib. 4. & DB prolungetur vsque ad circumferentiam in F, & erit factum, eritque AB ad BF, vt DB ad BC.

Probatur. Et enim BF cum DB faciunt rectãgulum æquale rectangulo ex AB, & BC, & ideo erunt, vt AB ad BF, sic BD ad BC ex 18. lib. 6.

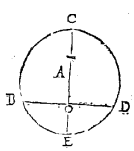
Quod autem rectangulum ex BD, & BF sit æquale rectangulo ex AB, & BC ostenditur ex 35. lib. 3.



PROBL. V. PROPOS. XIII.

Datam lineam sectam, vtcumque, ita augere, vt segmentum maius cum addita sit ad segmentum maius, vt segmentum maius ad minus.

SIt linea AE diuisa in D, & segmentum maius C A; debeatque huic segmento addi talis pars; vt ipsum cum parte addita sit ad segmentum maius AO, vt maius ad EO minus.



Erigatur perpendicularis OB, & OD æqualis ipsi AO à puncto O, & per tria puncta B,E,D transeat circulus, Prolungeturque CA ad peripheriam in C, & erit factum.

Eritque ex 35. lib.3. rectangulum CO, & EO æquale quadrato OB, ideſt OA ei æquali ex effectione.

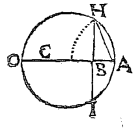
Vnde ex propoſ. 19. lib.6. CO ſegmentum, cum addita erit ad OA, vt OA ad AC.

PROBL. VI. PROPOS. XIV.

Datam lineam, vtcumque sectam, ita addere; vt tota cum addita sit ad segmentum maius, vt segmentum maius ad minus.

SIt data linea AC, quam oporteat adiungere; vt tota AC cùm additâ CO, ſ. AO ſit ad BC ſegmentum maius, vt BC ad AB ſegmentum minus.

Erigatur à puncto B perpendicularis, & à centro A interuallo ſegmento maiori BC portio circuli ducatur, quæ ſecet BH in H, cui BH fiat æqualis HI; perque tria puncta H, A, I tranſeat circulus, & prolungetur BC in O. Dico AO nempe totam AC cum addita CO eſſe ad CB ſegmentum maius, vt ipſa CB ad BA ſegmentum minus.



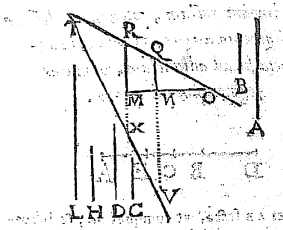
Patet, quia ex Coroll. propoſ.8. lib.6. ita eſt AO ad AH, ideſt BC, vt AH ad AB.

PROBL. VII. PROPOS. XV.

Datæ sint duæ lineæ inæquales, & ratio data. Sintque addendæ talibus partibus, vt rationem datam inuicem obtineant, sed compositæ aliquam aliam rationem datam consequantur.

SCiendum eſt hoc problema non ſemper operi demandari poſſe; ſed aliquando, prout rationes exhibentur, iuxta quas addendum ſit, vel detrahendum: Ipſa verò experientia docebit, cùm operi demandari poterit, abque eo, quòd omnes caſus ponamus: Sunt enim multi, & qui prolixis verbis indigerent.

Sint ergo datæ duæ lineæ A, B, ad quas duæ aliæ addendæ ſint, quæ ſint, vt C ad D, & efficiant compoſitæ proportionem, quam B ad L.



Fiat ON ad MO, veluti proportione reſpicit C ipſam D, & ex punctis M, & N erigantur perpendiculares, & parallelæ ipſis datis æquales A, & B, quæ ſint NV, & MX; iunganturq; puncta VX. Deinde fiat ex propoſ. 15. l.6. exp. vt H ad L, ſic XT ad VT: Poſtmodum à puncto T per punctum O ducatur recta OT; Producanturque NV in Q, & XM in R. erunt lineæ XR ad VQ in data proportione H ad L.

Probatur ſunt enim TX ad TV. ſic RX ad QV; ob paralleliſmum lineatum VQ, & XR in triangulo VQT, ſed XT ad TV ita effecimus, vt H ad L: Ergo erunt R X ad V Q, vt H ad L: Sunt verò NQ ad MR, vt ON ad OM, & ON ad OM, vt B ad A ex effectione, & pariter MX ad VN, vt C ad D; ergo effecimus id, quòd propoſitum fuit. Nam partes additæ NQ, & MR obtinent rationem datam C, & D totæ verò XR. ad VQ rationem datam H ad L ipſæ verò lineæ, quibus facta eſt additio, ſunt æquales lineis datis A, & B.

EXPENSIO III.

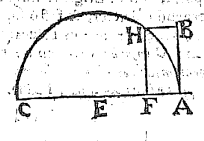
De linearum diuisione.

REctam lineam ſecare proportionaliter præter ea, quæ traddimus lib.6. hìc docemus, cùm id multis operationibus deſeruiat, multiſque propoſitionibus, quæ deinde tradendæ ſunt hæc doctrina neceſſaria euadat,

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Rectam lineam ita secare, vt inter segmenta altera recta sit media proportionalis, quæ data debet esse, aut subdupla, aut minus, quàm subdupla illius, quæ secanda est.

SIt ſecanda AC in duo ſegmenta, ita quòd inter ſegmenta tanquam media proportionalis ſit BA, non maior, quàm dimidium datæ AC. In B ad diſtantiam dimidiæ AB fiat ſemicirculus ſuper AC diametro, & AB data fiat tangens in A, & faciat in A angulum rectum. Ducaturque diametro parallela BH ab altero extremo B, quæ ſecabit, vel tanget ſemicirculum AHC; quòd AB ex hypotheſi minor ſit, quàm ſemidiameter AE, vel ei æqualis. Deinde ab H, in quo ſecat, ducatur HF perpendicularis ad AC, ſecabitque AC in F.



Dico itaque, quod inter AF *&* FC *ſegmenta, media proportion alis eſt* AB.

Probatur. Nam ex propoſ.16. lib.6. FH inter ſegmenta eſt media proportionalis; ſed FH eſt æqualis AB, cum ſint inter parallelas, & parallelæ. Ergo etiam AB eſt media proportionalis inter AF, & FC.

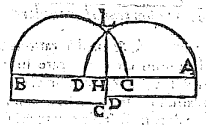
COROLLARIVM

HInc data aliqua V. g. BA inuenies illius extrema proportionalia, nempe AF, & FC per præcedentem praxim, ſi ſimul iungas, vt vnam longitudinem efficiant, vt per ſe conſtat.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Rectam lineam duobus punctis in tres partes diuisam, in quatuor partes iterum diuidere per punctum intermedium; vt segmenta facta remaneant proportionalia.

SIt linea AB diuiſa in punctis C, & D, quæ oporteat iterum diuidi in H, vt ſegmentum AH ſit ad ſegmentum CH, vt ſegmentum HB ad ſegmentum HD. Diametro AD deſcribatur circulus, & iterum diametro CB alius circulus deſcribatur,



& à puncto, quo ſe interſecant in L ducatur perpendicularis ad H, & erit factum, quòd expoſcitur. *Talisque erit proportio* AH *ad* CH; *qualis eſt* HB *ad* HD; *vel* CA *ad* CH, *vt* BD *ad* DH.

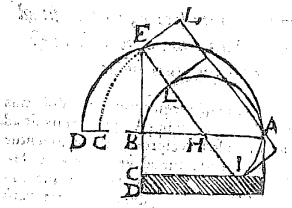
Probatur. Nam rectangulum ex AH, & HD eſt æquale quadrato HL ex 19. lib. 6. eo, quòd ex 8. lib.6. HL ſit media proportionalis, ſic rectangulum ex CH, & HB erit æquale eidem quadrato ob eandem rationem; quare hęc rectangula erunt æqualia inuicem; quare ex propoſ.10. lib.6. AH latus vnius erit ad HC latus alterius, vt HB latus huius ad HD latus rectanguli, cuius alterum latus AH. Quare etiam *diuidendo* AC erit ad CH, vt DB ad DH.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datam lineam semel sectam, iterum denuò secare, vt partes sint in continua proportione.

SIt linea AD diuiſa, vtcumque in B, quam oporteat iterum ſecare in C, vt partes ſint in continua analogia, & ſit AB ad BC, veluti eſt BC ad CD.

Diametro AB fiat circulus, & diametro AD alius circulus deducatur, & à puncto diuiſionis datæ B erigatur perpendicularis, quæ ſecet peripheriam maioris circuli in E; & ducatur EH, cui fiat æqualis HC. Dico factum eſſe, quòd mandatum fuit, & AB, BC, & CD *in continua proportione reperiri.*



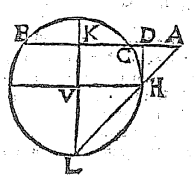
Probatur rectangulum ex IE, & EL eſt æquale quadrato ex BE ex 35. lib.3. & ex 19. lib.6 eidem quadrato ex BE, rectangulum ex AB, BD æquale eſt, quia AB, & CE, & BD ex 8.l.6. ſunt in cõtinua proportione. Rectangulum verò ex AB, & BC æquatur rectangulo ex AB, BC, quòd eſt AC, & rectangulo nigro ex AB, & CD. Pariter ex IE, & EL rectangulum æquatur rectangulo ex IL, & LE, & quadrato ex LE. Rectangula verò iſta ex IL, & LE, & ex AB, & BC ſunt æqualia, cum ſint ex diametro, & LE, vel æquali BC: Quare ablatis iſtis rectangulis æqualibus rectangulum nigrum, & IL quadratum remanebũt æqualia, quamobrem ex 19.l.6. latus nigri rectanguli, ideſt AB erit ad EL, hoc eſt ad BC; vt BC ad CD, quòd erat probandum.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam lineam sectam ita secare; vt pars intermedia sit vltima proportionalis trium continuè proportionalium.

SIt data linea AB, quæ, vtcumque ſit diuiſa in C: Oporteatque iterum eam diuidere in D. vt DC pars intermedia ſit extrema proportionalis, & ita ſit DB ad AD, vt AD ad DC.

Diuidatur BC bifariam in K, & erigatur ex K perpendicularis KL æqualis lineæ AK. Ducaturque AL per extrema A, & L: perque tria puncta C, B, L circulus tranſeat, & à centro V ducatur parallela ad AB, quæ occurrat AL in H puncto, & ex pũcto H deducatur perpendicularis HD, & erit factum. Nam ita erit BD ad AD, vt AD ad DC.

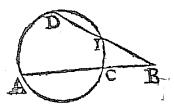


Probatur AK æquatur KL, & HV eſt parallela ad AK: Ergo, & ipſa æquatur radio VL. Quare HV eſt etiam radius. Eadem ratione cum DH ſit parallela ad KL erit æqualis lineæ AD, & HD ad angulos rectos incidet in HV radium: Vnde erit tangens: quare eius quadratum erit æquale rectangulo DB, & CD ex 36. lib.3. & conſequenter quadratum æqualis AD erit æquale rectangulo eidem CD, & DB, vnde ex 19.lib.6. DB erit ad AD, vt AD ad DC.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Datam lineam ita secare, vt tota sit ad segmentum alterius, vt tota altera est ad segmentum huius.

SIt data AB, in quâ segmentum CB. Volumus autem ita secare BD in I V.g. vt tota DB sit ad CB, vt AB ad IB, ideſt reciprocè proportionentur totæ, & partes. Vniantur ad verticem B; vt faciant quemcumque angulum. Per tria verò puncta A, C, D agatur circulus ex prop. 11. l. 3. Nam dico IB *esse segmentum, quod requiritur, & esse* DB *ad* CB, *vt* AB *ad* IB.



Probatur ex propoſ. 36. lib 3. elem. Coroll. Nam rectangulum ex AB, & CB eſt æquale rectangulo ex DB, & IB. Vnde ex propoſ. 10 lib. 6. ita erit DB ad CB, vt AB ad IB.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Datas duas rectas ita secare, vt segmenta sint reciproca in proportione.

SIt data AB minor pro libito ſecta in C, & maior BO ſecanda ſit ſimiliter, vt ſegmenta V.g. OL, & BL ſint proportionalia ſegmentis AC, & CB reciprocè, *nimirum* OL ſit *ad* CB, *vt* AC *ad* BL.

Inter ſegmenta data AB, & CB inueniatur media proportionalis CD: Factoque ſuper BO maiori, ſemicirculo reperiãtur duo ſegmẽta, quibus CD ſit media proportionalis ex propoſ. huius 16. & ſint BL, & LO. Eritque factum, quòd poſtulatur, *&* OL *erit ad* CB, *vt* AC *ad* BL.



Probatur rectangulum ex AC, & CB, ideſt CQ, eſt æquale rectangulo LH, ex OL, & BL, quòd inter ambo ſegmenta ſit CD eadem media proportionalis; & ideo ex 19. lib. 6. ſint æqualia quadrato ex CD facto. Vnde, & erunt æqualia inuicem. Quaderé ex 19. lib. 6. erit OL ad CB, idem latus quod AQ, vt AC ad BL, idem latus quam OH, quod erat præſtandum.

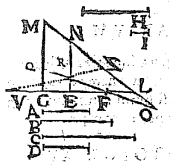
PROBL. VII. PROPOS. XXII.

Auferre à lineis duabus datis partes, quæ inuicem habeant proportionem datam; ita tamen, vt residua correspondeant inuicem in proportione datâ, cùm fieri potest.

SInt datæ duæ lineæ A, & B, à quibus demendæ ſint duæ partes in ratione C ad D, ita tamen, vt reſidua inuicem eam proportionem dicant, quam dicit H ad I.

Fiat FG ad FE, vt C ad D, & ex punctis E, & G erigantur perpendiculares EN, æqualis A, & OM æqualis B, coniungaturque MN, & fiat ex propoſ. 19. lib. 6. OM ad ON, vt H ad I. Si MO eſt maior, quam ML linea, in quam FG terminat, producta ſi fuerit, & FG non pertingat ad L, ſed debeat produci, problema fieri poteſt, ſecùs, ſi id non eueniat. Igitur ex O per F ducatur OQ. Dico factum eſſe, quòd expoſcitur, *&* QG *esse ad* BE, *vt* C *ad* D; *residuas verò* QM *ad* NE *esse, vt* H *ad* I.

Probatur. Nam QG ablata correſpondet proportione ad EB ablatã, vt FG ad FE, quæ ex effectione eſt eadem proportio, quæ C ad D. Sic MQ eſt ad RN, vt OM ad ON, quæ ex effectione eſt eadem, quæ H ad I. Ergo reſiduum MQ ad reſiduum NR eſt, vt H ad I; quod fieri oportebat.



Aliquando tamen fieri poteſt, ſed reciprocè, vt ſi ZM inuenta, quæ eſſet, vt H ad I non pertingeret vltra H in O; ſed eſſet minor, quàm ML, & eſſet MZ, tunc enim deberet fieri EV ad VG, vt C ad D, & ex Z ad V ducenda eſſet ZV punctata; quæ ſecaret in reciproca ſegmenta. Nam reſiduum à punctata vſque ad M eſſet ad MR, vt H ad I; at verò ablata ER ad G vſque ad punctatam, vt C ad D: ita vt fundamentum, & terminus eſſent in eadem quantitate V. g. EN.

PROBL. VIII. PROPOS. XXIII.

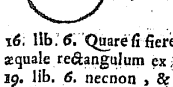
Lineam diuisam extrema, & media ratione proportionali diuidere.

DIuidere extremâ, & mediâ ratione proportionali lineam eſt eam ſecare in tria ſegmenta facta, vt tota ad ſegmentum primum ſit, vt ſegmentum, aliud ſecundum ad tertium.

Sit ergo linea data IH ſecta in L, quæ ita ſecãda ſit in tria ſegmenta in aliquo puncto V. g. O, vt tota IH ſit ad ſegmentum datum LH, vt alterum ſegmentum IO eſt ad OL.

Super ſegmentum IL fiat circulus, & à puncto H ducatur tangens HM, connectaturque punctum contactus MK, & ob eodem puncto contactus M demitatur perpendicularis MO. Et dico eſſe factum, id, quod poſtulatur. *Nam tota* IH *erit ad* LH, *vt ſegmentum factum* IO *eſt ad* OL.

Præaſſumpt. Obſeruandum eſt lineam OM eſſe mediam proportionalem inter baſin ſegmenta OH, & OK in triangulo rectangulo KMH ex 8. Eu. Et eandem OM eſſe mediam proportionalẽ inter duo diametri ſegmenta IO, & OL ex prop. 16. lib. 6. Quare ſi fieret ex OM quadratũ ei eſſet æquale rectangulum ex HO, & KO ex propoſ. 19. lib. 6. necnon, & rectangulum ex diametri ſegmentis IO, & OL ob eandem rationem. Quare hæc rectangula inuicem eſſent æqualia. Vnde ex prop. 10. lib. 6. habebunt latera reciprocè proportionalia: Ideoq; ea proportione reſpondebit HO ad OI, vt OL ad OK. Quo poſito.



Probatur Propoſ. & progreſſ. 1. Cum HO, ſit ad OI, vt OL ad OK. Vtendo itaque *compoſitione rationum*, ita erit HO cum OI, ideſt tota HI, ad OI, vt OL cum OK, ideſt LK ad OK.

Progreſſ.

Progreſſ. 2. Rurſus; ſi HO eſt ad OI, vt OL eſt in proportione ad OK ex præaſſumpto vtemur *permutatione*, & erit antecedens HO ad OL antecedentem vt OI ad OK terminos. Vtemur deinde *diuiſione rationũ*; & erit LH pars ad LO compartẽ, vt KI pars & radius, vel LK item radius ad KO compartem.

Progreſſ. 3. Cum ergo iſtæ proportiones æquales ſint, & ſimiles *ex æquali arguendo* erit HI ad OI, quam primo progr. oſtendimus, velut IK, vel LK ad OK: nimirum tota HI ad partem interceptam IO; vt pars extrinſecùs aſſumpta HL ad alteram partem interceptam OL.

Progreſſ. 4. Cùm ergo IH correſpondeat proportione ad IO, vt LH ad OL poterimus denuo vti *permutatione*, & erit IH ad HL antecedentes, vt IO ad OL ſequentes, nempe tota IH ad ſegmentum datum HL, vt ſegmentũ factum IO eſt ad OL, quod erat demonſtrandum.

EXPENSIO IV.

De proportione linearum Arithmetica.

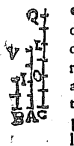
LIcet proportio Arithmetica ſit facillima, non licet tamen eam omnino præterire ad tractatus integritatem, ideo breuiter.

PROBL. I. PROPOS. XXIV.

Tres proportionales datis duabus lineis in Arithmeticâ proportione inuenire.

HOc faciliter fit: Datis enim duabus A, & B inquiratur maius extremũ. Fiat CL æqualis ipſi A, & addatur differentia VI ſemel, & fit LQ, & erit CQ maius extremum.

Si verò exquiratur minus extremum fiat CL æqualis ipſi AV mediæ, & ei ſemel differentia LQ detrahatur, & fiet B minus extremum. Si verò inquiratur media datis B, & CQ fiat AI æqualis ipſi B, & differentia OQ, quæ eſt inter minus, & maius extremum bifariam diuidatur, addaturq; ipſi AI, & ſit AV media proportionalis. Patet inuentas eſſe extrema proportionalia arithmeticè, quia ſingulæ lineę altera ſuper alteram excreſcunt augmento æquali; quòd eſt de ratione proportionis arithmeticæ: ſic VA excedit B linea VI, & CQ excedit AV linea IQ, & IQ, & VI ſunt differentiæ æquales.



EXPENSIO V.

De linearum proportione Muſica.

PROBL. I. PROPOS. XXV.

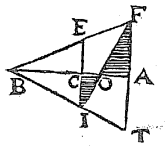
Datis duabus lineis alteram proportionalem Harmonicam, siue mediam, siue extremas inuenire.

SIt primo datum maius extremum AB, & minus CB, cui oporteat mediam proportionalem Harmonicam reperire.

A puncto C excitetur perpendicularis CE, ſicut & à puncto A perpendicularis AF; Sitque CE, cuiuſcumque magnitudinis. Prolungetur vſq; ad I, quantum eſt CB, & à B per E ducatur linea recta vſque ad AF, & vbi ſecat in F ad I recta ducatur, quæ ſecabit AB in O; quam eſſe ſectam Harmonicè affirmo, *&* CB *eſt medium proportionalem inter* CB, *&* BA Harmonicè, ideſt eſſe CB ad CA Geometrica in proportione, vt eſt differentia OC inter primam, & mediam ad differentiam OA inter mediam, & extremam.

Probatur. Nam ob paralleliſmum linearum AF, & CE in triangulo AFB, ita erit AB ad CB, vt AF ad CE.

Progreſſ. 2. Deinde conſiderandum quoque eſt, quod triangula nigra ſunt ſimilia, quòd ſint rectangula, & habeant angulos ad O ad verticem æquales. vnde, & reliquos: quare erit AO ad AF, vt OC ad CI, vel æqualis CE *&* permutando ita erit AO ad OC, vt AF ad CI, vel CE: Sed AF ad CE erat in primo progreſſ. vt AB ad CB; Ergo etiam differentia AO ad differentiam OC eſt, vt maius extremũ AB ad minus CB, quare OB erit media proportionalis, cuius differentia à maiori extremo AO, ita refertur ad differentiam ſuam à minori extremo CB, vt maius extremum ipſum refertur ad minus.



Si verò libeat minus extremum data media OB, & maiori AB reperire excitabis perpendicularem AF à puncto A, cuius longitudinis placeat V.g. AF, æqualemque deduces AT perpendicularem ab A, iungeſque TB, & ab F per O duces FI, & à puncto, quo ſecat in I rectam BA deduces perpendicularem IC, & vbi cadit in C erit extrema minor proportionalis harmonica CB.

Patet. Quia eſt eadem conſtructio. ac antecedens ſolo ordine variata.

Si verò, quis cupiat dato minori extremo CB, & media BO maius extremum. Is excitabit perpendicularem IC, cuius longitudinis libeat, & producet æqualem CE, perque punctum E à puncto B ducet rectam, & rurſus ab I per O aliam rectam, quæ ſe interſecabunt ſicubi V.g. in F. Ab F ergo puncto ad OB prolungatum duces perpendicularẽ, quæ cadet in A. Linea itaque AB erit maius extremum. Quod autem conueniant, patet: Maior eſt enim angulus externus E, quã angulus niger I internus acutus I, quod crus CO crure BC neceſſariòſit minus in triãgulo OCI, ideoq; IF, & BF non poſſunt eſſe parallelæ, quod incidens EI non faciat angulos internum externo æquales.

Probatur verò prop. ex eo, quòd ſit allo ordine eadem operatio, quæ priùs in prima parte propoſitionis, vt patet.

TRAG-

TRACTATVS XVI.

DE PROGRESSIONE PROPORTIONALI.

PARS PRIMA.

De Linearum Progreſsione Geometrica.

VIdimus progreſſionem numeris procedentem, & eius ſingulares affectiones ſpeculati ſumus; modo linearum progreſſionem proportionalem oportet animaduertere in multis à prima diuerſam, & præcipuè in eo, quòd in progreſſione numerali Geometrica vltimus numerus aſſignari nequit, ad quem progreſſio perueniat; hìc autem aſſignari poteſt vltimus lineę terminus, ad quem licet infinita progreſſio tendat, illumque conſequatur, ita vt inter aſſignata extrema omnis multitudo innumera proportionalium concludatur, quamuis ad illud extremum ſucceſſiuè procedendo nunquam ſit peruentura, in duas verò partes hunc Tract. ſecabimus, agendo priùs de Geometrica proportione, deinde de Muſica. Arithmeticam prætermittentes, vtpote à numerica non diſcrepantem.

EXPENSIO I.

De principijs.

ANtequam de progreſſionibus pertractemus ipſa principia, definitioneſque videre oportet.

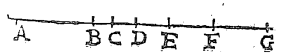
DEFINITIO I.

SEries Progreſſionis eſt quantitas finita diuiſa ſecundum proportionem Geometricam datam.

Sit quantitas aliqua finita data AG, quæ diuidatur ſecundùm proportionem AB ad AC; ita quod AB ſit ad AC, vt AC ad AD, & rurſùs AC ad AD, vt AD ad AE, & cæt. hæc eſt ſeries Progreſſionis Geometricæ.

DEFINITIO II.

GEometrica progreſſio eſt quotcumque terminorum ſecundum eandem rationem continuatio.



Geometrica itaque progreſſio eſt illa continuatio diuiſionis ſecundum eandem datam rationem ciuſdem quantitatis, ita vt nullum includat finem ſecundum ſe. Iam verò vt de progreſſione numerica dictum eſt, alia eſt diſcreta, alia continua. Diſcreta eſt, quæ non progreditur per eaſdem rationes: continua verò per eandem datam rationem, aut perpetuò augetur, aut perpetuò diminuitur.

DEFINITIO III.

TErminus progreſſionis eſt ſeriei finis, ad quem nulla progreſſio pertinget, licet in infinitum continuetur. Sed ei perpetuò accedet.

Itaque progreſſionis GF ad GE, & GE ad GD, & cæt. eſt A: quia licet diuiſiones perpetuò contingant viciniores puncto A illud tamen punctum conſequi non valebunt vt infra oſtendetur.

EXPENSIO II.

De progreſſionum terminis inuicem comparatis, & differentijs.

PRiùs conſiderabimus progreſſionem in ſe cõparando terminos terminis; deinde comparabimus progreſſiones inuicem; tandem acceſſum terminorum ad finem animaduertemus. Tripliciter autem comparari poſſunt inuicem termini, vel quoad ipſam proportionem, quam cum alio dicunt, & hoc ſufficienter aduertimus in proportionibus; tum numericis, tum quantitatis continuæ: at verò differentiæ terminorum, & eorum aggregata reſtant hic conſideranda.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. I.

Continuè proportionalium differentiæ ſe eadem proportione reſpiciunt, quâ termini ipſi.

SInt in continua proportione AG, & AF, & AE, & AD, & cæt. *oſtendendum differentias quoque in continua correſpondentia, & eadem, quà propoſiti termini reperiri.* & GF eſſe ad FE, vt FE ad ED, &c.

Probatur Progreſſ. 1. Tota AG eſt ad AF, vt AF ad AE. Ergo *diuidendo* GF erit ad FA, vt FE ad EA; & *permutando* GF ad FE erit, vt FA ad EA: quæ eſt eadem, ac proportio AG ad AF in fig. deſin. 1.

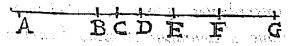
Progreſſ. 2. Repete idem argumentum de ſequentibus terminis EA eſt ad EA, vt EA ad AD. Ergo *dividendo* FE erit EA, vt ED ad DA. Igitur *permutando* erit FE ad ED, vt EA ad DA; quæ eſt eadem, quam obtinet GA ad FA.

Itaque ex primo progreſſ. GF differentia eſt ad FE differentiam, vt GA ad FA: Rurſuſque ex ſecũdo progreſſ. FE eſt ad ED, quæ ſunt differentiæ, vt GA ad FA. Ergo eadem proportione fruuntur differentiæ GF, & FE, & ED, qua reperitur inter GF, & FA: Quare ſunt continuè proportionales: ideq; dicas de differentijs aliorum terminorum continuò proportionalium.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si differentiæ ſint continuæ proportionales; etiam alij termini eadem proportione continua gaudebunt, dummodo duo primi gaudeant.

SInt differentiæ continuè proportionales GF, & FE, & ED in eadem figura, addaturque ipſis EA, ita quod terminus AG ſit ad AF, vt differentia GF ad differentiam FE. *Dico omnes terminos* AG, & AF, & AE, & AD *eſſe continuè proportionales.*



Probatur ex primo Progreſſ. Differentia GF eſt ad FE; vt AG terminus ad AF terminũ: Ergo *permutatim* differentia GF ad terminum AG refertur, vt differentiâ FE ad terminum AF. Ergo *diuidendo* GF refertur ad FA, vt refertur FE ad EA. Quare *permutando* rurſus GF reſpicit FE veluti FA reſpicit EA, quæ eſt eadem proportio, quæ eſt GA ad FA, & ex datis FE ad FD. Quare GA, FA, & EA erunt in eadem proportione.

Progreſſ. 2. Sic quoque eodem diſcurſu differentia FE refertur ad differentiam ED, vt FA ex primo progreſſ. reſpicit EA ideo *permutando* FE in proportione ſe geret ad FA ſicuti ED eſt ad EA: Quare *diuidendo* FE erit ad EA proportionata, ſicut ED ad DA: Quare rurſus *permutando* FE erit ad ED, vt EA ad DA.

Quamobrem cum ex datis termini GA ſit ad FA, GF ad FE differentiæ, quæ ex datis eſt eadem proportio, ac FE ad ED; & rurſus FA ſit ad AE ex primo progreſſ. vt eadem FE ad eandem ED, & ex ſecundo progreſſ. EA ſit ad DA pariter, vt eadem FE ad eandem ED, patet, quod quatuor termini GA, & FA, & EA, & DA erunt in eadem proportione, & ſic dicas de alijs.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si plures fuerint quantitates in continuâ proportione, & aggregentur binæ, & binæ, erunt aggregata in continua proportione.

SInt V. g. in preced. fig. quatuor quantitates continuè proportionales GF, & FE, & ED, & DC; & ſimul ſumantur GF, & FE. Deinde FE, & ED, tandem ED, & DC. *Dico hæc aggregata eſſe quoque continuè proportionalia.*

Probatur Progreſſ. 1. GF eſt ad FE ex datis, vt FE ad ED. Ergo *componendo* GF, cum FE ad ipſam FE, erit vt FE cum ED ad ED: Igitur *permutando* GF cum FE erit ad EE cum ED, vt FE ad ED.

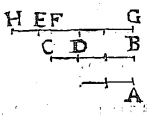
Progreſſ. 2. FE eſt ad ED veluti ED ad DC. Ergo ſimili diſcurſu *componendo* FE, cum ED ad ipſam ED erit in proportione, vt eſt ED cum DC ad DC, & *permutando* FE ſimul cum ED erit ad ED cum CD, vt ED ad DC. Sed hæc proportio ED ad DC eadem eſt ex datis, quę eſt FE ad ED: Ergo ſunt in eadem proportione aggregata GF cum FE, ad FE cum ED. & hoc FE cum ED ad ED cum DC, cum habeant eam proportionem, quæ eſt FE ad ED; quod erat præſtandum.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si ſint tres magnitudines, & minor terminus, differentiaque à mediocri, & huius differentiæ, differentia à maiori differentia ſint continuè proportionales, ipſi quoque termini erunt continuè proportionales.

SInt tres quantitates A, & BC, & CH, minorq; differentia CD, & hæc conferatur cum differentia maiori HF, & differat quantitate EF; ſintq; continuè proportionales EF, & CD, & A. *Dico ipſas quantitates* HG, & CB, & A *futuras eſſe continuè proportionales.*

Probatur. Ponitur differentia CD reſpicere minorem terminum A, vt EF differentia differentiæ reſpicit ipſam differentiam CD. Ergo *componendo* CD cum A, ideſt CB erit ad A, veluti EF cum CD ideſt HF, eſt ad CD: Quãobrem etiam *permutando* CB erit ad HF fundamẽta veluti A reſpicit CD termini. Quapropter rurſus *componendo* medius terminus CB, cum HF maiori differentia hoc eſt terminus maximus HG, erit ad CB, vt proportionem dicit terminus A cum differentia CD, hoc eſt CB terminus medius ad ipſum A terminum primum, quod erat probandum.



COROLLARIVM I.

COlligitur propoſ. conuerſa. Nam ſi quantitates A & BC, & GH fuerint continuè proportionales etiam differentia differentiæ maioris à minori, minor differentia, & primus terminus minor erunt continuè proportionales.

COROLLARIVM II.

QVod ſi differentia differentiæ EF differentia CD, & terminus primus minimus DA ſimul addantur, quod erunt continuè proportionales, patet ex prima huius.

THEOR. V. PROPOS. V.

Differentia differentiæ maioris, à minore ipſa differentia maior, & terminus maximus in quantitatibus continuè proportionalibus ſunt continuè proportionales.

SInt quantitates, vt in præced. figura continuè proportionales A, BC, & GH, & differentia EF differentiæ maioris HF à minori CM, & terminus maximus HG. *Dico eſſe continuè proportionales* EF, & HF, & HG.



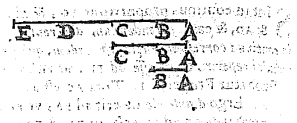
Probatur ex primâ huius, vt differentia HF ad differentiam CD, talis quoque eſt proportio termini HG ad terminum CB: quare *dividendo*, vt HF reſiduum eſt ad CB ablatum, ideſt FG æqualem. Sic EF reſiduum ad differentiam CD, vel æqualem HE; Ergo *componendo*, vt HF cum FG, quæ eſt maior terminus ad HF maiorem differentiam. Sic erit EF cum HE, quæ eſt HE maior differentia ad ER differentiam differentiæ.

THEOR. VI. PROP. VI.

Si ſint tres quantitates continuè proportionales, & maiori termino bis medius, ſemel vltimus aggregetur; Mediocri verò ſemel vltimus, erunt hæc aggregata, cum vltimo termino in continua proportione.

SInt tres quantitates continuè proportionales AB, & BC, & CD. Dico, quod ſi ſumantur omnes ſimul, & addatur BD æqualis medio termino; deinde ſumatur medius terminus ſemel cum minimo, & ſit CA, & tandem minimus, *quod omnes adhuc erunt continuè proportionales, & ita erit* BA *ad* CA, vt CA *ad* AE.

Probatur. Quoniam ponuntur continuè proportionales DC, & CB. & BA. Si arguatur à *compoſitione* rationum erit DC cum CB, ad CB in eadem proportione, ac CB cum BA ad BA. Ergo *permutando* erit DC cum CB linea proportionata ad CB cum BA, veluti eſt CB ad BA: Rurſuſque *componendo* erit DC cum CB, & CB cum BA ſimul, hoc eſt EA ad CB cum BA hoc eſt CA, vt CB cum BA, hoc eſt CA ad BA.



Itaque omnes termini BA, CB, & DC, & inſuper iterum medius CB, vel æqualis ED ad medium CB cum primo BA habent eandem proportionem, qui ipſe medius CB cum primo BA habet ad ipſum primum BA, quod erat oſtendendum.

EXPENSIO III.

De ſerie linearum proportionalium inuicem comparatarum.

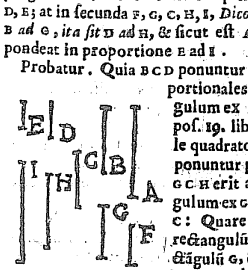
VIſis proprietatibus differentiarum, ſimulque aggregatorum proportionalium terminorum, reſtat contemplari ſeries linearum ad inuicem comparatas, & maximè earum, quæ ab eodem principio enaſcuntur: hæc enim cognitio in primis deſeruit ad inueniendas areas Parabolarum, & Ellipſium, corporibuſque ſolidis, vt plurimùm dimetiendis.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si ſint duæ ſeries linearum proportionalium, & perueniant ad eundem terminum, etiam ſi ſequantur, termini ſequentes vnius ſeriei ad terminos alterius erunt, vt antecedentes, dummodò in eadem remotione à communi termino ſummantur.

SInt ABC ſeries vna decreſcens, FGC creſcens, & terminus communis C, & ſequantur in ſuâ progreſſione, & fiant termini in prima ſerie A, B, C, D, E; at in ſecunda F, G, C, H, I, *Dico, quod ſicut eſt* B *ad* G, *ita ſit* D *ad* H, & ſicut eſt A ad F, ſic reſpondeat in proportione E ad I.

Probatur. Quia BCD ponuntur continuè proportionales erit rectangulum ex B, & D ex propoſ. 19. lib. 6. elem æquale quadrato ex C facto: ſic ponuntur proportionales GCH erit æquale rectangulum ex C, & H quadrato C: Quare erunt æqualia rectangulũ ex H, & D, & rectãgulũ G, & I: habebunt itaque reciprocè latera ex



10. lib. 6. proportionalia, & ita erit B ad G, vt H ad D.

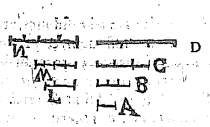
Similiter

Similiter A, B, C, D, E ſunt continuè proportionales: Ergo erunt ex *æquo* AEE continuè proportionales: Vnde vt prius rectangulum ex AE erit æquale quadrato C. Pariterque ECI ex *æquo* erunt continuè proportionales; quapropter rectangulum ex F, & I erit æquale quadrato ex C. Vnde rectangula ipſa inuicem erunt æqualia, vtpote equalia vni tertio, & hinc etiam latera ex 10. lib. 6. elem. erunt reciprocè proportionalia, & A erit ad F, vt I ad E.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

Si ſint duo ordines continuè proportionalium incipientes ab eodem termino. Tertij termini primo incluſo erunt in duplicata ratione ſecundorum ad inuicem, & quarti in triplicata, & quinti in quadruplicata, & ſic in infinitum.

QVoniam ABC, & ALM ſunt continuè proportionales erunt quadrata ex A, & C æqualia quadrato B, & ex A, & M æquale quadrato ex L: ſed quadrata ipſa ſunt ex 21. lib. 6. Eucl. in duplicata ratione ſuorum laterum: Ergo etiam rectangula illis quadratis æqualia: Sed rectangula, vtpote eiuſdem altitudinis A ſunt inuicem, vt baſes C, & M, ergo C, & M erunt in duplicata ratione linearum B ad L.

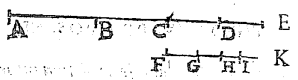


Lineæ verò quartæ erunt in triplicata: Nam quadrata ex C, & M ſunt in duplicata ratione ſuorum laterum, quibus æquatur quadrato quidem C rectangulum ex B, & D, & quadrato ex M rectangulum ex L, N: quare inuicem ea rectangula erunt vt quadrata: ſed quadrata ex C, & M obtinent proportionem duplicatam laterum C ad M, quæ latera dicunt proportionem duplicatam reſpectu B ad L, ergo quadrata predicta ex C, & N habebunt proportionem quadruplicatam eius, quæ eſt B ad L. Quamobrem rectangula quoque ex B, & D, & ex L, & N æqualia quadratis conſequentur rationem quadruplicatam linearum B ad L; ſed proportio rectangulorum eſt compoſita ex proportione laterum B ad L, & D ad N. Tolle itaque proportionem B ad L, cui erat quadruplicata, & remanebit proportio linearum D, N triplicata eius, quæ eſt B ad L; & ſic concludes de alijs.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Series compoſita, ex paribus numero terminis ad aliam ex tot terminis conflatam, & in eadem proportione continuatam habet eandem multiplicatam proportionem, quæ ex terminis conflatur.

SInt duæ ſeries quantitatum in eadem proportione, ſed pari numero terminorum conſtantes AE, & FK V. g. quatuor, ita vt ſit AB ad BC, & hic ad CD, & hic ad DE, & hic ad FG in eadem proportione. *Dico, quod tota ſeries, ſeu quantitas* AE *ad quantitatem* FK *habet proportionem quadruplicatam vnius termini ad alium puta* AB *ad* BC.

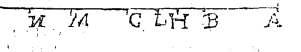


Probatur quilibet terminus obtinet proportionem quadruplicatam ad quemlibet terminum alterius ſeriei, & AB huius ad FG alterius quadruplicatam proportionem habet eius ex def. 7. Tract. 9. quæ eſt AB ad BC, quia per quatuor terminos AB, & BC, & CD, & DE vſque ad FG continuatur. Idem dicas de termino BC reſpectu termini alterius ſeriei GH & ſic de alijs: Quare omnes antecedentes termini in AE, qui conſtituunt A E ad omnes conſequentes in FK, nempe KF habebunt proportionem quadruplicatam quoque cum vnus antecedentium AB ad alterum conſequentium FG talem conſequatur proportionem, vt patet ex propoſ. 17. lib. 5. elem.

PROBL. I. PROP. X.

Duas ſeries ſimilium proportionalium datis tribus terminis continuè proportionalibus exhibere.

SInt diſponendæ duæ ſeries continuè proportionalium, & dentur tres termini AB, & AC, & CD: Inueniatur inter AB, & AC, media proportionalis AH, & inter AC, & AH media proportionalis AL, & ſic ſemper fiat, & erit inuenta vna ſeries. Rurſus inter AC, & CD media proiciatur AM, & inter AM, & AD media proiciatur AN, & ſic ſemper fiat. Dico, *quod hæ duæ ſeries inuentæ erunt ſimiles, & quilibet terminus erit ad alium terminum ſimilis; ac quilibet terminus eiuſdem ſeriei erit ad alium ſibi correſpondentem.*



Probatur. Quoniam inter continuas proportionales AB, & AC, & AD medias proiecimus HA, AM erunt omnes in continuâ proportione: Quare ex prima huius etiam differentiæ erunt in cõtinua eadem proportione MC, & MD: HB, & CH.

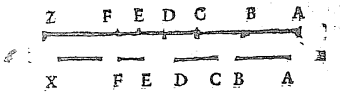
Progreſſ. 2. Et quia inter AH, & AC eſt media proportionalis AL, erunt AH, & AL, & AC continuè proportionales, ſicut, & AM, & AN, & AD, quod NA ſit media, tales erunt, & ideo ex L. huius etiam differentiæ erunt in eadem proportione, & HL erit ad LC, vt AL ad AC; Et pariter MN erit ND, vt AN ad DA, quæ eſt eadem, quæ AL ad AC, ex Theſi quod ſint mediæ proportionales AL, & AM inter ſimiles proportiones AH, & AC atque inter AM, & AD: Vnde, & differentiarum proportiones erunt ſimiles, eritque HL ad LC, vt MN ad ND.

Progreſſ. 3. Et quia ex primo progr. eſt HB ad HC; vt CM ad MD. Erit quoque *componendo* BH cum HC, ideſt BC ad ipſam HC, vt CM cum MD ideſt CD ad ipſam DM.

Progress. 4. Sle quia est ex 2. progr. HL ad LC, vt MN ad ND, erit componendo HL cum LC, ideſt HC ad LC, vt MN cum DN ideſt MD ad ND: Vnde erit BC ad CH veluti CD ad DM ex 3. progr. & ex 4. progr. CH ad CL, vt MD ad DN, & ſic conſequenter, ſi alij termini adſint.

THEOR. IV. PROPOS. XI.

Si ab aliqua data ſerie deſumantur alternè termini, & fiat ſeries, hæc ſeries ad primum terminum duplicatam habet rationem eius, quam habebat data ſeries ad ſuum primum terminum.



SIt A Z data ſeries, à qua deſumantur alternè termini intermedio ſemper relicto vt AB, CD, & EF, & cæt. & fiat ſeries AX. Dico ſeriem AX eſſe ad primum terminum AB in duplicata ratione AZ ad AB.

Prob. AB eſt ad BC, vt BC ad CD, ergo ex æquo AB erit ad CD in duplicata ratione eius, quæ eſt AB ad BC, ſed, vt AB ad CD, ex 9. prop. h. ita eſt AX ad CX, cũ ille ſeries AX, & CX ob duplicãdam eandem rationẽ ſint quoq; cõtinuè proportionales, ergo AX da CX duplicatã habet rationẽ AB ad BC, ſed vt AB ad BC, ita ex propoſ. 9. huius eſt AZ ſeries ad BZ ſeriem: ergo AX ſeries ad CX ſeriem duplicatam habet rationem ſeriei ZA ad ſeriem ZB, ergo p *conuerſionem* rationis erit quoque AX totum ad compartem AB, & primum terminum in duplicata ratione eius, quæ eſt totius AZ ad compartem AB, & primum terminum.

EXPENSIO IV.

De progreſſionis termino.

MOdo conſideramus progreſſiones linearum in partibus ſuis, ſed quatenus finitæ ſunt, & eſt vtiliſſima conſideratio maximè ad quadrandas ſuperficies Ellipticas, & Parabolicas, & huiuſmodi.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Si in aliqua finita quantitate fuerit pars aſſignata in proportione ad reſiduum, vt pars reſidui in proportione eadem ad remanens aliud reſiduum; hæ partes in quantitate finita in infinitum multiplicari poſſunt.

SIt data magnitudo AC, & ſit in ea pars IC ad reſiduum ſuum IA, vt pars huius reſidui EI eſt ad ſuum reſiduum EA. Dico, *quod in infinitum in quantitate* GA *iſtæ partes poterunt multiplicari*: fiat GI ad IE ſic IE ad K.

Prob. Pr. 1. Quoniam itaque eſt IE ad reſiduum EA, vt IE pars reſidui ad id, quod hinc reſtat EA; Erit quoq; *permutando* pars GI ad IE partem, nempe IE ad K ex conſtructione, veluti reſiduum IA ad aliud reſiduum EA. Quare rurſus *permutando* erit IE ad AI, vt K ad AE; Verũ IE eſt minor, quàm IA. Ergo ex propoſ. 12. lib. 5. elem. etiam K erit minor quam EA. Vnde ex EA poterit ſumi æqualis ED: Eruntque GI, & IE, & ED tres continuè proportionales: Sicut ex effectione erant IG, & IE, & K, & pariter erit IE ad IA, vt ED æqualis ipſi K ad EA, vt oſtenſum eſt.



Progr. 2. Quoniã itaq; eſt IE ad IA, vt ED ad EA erit quoq; *dinidendo* IE ad EA, veluti ED ad DA. Quare ſi inueniatur duabus IE, & ED tertia proportionalis L idem argumentum, quod ſupra iterabis. Nam, quia eſt pars IE ad reſiduum EA, vt pars ED ipſius reſidui ad reſiduum aliud DA, erit *permutando* IE pars ad ED partem, ideſt ex effectione ED ad L, vt reſiduum EA ad aliud DA, & rurſus permutando ED ad AE proportione reſpondebit, vt L ad DA. Verum ED eſt minor, quàm EA, vt dictum eſt. Ergo etiam L minor erit, quàm DA: Vnde ex DA poterit abſcindi DC æqualis ipſi L, & ſic in infinitum continuari.

COROLLARIVM.

QVod ſi fuerit pars ad reſiduum, vt huius pars ad ſecundum reſiduum, & proportio partis ad partem continuetur; continuabitur etiam proportio partium quarumcumque inuentarum ad ſua reſidua V. g. quòd ſi ED ſit tertia proportionalis tribus GI, IE, & ED, erit etiam IE ad EA in eadem proportione, vt ED ad DA: quia oſtenſum eſt in 2. progr. quando argumentati ſumus ex *diuiſione rationis* IE eſſe ad EA, vt ED ad DA.

Et idem dicas de parte DC: Nam; quia vt in fine 2. prog. oſtenſum eſt ED eſt ad EA, vt L, vel DC ad DA, ergo *dinidendo* ED erit ad DA, vt DC ad CA, & ſic continuè.

COROLLARIVM II.

HInc eſt; quod ſi linea, vel magnitudo aliqua proportionali aliquo decreſcente creſcat augmento, quod illæ partes decreſcentes in infinitum poterunt in ea multiplicari. Nam in linea AG. Quia GI eſt ad IA, vt IE ad EA, erit etiam permutando GI ad IE, vt IA ad EA. Ponitur quoq; IE ad EA, vt ED ad DA ex effectione, ergo permutando erit IE ad ED, vt EA ad DA. Quia ergo eſt GI ad IE, vt IA ad EA. Et IE ad ED, vt EA ad DA. Ergo erunt GI, & IE, & ED partes continuæ proportionales, vt reſidui IA, EA; & DA; & ideo ex præc. in infinitum procedent.

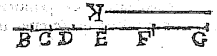
THEOR. II. PROP. XIII.

Si proportio maioris inæqualitatis continuetur magnitudo vltrà omnem datam magnitudinem augetur.

SIt data proportio CB ad BD, & aſſignata quantitas K. Dico, quòd ſi hæc proportio continuetur

nuetur; quantitatem illam maiorem quantitate K quantumlibet magnã euaſuram.

Probatur. Differentia DC replicata multoties, certum eſt, quod tandem ſuperabit quantitatem K. Sed Additiones, quæ ipſi DB accreſcunt, ex proſecutione, & continuatione CB ad DB proportionis, ſunt maiores ſingulæ; quàm DC. Ergo continuatæ toties, quoties replicata eſt quantitas DC ſuperabunt ipſam K.



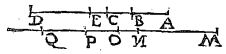
Quod autem differentiæ, ſeu additiones DC, & ED, & EF, & cæt. ſint maiores; quam DC; patet ex prima huius. Nam ſunt in eadem proportione, ac termini. Quadere, vt eſt DB ad BE termini; ſic differentiæ DC ad DE; ſed maior eſt BE, quàm DB, Ergo ex propoſ. 12. lib. 5. elem. etiam ED, quam DC maior erit.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si à quantitate aliqua partes auferantur, vt ſit prima pars ad ſuum reſiduum, vt pars ipſius reſidui ad reſiduum ſuum; fiet tandem reſiduum datâ quacumque quantitate minus.

SIt quantitas AD V. g. linea, ex quâ auferatur quantitas, & pars AB, & à reſiduo BD pars BC: ita quòd ſit AB ad BD, vt BC ad CD. Dico, *quod ſi hoc continuè fiat, relinqui tandem partem, qua libeat aſſignata* MN *minorem*.

Sit quantitas MN data, & reperiatur alia NO, cui ſit MN, vt reſiduum BD eſt ad totam AD, & continuetur hæc proportio, donec euadat maior in Q, quam AD; hoc enim eueniet aliquando ex præced. Deinde in ratione prædicta partis ad reſiduum diuidatur toties AD, quoties MQ diuiſa eſt, hoc enim poterit fieri in infinitum ex 12. huius.



Progreſſ. 1. Quoniam MN, & MO, & MP, & MQ ſunt continuè proportionales, erit MN ad MO, vt MP ad MQ; ſed ex effectione MN eſt ad MO, vt reſiduum BD eſt ad AD. Igitur MP erit ad MQ, vt DB ad AD. Et ideo *inuertendo* QM erit ad MP, vt AD ad DB.

Progr. 2. Rurſus *permutando* MQ erit ad AD, vt MP ad DB: ſed ex effectione MQ maior eſt, quam AD: Ergo etiam MP maior erit, quam BD.

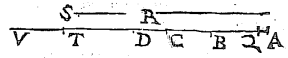
Progreſſ. 3. Deinde quia eſt AB ad BD, vt BC ad CD erit quoque *componendo* AB cum BD ideſt AD ad BD; vt BC cum CD, ideſt BD ad CD; ideoque proportio AD erit ad BD, vt BD ad AD, & etiam erit, vt MQ ad MP eadem, quæ eſt AD ad BD, vt dixi Progr. 1. & ex effectione MQ ad MP, eſt veluti MP ad MO: Quare cum ſit BD ad CD, vt PM ad MO, erit quoque permutando BD ad PM, vt CD ad MO: Sed maior eſt MP ex probatis, quàm BD. Ergo maior quoque erit MO, quam CD.

Idem autem oſtendes de MN reſpectu ED: quare erit maior MN data quantitas; quam ED, quod erat oſtendendum.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Si fuerit propoſita talis quantitatum ſeries, vt quilibet ablatus terminus ab aliqua alia ſit ad eius reliquum, vt ſequens terminus à reliquo ablatus ad id, quod denuò remanet; erit illa alia quantitas æqualis toti ſeriei infinitæ terminorum propoſitæ.

SIt ſeries infinita terminorum propoſita AB, BC, CD, & cæt. qui auferantur à quantitate AV; & quilibet V. g. AB relinquat reſiduum BV, ad quod ſit AB, vt BC alius terminus ablatus à reſiduo eſt ad reliquum ſuum CV. Dico; *quòd hæc quantitas* AV *æquat totam ſeriem*.



Probatur non erit maior tota ſerie; ſed nec minor: Ergo totam ſeriem æquabit.

Quod non ſit minor, patet ex 11. propoſ. Quia tota ſeries poterit intra ipſam continuari in infinitum; ita quòd numquam perueniatur ad V: Ergo quantitas AV minor non erit ſerie terminorum infinita.

Quod verò non ſit maior oſtenditur: nam ſi eſſet maior aliquo exceſſu eſſet maior. Sit is TV, & continuetur proportio AB ad BC in linea AV; donec ſit minor pars reſidua, quam TV, quod ex propoſ. præc. fieri poteſt: cum ergo ſeries infinita ſuperet AT: Ergo AV non ſuperat ſeriem terminorum omnem quantitate TV; ſed minore, cùm iam continuata minus relinquat, quam TV contrà hypotheſim; & ſemper idem argumentum vrgebit: Ergo quantitas AV nulla aſſignabili quantitate excedet infinitam ſeriem: ſed nec ea minor eſt: Ergo illam æquat, quod erat oſtendendum.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Datâ ſerie infinitâ terminorum per eandem proportionem procedentium, & primâ differentiâ inuenire mægnitudinem, ſumæ omnium terminorum æqualem.

SIt ſeries infinita AB, & BC, & CD, & cæt. & differentia maioris termini à ſequenti BC, ſit AZ, & fiat differentia AZ ad primum terminum AB, vt AB ad aliud & inueniatur AV: ex prop. 14. L. 6. elem. Dico *lineam* AV *toti magnitudini infinitæ terminorum æqualem eſſe*.

Probatur. Quoniam ex conſtructione AZ differentia eſt ad AB primum terminum, vt terminus AB ad quantitatẽ AV. Etiam *dinidendo* AZ erit ad BZ, eſt AB ad VB. Idoque *componendo* AZ cum BZ ad BZ, vt AB cum AV ad BV, hoc eſt AB erit ad BZ æqualem BC, vt AV ad BV.

Rurſuſque *permutando* AB erit ad AV, vt BZ idem terminus, qui BC ex effectione ad BV. Quare *dinidendo* AB erit ad BV, vt BZ, vel BC ad CV. Quare ex præced. AV æquabit totam ſeriem datorum terminorum.

CO-

COROLLARIVM I.

HInc est, quòd, si fuerit AB ad AV, vt BC ad BV; quod AV æquabit totam seriem in finitorum terminorum. Item si fuerit AB ad BC, vt AV ad BV, vel BV ad CV: erit enim *permutando*, vt priùs AB ad AV, vt BC ad BV. Quare, & *diuidendo* AB erit ad BV BC ad CV.

Item si AV, BV, & CV, sint continuè proportionales, quoniam *diuidendo* erit AB ad BV, vt BC ad CV. Quare semper quantitas AV æquabit infinitam terminorum seriem.

COROLLARIVM II.

HInc quoque educitur, quod cum sit AB ad BC, vt AV ad BV, & AV contineat omnes antecedentes alicuius seriei, & BV omnes consequentes, licet in infinitum procedentes; quod tota collectio infinitorum antecedentium ad collectionem infinitorum consequentium erit, vt vnum antecedens ad vnum consequens.

COROLLARIVM III.

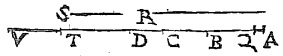
DEducitur quoque differentiam maioris termini à minore, & maiorem terminum, & totam collectionem terminorum esse in continuâ analogiâ: siquidem fecimus, vt AZ differentia ad AB primum terminum; sic AB ad aliud; & inuenimus totam collectionem terminorum infinitorum AV.

PROB. II. PROPOS. XVII.

Datam magnitudinem iuxta proportionem datam, ita diuidere; vt progressio secundum eandem seriem continuata terminetur in punctum destinatum.

SIt data proportio R ad S, & secundùm hanc proportionem sit diuidenda AV, vt progressio terminorum finiat in V.

Diuidatur taliter AV, vt proportio AB ad BV sit ea, quam habet R ad S ex prop. 13. Cor. 6. Elem. deinde iuxta proportionem AV ad BV, sic fiat AB ad BC, & erit factum id, quod desiderabatur.

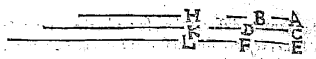


Probatur. Vt AV ad BV; sic est AB ad BC. Ergo etiam ex propos 22. lib. 5. Reliquum VB erit ad reliquum VC, vt AB ad BC. Vnde ex propos. 16. huius, terminus progressionis est V, hæc autem progressio ex effectione est vt R ad S.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Datis pluribus rationum progressionibus inuenire quantitatem, quæ omnes adæquet.

SInt datæ tres proportionũ AB, & CD, & FE series & ex 16. h. inueniantur tres quantitates, quę illas adæquent H, K, L, & hæ quantitates in vnam

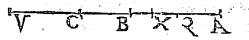


summam redigantur, eritque factum, quòd exoptatur.

Patet. Nam, cùm quælibet quantitas vt H æquet suam seriem V. g. proportionis A ad B, sicut K seriem proportionis C ad D, & tandem L seriem proportionis F ad E; si simul colligantur eas omnes series propositas tota æquabit.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Datam magnitudinem, ita secare, vt duplicis seriei idem sit terminus.



SIt AV quantitas; & secetur in B; vt AB sit ad BV, vt BC ad CV ex propos. 15. lib. 6. Elem: Rursusque secetur in Z, & fiat, vt AZ ad ZV; ita ZX ad XV, & ex propos. 15. harum duarum proportionum erit idem terminus V. Quod patet ex constructione ipsa.



TRACTATVS XVI.

PARS SECVNDA.

De Linearum Progressionibus Harmonicis.

Lij antecedentes Tractatus à diuersis Auctoribus selecti sunt, aliqui etiam multa additione cumulati, & omnes aliqua saltem propositione, aut ostensione adaucti: hic Tractatus omnino meus. Licet; vt nostri instituti est plurimis intermissis in compendium redactus.

EXPENSIO I.

De progressionis Harmonicæ continuatione.

DOcuimus supra datis duabus lineis, vel interferere lineam mediam harmonicè proportionalem; sicut, & extremas inuenire: Modo docendum est eas continuare, & in plures terminos propagare, & priùs declarationes dictionum nonnullarum oportet precedere,

DEFINITIO I.

CEntrum harmonicum est punctum, in quo plurimæ lineæ conueniunt musicas in proportiones aliquam lineam; vel aliquas lineas diuidentes.

Sic N in fig. sequenti erit centrum, si lineę NO, & NP diuidant AB in partes proportionales.

DEFINITIO II.

LInea intercepta vocatur, quæ inter centrum, & primæ lineæ harmonicè diuisæ extremum intercipitur.

Sic NB erit intercepta inter AB lineam harmonicè diuisam, & N centrum.

DEFINITIO III.

BAses æquales triangulorum sunt partes æquales cuiusdam lineæ interceptæ parallelæ, quæ radios terminant.

DEFINITIO IV.

RAdij harmonici sunt lineæ quædam, quæ à centro eodem discedentes in bases æquales terminant, & lineam aliquam, vel aliquas harmonicè diuidunt.

Lineæ itaque, quæ bases æquales vocantur sunt vt AO, & OP, & cæt. quæ radios NO, & NP, & cæt. recipiũt. Si ergo lineam aliquam V. g. AB in partes harmonicè proportionales diuidant, illi radij vocabuntur radij harmonici.

PROBL. I. PROPOS. I.

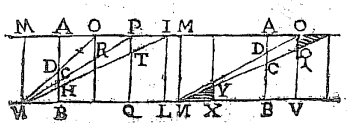
Datam lineam ita secare, vt singulæ partes successiuè proportionem musicam obtineant.

SIt AB diuidenda in partes musicè continuè proportionales ita, quòd sit BC, BD, BA in proportione musicâ sicut etiam sunt BH, & BC, & BD, & sic succesiuè. Ducantur duę parallelę per vertices AB, quæ sint MI, & NL, & à puncto A sumpta qualibet parte MA, singulæ fiant æquales in infinitum AO, OP, & PI. Sicut, & NB, iunctisque punctis N, & M à puncto N, ducantur rectæ NO, & NP, & IN in infinitum. Dico, *has partes, quas ductæ in linea* AB *designant esse musica proportione singulæ toti correspondentes*, & BH, & BC, & BD, & BA esse musicè proportionales.

Aduerteq; quod non est necesse, parallelas MI, NL esse perpendiculares ipsi AB; sed ad quemcunque angulum.

* Probatur ea est proportio musica, quàm proportione Geometricâ, ita est primus terminus ad vltimum, vt differentia ad differentiam. Sed CE est ad BA; vt differentia CD ad differentiam DA. Ergo sunt in proportione musicâ.

Probatur verò assumptum: Ita est CB ad BQ, ideſt æqualem BA, vt OR ad MN, ideſt BA ob triangu-



lorum similitudinem MBP, & NPQ. Quare RO, & CB erunt ex propos. 9. lib. 5. æquales: Cùm itaque sit ob parallelismum linearum OR ad DC, vt NO ad DN, & vt NO ad DN, sic MN ad DA; erit etiam OR, ideſt BC ad DC, *vt* MN hoc est BA ad DA: Quare *permutando* erit quoq; terminus BC ad BA totum, vt DC differentia ad DA differentiam.

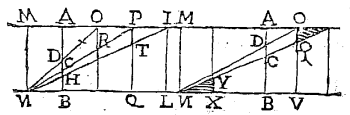
Idem ostendemus de tribus BH, & BC, & BD, quod sit BH ad BD termini extremi, vt CH ad CD differentiæ. Nam BH æquatur ipsi PT ob triangulorum PTI, & NHB in angulis ob parallelas æqualitatem, & æquales bases NB, & PI ex hypothesi: Quare erit, vt CH ad PT, vel BH; sic NC ad NP; sed NC æquatur ipsi RP: Ergo sicut RP ad NP, sic CH ad PT: sed vt RP ad PN sic RO ad MN. Ergo ex 9. lib. 5, RO erit in proportione ad NM, vt CH ad PT, vel æquali BH, ideſt, quæ CB ad BA, vt suprà diximus. Sed OB ad NM, ideſt CB ad BA habent eam proportionem ex ostensis, quam DC ad DA; hoc est DB ob similitudinem triangulorum DAO, & NBB: Ergo CH ad PT, ideſt BH, vt suprà dixi est, vt DC ad BD: Quare permutando CH erit ad DC differentiæ BH ad BD termini. Quòd si ND non sit æqualis reliquis AO, & OP, sed quælibet, vel irrationalis, probl. tamen ostendetur præsupponendo tamen AO, & OP æquales, vnde ex 4. lib. 6. Coroll. etiam CQ, & QP ob similitudinem triangulorum ex parallelis ortum erunt æquales.

Quoniam ita est DA ad NM, vt AO ad OM, & OD ad ON, & ideo, vt QC ad QN. Fiat NX æqualis OP, & ducatur XY. Erit igitur YX ad QV, vt NY, quæ æquatur ipsi QP, & ideo ipsi CQ, est ad NQ. Quod enim NY sit æqualis ipsi QP: patet: Quia ob parallelas triangula NYX, & OQP sunt æqualia in angulis, imo etiam in lateribus ex eo, quia fecimus NX æqualē OP: vnde, & cætera crura vnius, alterius cruribus erunt æqualia. Cùm itaque sit YX hoc est QC ad QV, vt NY, ideſt QP, & ideo CQ ad NQ, & QC ad VQ, vt CD ad CB. ex propoſ. 4 Elem. Coroll. Ergo DC erit *ex æquo* ad CB, vt CQ ad NQ, ideoq; ex *æquo* rursùs, vt DA ad MN. Cum ergo sit DC ad CB, vt DA ad MN erit *permutando* DC ad DA, vt CB ad MN, ideſt æqualem AB, nempe, vt differentia DC ad differentiam DA, sic erit terminus BC extremus ad terminum extremum BA.

PROBL. II. PROPOS. II.

* *Plurimas lineas in infinitum inuenire, quæ proportione Muſicâ decreſcant, vel accreſcant.*

Fiat eadem operatio, quæ priùs, & vtere eadem fig. & dico NM, DA, OB, PT *continua proportione muſica decreſcere.*



* Probatur. Similitudo enim triangulorum efficit; vt PT æquetur ipsi BH; sunt enim similia triangula NHB, & PTI ob angulos ob parallelissmum linearum æquales. Sic OB. æquatur ipsi CB. Sic DA ipsi BD; sed BH, & BC, & BD, & BA sunt in proportione muſicâ, vt ostendimus. Ergo etiam PT, & OB, & DA, & MN, erunt in proportione muſicâ.

Sit deinde data PT, cui plurimas in proportione muſicâ respondentes volumus inuenire. Ducatur ad eius extremum P linea MI, & assumpta in ea placita parte PI in reliqua numerantur partes quotquot voluntas erit ei GI æquales, vt PO, & OA & AM; erigunturque MN, AD, OB parallelæ ipsi PT a punctis M, A, O, & ducetur ab I per T extremum datæ rectæ, quæ illam secet in N, & à puncto N rectæ ad singula puncta ducantur A, O, P; Eruntque segmenta intercepta NM, DA, OB, & PT muſicè continuè proportionales; patet ex præcedenti.

THEOR. I. PROP. III.

* *Linea diuiſa ſucceſſiuè; ſecundum proportionem muſicam erit diuiſa in partes ſucceſſiuæ denominationis.*

Sit ligea AB diuiſa in partes Harmonicè proportionales DB, & CB, & HB. Dico *eam esse diuisam in partes ſucceſſiuè denominationis* V. g. primo in duas, secundo in tres, tertio in quatuor; ita vt primus terminus sit tota, secundus dimidia, tertius tertia pars, quartus quarta, & cæt.

Aduerte tamen, quòd non intendimus probare quod necessariò ordo incipiat à dimidia, cum possit incipere à qualibet alia denominatione V. g. à quarta, seu quinta parte, seu etiam irrationalis omninò sit; nec possit subire denominationem aliquam series harmonica.

* Probatur autem ita est DA ad MN, vt AO ad OM ob parallelas ex 4. propoſ. lib. 6. Elem. sed AO est dimidium OM ex effectione. Ergo, & DA erit medietas lineæ AB. Sic CB erit tertia pars lineæ totius AB.

Prob. autem; quia OB est ad PQ, vel AB, vt NB ad NQ; sed NB ex effectione est tertia pars NQ. Ergo etiam CB taliter erit in proportione geometrica respectu totius AB.

Sic ostendetur de HB quod sit tertia pars totius AB, & sic de reliquis. Quod si AM sit irrationalis respectu AO etiam tota composita MO ad AD irrationalis erit ex propoſ. 10. lib. 10. quare, & omnes MO, MP, & cæt. vtpote ex incommensurabilibus composita magnitudo, vnde DA quoque ad MN incommensurabilis erit, & sic dices de alijs.

COROLLARIVM

Hinc est quod si lineam quamcumque ſucceſſiuè, primò in tres V. g. secundo in quatuor, tertiò in quinque, quartò in sex diuidas, hæ omnes partes erunt muſicè proportionales, eritque tertia pars ad quartam, & hæc ad quintam, & cæt. ſucceſſiuè in proportione Harmonica proportionalis.

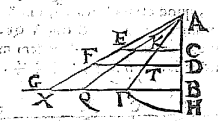
PROBL. III. PROPOS. IV.

* *Datâ lineâ harmonicè ſecta alias quaſcumque in infinitum harmonicè ſimiliter ſecare.*

Sit data recta AB secta in C, & D harmonicè, & oporteat alias similes secare. Ducantur à punctis BCD parallelæ CE, & DF, & BG, mensureturq; super AB prolungatam, ſi necessarium sit, longitudo lineę diuidēdę AH; Facto ergo centro in A interuallo AH portio circuli ducatur HI, & punctum, quo secat BG connectatur cum A centro rectæ AI. Dico AI ſectam esse, vt BA harmonicè in K, & T.

* Pro-

* Probatur. Nam ex Propoſ. 4. lib. 6. vt est AC ad CB, vt AK ad KI, ergo componendo AC est ad AB, vt AK ad KI; quod memoriâ tenendum.



Rursus AC ad AK; sic est AB ad AI; & AD ad AT. Ergo ex 2. 2. l. 5. erit pars CD residua ad partē KT residuam, & pars DB ad partem TI, vt AB ad AI totum, vel vt DA ad AT alterum totum. Cum ergo sit CD ad KT, vt DB ad TI erit etiam *permutando* CD ad DB, vt KT ad TI: Sed CD est ad DB, vt AC ad AB, ex hypothesi: Ergo etiam KT erit ad TI, vt AC ad AB: sed vt AC ad AB, ita est AK ad AI. Ergo erit AK ad AI, sic differentia KT ad differentiam TI: sed etiam ex propoſ. 13. lib. 6. est secta similiter, ac AB, ergo habemus intentum: Sic dices de alijs lineis AQ, & AX, & quibuscumque similibus.

EXPENSIO II.

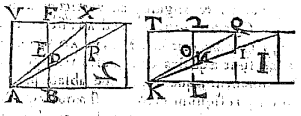
De comparatione vnius ſeriei harmonicæ ad aliam.

Vlla continuatione seriei muſicæ; modo eam alij seriei comparare oportet.

THEOR. I. PROPOS. V.

* *Duæ ſeries Harmonicorum proportionalium baſibus ſuis ſibi inuicem æqualibus ſitæ, & à linea aliquota incipientes; eandem proportionem inuicem ſemper ſeruant.*

Sint duæ series proportionalium Harmonicorum ſecunda BF; & BE, & BD, & AC. Prima LZ, & LO, & LN, & quarum radij cuiuscumque in bases æquales terminent, & primus sit tota linea FF, vel LZ secundus medietas BE, & LO, & sic de reliquis. Dico eam proportionem, quam habet LZ ad BF primus terminus vnius seriei, cum primo termino alterius perpetuò seruari respectu terminorum sequentium ita, vt alter alteri correspondenti sit in eadem proportione, nempe ita erit, vt tota LZ ad totam BF, sic OL ad BE, & LN ad BD, & cæt.



* Prob. Prog. 1. Nam cum QZ sit medietas TZ, & pariter XF sit medietas lineæ XV; ita erit QZ ad QT vt XF ad XV, ideoque ZO ad KT, vt EE ad AV. quare permutando erit OZ; ideſt OL ad EF, vel ED vt KT ad AV. Deinde Pr. 2. vt KO ad KQ, sic est ON ad QI, ideſt æqualem NL, & vt AE ad AX, sic ED ad XP, ideſt æqualē CB, sed vt KO ad KQ sic est AE ad AX, ergo, vt ON ad NL, sic est ED ad DB, vel *conuertendo* NL ad ON vt DB ad ED. Quare erit OZ ad KT, vt EF ad AV ex primo progr. & ON ad NL, vt ED ad DB ex secundo, & ideo permutando OZ ad EF, vt KT ad AV, & ON ad ED, vt NL ad DB.

Cum ergo sit quoque ZO ad KT, ideſt EF ad VA, vt ON ad NL, ideſt ED ad DB, vt demonſtrationis serie dictum est, erit quoque *permutando* ZO ad ON, ideoque EF ad ED, vt KT ad NL, & ideo, vt VA ad DB. Igitur erit permutando, vt KT ad VA, sic NL ad DB.

Quod vt clariùs innotescat faciamus, quòd linea FB sit 48. partium, & linea TK, seu ZL 36. nimirum $\frac{3}{4}$ ipsius FB. In prima ergo diminutione ex propoſ. 3. huius EB erit $\frac{1}{4}$, ideſt 24. & OL $\frac{1}{4}$ ideſt 18. At vero 18 ad 24. seruat proportionem, quam habet tota ad totam, quæ est $\frac{3}{4}$. Sic linea DB erit partiū 16. & NL partiū 12. quia quælibet erit $\frac{1}{4}$ totius, at vero 12. ad 16. est eadē proportio 3. ad 4. &c.

PROBL. I. PROPOS. VI.

* *Seriem proportionis Muſicæ ſimiliter alteri ordini propagare.*

Sit datus ordo primus, & oporteat allum ordinem in data proportione extendere: Fiat primus terminus AB ordinis propagandi maior, vel minor iuxta placitam longitudinem, & tot numero partes cuiuscumque magnitudinis illæ sint inuicem æquales intermedient inter centrum A, & primū terminū BF in hac secunda serie, quot numero intermediant inter centrum K, & terminum primum ZL in primâ serie, & in præced. propoſ. schemate, & deinde ordo consequens terminorum propagetur, vt docuimus propoſ. 2. huius, & erit progressus harmonicus 2. similis proposito primo.

Probatur eodem modo, ac præced. propoſ.

THEOR. II. PROPOS. VII.

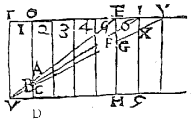
* *Omnes proportiones muſicæ ſimiles ſunt in proportione Geometrica alteri ab vnitate denominatæ, ſi tamen ſint rationales.*

Sit proportionis Muſicæ series AD, & BD, & CD tres termini. Dico tres terminos EH, & FH, & GH esse quoq; muſicè proportionales, & quarumuis alius denominationis; esse tamen geometricè similes præcedentibus.

* Probandum itaque primo tres terminos EH, & FH, & GH esse muſicè proportionales, & hoc ostenditur. Quoniam vt est primus EH ad vltimum GH, sic est differentia EF ad differentiam FG.

In ea proportione est EF ad TV ex 4. prop. lib 6. vt EI ad IT, & IF ad IV, & XG ad XV, vel æquales VC ad VX, sed vt VC ad VX; ita est CD ad XZ. sed CD æquatur IX, sunt enim æquales ob similitudinem triangulorum VCD, & XIV æqualium quoque laterum YI, & VD ex hypothesi. Quare erit VC ad VX, vt IX ad XZ: sed vt XI ad XZ, sic ex Coroll. prop. 4 lib. 6. est FG ad GH. Ergo FG ad GH, erit, vt VC ad VX: sed vt VC ad VX, sic est VB ad IV, vel æquales FI ad IV, & vt FI ad IV, sic est EI ad IT, & EF ad TV. Ergo ex 16 l. 5. el. vt FG ad GH, sic est EF ad TV, ideſt æqualem EH. Vnde *permutando*, vt est FG ad EF differentiæ sic GH ad EH terminos. Vnde cum sit differentia ad differentiam, vt terminus ad

terminum erunt termini EH, & FH, & GH Harmonicè proportionales.



Probatur quoque. Sint alius denominationis, quam ea priùs proposita, quæ denominatur ab vnitate, vt ea in quam diuideretur OD, quæ est tota $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}$. Nam FH primus terminus post totam lineam HE est ad totam HE, vel IZ, vt VF ad VI: sed VF ad VI se habet ex hypothesi, vt 5. ad 6. Ergo etiam secundus terminus HG se habebit ad primum, vt 5. ad 6. Sic tertius terminus CH ad totam se habet, vt VG ad VY; sed VG ad VY se habet, vt 5. ad 7. Ergo etiam CH ad totam HE se habebit, vt 5. ad 7. & sic procedendo quartus erit, vt 5. ad 8. vnde series erit tota $\frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}$, &c.

Probatur tãdem, quod sint in eadem proportione Geometrica cum serie, quæ denominatur ab vno. Nam ex Coroll. prop. 4. lib. 6. vt differentia AB ad differentiam BC, sic EF ad FG, differentiæ quoq; alius seriei, & vt CA ad CD, sic EG ad GH. Quare *componendo* AC cum CD ideſt AD terminus maior ad CD minorem, sic EG cum GH, ideſt EH terminus maior in alia serie ad GH terminum minorem. Patet etiam, quia $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{6}$ ex *Tract. 13. Coroll. prop. 27.* se habent, vt 1. ad 5. & sic $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$ habent 1. ad 5. & sic semper eodem modo se habet.

PROBL. II. PROPOS. VIII.

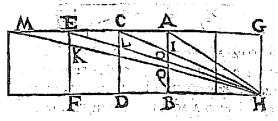
Series Harmonicas proportionalium reperire datæ denominationis in aliqua linea.

SIt Schema præcedens, & velimus reperire proportionem harmonicam in data linea EH, quæ se habeat ad aliam in eadem linea continuatam, vt 1. ad 5. Per extremum E ducatur linea TI, & quinque æquales partes, vt EI numerentur ab E versus T; erigaturque TV æqualis datæ EH. Deinde rursus in alteram partem portiones primis æquales numerentur, quantùm placet, vt EI, & IV, & cæt. ducanturque ab V rectæ, vt VI, & VY, & cæt. nam diuident lineam EH in partes, quæ ad aliam seriem datam, in quam diuisa est OD erunt singuli termini, vt 1. ad 5. Patet ex præced. ostensione.

PROBL. III. PROPOS. IX.

* *Series harmonicas proportionalium reperire iuxta datam proportionem in pluribus lineis.*

SInt reperiendæ plures lineæ, quæ dicant inuicem proportionem harmonicam, & sint ad alias proportionem harmonicam dicentes vt 3. ad 1. fiant lineæ parallelæ AB; CD, & EF, & æquali distent interuallo, & recta coniungantur A, E puncta, & erunt æquales AC, & CE. Sumantur ergo in AC duæ partes æquales ipsi AC, & ducatur parallela GH ipsi AB. Deinde per B recta parallela ipsi GE ducatur, quæ cum GH conueniet in H: Ab H ergo ad C, & E; & cæt. radij ducantur, & ex præc. AB erit diuisa in terminos harmonicos iuxta datam proportionem, ita vt AB tota $\frac{3}{3}$ IB $\frac{3}{2}$ OB $\frac{3}{1}$ QB $\frac{3}{0}$, & se habebunt ad aliam $\frac{3}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{5}\ \frac{3}{6}$, vt 2. ad 1. modo dico, quod etiam lineæ AI, CL, & EK sunt in eadem proportione ac IB, & OB, & QB. Vnde se habebunt ad seriem $\frac{3}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{5}\ \frac{3}{6}$ eodem modo ac 3. ad 1, cum, & etiam ipsi sint $2\frac{3}{3}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{1}\ \frac{3}{0}$.



Probatur triangulum HIB esse æquiangulum triangulo AIC, ob angulos C, & H inter parallelas alternos, & angulos apud I ad verticem. Quare erit ex 4. lib. sexti AC ad AI, vt HB ad IB, & *permutando* AC ad HB, vt AI ad IB. Rursus HOB triangulum est æquiangulum triangulo CLB ob eandem rationem. Quare similiter arguendo ex 4. l. sexti & *permutando* CA erit ad HB, vt CL ad OB. Rursusque triangulum HQB est æquiangulum triangulo EKM, quare erit eodem modo EM ad HB, vt EK ad QB. Sed tres, vtpote æquales AC, & CE, & EM habent eandem proportionem ad eandem HB. Ergo etiam tres AI, & CL, & EK ad tres IB, & OB, & QB, vtpote eiusdem proportionis trium æqualium ad HB habebunt eandem proportionem. Quare erit IA ad BI, vt CL ad OB, & EK ad QB. Quare permutando AI erit ad CL, vt IB ad BO, & CL ad EK, vt OB ad QB.

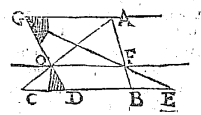
LEMMA I. PROP. X.

Si inter duas parallelas crura duorum triangulorum æqualium basium se intercipiant, linea per eorum intersectiones ducta erit parallela basi, & triangula, quæ fiunt æqualis altitudinis.

SInt duo triangula quæcumque ABG, & CED quorum crura se decussent in F, & O. *Dico, quod linea* FO *ducta per* F, & O *est parallela basi* FC.

Probatur triangulum AFG esse æquiangulum triangulo CFB, quod angulus E sit æqualis angulo G nigro, vtpote alterni inter parallelas ex propos. 30. lib. 1. Elem. & anguli quoque apud F sint ad verticem, & ideo æquales: vnde, & reliqui ex Coroll. 2. prop. 17. lib. 1. Elem. Quare AG ad AF, vt EB ad FB, & *permutando* AG ad EB, vt AF ad FB: Sic quoque dicendum de triangulis AOG, & BOC ob angulos alternos nigrum ad D, & seminigerrimum ad G æquales, & angulos ad verticem æquales quoque. Quadere erit, vt AG ad AO, sic DC ad OC. Quare *permutand.* erit AG ad DC, vt AO ad OC, sed EB, & DC sunt æquales cum bases triangulorum præsupponantur æquales; Vnde ablata parte BD communi, reliquum EB, & DC est æquale. Quare AG ad EB, & eadem AG ad DC dicet eandem proportionem ex 7. lib. 5. vtpote ad æquales. Quaderè erit etiam eadem proportio AF ad FB, quæ AO ad OC. Quare cùm crura trianguli sint diuisa proportionaliter linea transiens per diuisiones F, & O erit parallela basi BC ex prop. 2. lib. 6. & triangula EFB, & DCC ex propos. 40. lib. 1. Coroll. 2. erunt æqualis altitudinis.

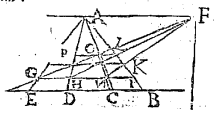
THEOR.



THEOR. III. PROP. XI.

* *Si plurima triangula æqualia æqualium basium in vnum verticem conueniant, & recta aliqua basi non parallela in ea incidat, & secet, parallelæ basibus à sectionibus crurum ductæ omnia crura secabunt harmonicè proportionaliter.*

SInt triangula ABC, & ACD & AED, & cæt. quæ in vnum verticem A conueniant, & eorum sint æquales bases: secetque eorum crura aliqua FG. Dico, *quod si ducantur per eorum intersectiones parallelæ basi* BE *istæ in partes harmonicè proportionales diuident omnes lineas sectas, & crura triangulorum.*



* Quod vt ostendatur ducatur basi BE parallela FA à verticibus triangulorum; donec occurrat obliquæ secanti GF; occurret enim, cùm incidens FG basibus parallela non sit, & à puncto F, ducatur FH, & FN. Quia ergo HN, NI, & HG sũt æquales, q. ex Cor. prop. 4. l. 6. cl. HG est ad HN, & NI; vt æquales ex thesi, DE ad DC, & CB. Ex 1. propos. AB erit secta harmonicè proportionaliter, & AI, & KA & AL erunt tres termini harmonici, quo supposito.

* Probatur. Parallelæ ductæ ab intersectionibus O, P, G crurum ab FC incidente factis transeunt necessariò per puncta IKL. Ergo eam diuidunt in partes proportionales harmonicè IA, & KA, & LA. Triangula HPG ex præced. & IKN sunt æqualis altitudinis. Ergo parallela à P discedens incidet in punctum K ex prop. 39. Cor. 1. 1. in verticem trianguli IKN. Sic triangulum NOG æqualis altitudinis est velut ILH: Ergo parallela discedens ab O incidet in punctum L: Quare eodem modo IA diuidetur in partes proportionales, sic à radijs NF, FH, & FG, vt à parallelis LO, & KP, & IH. Cùm ergo IA sit diuisa in partes harmonicè proportionales, etiam omnes CA, DA, & EA ab ijsdem parallelis erunt diuisæ ex propos. 4. hujus.

COROLLARIVM.

*HInc patet quomodo possimus diuidere in partes harmonicas plurimas lineas simul, & plures series harmonicorum terminorum efficere.

EXPENSIO III.

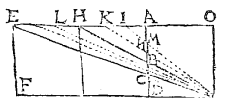
De interpositione Harmonicorum terminorum.

INterpositio terminorum est cum inter duos terminos alij termini interiaciuntur, ita tamen, vt sit adhuc continua series proportionalium eo modo, quo continuatur proportio Harmonica.

PROBL. I. PROPOS. XII.

* *Terminos continuè proportionales harmonicè inter terminos harmonicos conijcere.*

SInt dati tres termini continuè proportionales harmonicè AD, & BD, & CD nempe 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. & oporteat inter eos alios terminos interponere, qui proportionem continuent. Sint verò termini AD, & BC, & CD inter parallelas AF, & EF, lineisq. à centro G egredientibus GH. & GE determinati, eruntq; æquales AH, & HE. Diuidantur itaq; AH, & $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}$



G

HE secundum terminos, quos volumus interponere V. g. 3. ita quòd primus terminus sit, vt 3. ad 3. secundus, vt 3. ad 4. tertius, vt 3. ad 5. &c. Deinde ad singulas diuisiones à centro G rectæ ducantur GI, & GH, & GL, & cæt. & erit factum, & sic procedent termini.

$\frac{3}{3}\ \frac{3}{4}\ \frac{3}{5}\ \frac{3}{6}\ \frac{3}{7}\ \frac{3}{8}\ \frac{3}{9}$

* PRobatur. Nam ex prælibatis huius in prima propos. AD primus terminus erit ad AD vltimum, vt differentia AM ad differentiam MN, & MD erit ad BD, vt differentia MN ad differentiam NB. Ergo inter AD, & BD duos terminos termini duo interpositi sunt MD, & ND. Et sic dicas de cæteris, quod verò sint datę denominationis patet ex prop. 8. huius.

EXPENSIO IV.

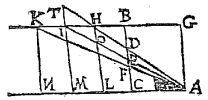
De terminis inuicem comparatis, & differentijs.

IAm ex ipsa definitione proportionis harmonicę notum est duas differentias harmonicas inter tres terminos esse inuicem, ut primus terminus ad tertium, & ideo etiam permutando esse differentiam maiorem ad maiorem terminum, vt minor differentia ad minorem terminum: reliquas igitur proportiones indagabimus.

THEOR. I. PROP. XIII.

* *Maior terminus eſt ad ſummam omnium differentiarum, vt æquales baſes cum intercepta ad ipſas æquales baſes.*

SIt ſecta BC in partes proportionales harmonicè in D, E, F. Differentiæ erunt BD, & DE, & EF, & ſumma earum BF. Dico, *quòd ita ſe habet* AG *primus terminus ad totam ſeriem, & ſummam differentiarum* BF, *vt* AC *intercepta, vel æquali* GB *cum æqualibus baſibus* omnibus ſimul ſumptis BH, & HI, & IK, ad ipſas æquales baſes ſimul ſumptas.



Probatur. Nam ex 4. lib. 6. vt BK ad KG, ſic eſt BF ſumma differentiarum ad AG primum terminum.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Minor terminus omnium ita eſt ad ſummam omnium differentiarum, vti intercepta ad omnes baſes æquales.*

SIt figura, quę præcedentis propoſ. Minor terminus omnibus alijs terminis erit FC, & ſumma differentiarum erit FB. Intercepta AC omnes baſes æquales BK. *Dico, quòd* FC *ſit ad* FB, *vt* AC *eſt ad* BK.

* Probatur AFC triangulum eſt æquiangulum triangulo BFK: quia anguli apud F ſunt ad verticem anguli verò ad A, & K alterni. Ideoque ex propoſ. 11. lib. 6. elem. AC erit ad FC, vt BK ad FB ideo *permutando* AC erit ad BK, vt FC ad FB.

THEOR. III. PROPOS. XV.

* *Termini ad inuicem maior ad minorem ſunt in eadem proportione, ac æquales baſes cum intercepta ad ipſas æquales baſes cum intercepta minus vna æquali baſi.*

SIt eadem fig. quæ ſupra. *Dico* BC *terminum eſſe ad* DC, *vt* GH *ad* GB, *&* DC *eſſe ad* EC, *vt* GI *ad* GH, *& è contra inuertendo.*

Probatur. Nam ADC, & DBH ſunt æquiangula triangula: Ergo ex 11. lib. 6. AC erit ad DC, vt BH ad BD: Quare *permutando* AC, vel CB ei æqualis erit ad BH, vt DC ad DB, & ideo *componendo* AC, vel GB cũ BH erit ad GB, vt DC cum DB ad DC, ideſt HG addita baſi, & intercepta erit ad interceptam BG, vt terminus BC ad terminum DC.

* Probatur quoque de reliquis terminis: nempe de termino DC reſpectu termini EC. *Dicoque quòd* DC *ſit ad* EC, *vt* GI *ad* GH.

Triangulum HIO eſt æquiangulum triangulo AEC ob parallelas, inter quas eſt. Quare vt prius ac erit ad EC, vt HI ad HO; quapropter *permutando* AC, vel GB æqualis erit ad HI, vel æqualem BH, vt EC ad HO: ſed eadem AC erat in præced. part. huius prop. ad BBH, & ideo ad æqualem HI ex hyp. vt CD ad BD. Ergo ex 16. l. 5. vt CDad BD ita EC ad HO, & hinc *permutando* CD ad EC, vt BD ad HO: Sed producta AH in T ob æqualitatem triangulorum HTI, & HBD ipſa TI æquatur ipſi BD: Proportione autem reſpondet TI, ideſt BD ad HO, vt TA ad AH, & vt IG ad GH, & conſequenter ex 16. l. 5. CD erit ad EC, vt IG intercepta cum additis omnibus ad GH interceptas cum additis vna minus, ita in quam erit terminus CD ad terminum EC.

Eſt autem IG ad HG, vt TA ad HA, quia ob triangulorum THI, & HGA ſimilitudinem TH eſt ad HA, vt IH ad HG, ideoque *componendo* TA eſt ad HA, vt IG ad HG, & ideo, vt TI, vel BD ad OH.

THEOR. IV. PROPOS. XVI.

* *Si intercepta ſit irrationalis, etiam termini Muſici erunt irrationales, ideſt nullo numero exprimibiles.*

SIt AC intercepta irrationalis: Dico, *quòd termini erunt irrationales* BC, *&* DC, *&* EC.

* Probatur. Quia AC ponitur irrationalis ipſi BH ideſt æqualis CL etiam compoſitũm LA erit irrationale ex propoſ. 10. lib. 10. vtrique parti componenti, nempe ipſi CL, & ipſi AC. Sed vt eſt AL ad AC, ſic BC terminus ad DC terminum: Ergo ex propoſ. 5. lib. 10. elem. termini ipſi inuicem erunt incommenſurabiles BC, & DC.

Idem argumentaberis de terminis DC, & EC. Nam AC ponitur incommenſurabilis ipſi GL: Ergo etiam ipſi æquali LM. Quamobrem, & compoſitũ ipſarũ AL erit incõmenſurabile ipſi LM. Vnde ſi LM, & AL incõmenſurabiles cõponantur AM totũ erit incommenſurabile ipſi AL; ſed vt MA ad AL, ſeu, vt IG ad GH: ſic eſt ex 15. huius DC ad EC. Ergo, & DC ipſi EC erit incommenſurabilis, & ſic dicas de reliquis.

THEOR. V. PROPOS. XVII.

Poſita intercepta incommmenſurabili, reliquæ omnes differentiæ inuicem erunt incommenſurabiles.

PRonatur intercepta incommenſurabilis. Dico differentiam DB eſſe incommenſura bilem ipſi differentiæ DE.

Probatur DE eſt ad FE differentiæ, vt termini DC ad CF: ſed termini ſunt incommenſurabiles, ergo ex 5. lib. 10. & ipſæ differentiæ, quòd verò primus terminus ad tertiũ incõmenſurabilis. Prob. ſit DC eſt ad EC, vt AM ad AL, & ex prop. 15. huius EC eſt ad FC, vt AN ad AM: Ergo DC eſt ad FC ex æquo, vt AN ad AL, Sed NA, & AL ex dictis in præc., ſi AC ſit incommenſurabilis, ſunt incommenſurabiles, Ergo etiam DC, & FC termini.

EXPEN-

EXPENSIO IV.

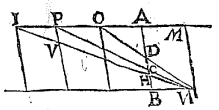
De progreſſionis Harmonicæ extremo.

SIcut in progreſſionis Geometricæ continuatione extremum eſt, ad quod nulla progreſſio, quantumuis multiplicata, peruenire poteſt; ita & Harmonicum extremum eſt, quòd nulla progreſſio harmonica valet conſequi, quod vt demonſtratione firmetur ſit.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

* *Nulla progreſſio harmonica extremum ſuum conſequi poteſt, quamuis vt vtlibet multiplicata.*

SInt termini harmonici AB: & DB, & CB, & HB. *Dico, quod etiam ſi ſine meta multiplicentur nunquam poterunt conſequi extremum* B.



* Probatur ex propoſ. 15. huius: Nam terminus penultimus CB erit ad vltimum HB, vt MI ad MP; ſed MI ad MP habet minorem proportionem, quàm omnes alij termini præcedentes, & ideo MP ad MI maiorem. Ergo BH ad CB habebit maiorem proportionem omnibus terminis præexiſtentibus: ſed CB eſt linea: Quare etiam BH linea erit. Quoniam comprehendit plures partes ipſius CB, quàm omnes antecedentes termini cõprehendant terminorum maiorum. Quod autem MP ad MI ſit maior proportio, quàm MO ad MP patet. Quia creſcit linea MI per continuam additionem vnius. Maior eſt autem proportio 2. ad 3. quàm 1. ad 2. & 3. ad 4. quam 2. ad 3. & ſic ſucceſſiuè.

* Probatur quoq; alio modo. Nam quacunq; poſitâ terminorum multiplicatione ſemper NHB erit triangulum, & centrum N diſtabit à puncto B. Ergo etiam H diſtabit ab eodem puncto B.

Tandem Probatur 3. Refertur BN ad AI, vt HB ad HA, & ideo *permutando*, vt BN ad HB ita eſt AI ad ſũmã differentiarum HA: ſed omnes differentię HA ad omnes baſes AI ſunt quid quantum; Ergo etiam BH reſpectu BN.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

In qualibet data linea abſque fine quæcumque progreſſio Harmonica continuari poteſt.

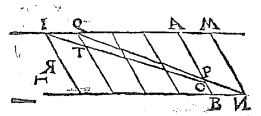
PRobatur in præced. fig. ad partes æquales aſſumptas in linea baſium æqualium MI à centro N, poſſunt duci infiniti radij; quàs partes AO, & OB, & PI poſſunt multiplicari in infinitum, & à ſingulis ab N radius duci poteſt: ſed omnis radius in AB deſignat terminum harmonicum ex dictis propoſ. 1. huius; nec ex præc. datur terminus harmonicus, cuius longitudo excedat punctum B: Ergo in AB termini harmonici in infinitum multiplicari poterunt abque eo, quòd perueniatur ad punctum B.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Aſſignatâ qualibet in proportionis harmonicæ ſerie ad minorem peruenirì poterit.

PEr additionem partium æqualium ſit ſemper minor proportio totius cum addito ad totum ſolùm V.g. 3. habet proportionem minorem ad 2. quam 2. ad 1. & 4. ad 3. quàm 3. ad 2. & 5. ad 4. quàm 4. ad 3. & ſic continuè.

Aſſignetur ergo linea R, cui habeat minorem proportionem intercepta NB, quam E. g. 7. ad 3. eritque R ad NB maior proportio, quam 7. ad 3. Ad MA addantur tot partes, vt maior ſit proportio MI cum additis ad MN; quam 7. ad 3. & ducatur ad illud extremum radius NI.



Quoniam igitur triangulum MIN eſt triangulo IQT, & ideo æquali NOB æquiangulum erit MI ad MN, vt NB ad BO: ſed MI habet maiorem proportionem ex effectione ad NM, quàm 7. ad 3. Ergo etiam NB habet maiorem proportionem ad BO, quàm 7. ad 3. ſed eadem NB habet minorem proportionem ad R, quam 7. ad 3. Ergo R maior erit, quam BO. Vnde lineâ aſſignatâ R poterit in AB minor linea aſſignari in proportione harmonica.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

Termini harmonici vltra omnem aſſignatam quantitatem diminui poſſunt.

SIt aliqua data R in præcedenti fig. Dico, quod in progreſſione Harmonica procedendo terminus aliquis minor, quàm R dari poteſt.

Aſſignatæ R habeat aliqua ex ipſis baſibus, vt QI minorem proportionem, quam quilibet aſſignatus numerus 30. ad 3. Addanturque tot baſes donec MI ad MN habeat maiorem proportionem, quam 30. ad 3. quo poſito.

Probatur Propoſ. Triangulum QIT eſt æquiangulum triangulo MIN. Quare erit MI ad MN, vt QI ad QT: Sed MI habet maiorem proportionem ad MN, quàm 30. ad 3. Ergo etiam QI habebit maiorem proportionem ad QT, quàm 30. ad 3. ſed QI ad R habet minorem proportionem ex hypotheſi, quam 30. ad 3. Ergo R eſt maior, quàm QT. Eſt autè QT terminus harmonicus, vt ex prop. 2. h.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Si series infinitorum terminorum muſicorum continuetur relinquet tandem aliquam differentiam aſſignata qualibet quantitate minorem.

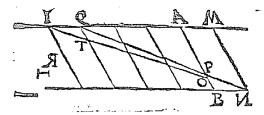
ASſignetur quantitas aliqua minima R. *Dico in* AB *differentias muſicas adeo poſſe multiplicari, vt tandem aliqua ſit minor, quàm* R.

Probatur. Nam termini adeo poſſunt multiplicari, vt aliquis ſit minor, quàm R ex præced. multiplicentur, & ſit QT minor, quam R; Ducaturque NQ. Dico differentiam PO eſſe minorem, quam R. patet. Nam PO eſt ad QT, vt NP ad NQ, vel MA ad MQ. ſed MA minor eſt, quam MQ ex hypotheſi. Ergo PO minor eſt quam QT. Ergo minor etiam eſt, quàm R.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Quæcumque infinita differentiarum muſicarum ſeries æquat primum terminum.

PRobatur. Nam enim minor erit, quia in BA primo termino infinitæ differentiæ capere poſſunt ex propoſ. 18. h. & ideo infinitam differentiarum multitudinem capere. Sed nec erit maior; Si enim eſt maior ſit maior V. g. quantitate OB: Multiplicentur itaque termini adeo, vt aliquis tandem inueniatur ex propoſ. 20. minor aſſignata quantitate BO. Ergo ſeries illa in infinitum procedens in quantitate AB reliquit minus reſiduum; quam BO. Quare BA primus terminus non ſuperat ſeriem infinitam differentiarum quantitate BO, & ſic ſemper valebit argumentum: ergo ſeries infinita differentiarum muſicarum æquat primum terminum.





TRACTATVS XVII.

De Proportionalitatibus Rationum.

QVicet iſte Tractatus ſit vniuerſalis, & omne genus quantitatis complectatur, tum diſcretæ, tum continuæ; quia tamen numeris facilius, & euidentiùs proportionum ſimilitudines explicantur, hinc eſt, quòd numeris exempla dabimus, non lineis, aut ſuperficiebus, cum tamen propoſitiones generice ſint intelligendæ, & omni generi quantitatis applicandæ.

EXPENSIO I.

De principijs.

EGigmus in præcedentibus de ſimilitudine Rationum, & continentiarum, iuxta quas vna quantitas aliam continet: nunc autem agimus de ſimilitudine ipſarum ſimilitudinum Rationum, & in eo conſiſtit, quòd ipſæ rationes, quibus inuicem duæ quantitates, & duæ in ſe continendo aſſimilantur ipſæ quoque inuicem ſint ſimiles. Quamobrem proportionalitas requirit ad minus duas proportiones, & ideo quatuor Rationes, nam duæ Rationes vnam proportionem efficiunt, & tandem octo terminos, inter quos quatuor rationes reperiantur.

DEFINITIO I.

Proportionalitas eſt proportionum ſimilitudo.

Sint duo numeri $\frac{2}{4}$ duobus numeris proportionales $\frac{1}{6}$; ſint deinde etiam alij duo $\frac{1}{3}$ duobus alijs $\frac{4}{8}$ proportionales; hæc proportio, quæ inter primos quatuor reperitur ſi ſit ſimilis proportioni, quæ inter hos extremos proportionatur, dicitur *Proportionalitas*.

DEFINITIO II.

Rationum denominatores vocantur quantitates, quæ ſuis partibus exprimant continentiam vnius quantitatis reſpectu alterius.

Sint $\frac{2}{8}$, & $\frac{1}{9}$ Denominatores harum quantitatum ſunt primæ 4. ſecundæ 3. quia indicant quot vicibus vna quantitas in alia contineatur; ſic quater 2. continetur in 8. & 3. in 9. ter continetur; Sic ſi exhiberentur duæ lineæ pertica, & palmus. Linea quædã, quæ demonſtret ſuis partibus continentiam palmi in pertica, dicetur denominator. V. g. ſemipalmus diuiſus in 6. vncias poterit dici denominator, quia indicabit ſuo ſexagenario partium continentiam ſex pedum, quas pertica complectitur.

DEFINITIO III.

Similitudo proportionum conſiſtit in ſimilitudine denominatorum.

Et hoc quidem verum eſt in quantitatibus rationalibus, & in irrationalibus, nam exprimuntur earum ſimilitudines per mutuam duarum quãtitatum habitudinem. Sic ſit $\frac{2}{6}$ $\frac{1}{3}$, poterit exprimi denonaminator proportionis, quam habet 2. ad 6. & 3. ad 12. eſſe eam, quæ eſt inter 3. & 4. nempe ipſos denominatores, qui indicant, quot vicibus capiat 2. in 6. & 3. in 12. Sic ſi ſint duæ irrationales EB ſimiles aliijs duabus CD.

Sintque duæ aliæ lineæ, quæ exprimant V. g. F continentiam B in A, & E, quæ demonſtret contidentiam D in C, iſtæ rationum ſimilitudines licet

A ——— F
B ———
C —— E
D ——

irrationales poterunt exprimi per illos duos Denominatores F, & E, & dicere, quod ſicut eſt F ad E, ita eſt proportio AB ad proportionem CD.

DEFINITIO IV.

Proportiones ſimiles illæ ſunt, quæ ijsdem, vel æqualibus denominatoribus gaudent.

Sint V. g. $\frac{2}{4}$, & $\frac{5}{10}$: iſtæ proportiones ſunt ſimiles, quia ita 4. continet 2. gemina vice, ſicut 16. continet 8. gemina vice: quare ſunt ſimiles in continendo, cùm contineant, tam vna, quam alia ijſdem vicibus, quarè, & ipſæ continentiæ ſunt ſimiles.

PRINCIPIVM.

Quantitas rationis, ſiue denominator ductus in conſequentem producit antecedentem, ſi ſit maioris inæqualitatis, at è contra ſi ſit minoris, nam diuiſus conſequens per denominatorem, antecedentem, & manifeſtat.

Sit



Sit proportio A 12 ad D 3. quæ exprimatur denominatore 4. C. Si 4. ducatur in 3. producet 12. quia 4. suis vnitatibus indicat vices continentiæ 3. in 12. Sit rursus proportio rationis A 3. ad D 12. denominator $\frac{1}{4}$, quia 4. numerat vices, seu partes ex quibus A 3. sibi assumit vnicam, ideo si 12. diuidatur per 4. denominatorem producetur antecedens 3. Sic si denominator 2. & $\frac{2}{3}$, quam habet 5. ad 12. diuidat 12. producet 5. at si detur ratio 12. ad 5. & 2. $\frac{2}{3}$, denominator multiplicet 5. producet 12.

Aduerte autem; si quando iubemus reperire, vel tertium, vel quartum, vel medium proportionale, id præcipimus iuxta regulas, vel in numeris traditas lib. 7. & 8. Elem. & iuxta Tract. 13. de numeris proportionalibus. In lineis iuxta dicta lib. 6. element. Expens. 4. Si agatur de superficiebus, vel de corporibus iuxta tradenda suis locis, licet enim exempla in numeris exhibeamus, in omni tamen genere quantitatis valet iste Tractatus. Vnde iuxta cuiuscunque quantitatis modum præcepta sunt operi demandanda.

EXPENSIO II.

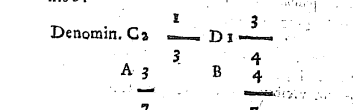
De Proportionibus ad denominatores collatis, & ad terminos.

PRIùs videndum est, quomodo Denominatores, terminique in proportionibus exprimendis se gerant, vt deinde earum compositionē cognoscere, multitudinemque possimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Proportiones eundem terminum habentes inuicem referuntur, vt denominatores.

*SIt A $\frac{3}{7}$, & B $\frac{4}{7}$. Dico *has proportiones esse inuicem, vt denominatores*, ideoque A $\frac{3}{7}$ esse ad B $\frac{4}{7}$ in proportione, vt denominator C 2 $\frac{1}{3}$ proportionis A ad denominatorem D 1 $\frac{1}{4}$ proportionis B.



*Probatur. Nam toties fundamentum A 3. continetur in termino 7. quot vnitates sunt in suo denominatore C 2 $\frac{1}{3}$, nempe gemina vice, & $\frac{1}{3}$: Sed etiam fundamentum 4. continetur in termino 7. quot vnitates sunt in denominatore D 1 $\frac{1}{4}$ proportionis B; Silicet vnica vice, & $\frac{3}{4}$: Ergo denominatores sunt similes in vnitatibus, vt termini, seu consequentes in continentijs fundamentorum, & ita vnitas continetur in Denominatore C 2 $\frac{1}{3}$, vt fundamentum 3. in termino 7. & vnitas ineſt in denominatore 1 $\frac{1}{4}$, vt fundamentum 4. in termino 7. quare ex defin. 1. lib. 7. elem. ita erit C 2 $\frac{1}{3}$ ad D 1 $\frac{1}{4}$, vt A $\frac{3}{7}$ ad B $\frac{4}{7}$.

Et idem dicas etiam si proportio esset maioris inæqualitatis, vt A $\frac{6}{7}$ B $\frac{8}{7}$; nam terminus 2. multiplicatus per denominatorem C 3. producit antecedentem 6. proportionis A; & idem consequens B 2. per denominatorem proportionis E 4. multiplicatus producit 8. Ergo multiplicatur continentia 2 · in 6. toties, quotics vnitas in denominatore 3. continetur, & vt 2. in termino 8. comprehenditur ita vnitas in denominatore 4. ipsius. Ergo ex defin. 1. lib. 7. elem. vt est 3. ad 4. denominatores, ita est proportio A $\frac{6}{7}$ ad proportionem B $\frac{8}{7}$.

THEOR. II. PROP. II.

Duæ rationes habentes commune consequens eam sortiuntur rationem, quæ inter fundamenta reperitur.

SInt rationes A $\frac{1}{3}$, & B $\frac{2}{3}$. *Dico eas eam consequi rationem, quæ inter fundamenta reperitur*; nimirum 3. & 4. Si tamen eodem termino gaudeant, & ita esse Rationem A $\frac{3}{3}$ ad Rationem B $\frac{4}{3}$, vt 3. ad 4.

Probatur. Nam fundamentum A 3. ductum in denominatorem suum 2 $\frac{1}{3}$ producit terminum 7. & rursùs fundamentum B 4. ductum in suum Denominatorē D 2 $\frac{1}{3}$, producit terminum eundem 7. Ergo ex 17. lib. 7. ita erit A 3. ad B 4. vt Denominator C 2 $\frac{1}{3}$ ad denominatorem D 1 $\frac{1}{4}$. Sed, vt denominator C 2 $\frac{1}{3}$ ad denominatorem $\frac{7}{4}$ sic est Ratio A $\frac{3}{7}$ ad rationem B $\frac{4}{7}$. Ergo Ratio A $\frac{3}{7}$ ad Rationē B $\frac{4}{7}$ est vt 3. fundamentū ad fundamētū 4.

Et idem erit in proportione minoris inæqualitatis, vt A $\frac{1}{2}$, & B $\frac{2}{2}$; nam erit A ad B, vt 3. ad 4. eadem ratione: & fundatur in propos. 17. lib. 7.

THEOR. III. PROPOS. III.

Proportiones eosdem antecedentes habentes, erunt inuicem, vt termini inuerso ordine, vt secundus terminus ad primum.

FIat enim, vt C ad A; nimirum 4. ad 2. ita B 3 ad aliud E, 1 $\frac{1}{2}$; erit ratio AB ad rationem EB, vt A 2. ad E 1 $\frac{1}{2}$ ex anteced. sed eadem est ex effectione EB proportio, ac AC. Ergo proportio AB $\frac{2}{3}$ ad proportionem AC $\frac{2}{4}$ est, vt A ad E, sed ex effectione, vt C est ad A; sic B est ad E. Ergo permutando, vt C 4. terminus secundus est ad B 3. primum; sic A est ad E, & ideo etiam proportio AB $\frac{2}{3}$ ad proportionem AC $\frac{2}{4}$, quæ ostensa est, vt A ad E, erit etiam, vt terminus secundus C 4. ad primum B 3.

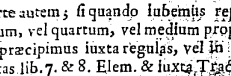
PROBL.

PROBL. I. PROPOS. IV.

Datæ sint quotcunque rationes earum denominatores reperire.

DAtæ sint proportiones A $\frac{4}{6}$, & B $\frac{2}{4}$, & oporteat reperire harum proportionum denominatores.

Duplici modo id fit. Primo efficiatur, vt 4. ad 2. in proportione B, sic in proportione A 6. ad aliud, quòd sit E 3. quartum proportionale in eadem specie quātitatis. Dico E 3. & B 4. *esse Denominatores* A 4. *quidem proportionis* A, & E 3. *proportionis* B.



Probatur. Nam ex effectione B 4. terminus est ad suum fundamentum 2. vt A 6. terminus est ad aliud 3. Ergo *inuertendo* in proportione B 2. erit ad 4. vt E 3. aliud inuentum ad A 6. Cum ergo sit ratio alius E 3. ad A 6. quæ 2. ad 4. erit etiam ita proportio A $\frac{6}{6}$ ad B $\frac{3}{4}$, vt proportio eadem A $\frac{4}{6}$ ad aliud inuentum E $\frac{3}{6}$, cum ergò 4. & 3. habeant eosdem terminos 6. & 6. erit proportio fundamentorum 4. & 3. eadem, ac Denominatorum ex 1. propos. huius, ideoque 4. & 3. erunt Denominatores proportionum, ita, quòd, vt refertur 4. ad 3. ita continentia A 4. ipsius 6. ad continentiā B 2. ipsius 4. Potest etiā fieri alio modo: Nam datis proportionibus fiat, vt 2. ad 4. terminum in proportione B, sic 4. ad aliud E 8. in proportione A. Dico, *quòd* 6. & 8. *erunt Denominatores*.



Probatur. Nam ex effectione in B proportione 2. est ad 4. vt in A proportione 4 est ad 8. Quare ita erit proportio A $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{2}{4}$, vt ad proportionem E $\frac{4}{8}$: sed proportio $\frac{4}{6}$ ad proportionem E $\frac{4}{8}$ est, vt 8. ad 6. ex 3. huius. Ergo proportio A $\frac{4}{6}$ ad rationem B $\frac{2}{4}$ est, vt 8. ad 6. quare 8. & 6. erunt Denominatores 8. quidem rationis A, & 6. rationis B.

COROLLARIVM.

COllige hinc: Quomodo duas proportiones diuersorum consequentium, seu antecedentium reducantur ad idem consequens, seu antecedens: nimirum, si fiat, vt in praxibus prædictis. Sic $\frac{4}{6}$, & $\frac{4}{8}$ eædem proportiones sunt, quæ $\frac{2}{3}$, & $\frac{2}{4}$. Sic $\frac{4}{6}$, & $\frac{2}{4}$ sunt eędem, ac $\frac{8}{6}$, & $\frac{3}{6}$, vt in demonstratione ostensum est.

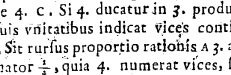
COROLLARIVM II.

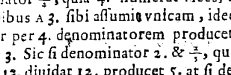
ERuitur hinc: Rationes esse inuicem in proportione, vt sunt denominatores. Siquidem proportio A $\frac{4}{6}$ est ad proportionem E $\frac{2}{6}$ ob eundem terminum 6. vt 4. ad 3. Sed proportio B $\frac{2}{4}$ est eadem, ac proportio E $\frac{2}{6}$. Ergo est proportio A $\frac{4}{6}$ ad proportionem B $\frac{2}{4}$, vt Denominator 4. ad denominatorem 3.

PROBL. II. PROP. V.

Data ratione, & duabus quantitatibus, alias duas quantitates reperire, quæ sint in proportione data cum istis exhibitis.

SIt data Ratio AB $\frac{3}{7}$, & quantitates C 3. & D 6. & alias duas quantitates oporteat inuenire, quæ faciant proportionalitatem similem ad datas quantitates collatas; vt est proportio AB $\frac{2}{3}$.





Fiat, vt A ad B rationes, sic C ad aliud G 7 $\frac{1}{2}$. Deinde fiat, vt D 6. ad inuentum G 7 $\frac{1}{2}$. Sic quælibet alia quantitas F 4. ad aliud E 5. Dico, *quòd proportio* CD $\frac{3}{6}$ *ad proportionem* EF $\frac{5}{4}$ *est, vt* A 2. *ad* B 5.

Probatur. Quoniam ex effectione, & inuertendo, vt G 7 $\frac{1}{2}$ est ad D 6. ita est proportio E 5. ad F 4. Et ex 2. huius, proportio CD ad proportionem GD ob eundem terminum D est, vt C ad G: Ideo proportio CD ad proportionem EF, eandem cum GD, erit vt C ad G; sed, vt est A ad B ita effectum est C ad G: Ergo, vt A 2 ad B 5. ita est proportio CD $\frac{1}{6}$ quantitatum datarum ad proportionem EF $\frac{5}{4}$ quantitatum inuentarum.

PROBL. III. PROPOS. VI.

Duas Rationes exhibere, quæ datam habeant rationem,

SIt data Ratio AB $\frac{3}{7}$, & postulentur duæ similes huic rationi; Componatur A 3. alicui cuicumq; quantitati C 8. & sic etiam B 7. eidem copulentur, sintque proportiones AC $\frac{3}{8}$, BC $\frac{7}{8}$, & erit factum, quod postulatur: Nam ex propos. 3. huius, proportio AC ad rationem BC, est vt A ad B.

Quod si nolimus consequentes eosdem esse fiat, vt A ad C, sic quælibet alia E 6. ad quamlibet aliam E 16. & erit, vt constat EF $\frac{6}{16}$ ad BC $\frac{7}{8}$, vt AC proportio eadem ex effectione, ac EF, ad BC; Sed AC ad BC sunt, vt A ad B: Ergo etiam EF ad BC sunt, vt A ad B.

PROBL. IV. PROPOS. VII.

Rationes duas assignare duabus datis proportionales eiusdem denominationis.

SInt duæ datæ Rationes AB $\frac{3}{7}$, & CD $\frac{1}{4}$, & oporteat exhibere duas rationes illis proportionales; quæ eosdem obtineant Denominatores. Fiat, vt D 4. ad C 3. Sic B 5. ad aliud E 3 $\frac{1}{2}$. Erit

ratio BA ad rationem BE, vt E ad A ob idem antecedens B ex 3. huius, & *inuertendo* AB erit ad EB, vt A ad E; & quia est eadem Ratio B ad E ex effectione, quæ D 4. ad C 3. & *inuertendo* C ad D, quæ E ad B, ideo erit ratio AB ad rationem CD, vt A ad E. Ponatur itaque quæuis alia V.g. F 6. Dico *Rationem* EF, *& Rationem* AF *eosdem denominatores habere*.

B 5 B 5

A 2 C 3 E $3\frac{1}{4}$ A 2

B 5 D 4 F 6 F 6

Probatur. Proportio AF $\frac{2}{6}$ ad proportionem $\frac{1}{4}$ EF est, vt A 2. ad E 3. $\frac{1}{4}$ ex 2. huius: Sed vt A 2. ad E $2\frac{1}{4}$, ita ustensa est Ratio AB ad rationem CD. Ergo ratio AF ad Rationem EF est, vt Ratio AB ad Rationem CD. Ideoque, cum Rationes habeant eandem proportionalitatem; obtinebunt quoque eosdem denominatores.

PROBL. V. PROPOS. VIII.

Assignare proportionalitatem similem proportioni datæ, cui quantitates quoque datæ sint antecedentes, vel consequentes.

SIt data Ratio AB $\frac{3}{1}$, & quantitates C 4. & D 5. & voluntas sit reperiendi duas alias proportiones, quibus sint C, D quantitates antecedentes, sed similes, ac proportio A ad B.

A 2 C 4 quantitates L 6 G 12

Propor.

B 3 D 5 datæ L 6 E 10

Sumantur quæuis L, & fiat, vt A ad L; sic C ad aliud G: Deinde fiat, vt B ad L, sic D ad aliud E. Dico *proportionem* CG *ad proportionem* DE *esse, vt* A *ad* B.

Probatur. Nam Ratio AL ad Rationem BL est vt A ad B; sed, vt est A ad L, sic ex effectione est C ad G; Vnde eius loco substitui potest, & vt B ad L, sic est D ad E; Vnde pariter vicaria Illius BL hæc DE esse potest: Substitutis ergo istis CG, & DE, erit Ratio CG ad rationem DE, vt A ad B.

At è contrario efficies, si placeat terminos datos C, & D esse consequentes.

L 6 A 2 C 4 G 1 $\frac{1}{3}$

L 6 B 3 D 5 E 2 $\frac{1}{2}$

Vt L 6. quælibet est ad A 2. sic C 4. ad aliud G; & vt L 6. eadem priùs electa ad B 3. sic D 5. ad E $2\frac{1}{2}$. Fitque ratio GC ad rationem ED, vt A ad B.

Probatur. Vt Ratio AL est ad Rationem BL, sic est A ad B: Sed vt A ad L, sic est G ad C; quia affectum est L ad A, vt C ad G; ideoque *inuertendo* erit A ad L, vt G ad C: Quare proportio GC potest substitui loco proportionis AL. Sic dicas de proportione L ad B, quæ ex effectione est, vt D ad E; ideo inuertendo E ad D erit, vt B ad L: ideoque proportio ED poterit poni loco proportionis BL: Istis itaque illarum loco positis Ratio GC erit ad Rationem ED, vt A ad E sicut erant priùs AL ad BL, vt A ad B.

PROBL. VI. PROPOS. IX.

Data Ratione, & quantitate aliqua cum duobus denominatoribus assignatæ quantitati terminum reperire, vt Ratio data sit ad rationem, cuius, quæsitus est terminus, vt Denominator ad Denominatorem.

SInt Denominatores C 4. & D 5. & proportio data AB $\frac{2}{1}$, & quantitas E 5. cui terminus debeat assignari V. g. F: ita vt proportio BA sit ad proportionem EF, vt Denominator 4. ad Denominatorem 3.

A 2 C 4

Propor. Denomin.

B 6 D 3

1 1

G 1 F 1

2 4

B 6 E 5

Fiat, vt C ad D, sic A ad aliud G 1 $\frac{1}{2}$. Deinde B 6. ad G, 1 $\frac{1}{2}$; sic quantitas data E 5. ad aliud F, $\frac{1}{2}$ & erit F terminus quæsitus. Dicet *quæ* AB *Ratio proportionem ad Rationem* FE, *vt Denominator* C *ad Denominatorem* D.

Probatur. Ex effectione vt E 5. ad F $\frac{1}{2}$, sic B 6 est ad $\frac{1}{2}$, & *inuertendo*, vt F est ad 8. sic G ad B. Proportio verò AB ad proportionem GB ob eundem terminum B refertur, vt A ad G, ideoque AB erit ad FE loco rationis GB eiusdem positam, vt A ad G. Sed vt A ad G, ita factum est C ad D. Ergo vt C ad D; ita est Ratio AB ad rationem FE.

A 2 C 4 1 E 5

G 1

B 6 D 3 2 F 10

Quod si quis cupiat quantitatem datam B 5. esse non consequentem, sed antecedentem: Postquam fecit, vt C ad D, ita A ad G. Deinde è conuerso faciat, vt G est ad B, sic data quantitas E 5. ad aliquam aliam F 20. eritque AB ad rationem FE $\frac{1}{1}$, vt C ad D.

Probatur. Ex effectione E est ad F, vt G est ad B, sed vt Ratio AB est ad rationem GB, sic est A ad G ex 2. huius, ideoque erit etiam AB ad rationem EF eandem, quam GB, vt A ad G; sed A ad G ita facta est, vt C ad D: Ergo, vt C ad D, ita erit proportio AB ad proportionem EF, in qua quantitas E data est antecedens.

EXPENSIO III.

De proportionum compositione.

EXplicauimus Tract. 9. in Elementis, quid sit compositio proportionum: modo aliquas insigniores compositionum proprietates, quæ ad arguendum in proportionibus sunt necessariæ, demonstrare oportet.

THEOR. I. PROPOS. X.

Inter magnitudines; si interponatur quælibet magnitudo, proportio primæ ad vltimam dicetur componi ex proportione primæ ad interpositam, & interpositæ ad extremam.

SInt propositæ duæ magnitudines A 2. & B 12. & interponatur quælibet V.g. 4. C, proportio 2. ad 12. componitur ex proportione A 2. ad C 4. & 4. ad B 12.

Reperiantur denominatores proportionum 2. ad 4. & sit D 2. & C 4. ad B 12. & sit F 3. Dico, quòd, & si 2. multiplicet 3. quantitates denominatoresque propotionum producetur H 6. quæ quantitas erit denominator proportionis 2. ad 12. & ideo, quòd proportio A 2. ad B 12. componetur ex proportione 2. ad 4. & 4. ad 12. Quia quantitates, seu denominatores ipsarum proportionum D 2. & F 3. inuicem multiplicati producunt quantitatem proportionis, quam habet A 2. ad B 12. vt vult definitio 8. Tract. 9. part. 1.

Termini A 2 C 4 B 12

Denominatores D 2 F 3

Quantitas L * H 6 Quantitas

Proportionis D in F.

inter AB.

* Prodatur. Reperiatur Denominator, seu quantitas proportionis A ad B, & sit quantitas L, & ostendam; quòd hæc quantitas L est eadem, quam quantitas H 6. ex multiplicatione denominatorum D 2. & F 3.

Quantitas ergo L est illa ex principio huius I. quæ multiplicans terminum A 2. producit B 12. alium terminum: sed etiam quantitas H 6. multiplicans terminum 2. producit 12. B; Ergo sunt quantitas L, & H 6. æquales ex prop. 19. lib. 7. Eucl.

Id autem patet: Nam D 2. multiplicans F 3. facit H 6. & idem D 2. multiplicans 2 A facit C 4. interpositam: Ergo ex propos. 19. lib. 7. ita erit F 3. ad A 2. multiplicati, vt H 6. ad C 4. geniti, & permutando ita erit F 3. ad H 6. vt A 2. ad C 4. Quare ex propos. 19. lib. 7. extremæ quantitates 3. & 4. producent eandem quantitatem inuicem ductæ, ac mediæ H 6. & & A 2. nempe 12. Quod etiam erit verùm, quamuis maior quantitas interponatur V. g. C 16. inter A 2. & B 12. Nam Denominator proportionis 2. ad 16. est D $\frac{2}{8}$, & 16. ad 12. est F $\frac{4}{3}$: Si ergo 8. multiplicet 2. producet interpositam 16. & si multiplicet alterum denominatorem $\frac{4}{3}$ facit 6. Ergo ita erit $\frac{4}{3}$ ad 2. vt 6. ad 16. ideo producent eundem numerum 12.

A 2 C 16 B 12

Denominatores D 8 F 4

3

Quantitas L * H 6 Quantitas

Proportionis ex D in F.

inter A, & B.

THEOR. II. PROPOS. XI.

Proportio Rationum componitur ex proportione terminorum antecedentium, & consequentium inuicem sumptorum.

SInt datæ Rationes A 3. ad B 4. & C 5. & D 8. Dico *proportionem* AB $\frac{1}{6}$ ad CD $\frac{1}{8}$ *componi ex proportione* A 3. *ad* C 5. *& proportione* D 8. *ad* B 4.

1

A 3 G 5 E 2

2

B 4 D 8

Fiat, vt D ad C, sic B ad aliud E. Erit ex prop. 4. huius AB proportio ad CD proportionem, vt A ad E: Quia est ex effectione B ad E, vt D ad C, & inuertendo E ad B, vt C ad D: Est autem A B ad EB proportionem, vt A ad E; ideoque AB ad CD proportionem, vt A ad E. Sed ratio A ad E componitur ex proportionibus A ad C, & C ad E ex præsup. 2. Tract. elementaris; quia sufficit ponere quid intermedium; vt extrema ex ea proportione dicãtur composita. Igitur proportio Rationis AB ad rationem CD componitur ex proportione A ad C, & C ad E; quia verò ex constructione est, vt D ad C; sic B ad E, & *permutando* est, vt D ad B, sic C ad E: Ergo proportio A ad E componitur ex proportionibus, nempe A ad C, sed etiam D ad B, quæ est eadem, quæ C ad E, quare etiam proportio AB ad CD componitur ex proportione A ad C, & D ad B.

Quod verò AE componatur ex proportionibus A ad C, & C ad B, nempe 3. ad 5. & 5. ad $2\frac{1}{2}$ potes etiam videre ex præced.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Proportio Rationum componitur ex proportione terminorum alterius, quidem directè alterius autem proportionis inuersè sumptorum.

A 1 1

C 2 E 1

B 3 D 5 5

SIt A 1 ad B 3. at C 2. ad D 5. *Dico proportionẽ* AB $\frac{1}{3}$ *esse compositam ex proportione* A 1. *ad* B 3. *&* D 5. *ad* C 2. *inuersè sumptorum* fiat, vt D 5. ad C 2. sic B 3. ad aliud E 1. $\frac{1}{2}$. Erit ex 4. huius, vt in præc. Ratio A ad E, quam habent rationes AB ad CD. Sed ratio A ad E 1 $\frac{1}{2}$ est cõposita ex Ratione A 1. ad B 3. & B 3. ad E 1 $\frac{1}{2}$ ex 10. h: proportio verò B ad E est eadem, quę D ad C: Ergo etiam Ratio AB ad Rationem CD est composita ex ratione A ad B, & B ad E hoc est D ad C, sicut est composita proportio A ad E, quæ est eadem, ac Rationum AB, & CD.

THEOR. IV. PROPOS. XIII.

Duas Rationes similes non inuicem, sed cum alijs duabus compositæ producunt proportionem similem alteri ex duabus Rationibus similibus compositis consurgenti.

* SIt data proportio AD $\frac{5}{1}$ similis proportioni FE $\frac{4}{2}$, & alia proportio CB $\frac{5}{2}$ similis alteri HL $\frac{10}{8}$. Dico, quòd, si inuicem proportiones componantur AD, & CB inter se dissimiles, sed similes alijs duabus FE, & HL, quæ inuicem etiam componantur atq; producant proportiones IK $\frac{20}{2}$, & MN $\frac{40}{16}$. Dico inquam *proportiones esse similes*, esseque I ad K, vt M ad N.

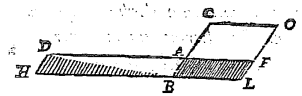
A 6 F 4 C — I 30
Denomin. 1 2. 2
D 3 E 2 K 12

C 5 H 16 1 1 M 40
Denom. 1 — 1
B 4 L 8 4 4 N 16

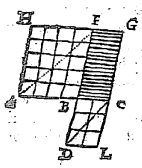
Sint Denominatores proportionis AD 2. & FB pariter 2. eo quod proportiones ponantur similes silicet ab eodem, vel æquali denominatore denominatas ex defin. 3. huius.

Item denominatores CB, & HL erunt 1 $\frac{1}{2}$, & 1 $\frac{1}{2}$. Si ergo denominatores isti componantur 2. cum 1 $\frac{1}{2}$, & 2. cum 1 $\frac{1}{4}$, quæ compositio fit multiplicando, producent denominatorem æqualem 2 $\frac{2}{4}$: & 2 $\frac{1}{4}$. Sed isti sunt denominatores proportionum compositarum IK, & MN ex def. 8. Tract. 9. Ergo ex defin. 3. huius compositæ proportiones IK, & MN erunt similes.

Et licet hæc propositio sit vniuersalis, etsi numeris explicata, eam tamen, & rectangulis applicabimus ad maiorem explicationem aliquarum prop. Conicarum, cui est necessaria.



* Sit basis AC ad AB in rectangulis AO, & AH sicut in rectangulis BH, & BL basis AB ad CB, & AF ad AD, in primis, vt FB, & BD in alijs. Ergo rectangulum AO super AC erit ad nigrũ AL eiusdem altitudinis super AB, vt rectangulum BH super alteram basim AB ad nigrum BC eiusdem altudinis super BC. Sed nigrum AL est ad eiusdem altitudinis rectangulum seminigrum BD, vt BC nigrum, & eiusdem altitudinis ad BL ex prop. 26. lib. 6. Quia basis priorum AF ad AD ponatur, vt BF ad BD in postremis. Quare ex æquo in prima fig. rectangulum AO erit ad seminigrum AH, vt AF rectangulum ad rectangulum BL in postremâ.



THEOR. V. PROPOS. XIV.

Si ex duabus proportionibus similibus auferantur duæ proportiones similes, reliquæ proportiones remanent similes.

SInt proportiones IK, & MN, vt in præced. propos. & detrahantur ex ipsis duæ proportiones similes AD, & FE. *Dico residuas esse quoque proportiones similes* CD, & HL.

Probatur: nam sint proportionum integrarum IK, & MN denominatores 2 $\frac{2}{4}$, & 2. & $\frac{2}{4}$ erunt enim denominatores æquales, quia proportiones dicuntur similes ex definit. 3. huius. Rursusque sint denominatores ablatarum proportionum 2, & 2. qui etiam erunt æquales ob ablatarum proportionum similitudinem. Auferantur itaque isti denominatores à primis, quæ ablatio proportionalis fit diuidendo, cùmq; ab æqualibus æqualia demãtur, vel æqualia per æqualia partiatur, residua remanebunt æqualia 1 $\frac{1}{4}$, & 1 $\frac{1}{4}$, quare etiam proportiones remanentes ex defin. 3. h. erunt similes.

COROLLARIVM

HInc ergo patet modum argumentandi in compositione rationum similium, vel diuisione efficaciter conuincere, quâ ex eò, quòd duæ proportiones sint compositæ ex proportionibus similibus arguitur esse similes etiam compositas ex ipsis: Sicque ex eo quòd à proportionibus similibus auferantur proportiones similes, efficaciter deducitur residuas proportiones esse inuicem similes, quos modos arguendi descripsimus ad definit. 27. Tract. 9. Elem. part. 1.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Componere proportiones.

DAtæ sint proportiones AB $\frac{2}{4}$, & CD $\frac{3}{3}$, quas oporteat multiplicare.

Fiat, vt C 3. ad D 5. sic B 4. ad aliud E 6 $\frac{3}{3}$. *Dico proportionem* AE *esse compositam ex proportione* AB, & CD.

A 2 C 3 E 6 — 3
B 4 D 5 B 4

Prob. proportio AE est composita ex proportione A ad B, & B ad E: sed proportio BE est eadem, ac proportio CD. Ergo proportio BE componitur ex proportione AB, & CD; quòd verò AE componatur ex proportione A ad B, & B ad E patet ex propos. 12 huius Expens.

PROB. II. PROPOS. XVI.

Ratio quæuis ducta in rationem æqualitatis producit se ipsam.

SIt data ratio æqualitatis AB $\frac{2}{2}$, & alia ratio CD $\frac{1}{2}$. *Dico, si ducatur* AB *in* CD, *quòd ipsam* CD *Rationem producet.*

Fiat

Fiat, vt C 3. ad D 5. sic B 2. ad aliud E 3 $\frac{5}{3}$ ex antecedentibus Ratio AE erit composita ex AB Ratione, & CD Ratione.

1
A 2 C 3 E 3 — 3
B 2 D 5

Sed Ratio AE est eadem, ac ratio BE; quia A, & E sunt æquales, & Ratio BE eadem, ac ratio CD ex effectione: Ergo Ratio CD ducta, seu composita ex proportione equalitatis AB sibimet generat.

COROLLARIVM.

HInc que educitur; quòd multiplicatio rationum per proportionem æqualitatis nihil addit rationibus; sed relinquit, vt erant.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Datis quatuor Rationibus exhibere proportionem, quam producunt duæ rationes inuicem ductæ ad duas alias Rationes inuicem ductas atque compositas.

SInt quatuor Rationes AB $\frac{2}{2}$, CD $\frac{3}{2}$ EF $\frac{1}{2}$, & GH $\frac{6}{2}$. quarum duæ componantur AB, & CD, aliæ duæ EF, & GH. componantur, & sit inquirendum, quam proportionem producant.

A 2 A 2 E 3 E 6
P 6 B 3 F 6 Q 15

C 1 G 4
L 2 $\frac{1}{2}$ — — O 3
D 2 H 5

Fiat vt propos. 15. vt C 1. ad D 2. sic B 3. ad aliud P 6. eritque proportio A P $\frac{3}{6}$ composita ex proportionibus AB, & CD ex propos. 15. huius. Rursus fiat, vt G 4. ad H 5. sic P 6. ad aliud Q 7 $\frac{1}{2}$: eritq; proportio E Q 3. 7 $\frac{3}{4}$, vel $\frac{6}{3}$ composita ex proportione EF, & GH.

Si ergo ex propos. 4. denominatores proportionum compositarum reperiantur A P $\frac{3}{6}$, & E Q $\frac{6}{7}$ qui erunt huius O 6. & illius L 5. Et erit proportio O 6. ad L 5., seu, vt explicemus alijs terminis 3. ad 2 $\frac{1}{2}$ illa, quæ est inter compositas proportiones A P ex Rationibus AB, & CD, & aliam EQ ex Rationibus EF, & GH confectam.

Prob. ex eadem propos. 4. nam ibi probatur ita esse proportio ad proportionem, vt denominator denominatorem.

THEOR. VII. PROP. XVIII.

Si quatuor quantitates dentur; proportio primæ, & secundæ ducta in proportionem secundæ, ad quartam eandem producit rationem, quæ proportio primæ, & tertiæ ducta in Rationem tertiæ ad quartam.

SInt quantitates A 2. B 3. C 5. D 4. Dico, quod Ratio AB $\frac{2}{3}$ in BD $\frac{3}{4}$ ducta producit eandem Rationem, ac AC $\frac{2}{5}$ in Rationem CD $\frac{5}{4}$ ductam.

Probatur. Ratio AD $\frac{2}{4}$ componitur, seu producitur ex proportionibus AB, & BD. Eademque Ratio AD $\frac{2}{4}$ componitur, seu producitur ex proportione AC, & CD ex 10. huius. Ergo Ratio AB ducta in Rationem BD eandem producit Rationem AD, ac AC ratio ducta in CD rationem.

THEOR. VII. PROP. XIX.

Ratio ducta in seipsam conuersis terminis producit rationem æqualitatis.

SIt ratio AB $\frac{2}{4}$, quæ ducatur in se, sed conuersis terminis BA $\frac{4}{2}$. Dico, quòd *producit antecedens, & consequens æquales.* Assumatur quantitas C 2. æqualis ipsi A 2. & ordine positis terminis A 2. B 4. C 2. Ratio AB componitur ex proportione A ad B, & B ad C: sed ratio BC est eadem, ac ratio BA; Ergo AC producitur quoque ex multiplicatione rationum AB, & BA conuersis terminis, sed ratio AC $\frac{2}{2}$ est ratio æqualitatis. Ergo ratio AB ducta in rationem BA producit rationem æqualitatis.

EXPENSIO IV.

De proportionum similitudine commutatis terminis.

VT possimus in proportionibus argumentari aliqua de earum similitudine priùs considerandæ sunt, in quâ vis argumentorum fundatur.

THEOR. I. PROPOS. XX.

Si sint datæ rationes, & termini inuersi sumantur; inuersæ quoque Rationes eandem proportionem habebunt, quam priùs habebant.

SInt duæ rationes AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{3}{2}$ inuertantur termini DC $\frac{2}{3}$, & BA $\frac{3}{2}$. Dico, quod ita erit AB ad CD, vt DC inuersis terminis ad BA ipsas proportiones inuertendo.

Fiat ex 4. huius, vt D ad C, ita B ad E; 2 $\frac{3}{2}$, & erit, vt A ad E; ita Ratio AB ad Rationem CD.

A 2 C 3 — E 2 —
B 4 D 5 B 4

Prob. Proportio BE ad BA ob idem fundamentũ B est, vt A ad E ex 3. h. Sed ratio B ad E eadẽ est, ac Ratio D ad C ex constructione. Ergo Ratio DC ad BA est, vt A ad E; sed vt A ad E, ita est AB ad CD ex dictis prop. 4. Ergo vt AB ad CD, ita est DC ad BA.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

Proportiones duæ adsint, quarum termini permutatè sumantur, dicent quoque eandem proportionem.

SIt AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{4}{2}$, & termini permutatè sumantur AC $\frac{2}{4}$, & ED $\frac{3}{2}$. Dico, quod Ratio AB

ad

ad rationem CD est, vt AC ad BD proportionem.

A 2 C 4 A 2 B 3 F 2 1/7.
B 3 D 5 C 4 D 5 E 2 1/7.

Fiat ex 4. huius, vt D ad C, sic B ad aliud E 2 1/7. Eritq; vt AB ad CD rationem ita A ad E.

Fiatque Rursus ex rationibus quarum permutati termini, vt D ad B; sic C ad aliud F.

Probatur itaque. Quia est, vt D ad C, sic B ad E ex effectione. Erit permutando D ad B, vt C ad E: Sed, vt D ad B, ita facta est ratio C ad F. Et ideo cũ C ad F sit idem cum ratione D ad B ex 16.l.5. erit C ad E eadem ratio, ac C ad F: quare ex nona quinti E, & F erunt quantitates æquales.

Cum ergo sit AB ad CD rationem ex effectione, vt A ad E, & inuersis terminis ratio AC ad BD rationem, vt A ad F, & AE, & AF sint eædem rationes etiam AB ad CD, & AC ad BD eandem habebunt similitudinem.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Si sint datæ duæ Rationes, quarum inuertantur, & permutentur termini erunt adhuc in eadem ratione.

SInt AB 2/3, & CD 4/7, & inuersè permutatèque sumantur termini DB 1/3, & CA 1/2. Dico quod AB est ad CD, vt DB ad CA.

A 2 C 4 D 5 C 4
B 3 D 5 B 3 A 2

Proportio AB est ad CD ex 20. vt Ratio DC ad BA sed ex præced. vt DC ad BA, sic est DB ad CA. Ergo ratio AB ad rationem CD est, vt ratio DB ad rationem CA.

EXPENSIO V.

De proportionum Dialectica.

SIcut quatuor terminis argumentamur in Trac. elementarijs; sic etiam octo terminis possumus argumentari. Scilicet cũ pro terminis ponuntur non quantitates ipsæ, sed quantitatum Rationes, quæ dicantur similes alijs duabus rationibus, ex quarum similitudine deducatur arguendo similitudo inter easdem rationes; sed alio modo combinatas, vnde 7. modi argumentandi, quos ex Euclide enumerauimus Tract. 9. etiam proportionibus conuenire hic ostendemus.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Sit Ratio fundamentum ad rationem terminum sit, vt alia ratio fundamentum ad aliam rationem terminum; Erit quoque permutãdo Ratio fundamentum ad aliam rationem fundamentum, veluti ratio terminus ad aliam rationem terminum.

SIt Ratio A 1/2 ad rationem E 2/3 terminum, vt alia ratio C 1/10 ad aliam rationem D 1/2. Dico quod *permutatione* vti poterimus, eritque A 1/2 fundamentum ad rationem C 1/10 fundamentum, vt B 1/6 terminus ad D 1/2 terminum.

E 2 F 5

A 2 C 5 A 2 B 2
4 10 4 6
ad vt ad Ergo ad vt ad
2 3 5 3
B D C D
6 9 10 9

H 1 1/3. L 3 1/3.

Reperiãtur ex propos. 4. huius Denominatores proportionum E 2. rationis A 2/5, & F 5. rationis C 1/10. Sic H 1 1/3 rationis B, & tandem L 3 1/3 rationis D. Eritque ex Coroll. propos. 4. huius A ratio ad B Rationem, vt denominator E ad denominatorem H.

Sed ex hypothesi, vt est ratio A ad rationem B sic est ratio C ad D rationem, & C ratio est ad D rationem, vt Denominator F est ad denominatorem L, quare ex *æquo*. Ita erit denominator E ad H denominatorem, vt denominator F ad denominatorem L, quare, & permutando erit E ad F, vt H ad L denominatores, vnde ex Coroll. propos. 4. erit etiam ratio A ad rationem C, vt ratio B ad D.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si sit ratio fundamentum ad rationem terminum, vt alia ratio fundamentum ad aliam rationem terminum: erit etiam inuertendo ratio terminus ad rationem fundamentum, vt alia ratio terminus ad aliam rationem fundamentum.

SInt rationes eædem, quæ superiores.

E 2 F 5

A 2 vt C 5 B 1 vt D 4
4 10 3 12
ad ad Ergo ad ad
1 4 2 5
B D A C
3 12 4 10

H 1 1/3 L 3 1/3.

Dico, quod si Ratio A sit ad Rationem B, vt ratio C ad rationem D erit etiam Inuertendo ratio B ad rationem A, vt ratio D ad rationem C.

Probatur. Nam denominator E rationis A est ad H denomicatorem B, vt ipsa ratio A ad B ex Cor. 2. Propos. 4. & ratio A est ad rationem B, vt C est D rationes, & ratio C ad D, est, vt denominator F rationis C ad denominatorem L rationis D. Ergo ex æquo denominator E rationum A ad H denominatorem rationis B erit, vt denominator F rationis C ad denominatorem L Rationis D. Quare, & inuertendo H erit ad E denominatores, vt L ad F. Quare ex Coroll. propos. 4. etiam ratio B erit ad A, vt D ad C inuertendo.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Sit ratio pars ad rationem compartem alicuius totius rationis, vt alia ratio pars ad aliam rationem compartem alterius totius rationis: erit etiam componendo totum ad suam partem, vt alterum totum ad aliam suam partem.

INuentis enim denominatoribus cuiuscumque proportionis.

E 3 F 6

A 3 C 6 AB 3 CD 60
4 8 12 vt 120
ad Ergo ad ad
2 10 3 6
B D A C
3 15 4 8

H 2 L 5
3 3

A 3 C 6 Vel etiam AB 3 CD 60
4 8 Ergo 12 ad vt 120
2 10 2 10
B D B D
3 15 3 15

Sint E 3. rationis A, & H 2 2/3 rationis B, sic F 6. rationis C, & L 5 1/3 rationis D denominatores. Erit itaque ex inductione præcedentium propos. duarum E ad H, vt F ad L ob rationum suppositam similitudinem A ad B, vt C ad D.

Sed E, cum H, denominatores, est ad H, vt F cum L, denominatores, est ad L *componendo*: Ergo etiam ratio AB simul, vt totum ad A partem erit, vt ratio CD simul, vt totum ad rationem C partem, quòd est componendo arguere.

Potest autem etiam referri compositum AB ad compartẽ B, vt compositum CD ad compartem D.

THEOR. IV. PROPOS. XXVI.

Si sit ratio totum ad partem suam, vt aliud totum ad partem quoque suam: Erit etiam diuidendo pars ad suam compartem, vt alia pars ad aliam compartem suam.

SIt eadem dispositio proportionum quæ priùs, & ratio composita AB sit ad rationem simplicem A, vt ratio composita CD ad rationem simplicem C. Dico, *quòd ratio simplex, & pars A erit ad suam compartem simplicem B diuidendo, do vt simplex ratio C est ad suam compartem rationem simplicem D.*

EH 1 FL 2 E 3 F 6

AB 6 CD 60 A 3 C 6
12 120 4 vt 8
Ergo ad ad
A 3 C 6 B 2 D 10
4 8 3 15

E 3 F 6 H 2 L 5
3 3

Constituãtur singularum proportionum denominatores E, H, F, L. Quoniam Ratio AB ad A est, vt ratio CD ad C: erit etiam denominator EH ad E prioris combinationis rationum, vt denominator FL ad F posterioris rationum combinationis ex Coroll. 2. propos. 4. huius. Quare diuidendo, quia EH est ad E, vt FL est ad F erit etiam E ad H, vt F ad L suos denominatores partiales. Quare etiam ex Coroll 2. prop. 4. huius ratio A erit ad rationem B, vt ratio C est ad rationem D.

THEOR. VI. PROPOS. XXVII.

Si sit ratio composita ad rationem simplicem suam partem, vt alia ratio composita est ad aliam rationem suam partem simplicem: Erit etiam ratio prior composita ad suam alteram compartem rationem simplicem, vt secunda ratio composita ad suam alteram portionem simplicem.

SIt quoque eadem dispositio rationum, vt in præcedenti.

EH 1 FL 2 EH 1 FL 2

AB 6 CD 60 AB 6 CD 60
12 120 12 120
Ergo
A 3 C 6 B 2 D 10
4 8 3 15

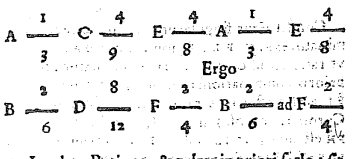
E 3 F 6 H 2 L 5
3 3

Et sint inuenti rationum denominatores compositarum EH compositæ rationis AB, & FL rationis CD. Sicque denominatores rationum simpliciem F, & H, nec non, & F, & L.

Igitur ex Cor. 2 p. 4. quia est AB, ad A, vt CD ad C: Erit etiam denominator EH ad E, vt FL ad F, cum eorum rationes sint eædem, ac rationum proportiones: Quia itaque est EH ad E, vt FL ad F erit quoque *conuertendo* EH ad H, vt FL ad L: quare etiam proportiones similes suis denominatoribus ex Coroll. propos. 4. simili correspondentia conuenient, & AB, erit ad B, vt CD erit ad D.

THEOR. VI. PROPOS. XXVIII.

Si sit ratio ad rationem, vt altera ratio ad aliam rationem, & ista altera sit ad tertiã rationem, vt hæc alia ad tertiam quoque rationem aliam, erunt etiam ex æquo prima ratio ad tertiam, vt alia ratio prima ad aliam tertiam.



SInt datæ Rationes, & prima in priori serie A sit ad C, vt in posteriori B est D; At in priori C sit ad E, vt in posteriori D est ad F. Dico, *quòd ex æquo erit quoque ratio* A *ad rationem* E, *vt ratio* B *ad rationem* F.

Probatur Progress. 1. Ratio A est ad C, vt B ad D, ergo permutando A erit ad B, vt C ad D.

Progress. 2. Rursus, vt respicit ratio C rationem E respicit quoque similiter ratio D rationem F: Quare permutando C erit ad D, vt E ad F.

Sed iam ostensum est C referri ad D progress. 1. vt A ad B. Ergo etiam A referretur ad B, vt E ad F. Quare rursus permutando A proportione correspondebit ipsi E, vt B correspondet ipsi F, quod erat demonstandum.

COROLLARIVM

HInc est, quòd etiam si proportio sit perturbata idem euenìet: vt vides in expositis rationibus.

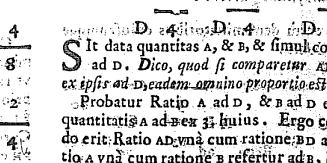
EXPENSIO VI.

De proportionum Algorithmo.

HIc agimus de multiplicatione, diuisione, subductione, additioneque proportionum ostendendo omnes istas varietates operationum, quæ conueniunt numeris, etiam proportionibus suo modo conuenire.

THEOR. I. PROP. XXIX.

Partium simul sumptarum ratio est ad quantitatem datam eadem, ac compositum ex ipsis ad eandem quantitatem datam.



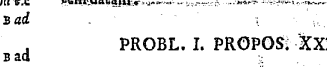
SIt data quantitas A, & B, & simul comparentur ad D. *Dico, quod si comparetur* AB *composita ex ipsis ad* D, *eadem omnino proportio est.*

Probatur Ratio A ad D, & B ad D est illa ipsa quantitatis A ad B ex 33 huius. Ergo componendo erit Ratio AD vnà cum ratione BD ad BD, vt ratio A vnà cum ratione B refertur ad B, hoc est, vt AB 3. ad B 1. Quamobrem proportio AD cum BD ad BD erit, vt AB 3. compositum ad D quantitatem datam.

PROBL. I. PROPOS. XXX.

Datæ rationis duplam assignare, aut dimidiatam, aut aliam in alia ratione.

SIt data ratio AB, cuius duplum, aut dimidium postuletur. Fiat quantitas aliqua C dupla quantitatis A. Dico rationem C ad B esse duplam proportionis A ad B, & rationem BC esse dimidiam eius, quam habet B ad A.



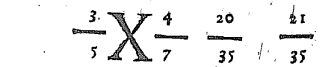
Probatur. Ratio CB ad AB est eadem, quam habet C ad A ex propos. 2. huius: sed C ad A ex effectione habet proportionem duplam, ergo ratio AC ad AB habebit proportionem duplam.

Ratio quoque B ad C, & B ad A est, vt A ad C, sed A ad C habet proportionem dimidiatam. Ergo etiam BC ad BA habebit proportionem dimidiatam.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

Datas proportiones diuersorum antecedentium, vel consequentium ad eadem antecedentia, seu consequentia habentem proportionem reducere.

DOcuimus id Coroll. 2. propos. 4. sed in quãtitatibus rationalibus multiplicabimus simul terminum vnius, cum fundamento alterius, & huius terminum cum fundamento prioris, & deinde termini inuicem. V. g. data proportione $\frac{3}{5}$ & $\frac{4}{7}$, quæ reducenda sit ad eundem terminum multiplicabimus 4. per 5. & generabitur 20. deinde 3. per 7. & generabitur 21. & tandem termini 5. & 7. & producetur 35. Proportio itaque $\frac{3}{5}$ erit ea, quæ habebit eundem terminum 35. ac proportio $\frac{4}{7}$.



Probatur

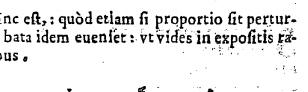
Probatur: Quia cum 5. multiplicauit 4. & 7. erit ex propos. 19. septimi 4. ad 7. vt genitus, 20. ad 35. Rursus. Quia 7. multiplicauit 5. & 3. erit eadem proportio 3. ad 5. quæ 21. ad 35. Ergo erunt $\frac{3}{5}$ eadem proportio, quæ $\frac{4}{7}$, & $\frac{3}{5}$, quæ $\frac{4}{7}$.

Si verò quis cupiat antecedentes multiplicet, vt priùs terminos, cùm fundamentis alternatim, deinde fundamenta inuicem, & producet $\frac{12}{20}$, & $\frac{12}{21}$, quæ rationes habent idem antecedens 12. Patet eadem ratione. Nam quia 4. multiplicauit 5 & 3. erit eadem proportio generantium 5. & 3. quæ genitorum 12. & 20. ex 19. septimi. Sic, quia 3. multiplicauit 4. & 7. erit eadem proportio generantium 4. ad 7. ac genitorum 12. ad 21. ergo erit eadem ratio $\frac{3}{5}$, ac $\frac{12}{20}$, & eadem quoque $\frac{4}{7}$, & $\frac{12}{21}$.

PROBL. III. PROPOS. XXXII.

Datis quibuslibet rationibus eas in vnicam summam aggregare.

SInt rationes AB, & CD vnà aggregandæ. Reperiantur denominatores faciendo, vt D ad C, ita correspondeat proportione B ad aliud E. Deinde assumatur aliqua quantitas H illis A, & B denominatoribus simul sumptis æqualis. Dico HB *esse summam proportionum* AB, & CD.



Ratio AB, & FB est eadem, ac ratio AB, & CD. quia CD, & FB eadem ratio est ex Coroll. 2. prop. 4 huius: sed ratio HB est æqualis illis duabus ex 30. prop. Ergo proportio AB, & CD in vnam summam redacta est.

Quod si placeat, & alias aggregare ipsi HB, idem fiat; sit V. g. IL $\frac{1}{8}$, & debeat aggregari proportioni HB; Fiat, vt 8. ad 3. sic 4. ad aliud M, assumaturque quantitas æqualis quantitati H, & M sit N, & erit proportio NB ex omnibus illis aggregata; nempe ex AB, CD, & IL, vt patet: quia NB ob eãdem prædictam rationem est aggregatum proportionum HB, & IL. Proportio verò HB est aggregatum proportionum AB, & CD. Ergo NB erit aggregatum proportionum earundem AB, & CD, & insuper rationis IL.

Si verò agatur de numeris ipsis, vel quantitatibus, quæ proportionum præbent fundamenta. Addenda simul sunt antecedentia, simulque consequentia, & numerus ex additione collectus erit summa exoptata. V. g. sint 2 $\frac{3}{7}$, ideſt $\frac{17}{7}$, & 3 $\frac{1}{4}$, vel $\frac{13}{4}$ in vnam summam colligendi. Colligantur simul fundamenta proportionum 12. & 13. in minimas partes redacta, & fundamentum fiet 25. deinde termini 5. & 4. & fient 9. erit ergo summa collecta $\frac{29}{9}$, vel 2 $\frac{2}{9}$. Patet, quia cum additi sint simul, & antecedentia, & consequentia, etiam simul additas earum proportiones hoc in sensu necesse est fateri. Patet quoque, quia si auferatur à proportione $\frac{29}{9}$ proportio $\frac{17}{7}$ restituitur proportio $\frac{13}{4}$.

Aduerte tamen, quod Denominatores non sunt simul addendi V. g. 2 $\frac{3}{7}$ cum 3 $\frac{1}{4}$; sed ipsa proportionum antecedentia 12. & 13. neque hic modus addendi est propriè addere proportiones: sed proportionum terminos.

PROBL. IV. PROPOS. XXXIII.

Datam proportionem minorem à maiore detrahere.

SIt data proportio minor AB, quam oporteat subducere à proportione maiore CD.

Fiat, vt B ad A, sic D ad aliud E. Subducatur; quantitas E 4 $\frac{1}{2}$, vel detrahatur à quantitate C 6. & remanebit F, 1 $\frac{1}{2}$, & F, 1 $\frac{1}{2}$ ad D 9. habet proportionem residuam, & quod proportio FD sit residua proportionis AB à proportionis CD subductione.

Probatur. Nam ex 29. huius rationes FD, & FD rationi quantitatũ E, & F simul sumptarũ æquantur, ideſt ipsi C ad D: sed proportio ED est eadem, ac AB, ergo proportio AB, & FD æquantur ipsi CD. Quare proportio FD erit residuum subducta proportione AB à proportione CD. Quantitates autem tenùs, non autem quoad proportiones subductio fit detrahendo fundamenta à fundamentis, & terminos à terminis proportionum. Sic si velimus à proportione $\frac{12}{25}$ deducere proportionem $\frac{5}{9}$ subducemus 12. à 25. antecedentia, & 5. à 9. termini ambo, & residuum erit proportio $\frac{7}{16}$. Patet, quia si simul vt priùs addantur, restituitur proportio $\frac{12}{25}$, cuius denominator est 2 $\frac{7}{9}$.

PROBL. V. PROPOS. XXXIV.

Datam rationem per aliam multiplicare.

MVltiplicare idem est, ac componere; ideoque eodem modo, ac propos. 15. hoc prob. operi demandabimus, quod si placeat efficere, vel multiplicando, ita faciendum erit.

Sit data proportio AB $\frac{2}{3}$, & alia CD $\frac{5}{7}$, quas oporteat multiplicare. Assumatur toties quantitas 2. quot partes sunt in 5. nempe quinque duenarios, ideſt 10. F, & toties quantitas 3. quot partes sunt in 9 eritque quantitas composita F 27. Dico, *quod proportio* 10. *ad* 27. *est proportio genita ex multiplicatione* AB *in* CD.

Probatur. Nam assumatur toties quantitas 3. quot vnitates sunt in 5. & fient I 15. ordineque ponantur quantitates E 10. I 15. F 27. proportio E ad F componetur ex proportione E 10. ad I 15. & I 15. ad F 27. ex propos. 10. huius.

Sed ex propos. 17. lib. 7. quia 5. multiplicat 2. & 3. & facit 10. & 15. eadem proportio erit inter genitas quantitates 10. & 15. quæ inter generantes 2. & 3. Sic quia 3. multiplicauit 5. & 9. & fecit

15. & 27. eadem proportio erit genitorum 15. & 27. quæ generantium 5. & 9. Cùm ergo 10. & 15. sit eadem proportio, quæ 2. ad 3. & 15. ad 27. quæ 5. ad 9. Proportio 10. ad 27. dicetur quoque composita ex proportionibus 2. ad 3. & 5. ad 9.

Iste verò modus erit optimus pro numeris, & quantitatibus rationalibus; præscriptus autem propos. 15. huius prorsus est vniuersalis.

PROBL. VI. PROPOS. XXXV.

Datis rationum Denominatoribus ipsas rationes multiplicare.

Sint datæ rationes AB $\frac{2}{7}$, & CD $\frac{3}{9}$, & dentur denominatores ipsarum AB denominator GH, & CD denominatur EF, qui simul multiplicentur ex propos. 15. huius; Et producetur denominator alius, qui proportionem compositam denominabit N $\frac{3}{1\,3}$.

A 2 C 3 — Denom. — B 4 D 9

E 1 $\frac{1}{2}$ 2 — N — F 4 12 — G 2 Vel 2 $\frac{2}{3}$ — N — H 4 16

Probatur ex defin. 8. Tract. 9. Elem. Nam rationum quantitates, ideſt denominatores inter se multiplicati efficiunt rationem compositam. Vnde N $\frac{3}{1\,3}$ erit proportio composita ex AB, & CD.

Et hic modus, tum quantitatibus rationalibus, tum irrationalibus conuenit.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Datam rationum proportionem per alteram proportionum rationem multiplicare.

Sint datæ duæ rationes AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{3}{5}$, sic, & aliæ duæ EF $\frac{7}{4}$, & GH $\frac{1}{6}$. Reperiantur earum denominatores; & quidem rationis AB sit P 2. rationis verò DC sit Q 1 $\frac{1}{5}$. Deinde rationis EF sit M 2. & rationis GH sit N 3 $\frac{3}{6}$.

10 P 2 — A 2 / B 3 — E 2 / F 4 — M 2 — 12

15 — 14

9 Q 1 $\frac{1}{5}$ — C 3 / D 5 — G 5 / H 6 — N 3 $\frac{3}{6}$ — 20

Probatur. Ratio P ad Q denominatores est, vt rationis AB ad rationem CD; item proportio denominatorum M ad N est eadem, ac rationum EF ad GH. Quare si methodo præc. vel 15 h. rationes denominatorum inuicem multiplicentur, & Q 1 $\frac{1}{5}$ ad P 2. vel redacta ad easdem partes 9. ad 10. & ratio M 3 $\frac{3}{6}$ ad rationem N 2. vel 20. ad 12. multiplicentur simul, & fiant 9. ad 6. Ratio 9. ad 6. erit ea, quæ ex ratione denominatorum, & ideo ipsarum rationum consurgit, vel alio modo erit proportio 180. ad 120. vt docuimus prop. 34. huius.

PROBL. VIII. PROPOS. XXXVIII.

Datam rationem in duas ipsam componentes rationes partiri, quæ inter se datam obtineant rationem.

Sit data proportio A 6. ad B 27. & oporteat hanc proportionem in duas diuidere, quæ inuicem datam obtineant rationem E 2. ad E 4.

Rat. Prop. data A 6 / B 27 — E 2 / F 4 — A 6 / D 3 — C 9 / D 3 — C 9 / B 27

Fiat itaque, vt refertur F ad E, quòd sic refertur A ad aliud D. Deinde inter D, B media proportionalis statuatur C. Dico factum esse, quòd proponebatur, & rationem AB esse diuisam in rationes AC, & CB, quæ inter se rationem obtinent, quæ est inter E, & F.

Probatur. Quoniam B est ad C, vt C ad D per constructionem, erit etiam inuertendo D ad C, vt C ad B: sed vt A ad D, sic ex 3. huius est ratio AC ad rationem DC ob eundem terminum C, & ratio DC, est eadem, ac CB. Vnde ratio AC ad rationem CB est A ad D hoc est ex constructione, vt E ad F.

Proportio autem AB componitur ex proportione AC, & CB interposito termino C ex 10. huius. Ergo Ratio AC, & ratio CB sunt duæ rationes, quæ se habent, vt E ad F, quæ componunt proportionem AB.

PROBL. IX. PROPOS. XXXIX.

Datam rationem diuidere.

Sit ratio AB $\frac{4}{7}$ diuidenda per rationem CD $\frac{1}{2}$ fiat, vt D ad C, ita B 7. ad aliud, & prodibit E 4 $\frac{1}{2}$, itaque ratio AB $\frac{4}{7}$ subductâ ratione CD $\frac{1}{2}$ remanet ratio E 4 ad 4 $\frac{1}{2}$, ideſt 20. ad 21.

Probatur. Nam toties AB continet rationem CD, quoties A continet E, quia A, & E sunt denominatores Rationum; & sicut diuiso numero quotiens demonstrat vices, quibus diuisor continetur in diuisore; sic, & hic denominatores A, & E ostendunt quoties ratio CD continebatur in ratione AB nempe, vt 20. in 21.

Si verò agatur de numeris, vel de quantitatibus rationalibus; fundamenta Rationum cùm terminis alternatim multiplicentur.

V. g. Sit proportio AB $\frac{1}{7}$ auferenda à proportione CD $\frac{1}{5}$ multiplicetur fundamentum huius 3. cum termino alterius 7. & producetur 21. Deinde fundamentum 4. alterius cum termino huius 5. & fient 20. eritque proportio $\frac{4\cdot5}{7\cdot5}$, illa, quæ erit quotiens, & demonstrabit, quomodo proportio $\frac{1}{7}$ contineatur in proportione $\frac{1}{5}$.

Probatur. Nam fundamenta 3. & 4. quoque multiplicentur simul; producent 12. Itaque quia 3. multiplicauit modo 4. & prius 7, erit eadem proportio 4. ad 7. quæ genitorum 12. ad 21. ex prop. 17. lib. 7. Proportio verò 12. ad 21. est composita ex proportione 12. ad 20. & 20. ad 21. ex propos. 10. huius: Proportioque 12. ad 20. est eadem, quę 3. ad 5. cùm sint 12. & 20. numeri geniti ab eodem 4. qui vtrosque 3. & 5. multiplicauit ex propos. 17. lib. 7. Quare subducta proportione 12. à 20. eadem, quę 3. ad 5. remanebit proportio 20. ad 21.

Quod autem ratio 20. ad 21. sint quoque quotiens, patet; si inuicem multiplicentur termini: Fiet enim terminus 35. communis vtrisque, vt suprà docuimus propos. 13. huius; ideoque ex propos. 2. huius erit ratio $\frac{2\cdot0}{3\cdot7}$ ad rationem $\frac{2\cdot1}{3\cdot1}$, vt 20. ad 21. quare proportio 20. ad 21 indicabit, quoties ratio $\frac{2\cdot0}{3\cdot7}$ contineatur in ratione $\frac{2\cdot1}{3\cdot1}$. Vnde proportio $\frac{2\cdot0}{3\cdot7}$ erit quotiens.

COROLLARIVM.

Hinc patet idem esse in proportionibus subducere, ac diuidere, sicut idem est multiplicare, & componere, quia subductâ vnâ ratione ab aliâ, ratio residua est quoque quotiens, & multiplicata ratione per aliam, vt diximus, fit ratio composita.

PROBL. X. PROPOS. XL.

Datis rationibus, quæ inuicem habeant rationem inæqualitatis assignare excessum minoris proportionis super maiorem.

A 3 C 6 — B 12 D 10 — E 7 — 2 / 10 — 9 — I 1 — 12 — K 5

Sit data ratio AB $\frac{1}{2\cdot2}$, & Ratio maior CD $\frac{6}{10\cdot3}$. Fiat, vt D ad C, ita B ad aliud exhibebit E 7 $\frac{2}{10}$. Ideoque ex 4. huius, vt AB ad CD rationem; ita erit A ad E: ponitur autem maior ratio CD ratione AB; erit ergo maior E quantitas, quantitate A. Subducatur itaque, & auferatur ab E quantitas æqualis ipsi A 3. & remanebit residuum E 4 $\frac{2}{10}$ denominatoris subducto denominatore A 3. Fiat itaque, vt denominator A 3. ad residuum denominatoris A 4 $\frac{2}{10}$ sic AB I $\frac{1}{2\cdot2}$ ad aliam rationē IK ex propos. 9. huius, & 5. Dico *rationem* IK *esse excessum, quò superat ratio* CD *rationem* AB.

Probatur. Quoniam, vt A ad E totum; denominatores, sic AB ad CD, rationes. Ergo, ex 22. 1. 5. vt subtractū ad residuum denominatoris E, sic AB ablatū ad residuum rationis CD. Sed vt A ablatum ad residuum denominatoris E, sic ex effectione est ratio AB ad rationem IK. Ergo ratio IK est eadem, ac residuum rationis CD. Quia eadem vna ratio AB eisdem CD, & IK dicit eandem proportionem, quam A denominator ablatum ad residuum denominatoris, E, quod erat ostendendum.

Hęc autē IK est eadē ac 3. ad I $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{0}$ vt patet, solūq; excessus sub alijs terminis, si placeat exquiri potest. Patet verò 3. ad 4 $\frac{2}{10}$, vel 30. ad 42. esse, vt denominator 4. proportionis AB $\frac{3}{2\cdot2}$ ad denominatorem IK 1. $\frac{2}{2}$ ad 5. vel 21. ad 60. qui est 2. & $\frac{2\cdot9}{2\cdot1}$, quoniam redacti ad numeros planiores sunt 60. & 84. qui sunt in eadem proportione, ac 30. ad 42.

EXPENSIO VI.

De proportionum similium continuatione.

Sicut datis duabus quantitatibus, vel tertia, vel media proportionalis reperitur, & datis tribus quarta proportionalis reperitur, idem sentiendum est de proportionibus ipsis, in quibus si detur duæ, media, vel extrema poterit inueniri, & tribus datis quarta perscrutari valebit.

PROBL. I. PROPOS. XLI.

Inter duas datas rationes mediam rationem proportionalem inuenire.

Datæ sint rationes AB $\frac{2}{3}$, & GH $\frac{4}{9}$, inter quas oporteat reperire mediam proportionalem. Fiat, vt H ad G, nempe 10. ad 9. sic 5. ad aliud E 4 $\frac{1}{2}$. Interque A 2. & E 4 $\frac{1}{2}$ media proportionalis quantitas inueniatur A 2. K 3. & E 4 $\frac{1}{2}$. Deinde fiat, vt A 2. ad K 3. sic ratio AB $\frac{2}{3}$ ad rationem CD $\frac{3}{4\cdot5}$ ex propos. 9. huius, vel 5. Dico *hanc esse mediam proportionalem, inter quas* AB, *&* CD, *&* GH *in continua proportione.*

A 2 G 9 — B 5 H 10 — A 2 K 3 E 4 $\frac{1}{2}$ — AB 2 / 5 — CD 3 / 5 — GH 10 / 9

Probatur. Nam, vt A ad K; sic effecimus rationem AB $\frac{2}{3}$ rationi CD $\frac{3}{4\cdot5}$ correspondere proportionem. Ratio autem A ad E est duplicata rationis A ad K ex 10. h. erit quoq; ratio A ad E duplicata rationū AB $\frac{2}{3}$ ad CD $\frac{3}{4\cdot5}$. Sed ratio A ad E est eadem, quæ ratio AB ad rationem GH cùm A, & E sint denominatores ex 4. huius, Ergo AB ad rationem GH est duplicata rationis AB ad CD, & sic CD est media proportionalis, quæ exposcitur, & AB, CD, & GH erunt in continua proportione.

PROBL. II. PROPOS. XLII.

Datis duabus rationibus tertiam rationem proportionalem inuenire.

Dentur duæ rationes AB $\frac{2}{3}$, & CD $\frac{6}{4\cdot3}$, & oporteat ipsis tertiam proportionalem inuenire.

Fiat, vt D ad C, sic B ad aliud 1. 3. & $\frac{4}{4\cdot3}$, vt autem A 2. ad 1. 3 $\frac{6}{4\cdot3}$, seu 24. ad 40. sic fiat ratio CD ad rationem aliam GH 3 $\frac{1}{3}$ ad 3. vt docuimus pr. 5. ad 3. Dico, quod proportio GH est tertia proportionalis, & quod Ratio AB. & GD sit in continuâ Analogiâ trium AB, CD, & GH.

A 2 C 8 — B 5 D 12 — G 3 $\frac{1}{3}$ H 3 — B 5 I 3 $\frac{1}{3}$

Probatur. Nam ratio AB est ad rationem CD ex propos. 4 huius, vt A ad 1; sed vt A ad 1, sic facta est ratio CD ad rationem GH: Ergo Ratio CD ad

GH habet eandem proportionem, quam AB ad CD. Vnde tres AB, CD, & GH sunt in continuâ Analogiâ.

PROBL. III. PROPOS. XLIII.

Datis tribus rationibus quartam proportionem adinuenire.

SInt datæ tres rationes AB $\frac{1}{1}$, CD $\frac{2}{4}$, EF $\frac{3}{1}$, & oporteat inuenire quartam proportionalem.

Fiat, vt D 4. ad C 2. sic B 3. ad aliud X, 1 $\frac{1}{2}$; inuenianturque ex propos. 6. huius ad rationem EF alia ratio GH, quæ sit in proportione, vt A, 1 ad X, 1 $\frac{1}{2}$, & erit GH $\frac{9}{10}$. Itaque GH est illa, quæ exquiritur, proportioque AB est ad proportionem CD, vt ratio EF ad rationem EH.

A 1		C 2		X 1	I / 2		E 3	G 9	
B 3		D 4					F 5	H 10	

Probatur. Ratio AB est ad rationem CB ex 4. huius, vt A ad X, sed vt A ad X; ita effecta est ratio EF ad rationem GH: Ergo ratio AB ad rationem CD erit, vt ratio EF ad rationem GH.

Vbi vides, quòd ad hoc, vt rationes ipsæ sint similes, non est necesse, quòd termini ipsi sint proportionales, & quod ita sit A 1. ab B 3. vt C 2. ad D 4. nec E 3. ad F 5. vt G 9. ad H 10. vti est necesse in similitudine ipsorum terminorum ad hoc, vt enim similis sit ratio A ad B, quæ C ad D, necesse est, vt etiam ipsi termini sint similes, & A 2. sit ad B 4. vt C 3. ad D 6. & tunc ratio 2. ad 4. dicetur eadem, quam 3. ad 6. Sed in rationibus ipsis AB $\frac{1}{3}$ ad Rationem CD $\frac{2}{6}$ est, vt ratio EF $\frac{1}{1}$ ad rationem GH $\frac{9}{10}$, & tamen termini ipsi sunt dissimiles: Imo, & rationes ipsæ: neque enim eadem ratio est $\frac{1}{3}$, quæ $\frac{2}{6}$, aut $\frac{1}{3}$, quæ $\frac{9}{10}$, vt patet; & tamen ita est AB ratio ad rationem CD, vt EF ad GH, quod, & ipso experimento percipies, si reducas omnes proportiones ad eosdem terminos AB $\frac{4}{12}$ CD $\frac{6}{12}$ EF $\frac{10}{10}$, & GH $\frac{9}{10}$: nam cum istæ proportiones habeant eosdem terminos erunt, vt antecedentes, & erunt, vt A 4. ad C 6. sic E 30. ad G 45. vt patet.

PROBL. IV. PROPOS. XLIV.

Propagare proportiones secundum datam rationem.

SIt data ratio AG $\frac{3}{1}$, & oporteat reperire rationē triplicatam ad rationem AG, sed in ratione A ad G.

Disponantur quantitates proportionales ab eadem quantitate incipientes in ratione AG 2. ad 3.

A 2	B 4	C 8	D 16		E 32		
A 2	H 6	L 18	M 54		N 162		
			K 36		P 108		

Dico, quod factum est id, quod requiritur. Nam proportio tertia DM habet ad proportionem ad primam EH duplicatam proportionem B ad H, & EN quadruplicatam ad eandem BH eius, quam habet B ad H.

Nā expr. 8. tr. 16. p. 1. D ad M habet ꝓportionē triplicatā eius, quæ est B ad H. Fiat, vt H ad B, sic M ad K, eritque ex 4. h. ratio DM ad rationem BH, vt D ad K. Ratio verò DK componitur ex proportione D ad M, hoc est, vt dixi triplicata rationis B ad H eius, quam habet A ad A, cuius denominator 1, & M ad K, quę ex effectione est eadem, ac ratio HB. At qui rationes BH, & HB producunt compositæ rationem æqualitatis ex propos. 19. huius.

Ergo ratio D ad K componitur ex ratione eius, quam habet A ad A triplicatā rationis BH, & ideo duplicatam B ad H, & ratione æqualitatis, sed Ratio æqualitatis nihil addit ex Coroll. propos. 15. in compositione rationum, ergo ratio D ad K est duplicata rationis B ad H. Sed vt D ad M, ita ratio D K ad rationem B H, ergo ratio DM ad rationem BH habet duplicatam proportionem.

Ita dicas de ratione BN, quæ est triplicata rationis BH. Fiat enim, vt H ad B, sic N ad aliud P. Erit; ex 4. h. E ad P, vt proportio BH ad proportionē ED.

Ratio vero E ad P componitur ex proportione E ad N, & N ad P, & ideo quadruplicata eius, quam habet A ad A, & triplicata eius quam habet B ad H, & H ad B, siquidem ex effectione NP est eadem ac HB, sed HB, & BH producunt rationem æqualitatis, quę nihil addit in ꝓportionibus, ideo ꝓportio E ad P est triplicata rationis, quam habet B ad H, sed vt est E ad P, ita est ratio BH ad proportionem EN, ergo proportio EN est triplicata rationis BH.

Et idem erit si cupias quintuplicare rationes, & sextuplicare addendo terminos in eadem proportione.

COROLLARIVM.

ERuitur itaque ex hoc Tractatu multos vnius cuiuscumque proportionis reperiri denominatores; & si agatur de denominatoribus numericis.

Primo reperitur denominator propriè dictus, qui ita est ad vnitatem, vt aliqua quantitas ad suam partem, V. g. Proportio 6. ad 3. habet denominatorem propriè dictum numerum 2. quia ita 2. est ad 1. vt 6. ad 3. ex hoc sensu multi numeri, nempe omnes primi in ijs proportionibus, non possident alium denominatorem, nisi se ipsos; quia ex propos. 1. lib. 8. Element. sunt minimi in illis rationibus, & ipsis minores eiusdem proportionis dari nequeunt. vt sunt $\frac{2}{1}$ $\frac{3}{1}$, & de istis intelligitur principium illud, quod multiplicantes consequens producant antecedens, vel diuidentes iuxta exigentiam proportionis maioris, vel minoris inæqualitatis.

Secundo adesse denominatores impropriè dictos, sub quo genere, ne dum numerici; sed, & quantitatis continuæ concluduntur, nempe quantitates; quæ sint in proportione ad aliquam suam partem, vt duæ quantitates sunt ad inuicem. quarum proportionem denominant; & hoc sensu omnes etiam irrationales proportiones obtinent suum denominatorem; si non minorem saltem maiorem; vt proportio 6. ad 3. habet denominatorem $\frac{6}{3}$ $\frac{8}{3}$, & irrationales, vt explicauimus in definit. 3. h.

Tertio adesse denominatores proportionales, qui sua habitudine ad aliam ostendunt proportionalitatem, quam habet vna ratio ad aliam V. g. proportio 6. ad 3. habet denominatorem 2. & 4. ad 10. numerum 2 $\frac{1}{3}$, vel prima 4. & secunda 5. vel prima 12. & secunda 15. Isti ergo omnes denominatores sunt proportionales, quia suis partibus

tibus idem officium exequuntur, quod denominatores simplices 2. & 2 $\frac{1}{2}$.

Quarto reperiri denominatores proportionis maioris inæqualitatis; qui exprimuntur numeris integris etiā fractionibus copulatis, sed tali modo, vt vel vnitas in propriè dictis, vel pars aliquota suppositā subintelligatur, vt $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{2}$ proportionis 2. ad 6. quo significetur, antecedens continere in se duas partes, quarum consequens est vna. At minoris inequalitatis vnitas, vel pars aliquota superpositā est subintelligenda, vt $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$, quo notetur quantitatem antecedentem esse partem, vel secundā, vel tertiā sequentis. Id tamen scribi non solet, eo quia commodè non possit, cum denominator, cui adhæret fractio (vt multoties euenire solet) ad modum fractionis exarari non debeat, nec possit; quamuis si denominatores calculo subigantur interest, vt ad eorum significationem percipiendam aliquo modo notetur.

In proportionalibus autem denominatoribus nullo modo id sit necessarium; cùm sufficiat habitudo ipsa quantitatum ad exprimendam proportionem rationum.



TRACTATVS XVIII.

De Flexis.

VIsis lineis rectis ſecundum ſe, antequam videamus dè ipſis, prout circulo inexiſtunt, vel ſecant, vel eum tangunt,& vt latera quoque ſunt omnium figurarum, quæ circulo deſcribuntur, & ideo omnes etiam, vt earum latera conſiderentur; priùs de ipſis Flexis agendum eſt, & in primis de circulo.

EXPENSIO I.

De circuli deſcriptione, atque menſura.

FLexæ; aliæ ſunt, quæ ex corporum ſectionibus exoriuntur, quæ per motum puncti, & lineæ in plano nullo modo explicari poſſunt; aliæ, quę in plano ſolùm deſcribuntur, itaut ad corpus nullam relationem poſſideant, aliæ verò, quæ & plano deſcribi queant, & tamen ſectiones quoque corporum ſint; aliæ, licet corporum ſectiones non ſint; ſolis tamen corporibus rotundis,& flexis deſcribi queunt.

Primi generis ſunt, Hiperbola, & aliqua talis quæ per lineæ motum, vel puncti nullo modo explicari poſſunt, vel ſaltem de facto non explicantur, & ſectiones Coni ſunt. Quarti verò generis Helix Cilyndro, ſeu Cono, ſeu ſphęre circumuoluta, quæ eſſentialiter poſcunt illud ſubiectum; nec plano deſcribi queunt. Secundi verò generis eſt ſpiralis Conchilis, Aſymtotos; & huiuſmodi. Tertij verò Circulus, qui & plano, & ſphera eodem modo deſcribi poteſt, ſicut Ellipſis, & Cylindro Conoque, & etiam plano duobus centris adhibitis, vel motu lineæ per angulum rectum, vt infrà. Hic agemus de lineis, quæ plano deſcribuntur: reliquæ enim lineæ, cognitiones ipſorum corporum poſcunt: vnde eas ſuo loco ſeruabimus: at hic in primis de circulo.

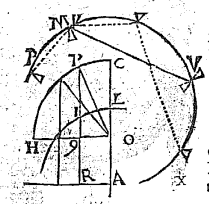
Licet facilis deſcriptio circuli ſit cum planum liberum eſt, & breue: cum tamen magnum, & impeditum non eſt adeo facilis: quare de hoc loquentes ſit.

PROBL. I. PROPOS. I.

Arcum circuli, cuius centrum haberi nequeat, deſcribere.

SIt deſcribendus circulus, & centrum A haberi nequeat. Fiat angulus VMP obtuſus, & claui figantur plano in punctis M, & P, moueanturque altera lambendo clauos, V. g. à P per M vſque ad V; vertex enim M deſcribet portionem circuli PMV, quam produces. Si latus MP transferas per arcum factum: nam aliud latus MV ſua extremo arcum XV continuabit.

Probatur ex propoſ. 24. lib. 3. Nam in ſegmentis æqualibus eiuſdem circuli capiunt anguli æquales. Cum ergo angulus VMP, ſit ſemper æqualis, erit ſemper in æquali circumferentia eiuſdem circuli vertex eius M, & eius extrema V, & P; quare eundem circulum deſcribent. Huius autem circuli inuenies diametrum ex 1. lib. 3. vel per calculos.



* Sed etiam alio modo deſcribi poterit. Nempe faciendo centrum O in alio loco, & ducendo circulum CH cum non poſſit in A, nam LC longitudo, ſeu maior ſeu minor ea fuerit menſurata à circulo CH in qualibet linea parallela ipſi OC velut eſt PI ſuo extremo I circulum deſcribet.

Probatur. Nam ablato impedimento ſit AL radius æqualis radio OC, & ducatur perpendicularis AR ad AO. Cum ergo ſit LA æqualis OC: ablata ergo communi LO, erit LC æqualis ipſi OA: ſed IP eſt æqualis LC ex hypotheſi. Ergo & OA, & conſequenter æquali QR, & ideo QR erit æqualis IP: ſi addatur itaque QI vtriſque erit RI æqualis QP; ſed QP ſuo extremo P eſt in circumferentia circuli: Ergo etiam RI vel PI ſuo extremo I erit in circumferentiâ circuli æqualis.

THEOR.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. II.

Secto angulo alicuius trianguli biſariam, ambo crura ad baſim totam, habent eandem proportionem, quam ipſum crus ad ſegmentum baſis ſibi vnitum.

SIt triangulum ABC. Diuidaturque angulus ad A biſariam per lineam FA. Dico *quod* AB, & AC *ſimul eandē proportionē habent ad* BC *crus alterū, quā ipſū crus* AC *ad ſegmentum baſis ſibi vnitum* FC.

Probatur ex propoſ. 3. lib. 6. ita eſt CF ad FB, vt CA ad AB. Quare *componendo*; ita CF, & FB baſis ſegmenta ſimul ad alterum ſegmentum baſis CF; vt crus AC, & crus AB ſimul ad crus AC illi ſegmento CF vnitum: Quare, & *permutando* ita erit CF, & FB ſegmenta baſis ad crura AC, & AB, vt ſegmentum baſis CF ad crus ſibi vnitum AC. Vel *inuersè* CA, & AB ad CB, vt CA ad CF. Hoc eſt fundamentum Archimedęo demonſtrationis ſequentis.

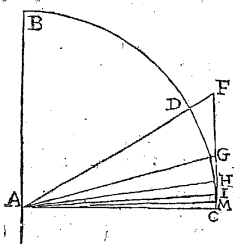


THEOR. I. PROPOS. III.

Cuiuſlibet circuli peripheria eſt tripla diametri, & adhuc parte ſeptima ipſius inſenſibiliter minor eſt.

SIt circulus, ſeu quadrans, quòd ſufficit ABC. Sitque in eo angulus DAC ad centrum 30. Gr. Latus CF trianguli AFC erit dimidium baſis FA, ex illis, quæ dicta ſunt lib. 4. elem. propoſ. 15. Siquidem eſt latus hexagoni FV cuius duplum, ſeu 60. Gradus ſubtendit, & æquat baſim AF, & cum CF ſit tangens, CAF triangulum eſt rectangulum.

Progreſſ. 1. Si ergo CF ponatur 153. partium FA eius dupla erit 306. Vnde ex propoſ. 11. elem. lib. 2. exquiremus latus AC. Nam quadratum numeri 153. eſt 23409, quo dempto à quadrato numeri 306. quod eſt 93636. remanet quadratum 70227. à quo ſubducta radix quadrata ex prop. 20. Tract. 13. dat latus AC paulo maius, quam 265. vnde iunctum ſimul lateri AF 306. erunt 571.



Progreſſ. 2. Quia itaque, vt ex Lemmate duo crura AF, & AC 571. ſunt ad baſim CF 153. vt vnum crus AC ad ſegmentū ſibi vnitū CG diuiſo angulo FAC biſariam in G, erit crus AC ad ſegmentum CG paulo maius in proportione, quam 571. ad 153. & ideo poſito. quòd CG ſit 153. AC crus excedet 571. ſed non integra vnitate, neque enim perueniet ad 572.

Progreſſ. 3. Cum ergo habeamus nota AC, & CG in triangulo ACG rectangulo, eodem prorſus modo progrediemur, vt in primo progr. Nam diuiſo angulo GAC biſariā in H eodē tenore argumēti procedemus. Quia poſuimus ſegmentum CG eſſe 153. partium quadratum eius erit, vt dictum eſt 23409. & quia poſuimus AC eſſe 571. & paulò magis, quadratum eius erit 326041. & ſimul faciēt ferè quadratum AG ex 11. lib. 2. elem. partium 349,450. licet quadratum ipſius AG ſit paulo maius, eiuſque radix paulo maior, quam radix 591 $\frac{1}{8}$ prædicti numeri 349450. Vnde proportio AG ad CG erit 592 $\frac{1}{8}$, & aliquid amplius ad 153. baſim CG. & ſi iungantur ſimul duo crura AC, & AG 571. & 591. & $\frac{1}{8}$ eruntvt 1162 $\frac{2}{8}$ ad baſim CG 153.

Quamobrem arguentes, vt ſecundo progreſſu. Quia ex propoſ. 2. duo crura AC, & AG ad baſim CG ſunt, vt crus AC ad ſegmentum ſibi vnitum CH, ideo ſi ponatur CH 153. partium erit crus AC 1164 $\frac{2}{8}$, & paulo maius.

Progr. 4. Secabimus turſus in triangulo HAC angulum A in duas æquas partes in 1: & eodem argumentandi ritu procedemus. Iungemus enim quadratum AC paulò maius, quàm 50534. $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{4}$ quadratum inquam numeri 1164 $\frac{2}{8}$ ei cruri penè æquale, & quadratum baſis CH 23409, & facient quadratum 1373943 $\frac{3}{4}$, quod penè æquabit duo quadrata facta ex crure AC, & baſi CH, quadrato ipſi ex crure AG ex 11. lib. 2. æqualia, & deficiet, nec quidem integra vnitas; vnde extracta radix quadrata dabit numerū 1172 $\frac{1}{8}$, qui proximè æquabit crus HA. Vnde HA erit ad CH ferè vt 1172 $\frac{1}{8}$ ad 153. & paulò ampliùs, & ſi ſimul iungantur duo crura AH 1172 $\frac{1}{8}$, & AC 1164 $\frac{2}{8}$ erunt, vt numerus 2332 $\frac{3}{8}$ ad 153. & paulò ampliùs, quā ipſe numerus 2334 $\frac{3}{8}$. Quapropter cum duo crura AC, & AH ſint ad totam baſim CH; vt crus AC ad ſegmentum CI, ob diuiſum angulum biſariam in I. Si ponamus hoc ſegmentum CI eſſe 153. partium crus AC, erit 2334 $\frac{3}{8}$, & paulò ampliùs.

Progreſſ. 5. Secabimus deinde angulum IAC in M biſariam, iungemuſq; quadratum baſis IC ſemper idem 23409. & quadratum cruris AC 2334 $\frac{3}{8}$ quod eſt 5448723 $\frac{1}{64}$, & paulò ampliùs, fietque quadratum 5472090 $\frac{1}{64}$, cuius radix 2339 $\frac{1}{4}$ eſt crus IA, & etiam paulo auctior; Vnde crus IA erit ad CI, vt 2339 $\frac{1}{4}$ proximè ad 153. & crura ſimul poſita CI 2339 $\frac{1}{4}$, & AC 2334 $\frac{1}{4}$ erunt vt 4673 $\frac{1}{4}$, & paulò ampliùs, quam ipſe numerus ad 153. Quaderè, ſi ponatur CM ſegmentum 153. ex Lemmate, & 2. propoſ. huius erit crus AC paulò maius, quam 4673 $\frac{1}{4}$ ſed non maius adeo, vt æquet 4674.

Progreſſ. 6. Sicque iam habemus multilaterum circulo circumſcriptum, cuius ſemilatus CM eſt 153. ad ſemidiametrū AC, quod eſt paulo maius, quā 4673 $\frac{1}{2}$, quia ergo DC eſt tertia pars quadrantis dimidium GC, erit ſexta; & huius dimidium CH duodecima, & huius dimidium CI vigeſima quarta, & huius dimidium CM quadrageſima octaua pars erit quadrantis. Vnde CM erit ſimilatus multilateri, quod ſubtendet 48. partem quadrantis. Sed duplicatum, vt ſit latus integrum ſubtēdet 24. partem quadrantis; & ideo ob quatuor quadrantes multiplicatum per 4. nonageſima ſexta pars totius circuli; nempe Polygonum laterum 96. & quia ſemilatus eius, vt probauimus progreſſ. 5. eſt ad ſemidiametrum, vt 153. ad 4673 $\frac{1}{2}$ ferè; ideo totum

tum latus erit ad totum radium, vt 153. ad 4673 $\frac{1}{2}$, cum ita sit dimidium ad dimidium, vt totum ad totum ex propos. 18. lib. 5. Quapropter si multiplicemus latus CM 153. per 96. latera, quibus polygonum constat, habebimus latera totius polygoni 14688.

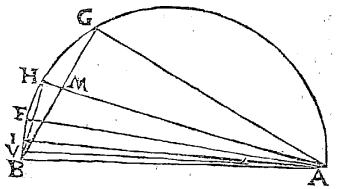
Si ergo dicas, regulam auream adhibendo si 22. dant 7. ideſt si 3. & $\frac{1}{7}$ dant 1. quid 14688. ? & exhibebunt 4673 $\frac{1}{3\frac{1}{7}}$. Quare Polygoni ambitus ad 4673 $\frac{1}{2}$ habet minorem proportionem, vtpote ad numerum maiorem, quam ad 4673 $\frac{1}{3\frac{1}{7}}$. Quare, & ad ipſum diametrum maius, quam 4673. $\frac{1}{2}$ habebit adhuc polygoni ambitus minorem proportionem, vtpote adquid maius. At circumferentia, vtpote interior ipſi polygono eſt minor, quàm ambitus polygoni: Ergo dicet tanto ampliùs minorem proportionem ad diametrum ex propoſ. 8. lib. 5. ideſt, quàm 14688. ad 4673 $\frac{1}{3\frac{1}{7}}$, vel quàm 22. ad 7.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. IV.

Triangulum in ſemicirculo, cuius vnus angulus ſit medietas alterius trianguli in eadem ſemicirculo; habet crus maius ad minus in eadem proportione, quam habent duo crura maioris trianguli ad totam baſim.

SIt triangulum ABH in ſemicirculo AGB, cuius angulus ad A, ſit medietate minor, quàm angulus A in triangulo maiori BAG. Dico, quòd AH crus refertur ad HB latus, vt duo cruta AG, & AB trianguli maioris referuntur ad baſim BG.

Probatur. Triangula AHB, & paruum MBH ſunt æquiangula, quod ſint rectangula, & in æquali peripheria BH, & HG ex 21. lib. 3. Ergo latera in eadem proportione verſabuntur ex propoſ. 4. lib. 6. Ergo erit ita proportionatum crus AH maius in triangulo magno ad ~~crus~~ BH malus crus in paruo, vt ipſum BH crus quoq; minus in magno ad HM in paruo triangulo crus minus, ideſt vt AH ad BH, ſic BH ad HM. Et ita erit baſis BA in magno ad baſim BM in paruo, vt crus minus BH trianguli magni BAH ad crus minus MH parui trianguli BMH.



Sed iam dictum eſt, quòd HA ad HB prorſus eiuſdem proportionis reperiatur, vt HB ad HM parui. Ergo etiam hæc duo crura reſpicient baſes eadem proportione, quà reſpiciebant BH, & HM ex 16. lib. 5. Ideoq; ita erit AB baſis ad baſim BM, vt crus AH ad crus BH. Sed ex 2. huius propoſit. vt BA, & AG, vt vnum ſumpta reſpiciebant baſim GB, ſic crus BA reſpiciebat BM crus ſibi vnitum, & ſegmentum baſis maioris trianguli BAG. Ergo etiam AH crus maius ad BH crus minus eandem proportionem dicet, quam duo crura BA, & AG ad baſim BG trianguli maioris BAG dicebant.

THEOR. II. PROP. V.

Circumferentia cuiuſlibet circuli diametrum continet ter, & inſuper magis, quàm eius octauam partem.

PRobatur ferè eodem modo, quò ſecunda propoſitio. Fiat itaque circulus, ducaturque diameter AB, & latus hexagoni BG. Quod BG ſtatuatur partium 780. erit diameter AB, vtpote eius duplum partium 1560. cuius quadratū erit 2433600. Quadratum verò lateris hexagoni BG 608400. quod deptū à quadrato diametri remanet 1825200. quadratum lateris AG, cuius radix quadrata eſt paulò minor, quam 1351. Vnde latus AG erit paulò minus, quàm 1351. & ſimul vtrumque crus AB, & AG erit paulò minus, quam 2911. & baſis BG latus hexagoni part. 780.

Progr. 1. Diuidatur angulus ad A bifariam linea AH, & iungatur BH, fietque rectangulum ABH; Quia ergo, vt 4. propoſ. huius oſtenſum, ita eſt vtrumque crus AG, & AB ab baſim GB, vt crus AH ad crus BH; ideo, ſi ponatur; quòd crus BH ſit partium 780. crus HA erit partium 2911. nempe, vt eſt baſis GB ad duo crura AB, & AG. Ideoque ex quadratis laterum rectanguli BAH inquiremus baſim AB: cum ergo quadratum cruris BH, ſit 608400. quòd crus ſupponitur 780. partium, & quadratū AH cruris, quod ponitur hoc progr. 2911. partium ſit 8473921. ſi vniantur ſimul, vt fiat numerus 9082321. hoc erit quadratum baſis AB rectanguli AHB, cuius radix quadrata eſt 3013 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ paulò auctior, & ideo AB erit paulò minor partibus 3013 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$, & ſimul vtrumque crus AB, & AH part. 2911. erunt partiū 5924 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$, & crus HB 780.

Progr. 2. Secto rurſus angulo ad A in triangulo BAH bifariam per lineam AF, ex prop. 4. huius, ita erit vtrumque crus BA, & AH ad baſim HB, vt crus AF ad crus BF. Vnde, ſi ſtatuatur baſim BF eſſe 780. partium crus AF, erit parùm minus, quàm 5924 $\frac{1}{4}$; nimirum, vt baſis HB ad duo crura AB, & AH: Quare ſi horum quadrata vniantur ſimul in rectangulo BFA dabunt baſis quadratum BA: cùm ergo quadratum BF ſit 608400. & quadratum FA 35102662. Iuncta itaque ſimul dabunt quadratum 35711062. cruris BA, cuius radix quadrata eſt 5975 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$, & paulò magis. Itaque crus BA erit paulò minus, quàm 5975 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$, quod iunctum cruri AF 5924 $\frac{1}{4}$ facient numerum amborum crurum AF, & BA paulo auctiorem, quàm 11900. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ baſis verò BF erit 780.

Progreſſus 3. diuidatur rurſus angulus BAF in duas partes æquales per lineam AI, & per 4. propoſ. huius, ita erit vtrumque crus trianguli maioris BA & AF ad baſim BE, vt crus AI ad crus BI. Ideoq; ſi ſtatuatur baſis BI part. 780. erit crus IA par. 11900. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$, nempe vt baſis BF ad duo crura AB, & AF, & quia BIA eſt triangulum rectangulum: Ideo quadratum duorum crurum BI, & AI erit æquale quadrato baſis BA. Quadratum verò cruris AI eſt 1416. 28099. & quadratum BI eſt 608400. iuncta ſimul erunt 142 23690. cuius radix quadrata eſt 11926. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ paulò auctior: vnde AB baſis erit paulò maior quàm 11926 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$, quod iunctum cruri IA 11900. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$ dat 23826 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{6}$: baſis verò, ſeu crus IB erit 780.

Progr. 4. Diuidatur tandem angulus IAB bifariam linea AV, & quia ex propoſ. 4. huius ita eſt ſumma crurū AB, & AI ad baſim IB, vt crus AV ad crus VB; ideo diuiſo angulo BAI bifariā rectâ AV, ſi ſtatuatur crus VB 780. partium erit VA 238526; cuius quadratum eſt 5677068867. & iunctum quadrato cruris VB 608400. partium efficiet, quadratum AB 5683152 67. cuius radix quadrata eſt 23839 $\frac{4}{6}$, & paulò magis: vnde baſis AB erit paulo minor, quam prædictus numerus 23839 $\frac{4}{6}$.

Progreſſus 5. Cum itaque iam habeamus diametrum AB paulo minorem, quam 23839 $\frac{4}{6}$, & crus VB 780; habemus quoque latus polygoni 96. laterum. Nam BG eſt hexagonum, quadere eius dimidium BH erit duodecagonum, & huius dimidij dimidium BE figura 24. laterum, & huius BF dimidium BI 48. laterum, & tandem huius dimidium BV 96. Cùm itaque iam habeamus VB latus polygoni 96. laterum partium 780. ſi multiplicemus per 96. habebimus ambitum totius polygoni 74880.

Progreſſ. 6. Si ergo dicas auream regulam adhibendo; ſi 25. dant 8. ideſt 3. & $\frac{1}{8}$ dant 1, quid 74880. ? & factus computus exhibebit 23961 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$: Quare polygoni ambitus ad numerum 23839 $\frac{4}{1\frac{1}{7}}$ habet, vtpote ad numerum minorem maiorem proportionem, quàm ad 23961 $\frac{1}{3}$, & tanto maiorem ad diametrum ipſum, qui eo numero 23839. $\frac{4}{1\frac{1}{7}}$ paulò minor eſt: Sed circumferentia vtpote exterior ipſi polygono, maior eſt ipſius ambitu: Ergo obtinebit tanto maiorem proportionem ad diametrum ex prop. 8. l. 5. quàm 74880. ad 23961. $\frac{1}{3}$, vel quam 25. ad 7. ideſt, quam 3 $\frac{1}{8}$ ad 1.

Et hæc ad oſtendendam propoſitionem ſufficiunt, verùm ad hoc, vt videas præciſionem huius operationis, & quàm proximè ad verùm accedit fiat, vt 223. ad 71. ideſt quam 3. & $\frac{1}{7}$ ad 1, ſic 74880. ad aliud, & regula proportionum inuenies eſſe 23840 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{3}$: Quare polygoni ambitus ad numerum 23839 $\frac{4}{1\frac{1}{7}}$ dicet maiorem proportionem, quam ad numerum 23840 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{3}$, qui ſe habet, vt 223. ad 71. & tanto maiorem ad diametrum, qui eo numero 23839 $\frac{4}{1\frac{1}{7}}$ minor eſt, & tantò malorem proportionem dicet, circumferentia ipſa, quæ vtpote exterior polygono illo ipſo maior eſt.

Quare circumferentia ex hac quidem propoſitione maior euadit diametro ſumpto ter cum octaua ſui parte, vel ſumpto ter cum decem ex 71. partibus, at ex propoſ. 3. huius, circumferentia eſt minor, quam diameter ſumptus ter cum ſui ſeptima parte. Ergo inter has duas proportiones conſiſtit, altera quidem tripla ſeſquiſeptima, altera verò tripla ſeſquioctaua.

COROLLARIVM.

COllige ex iſtis duabus propoſitionibus 3. & 5. quòd circumferentia eſt inter duos iſtos terminos maiorem 3 $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{0}$, & minorem 3. & $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{0}$ diametri. Vnde ſi diuidatur circumferentia per 3 $\frac{1}{7}$ producetur numerus minor, quam diameter, at è contra ſi multiplicetur diameter per 3 $\frac{1}{7}$ producetur maior numerus, quam circumferentia: Si verò multiplicetur diameter per 3 $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{0}$ procreabitur minor numerus; quam circumferentia, & ſi diuidatur circumferentia per 3 $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{0}$ procreabitur maior numerus; quam diameter.

EXPENSIO I.

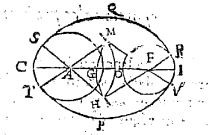
De circuli ſegmentis in figuram circularem coaptandis.

NOn mediocre Architecturæ, quandoque affert emolumentum, cæteriſque ſimilibus artibus diuerſorū circulorū ſegmenta varia in vnā flexam componere, vt molli quodam flexu nullos efficiant angulos: primo autem docebimus de ſegmentis in ſe ſe redeuntem lineam efficientibus, deinde de ſegmentis in ſpiralem ſe flectentibus.

PROBL. I. PROP. VI.

Segmentum circuli duos circulos tangens ducere,

SInt duo circuli, ſiue contigui, ſeu ſe interſecantes, ſeu quocumque ſpatio diſtiti, ſeu æquales, ſeu inæquales (hic exhibemus exemplum circulorum inequalium, & ab inuicem remotorū) Ducatur recta per eorū centra tranſiens CI: Hinc ſumantur rectæ æquales IG, & CO, quæ dimidium per centra tranſeuntis CI ſuperēt, & à centris illorum circulorum A, & F interuallo AO, & FG, duæ portiones circulorum educantur MGH, & MOH. punctaque interſectionum M, & H rectis coniungantur MAT, & MFV ſicut, & HFR, & HAS, & cęt. quæ traſeant per centra A, & F: Factoque centro in H, circuli deſcribatur arcus SQR, interuallo HS, vel HR. ſic facto centro in M alius arcus deſcribatur TPV, quem arcum *dico tangere circulos propoſitos*.



Probatur. Quia AM, & AO ſunt æquales additis portionibus æqualibus ſi radijs CA, & AS remanebunt æquales totæ HS, & CO. Sed CO ex conſtructione æquatur ipſi GI, & GI ipſi HR. Ergo HS, & HR erunt æquales. Vnde circuli arcus centro H tranſibit per puncta S, & R. Quòd verò GI ſit æqualis ipſi HR patet; quia GF, & FH ſunt æquales, additis itaque portionibus æqualiqus FR, & FI totæ GI, & HR remanebunt æquales.

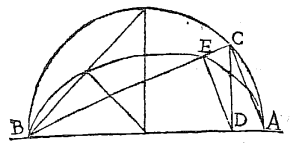
COROLLARIVM.

CVm verò circuli arcus tangit alium arcum, adeo bene inuicem ſe accommodant, vt nullum angulum efficiant, vt ſatis experimento conſtat: Vnde etiam addiſces lineam ſpiralem ducere ſegmentis circulorum productam: ſi omnia centra arcuum ſuper eandem rectam collocaueris, vt eſt centrum H arcus SQR. Alios verò modos; qui id exquiſitè efficiant, aliò reſeruamus, cùm eorum hic proprius locus non ſit.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Lineam oualem propriè dictam efformare.

PRæcedens figura propriè oualis non est, cùm non omnino ouum imitetur, quod altera parte acutius est; Propterea figuram exhibemus, quę illum præcisè imitetur, & ad inueniendas duas medias proportionales inter duas datas perutilis sit.



Super AB, semicirculo facto ACB, à puncto B plurimis chordis ductis, vt BC, & cæt. à punctis extremis demitantur perpendiculares, vt CD, & à puncto D, quo secant diametrum in quælibet chordam, vt EB (ex cuius extremo in diametrum perpẽdicularis CD deducta est) in quamlibet inquam talem chordam alia perpendicularis deducatur DE: hæc enim signabit punctum E in qualibet chorda, per quæ æquabili manu ducta linea oualem figuram describet, hanc autem apellamus oualem ex similitudine, quam cum ambitu oui consequitur.

PROBL. III. PROPOS. VIII.

Ope oualis figuræ inter duas extremas lineas duas proportionales proïcere.

SIt iam descripta linea oualis AEB. Super lineam maiorem ex datis AB, & in ouato altera minor data accommodetur BE, vt ex prop. 1. lib. 4. Eucl. quæ producatur vsque ad C, à quo demitatur perpendicularis CD: quia verò BEA est facta ex perpendicularibus à D, in E ductis, etiam talis erit ducta DE. Et ideo erit AB ad BC, vt BC ad BD, & BD ad BE: & ideo CB, & BD erunt duæ mediæ proportionales.

Probatur ob triangulorum æquiangulorum similitudinem ACB, & DEB ob parallelas AC, & DE, linea AB erit ad CB, vt DB ad BE. Sed vt AB ad CB, ita quoque ex Coroll. prop. 8. elem. est CB ad DB, & DB ad BE: ergo sunt quatuor AB, & CB, atque DB, & tandem BE continuè proportionales.

COROLLARIVM.

OVatum quoque describetur, si describantur, vt infra duæ ellypses, quarum maioris minor axis deseruiat pro maiori axi minoris Ellypsis; Ellypsium autem descriptionem infra dabimus.

EXPENSIO III.

De linea Spirali.

SPiralis linea digna fuit, quæ Archimedis animum alliceret in sui speculationem, tantumque geometram suarum proprietatum propallatorem haberet, vsus verò eius insignis est in volutis capitellorum in Architectura prouoluendis, alijsque similibus ornamentis. Verùm non ea omnia, quæ Archimedes demonstrault in medium adferemus de lineis eam tangentibus, earumque ad peripheriam, vel proportione, vel æqualitate, cùm ea inutilia sint; neque alijs de quibus agendum, deseruiant: ea verò speculatus est Archimedes; vt inueniret lineam peripherię circuli equalem, ob quam eam mensurare posset, quod tamen affectus non est.

DEFINITIO I.

Linea spiralis est linea formata à motu puncti per semidiametrum; dum semidiameter suo extremo puncto efformat circulum illis proportionaliter eodem tempore se mouentibus.

Sit IB semiradius in seq. fig. ponaturque moueri per peripheriam RDB eam efformando suo motu, & interim punctum ab I discedat, & per semidiametrum BI ascendat ad B, ita vt quot partes peripheriæ perfecerit extremum B, tot partes diametri perficiat punctum in eo se mouens, ex 16. V. g. partibus, in quibus diuisus est tam semidiameter, quam peripheria: hic motus puncti describit spiram BEFGPI punctatam.

DEFINITIO II.

Vocetur autem I principium spiræ mauens, & B principium circularis.

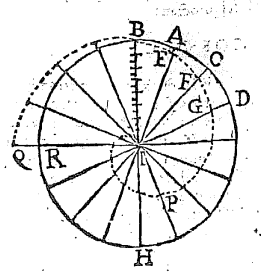
DEFINITIO III.

Recta linea IB spacium spirale concludens: spacium verò spirale BGPI primum, quòd si æquatur in Q secundum, & si post completam reuolutionem adhuc sequatur tertium, & sic deinceps.

PROBL. IV. PROPOS. IX.

Lineam spiralem in plano per puncta describere.

DIuidatur circumferentia BACD in tot partes æquales, quot placuerit, & in totidem semidiametros



midiameter (quò plures erunt eò exactior erit operatio) V. g. in 8. transferanturque singulæ partes semidiametri semper accipiendo vnam minus in singulos radios AI, & IC, & ID, & cæt. ductos à circumferentiâ ad centrum, quę impriment puncta EFG, & cæt. *Per ea itaque puncta manu æquabili ducatur flexa, quæ erit quæsita spiralis.*

Probatur. Quia punctum E est 15. partibus distans ab I in diametro IA sicut peripheria BRA est 15. partibus distans à puncto B. Sic in radio IC punctum F 14. partibus distat ab I, sicut BRHC 14. partibus peripheriæ distat à B. Sic punctum G 3. partibus distat ab I, sicut peripheria BRD 13. partibus distat à B. Ergo, cum eodem partium decremento, tum circumferentię, tum diametri puncta, tum punctum B in extremo diametri translatum in ACD, quàm punctum aliud per ipsum diametrum ascendendo à DI in G, F, & E hęc puncta erunt in spirali iuxta definit. 1. quòd, si secundum ambitum spiralis exoptemus, prolungentur diametri, vt IQ, & partes se eodem excessu superantes ex HI transferantur successiuè in diametros prolungatos, & per ea puncta flexa ducatur, quæ erit voluta in alias circumuolutiones promota.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. X.

**Si omnium circulorum æquali diminutione decrescentium arcus singuli componantur integrabunt dimidium ambitum totius maximæ peripheriæ, & dimidium maximi arcus. si verò à progressione terminus primus excludatur, tunc minus erunt dimidio ambitu eadem maximi arcus medietate.*

*PRæassumpt. supponendum est singulas peripherias, & earum partes, quarum diametri se æquali augmento superant, se etiam inuicem æquali augmento superare, & etiam subtensas illis partibus se superare æquali augmento: Ratio est, ex 43. 44. 45. tertij Elem. Siquidem ita inuicem sunt peripheriæ, & radij, & cordæ arcuum similium, & arcus similes, vt diametri: Cum ergo diametri æquali se superant augmento, etiam, & arcus, & cordæ, & peripheriæ æquali augmento se superabunt; Ideo in figurâ AH cùm arcus similes sint, AE, BC, & CD similes sint, cordæ, & arcus se æquali augmento superabunt. Quod diametri OX, OE, OC, OD se æquali augmento superent.

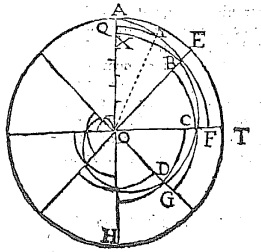
Sit itaque diuisa peripheria 8. circulorum similiter decrescentium in partes 8. & ex singulis accipiatur vnicus arcus V. g. AE, BC, & CD, & cæt. Dico, *quòd octo partes decrescentes istæ facient semicirculum AEH, & insuper dimidium arcus maximi IE.*

Sic si fit diuisa peripheria 16. circulorum æquali diminutione decrescẽtiũ in partes 16. Et ex singulis peripherijs accipiatur vnicus arcus, & omnes isti arcus 16. decrescentes ponantur simul. Assero, *quod facient lineam æqualẽ semigyro maximo, & insuper dimidio maximi arcus.* Nam arcus singuli sint partes 24. Ergo, vt deficiant æqualibus 16. decrementis singuli deficient 1 $\frac{1}{2}$, & stabit progressus Arithmeticus decres. 24. 22 $\frac{1}{2}$, 21. 19. $\frac{1}{2}$, 18. 16 $\frac{1}{2}$, 15. 13 $\frac{1}{2}$, 12. 10 $\frac{1}{2}$, 9. 7 $\frac{1}{2}$, 6. 4 $\frac{1}{2}$, 3. 1 $\frac{1}{2}$, 0, qui omnes efficient numerum 204. at verò maximus circulus, cuius vnica pars decima sexta constat 24. particulis, est 384. cuius medietas est 192. Quare dimidius gyrus est 192. particularum; & arcus decrescentes sunt 204. nempe 12. particulis ampliùs, quæ sunt dimidiata pars decimasexta gyri maximi; quæ constat 24. particulis.

Si verò pars decima sexta maximi gyri excludatur: tunc erunt reliqui arcus decrescentes minus, quàm semiperipheria maxima 12. particulis, erunt enim tantum 180. particulæ, & deficient 12. ad 192. dimidium gyrum maximum, cuius decimasexta pars est 24. particularum.

Ratio est petenda à propos. 9. de propor. numericis Arithmet. Tract. 14. vbi ostendimus maximum terminum vnium primo facere totam summam progressionis Arithmeticæ, si multiplicetur per dimidium numerum terminorum, siue autem terminus primus 1 $\frac{1}{2}$, & vltimus 24. per eundem numerum dimidium terminorum 8. multiplicẽtur seorsim, & faciant 12. 192. & deinde in vnam summam redigantur, siue simul vniantur, & postea multiplicẽtur per 8. idẽ num. fit 204. vt pr. 2. l. 9. el.

Numerus verò 24. per 16. numerum terminorum ductus facit totum circulum maximum. Vnde per dimidium 8. ductus efficiet dimidium circuli ex propos. 17. lib. 7. cum sint ita multiplicati 8. ad 16. vt geniti 192. ad 384. Ergo Progressionis Arithmeticæ summa erit maior circuli maximi dimidio 192, nempe genito ex multiplicatione maximi termini 24. per numerum dimidium terminorũ in termino primo 1 $\frac{1}{2}$, sed multiplicato per eundem dimidium terminorum numerum 8. qui gignit 12. Quia si 16. multiplicando 1 $\frac{1}{2}$ facit 24. ergo 8. eundem 1 $\frac{1}{2}$ multiplicando faciet 12. cum ita ex propos. 17. lib. 7. sit 8. ad 16. multiplicati, vt 12. ad 24. geniti. Itaque Progressio Arithmetica erit maior dimidio circulo maximo ipso primo termino 1 $\frac{1}{2}$ in 8. multiplicato, & facto 12. qui est dimidium maximi termini 24. quod verificatur in progressionibus, quæ incipiunt à nihilo, vt proposita.

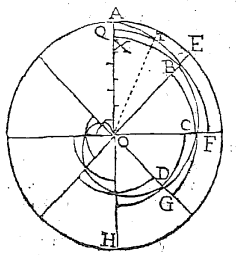


Quadere secunda pars quoque patet; nam excluso à collectione omnium maximo termino, excluditur ne dum dimidium maximi termini ipsius, quo superabat ambitum semicirculi; sed etiam aliud dimidium, nempe totum maximum arcum, vnde à semicirculo eadem medietate illius deficit.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. XI.

Summa omnium arcuum, cuiuscumque circuli Arithmeticè decrescentium, si successio decrementi sit infinita, æquat semicirculum.

SInt arcus AE, & BC, & CD, & subdiuidantur, vel intelligantur subdiuisi in infinitum. Dico, quod hæc progressio arcuum decrescentium æquat semicirculum.



Prob. Quo successio arcuũ numero est maior, eò maximus terminus est minor V. g. si semidiameter DA sit diuisus in 8. partes, erunt octo circuli decrescentes, & ex eis singulis octo arcus, & terminus maximus AE. Verùm si sint 16. partes in radio OA arcus erunt 16. & ideo maximus arcus AI dimidio minor. Quamobrem quo maior erit subdiuisio radij, & ideo circulorum decrescentium successio maior, eò minor erit differentia, qua collectio omnium arcuum excedit dimidium circulum includendo maximum, & incipiendo ab A, ita, vt sint termini AE, & BF, & CG. Et tantò minor erit quoque differentia; quà excluso maximo termino, & incipiendo ab X, vt sint XB, BC, & & CD, collectio arcuum decrescentium deficit à semicirculo. Ergo si istæ series infinitè crescãt numero, infinita erit diminutio differentię qua deficit à semicirculo: sed facta infinita diminutione subdiuidendo tandem vltimus terminus quantitatis acquiritur, & absumitur ipsa quãtitas ex propos 15. Tract. 16. part 1. Ergo differentia eius post infinitam subduplam diuisionem fit nulla, & sic equabitur, siue progressio maximum terminum includat, siue excludat toti semicirculo.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Spiralis sensibilis est linea infinitis circulorum segmentis sensibilibus successiuè minoribus coagmentata.

Prob. Ita est AT arcus ad TC diametri portionem, vt EA ad BE, & si subdiuidatur, ita erit subdiuisi circuli portio ad subdiuisi diametri portionem, vt AT ad CT, & rursus portio hæc subdiuisa circuli ad aliam subdiuisam portionem, vt diametri arcus AT ad portionem CT, & sic semper in infinitum: sed AT est maior, quàm CT, cum peripheria sit maior, quam radius, & consequenter omnes eius partes proportionales erunt maiores, quam proportionales ipsius radij: Ergo ex Coroll. 1. propos. 12. lib. 5. etiam omnes arcus quòquò decremento diminuti erunt maiores, quam partes diametri similiter diminutæ.

Probatur nunc principaliter propositio. Nam quò arcus sunt minores, è magis BX arcus intimus accedit extimo. Ergo si sint minores vltra omnem sensibilitatem, tantò magis BX minor longitudine vltra omnem sensibilem factus accedet ad arcum extimum EA V. g. arcus diminuatur sub dupla longitudine, & fiat IQ, accedet quoque subduplò spacio ad EA, & sic de alijs in infinitum minoribus, cumque semper sit maior quacunque diuisione proportionali præstita, arcus, quàm portio diametri, decrescet semper magis portio diametri minor, quàm arcus maior. Vnde, si diminuitur vltra omnem sensibilitatem spatium inter A, & E, tanto minus erit sensibile spatium XA, & EB. Quòd, si est vna linea, vt spatium sensibiliter non mediet inter E, & A: Ergo spira BA inter illos EA, & BX incedens erit idem cum ipsis saltem quoad sensum.

COROLLARIVM.

Hinc est, quòd si assumatur magna aliqua progressio Arithmetica per interuallum procedens, & eius vltimus terminus reperiatur ex Tr. 14. p. 2. Propos. 13. de proportionalit. & ex inde omnĩ summa ex propos. 9. eiusdem; hæc summa proximè exprimet Spiralem, si verò maximus terminus multiplicetur in se exprimet circulum. Sic si pu.etur diuisus circulus in 256. partes, quarum singulæ 256. particulis constent, vt singuli arcus vna particula diminuãtur. Arcuum decrescentium summa erit 23896. at verò peripheria, cuius 256. partes singulę 256. particulis constant, & medietas partis vnius 128. erit particularum 65536. quarum medietas est 32768. quæ subducta à summa arcuum dat pro residuo 128. nempe vnam dimidiam ex particulis 256. nimirum $\frac{1}{256}$ totius peripheriæ.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Spiralis æqualis est generanti semicirculo in sua circumuolutione integra.

PRobatur. Arcus se diminuentes Arithmeticâ proportione, & interiores simul sumpti, & exteriores simul item sumpti semper accedunt magis ad semiculum, quantò magis multiplicantur, sed quantò magis multiplicantur, tantò magis accedunt ad spiralem. Ergo si in infinitum multiplicentur accedent simul ad semicirculũ, & ad spiralem. Ergo spiralis cum semicirculo eiusdẽ longitudinis erit. Patet conseq. quia arcubus ad hoc vt æquẽt spiralẽ, & fiant spiralis multiplicatio infinita submultiplex deest, vt præced. pr. & eorum summæ, vt euandant simul æquales semicirculo ex propos. 11. multiplicatio infinita deest. Ergo ex eadem, si hęc præstita præsupponatur euadent spiralis, & summa arcuum decrescentium æquales semicirculo.

Hæc propos. est audacior, quam antecedens, sed si nõ placeat alicui, ãplexetur priorẽ, quę sufficit.

EXPEN-

EXPENSIO IV.

De Linea Quadratrice.

LInea Quadratrix, quam ad circuli quadraturam excogitauere Dinostratus, & Nicomedes, ex Pappo lib. 4. Mirabilis est, plurimosq; vsus in Geometrica obtinet; ideoque non est prętermittenda.

DEFINITIO

Quadratrix est linea, quam proportionali motu radius ductus per circumferentiam, & perpendicularis per diametrum se intersecando producunt.

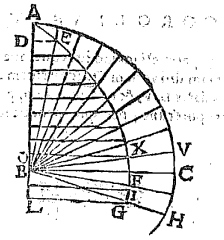
Hoc autem ex ipsa descriptione patebit.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

Quadratricem lineam describere.

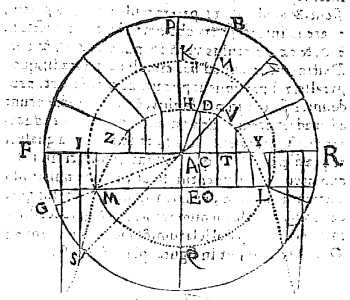
FAcilior modus Geometricè Quadrandi circulum est linea Quadratrix, quam describit Clauius lib. 6. Elementorum ad finem iuxta antiquos, & lib. 7. Geometr. pract. Modus autem describendi talis est.

Centro B fiat portio circuli maior quadrante ACH. Et sit quadrans BAC; cuius circumferentia diuidatur in tot numero partes, in quot radius (quò plures erunt, eò exactior erit descriptio) nos diuisimus in 10. partes, quarum aliquæ diametri, in diametrum BA prolungatam in L, & aliæ circumferentiæ quadrantis AC, in ipsam pariter prolungatam, vt CH insuper signatæ fuere. Ducantur deinde radij à centro B, ad circumferentiæ singulas partes, vt V, & H, & à diametri singulis partibus perpẽdiculares ipsi radio BA, vt sunt DE, & OX, & cæt. educantur donec terminent in singulos radios; prima in primum, vt DE secunda in secundum, & cęt. Deinde æquabili manu per puncta terminationum ducatur flexa AEFG, hæc enim erit linea quadratrix. Ideò verò prolungauimus ab E in G, quia cum E nequeat reperiri, cum radius sit idem, ac perpendicularis; reperitur tamen inueniendo puncta infra ipsam, qualia sunt F, I, G, quæ puncta; quo erunt plura, eo quadratricis curuitatem exactiùs prodent.



Probatur. Quia quadratrix est linea, quam diametri per circulum, & perpendicularis ipsi per ipsum diametrum motus proportionalis efficit, ita vt tot partes perpendicularis per diametrum suo motu conficiat, quot radius per circumferentiam: sed intersectiones assignatæ, per quas quadratrix ducitur tales sunt ea effectione: Ergo ea puncta in quadratrice sunt.

Aliã descriptionem lineæ Quadratricis inuenit in sua Cylomathia Vincentius Leotaudus Delphinas, de qua etiam acutissimè insignes proprietates demonstrat, est autem eadem, ac antiqua, sed auctior, ne dum circuli quadrante descripta: se toto circulo suis radijs intersectiones præbenbente, quam sic deducit prædictus auctor. Centro A describatur circulus cuiuscumque magnitudinis, & in plurimas æquales partes diuidatur incipiendo à P (nam quo plures erunt eo exactior erit descriptio) per quarum singulas à centro A radij emittantur, vt AP, AP, & cæt. Tum diameter FA in partes æquales inuicem tot, quot in circuculo designatæ fuerunt diuidatur, & per singulas diuisiones perpendiculares erigantur, vt CD, & cæt. Etenim istæ initio facto ab AP radio, & prima parallela CD successiuè se intersecabunt, cum radijs V. g. in punctis D, & V per totum dimidium circulum; & idem dicas de parallelis, & radijs ad alteram partem circuli successiuè se ellongantibus à prædicto radio AP. Per istas ergo intersectiones successiuas ducenda est manu æquabili linea flexa punctata SHL, quæ erit quadratrix integra.



Ex descriptione Quadratricis, linearum, & circulorum, quę eam secant nomina, & definitiones licet haurire.

DEFINITO.

Circulus, & radius generans est ille, qui adhibetur in secunda descriptione ad totam Quadratricem describendam.

Talis est Radius AR, & circulus PRSF.

DEFINITIO II.

Centrum quadratricis idem est, ac circuli generantis.

Tale est centrum A.

DEFINITIO III.

Axis quadratricis est recta, quæ in verticem quadratricis terminat, & deinde ad alteram partem

partem in infinitum producitur, & Quadratricem in duas partes curuas diuidit. Cuius pars inter centrum circuli generantis, & verticem intercepta vocatur Basis seu Sagitta.

Talis est HQ, quæ hinc terminat in verticem H inde ad Q in infinitum procedit, cuius pars AH Sagitta, seu Basis dicitur.

DEFINITIO IV.

Applicatæ sunt lineæ perpendiculares ipsi axi vtrinque in Quadratricem desinentes, & Primaria inter eas est portio diametri, quæ intra quadratricem concluditur.

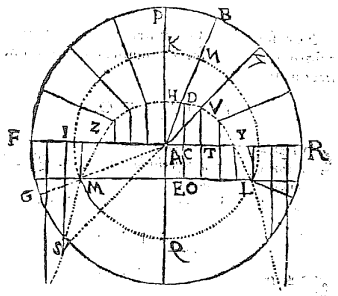
Itaque applica erit ML, & primaria erit ZY, quę transit per centrum A; estque portio diametri axi perpendicularis, quæ ab ipsa Quadratrice intercluditur.

PROBL. II. PROPOS. XV.

Dato centro quadratricis, eiusque ordinatim quacumque applicatâ ipsam quadratricem totam describere.

DAtum sit futuræ Quadratricis centrum A, & applicata quęcumque EL, & oporteat totam quadratricem describere.

Centro A per verticem L applicatæ EL transeat circulus punctatus LKM. Tum hic arcus LKM interceptus in partes inuicem æquales secetur, sicut, & applicata EL parem multitudinem partiũ, ac arcus interceptus, obtineat; hæc in punctis E, & O, & cæt. circulus verò in punctis K, N, & cæt. Destinętur itaque ad has circuli partes, radij, quos parallelæ à partibus applicatæ EDOV, & cæt. prodeuntes secent in D, V, & alijs, & hæc puncta erunt ad quadratricem. Et ad hoc, vt vlteriùs producatur ipsa Quadratrix vltra L, & M partes æquales, ac prædictæ, vsque quo possunt replicari in residuo arcus LQ signentur sicut, & par multitudo partium æqualium, vt EO in applicata prolungata extra Quadratricem numerentur. Nam successiuæ intersectiones parallelarum, & radiorum erunt ad Quadratricem, vt in figura ipsa videre est.



Probatus. Quia ducta RA per centrum diuidetur in partes æquales à parallelis, sicut, & circulus generans RBP in partes æquales à radijs productis diuiditur, & tot numero, tum semicirculi, tum diametri partes erunt: Ergo eodem pacto, ac si circulus primarius, & generans RPF, & diameter AR in partes æquales, & pari numero diuisus fuisset, puncta in quadratrice dabuntur.

Dices. Poterit occurrere, vt arcus LQ vltima pars non sit æqualis cæteris arcus KL, &c.

Respondetur vltimam partem in Q terminantem in Quadratrice non esse necessariam, sicut nec vltima pars diametri, quæ terminet in R: quia parallela ipsi AQ radio ducta ABR non potest occurrere radio AQ, vt patet, cum sit ipsa eadem.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Radio ad quemcumque angulum ad axem constituto per designatum in eo quodcumque punctum deducere Quadratricem.

IN eodem Schemate ductus sit radius AM ad axem PA faciens angulum GAP, & assignatum in eo sit punctum M.

Per punctum M ducatur circulus MKL, & ab eodem axi perpendicularis EM, quæ erit applicata. Vnde cum obtineas applicatam EM, & centrum A deduces per M datum punctum, & in dato radio AM Quadratricem ex præc. propos.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Dato quouis Quadratricis puncto, & centro, punctum è diametro oppositum assignare.

DAtum sit quadratricis punctum V, cui oporteat aliud è diametro oppositum definire. Per centrum A agatur ab V linea, & per centrum A, radius generans RAF, ad quam ab V puncto dato perpendicularis ducatur VT. A puncto T igitur sumatur TI æqualis generanti semidiametro RA, & ab I perpendicularis demittatur occurrens lineæ VA producte in S, & intersectio S erit in Quadratrice.

Probatur. Nam tot partes æquales enumerare debet arcus RZBPGS, quot dinumerat diameter RTI, vt parallela TS secet radiũ VS: sed semicirculus additus ZPS constituit radium TS. Ergo semidiameter TI punctum I designabit. Siquidem iuxta documenta propos. 14. hulus, tot partes debent fieri in semicirculo, quot in semidiametro generante.

COROLLARIVM

HInc patet etiam modus continuandi in maximam distantiam Quadratricem. Quoniam punctis datis D, V, & cæt. puncta opposita M, S reperiri poterunt, per quæ producatur.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XVIII.

Perpendiculares à Quadratrice ad axem deductæ ita sunt ad totum diametrum, vt arcus à radio interceptus, & axi, ad totum semicirculum.

SIt quadratrix MHL, & à centro eodem A eiusdem fig. ac præced. tum circuli, tum quadratricis educatur radius AG, & à puncto M, quo secat quadratricem, demittatur applicata EM. Dico *ita esse hanc applicatã* EM *ad totum radium; vt arcus* PG *ad semicirculum*.

Probatur ex effectione, vel defin. 1. Qualis pars est arcus PG semicirculi talis pars est AZ semidiametri. Ergo ita erit arcus BG ad semicirculũ vt AZ ad radium; sed applicata EM est æqualis, cum sit inter parallelas ipsi AZ. Ergo etiam applicata EM ita erit ad semidiametrum, vt arcus PG, ad semicirculum, vel etiam *conuertendo* diameter ad applicatam, vt semicirculus ad arcum.

COROLLARIVM.

HInc enascitur esse quoque applicatam ad applicatam, vt circuli arcus ad arcum ab applicatarum radijs, vsque ad axem AP deductum. Namque omnes applicatę habent eandem proportionem ad diametrum, quam arcus intercepti à radijs per verticem applicatarum transeuntibus obtinent ad semicirculum V. g. in fig. sequenti AM est ad radium, vt arcus ACK ad semicirculum, & EL est ad radiũ, vt arcus CK ad semicirculum, ergo *conuertendo* radius est ad FL, vt semicirculus ad arcum CK quare *ex æquo*, vt MA ad LF, ita arcus ACK ad arcum CK.

THEOR. II. PROPOS. XIX.

Arcus ab extremo applicatæ ductus est ad applicatam, vt radius ipsius ad sagittam.

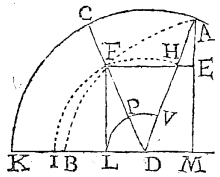
SIt sagitta DB applicata MA, circuli arcus ACK, & diameter eius AD, qui prodeant ab extremo A. *Dico ita esse*. Arcum ACK ad applicatam MA, vt radius AD ad sagittam DB.

Probatur. Per reductionem ad impossibile. Nam si non est ACK arcus ad MA applicatam, vt radius AD ad sagittam DB; erit forte ad maiorem, quàm ipsa sagitta. Sit ergo, si ita placet ACK ad MA, vt AD ad DI maiorem, quam BD.

Casus, & Progressus 1. Quoniam ergo est ex aduersarijs, vt ACK ad AM, ita AD ad DI, & vt propos. 45. lib. 6. element. sit quoque arcus ACK ad HFI arcum, vt AD ad radium DI. Consequenter proportio arcus ACK ad AM applicatam, & ACK arcus ad areum HFI erit eadem proportio, ex prop. 16. lib. 5. cùm sit eadem proportioni tertiæ AD ad DI.

Quamobrem, cùm eadem quantitas arcus ACK ad duas AM radij, & HFI arcus eandem dicat proportionem, ex 9. lib. 5. erunt inuicem arcus HFI, & applicata AM æquales.

Progress. 2. Deinde, cùm ex anteced. Coroll, sit arcus ACK ad arcum CK, vt applicata AM ad applicatam FL, & idem arcus ACK ad minorem arcum CK, vt arcus HFI ad arcum minorem IF, esset consequenter eadem proportio ex 16. lib. 5. applicatę AM ad FL perpendicularem, & applicatam, vt arcus HFI ad arcum minorem FI, cùm sit eadem proportio, quæ ACK ad arcum minorem CK. Cum



ergo sit AM applicata ad applicatam LF, vt arcus HFI ad arcum minorem FI, erit etiam *permutando* applicata AM ad arcum HFI maiorem, vt applicata FL ad arcum minorem FI. Sed ex primo progressi cognouimus esse AM æqualem ipsi arcui HFI: Ergo, & applicata LF esset æqualis arcui FI, quem subtendit, quod est absurdum. Non erit itaque ACK ad AD, vt AM ad DI. Cùm ergo non sit AM ad maiorem DI, erit fortè ad minorem.

Casus 2. Progress. 3. Arcus itaque ACK sit ad AM applicatam, vt radius AD ad aliquam DL minorem, quàm sagitta DB; & eodẽ modo sequetur absurdum.

Siquidem ab aduersarijs ponitur arcus ACK ad applicatam MA, vt AD radius ad radium DL, & propos. 45. lib. 6. element. vt ACK arcus est ad arcum VPL, ita est AD radius ad radium DL.

Quadere ex 16. lib. 5. erit eadem proportio arcus ACK ad diametrum AD, & arcus ACK ad arcum LPV, cum sit eadem, ac tertia proportio AD ad DL; cùmque idem arcus KCA ad duo applicatam MA, & arcum LPV eandem dicat proportionem, essent DA & arcus VPL æquales.

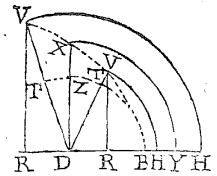
Progress. 4. Deinde cum ex anteced. sit arcus ACK ad arcum minorem KC, vt applicata AM ad applicatam PL, & idem arcus ACK eam proportionem dicat ad arcum minorem CK, vt arcus VPL ad arcum se minorem PL, esset consequenter eadem proportio ex 16. lib 5. applicatæ AM ad FL, quę VPL arcus ad arcum minorem PL. Quapropter *permutando*; ita esset AM ad VPL arcum, vt FL ad LP: sed applicata AM, & arcus VPL ostensi sunt æquales in 3. progr. Ergo etiam FL, & arcus LP essent æquales, quod non potest esse; nempe, quòd tangens sit æqualis arcui, cuius est tangens.

Cùm itaq; arcus ACK nõ possit esse ad AM applicatam, vt diameter AD ad maiorem DI, quam sit sagitta DB, ex primo casu, neque ad minorem ex 2. casu DL; Radius AD erit ad æqualem ipsi sagittæ DB, taliter qualis est arcus ACK ad applicatam AM, quod erat probandum.

COROLLARIVM I.

HInc est, si quando contingat applicatam esse idem, ac diametrum alicuius circuli, vt est DX in fig. seq. quadrantis XY, quod radius ille, & applicata sit media proportionalis inter sagittam, & quadrantem: itaque esse DB sagittã ad applicatam DX, vt eadem DX radius quoque ad arcum XY, qui est quadrans, & è contra *conuertendo* quadrantem XY esse ad diametrum XD, vt idem XD applicata quoque ad sagittam DB.

COR-



COROLLARIVM II.

HInc quoque enascitur, quòd si sagitta Quadratricis statuatur semidiameter alicuius circuli, diameter DX, erit æqualis quadranti illius ZB. Nam probatur iuxta tenorem præced. pr. & Coroll. quòd cum sit arcus XY ad DX applicatam, vt DX ad radium DB, & sit quoque ex propos. 43. lib. 6. elem. arcus XI ad arcum ZB, vt radij DX ad radium DZ, seu DB sagittam quod consequenter sit eadem proportio arcus XY, qui est quadrans ad quadrantem ZB, quæ est eiusdem arcus XY ad radium XD, cum tertiæ proportioni sit eadem radij XD ad radium DZ, quare cum idem arcus XY ad duas quantitates semidiametrum XD, & ZB arcum eandem dicat rationem erunt arcus ZB, & semidiameter DX æquales; cumque ZB sit quadrans DX quater assumpta circulum æquabit, cui sit sagitta BD radius.

COROLLARIVM III.

INsuper colligitur quoque ex eodem argumento, & fig. præced quamcumque applicatam RV esse æqualem arcui TB per verticem B ducti; cui sagitta quadratricis pro radio deseruiat.

Quoniam enim ex præced. est radius DV, ad sagittam BD, vt arcus HV ad applicatam RV, & arcus HV, ita est ad arcum TB, vt diameter VD ad diametrum TD, seu sagittam BD æqualem erit quoque ex 16. lib. 5. arcus HV ad applicatam RV, (cum eidem proportioni DV ad BD dicant consimilem proportionem) vt arcus HV ad arcum TB: Cum ergo idem arcus HV, tum applicatæ RV, tum arcui BT eandem dicat proportionem arcus BT, & applicata RV erunt æquales.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Sagittæ, atq; applicatæ arcum tertium proportionalem assignare.

SIt Quadratrix ABCin fig. seq & sagitta DA, necnon, & applicata EC, & oporteat arcum circuli reperire tertium proportionalem, ita vt sagitta AD sit ad applicatã EC, vt ipsa ECad arcũ reperiendũ.

Longitudo applicatæ CE traasferatur super radium DC, & sit DH; perque punctum H ducatur IB parallela axi, & secet in B Quadratricem, perque B ducatur radius BD, & centro D quadratricis fiat circulus interuallo EC, seu DH æqualibus. *Dico inuentum esse, quod quærebatur, & sagittam* DA *esse ad applicatam* EC, *seu* DH, *vt* DH *ad arcum* HL.

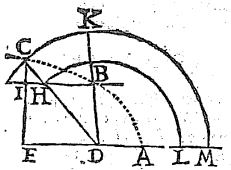
Probatur. Ita est sagitta AD ad radium DC, vt applicata EC ad arcum CKM *conuertendo* propos. 16. & *per mutando*. Ita est sagitta AD ad applicatam E C, seu DH, vt radius DC ad arcum CKM. Sed vt radius DC ad arcum CKM, ita est radius DH ad arcum HL ex propos. 46. lib. 6. elem. ergo *ex æquo*, vt est DA sagitta ad DH, seu æqualem EC applicatam; ita est DH, vel EC ipsa ad arcum HL; Ergo arcus HL erit tertia quantitas proportionalis, quam animo insederat reperire.

Si verò quis cupiat reperire tertium proportionem in ipso arcu MKC id efficiet ex propos. sequenti.

PROB. VI. PROPOS. XXI.

Sagittæ, & applicatæ tertium proportionalem arcum reperire in ipso arcu ab applicatæ extremo prodeunte.

FIant omnia, quæ in præced. praxi, & semidiameter DB protendatur vsque in K ducto arcu CKM per extremum applicatæ EC; & dico *arcum* KM *esse tertium proportionalem*; & ita esse sagittã AD ad radium DC; vt radius DC ad KM arcum.



Probatur Progress. 1. Vt semidiameter DC ad radium DH, ita est arcus CM ad arcum HL, ex prop. 45. lib. 6. Sed vt CD ad HD; sic ob parallelismum linearum in triangulo DCE est CE ad IE: ergo, vt est CE ad IE, ita est arcus CKM ad arcum HL.

Progress. 2. Sed etiam in eadem proportione est arcus ipse CKM ad sui arcum minorem MK, quã CE ad IE ex ipsa cõstructione quadratricis ex Coroll. propos. h. 18. Ergo idem arcus CKM duobus arcubus KM, & HL ex primo progr. eandem dicit proportionem, quam CE ad EI. Quare KM, & HL licet inæqualium circulorum erunt æquales ex propos. 9. lib. 5. Cum ergo, & sagitta AD applicata EC, & HL sint continuè proportionales ex præc. etiam AD, & EC, & arcus KM erunt continuè proportionales.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Quadratrix ad axem Asymptota est, & numquam axem consequi; sed semper ad illum accedere potest.

PRobatur. Nam in fig. prob. 1. quanto magis diuiditur CV in minores; minoresque partes in ratione subdupla, semper tamen remanet pars residua ex Tract. 16. de progr. lin. propos. 12. Quare numquam poterimus consequi punctum, quod sit in ipso BC; verùm semper aliquatenus accedendo minus perpetuò remouebitur, & materialiter quidem accedet, non speculatiuè, vt dixi Tr. 1. prop. 6.

EXPEN-

EXPENSIO V.

De Quadratricis, & Elicis comparatione.

QVoniam non inutilem hanc comparationem agnoui: hinc est, quod illam præterire non potuerim, pro quo sit.

DEFINITIO

COnnata Helici Quadratrix ea dicitur, quæ habet semidiametrum circuli se generantis æqualem diametro circuli generantis Quadratricem.

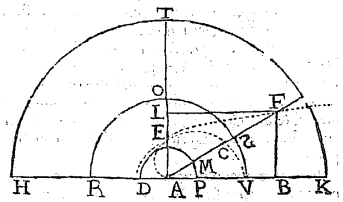
Est igitur connata Helix DE CV Quadratrici DEF; quòd semidiameter eam generans, & primam reuolutionem complens AH, vel AX circuli HTK sit æqualis diametro VAB circuli BOV generantis Quadratricem, & ideo AB radius est medietas radij AH.

THEOR. I. PROP. XXIII.

Applicata Quadratricis, & radius Helicis, qui productus ei connectatur ad verticem in ipsa quadratrice, sunt æquales.

SIt AC radius Helicis, qui productus in quadratrice DEF inueniat extremum F, applicatæ BF. Dico *huic applicatæ* BF *radium Helicis* AC *æqualem esse*.

Ducaturque gratia ostendendæ propos. à puncto F axi parallela FL.



Probatur ex constructione Helicis eadem ratio reperitur radij totius AS ad radium AC, quæ est arcus ROV ad arcum ROS. sed, quæ proportio est arcus ROV ad ROS arcum, eadem ex constructione Quadratricis est radij OA ad radium AL. Ergo radius OA, seu AV habet ad duas AL, quę æquatur BF applicatæ, & ad radium Helicis AC eandem proportionem, quam arcus ROV ad arcum ROS. Ergo AC, & AL, vel BF erunt æquales ex propos. 9. lib. 5.

THEOR. II. PROPOS. XXIV.

Omnes radij Helicis abscindunt à circulo, cui radius est sagitta quadratricis, arcus sibi æquales.

SVpra ostensum est propos. 20. Coroll. 2. omnes applicatas, vt BF esse æquales arcubus DM circuli DMP, cui radius est sagitta à radio, vt AF, terminante in ipsum applicatæ extremum F recisis: sed applicata BF ex præced. propos. ostensa est æqualis radio Helicis, ergo radium Helicis æqualis est arcui MD, cui radius est sagitta AD.

EXPENSIO VI.

De linea Ellipsi.

ELlipsis est inter omnes figuras Mathematicas flexas, & in se se redeuntes post circulum celebrior. Estque veluti circulus figura plana, & etiam solidis corporibus conueniens.

DEFINITIO.

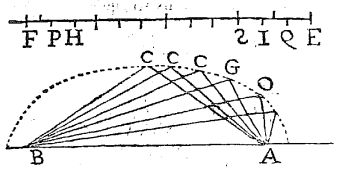
ELlipsis est motus puncti circa duo puncta talis, vt quantùm accedit ad alterum, tantùm remouetur ab altero.

Sint A, & B duo puncta, punctumque aliud C ita moueatur per locum CCCCO, vt quantùm remouetur à puncto B, tantùm accedat ad punctum A, linea hoc motu descripta Ellipsis est: an verò sit illa ipsa, quæ est sectio coni, id erit videre in Conicis, cum ostendemus hanc ipsam proprietatem, & illam obtinere, & sic quoque, vt hęc illam describi.

PROBL. I. PROPOS. XXV.

Lineam Ellipticam describere.

LInea EF in partes, quascumque placeat, diuidatur, & deinde super alteram duobus punctis, vtcumque electis BA interualloV. g. QP, assumatur FI, & in B facto centro describatur arcus, & reliqua assumatur IE, & facto centro in altero puncto A, rursùs arcus versus eadem partes describatur, vbi se decussant in O Ellipsis circumferentia tãsiet. Simili modo itaq; inueniantur alia puncta CCCC, & cæt. tum infra, tum supra lineam AB, & per illa ducatur flexa. Nam illa erit Ellipsis, quam definiuimus.



Patet. Singula puncta ex constructione, tantùm sunt remota ab vno puncto, quantùm alteri approximant, nam quantum est FI, & IE, quã signatum est tantùm est OS, & SE, qua punctum C inuentum est, & sic de cæteris.

Hoc autem fit mechanicè in duobus punctis A, & B clauos infigendo, & chorda AOB liberè circum excurrat; Nam si stylo O; dum AO. & OB Chorda tensa tenetur linea imprimatur in subiecta planitie, ea erit ellipsis; infra tamen eam vberiùs describemus, cùm de Conicis.

EXPENSIO VI.

De linea Conchili.

COnchilis est inuentio Nicomedis non inutilis. Nam per illam inter duas extremas interponit duas medias proportionales, & angulum quemcumque in tres partes diuidit; deseruitque in Architectura ad tumores columnarum ritè delineandos, vt apud Vignolam.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

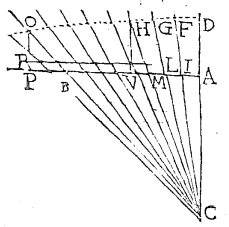
Conchilem describere.

LInea ducta AB, ducatur ei perpendicularis CD & electo in ea quolibet puncto C plurimæ rectæ ducantur quolibet interuallo ab inuicem dissitę, (quò propinquiores erunt eò melius) & sint CD, & CF, & CG, & CH, & cæt. Deinde arbitrarium interuallum AD super quamlibet lineam transferatur, à linea AP versus alteram partem, qua lineæ non conueniunt, & sint IF LG, & MH, æquales ipsi arbitrariæ AD. Tandem per puncta extrema D, F, G, H, linea flexa æquâ manu ducatur, *& erit Conchilis.*

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Conchilis est linea Asymptotos: ideſt nunquam conueniet cum AP, *licet semper ei appropinquet, conueniet tamen cum qualibet alia illi parallela, etiam si propinquissima.*

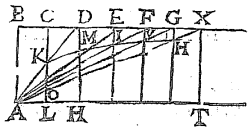
PRobatur prima pars; quòd semper propinquior fiat. Nam data basi æquali MH V. g. & BO, cum angulus PBO sit minor angulo VMH', etiam perpendicularis minori angulo opposita PO, erit minor, quam VH. Quòd verò nunquam conueniat, patet, quia ex constructione punctum quodlibet conchilis, vt O distat à quolibet puncto lineę AB, quanta est BO, æqualis AD, quòd verò quamlibet aliam lineam parallelam ipsi AP, vt RL inter Conchilem, & AP ductam tandem debeat secare, patet, quia producta in infinitum semper distantiam diminuet. Ergo etiam minimâ datâ qualibet minor euadet. Quare etiam distantiâ PR minor euadet.



PROBL. II. PROPOS. XXVIII.

Aliam lineam Conchilem describere, quæ nec minimam, nec maximam distantiam assequi queat.

*SVper lineam BX plurimæ perpendiculares &. quidistantes erigantur, vt AB, & CL, & cæt. atq; electo pũcto A ducantur plurimę rectę ad puncta D, E, F, G, X, & cæt; nam quælibet perpendicularem antecedentem secabit. V. g. quæ terminat ad D, antecedentem perpendicularem CL in puncto K, quæ finit in I secabit DM in M, & cæt. Si ergo p istas omnes intersectiones describatur linea KH. Dico esse conchilem talem, quæ nec ad maximam conchã, seu distantiam à linea AT, in quâ maior concha est, nec ad minimam distantiam à linea AT possit peruenire.



Probatur prima pars. Nam puncta K, M, I, V, & H, quò magis procedunt, eò viciniora sunt lineæ BX. Nam ob parallelismum linearum BA, & CK, vt est CD ad DB, ita est CK ad AB: sed CD est dimidia AB, ergo CK erit dimidia AB; rursus, vt DE ad EB, sic DM ad BA: sed DE est tertia pars EB. Ergo etiam DM erit tertia pars AB, & sic de reliquis, cum ergo eiusdem AB linea DM sit $\frac{1}{3}$, & CK $\frac{1}{2}$, patet esse minorẽ; ergo semper KH propinquior fiet: Nunquam tamen peruenˀet. Nam AX semper distabit à lineâ BX in puncto ab X remoto V. g. in H. Sed talia sunt omnia pũcta p quę ducitur KH, ergo nunquam ad lineam EX perueniet, & tamen semper accedet. Sed accedendo ad BX semper concha fit maior, & distans ab AT. Ergo nunquam ad maximam suam concauitatem perueniet, & tamen semper accedet.

Probatur secunda pars. Quod nec ad minimam peruentura sit. Nam minima esset in linea AB, cum si vltra AB producatur rursus ad BX prolungatam accedat: sed ad AB nunquã perueniet, & ideo, nec ad minimam distantiam ab AT.

Probatur minor. Nam non potest produci versus AB; nisi subdiuidendo lineam BC, primo per medium; deinde alteram partem mediam, vt sit $\frac{1}{4}$, & hanc mediam, vt sit $\frac{1}{8}$: sed hoc modo, vt ex propos. 12. Expens. 4. de linear. Geomet. progress. patet, nunquam sectio finitur: Ergo nec vnquam ad AB conchilis KH peruenire potest.

EXPEN-

EXPENSIO VII.

De lineæ Ciclicæ descriptione.

LInea Ciclica est illa, quam in Cęlo peragunt planetæ dum Epiclis prouoluuntur, & quam rotæ Clauus suo extremo describit, dum Currus trahitur, quamuis Ciclica planetarum suos anfractus in gyrum torqueat, at rotę amfractus suos in directum continuet.

DEFINITIO.

LInea Ciclica describitur à motu puncti circa circulum, dùm ipse circulus suo centro motu recto, seu circulari mouetur.

Itaque si moueatur V. g. circa rotam aliquod punctum ipsius rotæ, & ipsa rota vertendo se circa axem transferatur de loco ad locum efficitur quædam linea flexa, quæ Ciclica vocari potest.

PROBL. I. PROPOS. XXIX.

Lineam Ciclicam per puncta describere.

LInea Ciclica triplex est, vel enim est motus centri velocior, quam punct. in circumferentia circuli, vel æquè velox, vel minus velox; sed quocumque modo se habeat, linea quidem diuersa est, sed eodem modo describitur. Sit linea AB equalis circuli, cuius centrum B, circumferentiæ; cùm silicet motus centri æquè velox est, ac motus puncti in eius circumferentia, vel maior, cùm velocior est motus centri, quàm puncti in circumferentia, vel minor, cùm tardior est motus centri, quam motus puncti in circumferentia. Diuidaturque in quaslibet partes V. g. 12. eriganturque perpediculares lineæ AB æquales diametro à singulis partibus lineæ AB, & in tot numero partes diuidatur circulus, & facto centro in quibuslibet punctis LMN, & cæt. diuisionum lineæ AB describantur portiones circulorum: Sitque DF vna parti circuli æqualis EG, duabus, HI tribus, & cæt. Si ergo per puncta CFGI, & cæt. extrema arcuum transeat linea æquabili manu ducta, hęc erit linea Ciclica, quam silicet quodlibet punctum in rota signatum describit, dum currus mouetur, vel planetæ in epicielis describunt, quę differt ab ea in eo, quod rectę perpẽdiculares, vt CB & LD, & cæt. sunt radij excentricorum circulorum & ad centrum alterius magni circuli tendunt, cui est circumferentia linea BA.





TRACTATVS XIX.

De Angulis.

MVlta de Triangulis egit Euclides lib. 1.: sed ea erant elemetaria, quæ non ab alijs pendebant, sed potiùs alijs sequentibus fundamenta vniuersalissima sterne. bant. Modò de ipsis triangulis, quæ elementaria non sunt tradenda, quæ tamen necessaria ad multa in sequentibus percipienda.

EXPENSIO I.

De basi triangulorum, atque lateribus in vnum verticem conuenientium.

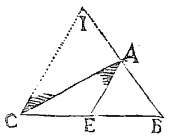
HÆc Expensio necessaria est, tum figuris Isoperimetris percipiendis tum tractatui de Sphęricis, tum Stereometriæ, & multis alijs.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duo trianguli crura inæqualia fuerint, ducta à vertice recta, quæ bifariam basim secet, hæc diuidet angulum, eritque maior anguli pars minoris cruri adiacens; minor verò maiori.

SIt triangulum AEC, & AE diuidat basim in duas partes æquales BE, & EC. Dico *angulum non esse ex æquo diuisum*, sed *angulum album apud* A *adiacentem cruri minori* BA *esse maiorem angulo nigro apud* A, *adiacente cruri maiori*.

Progress. 1. Ducatur CI parallela AE; eritque producta AI æqualis cruri minori BA; Quod patet: Nam in triangulo IBC ob parallelismum linearum AB, & IC, vt est BA ad BI ex 4. lib. 6. elem. ita est BE ad BC: Quare ex 16. lib. 5. elem. ablatis proportionalibus BA, & BE, reliqua erunt in eadem proportione; sed EC est dimidium BC ex hypothesi: Ergo etiam AI erit dimidium IB, & ideo æqualis ipsi BA.

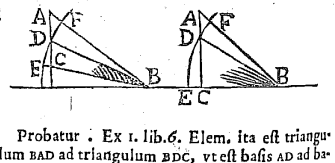


Progress 2. Cum ergo AI æquet lineam BA, & ex hypothesi AC sit maius, quã crus AB, erit maius, quam producta AI. Vnde erit maior angulus I, quàm niger apud C, vt subtendens AC maiorem basim, quam AI. Sed niger apud C est æqualis nigro apud A trianguli BAE ex prop. 30. lib. 1. elem. ob lineas parallelas: Ergo angulus albus apud A in triangulo BAC; est maior nigro apud A in triãgo BAC eodem, quod erat probandum.

THEOR. I. PROPOS. III.

In omni triangulo rectangulo segmentum cruris ad reliquum adiacens angulo recto habet maiorem proportionem, quàm angulus ipsi insistens, angulo insistenti reliquo segmento.

SIt triangulum ABC, & secetur in D. Dico *segmentum* AD *habere maiorem proportionem ad segmentum* DC, *quàm angulus albus ad angulum nigrum apud* B *perpendiculari adiacentem*.



Probatur. Ex 1. lib. 6. Elem. ita est triangulum BAD ad triangulum BDC, vt est basis AD ad basim DC, & ex 39. lib. 6. vt est sector FDB ad sectorem BDE, ita est angulus albus ad nigrum apud B. Triangulum verò ADB. est maius, quàm sector FDB, & ideo est proportio maioris inæqualitatis, at triangulum DBC minus, quàm sector DBE; ideo est proportio minoris inæqualitatis. Proportio verò maioris inæqualitatis maior est, quàm minoris inæqualitatis; siquidem maior continet minorem, & insuper aliquid, at minor ne dum non continet, sed aliquid ei deficit. Quare maior erit proportio trianguli BAD ad sectorem BFD, quàm trianguli BDC ad sectorem, DEB, quo posito proposs.

Probatur maior est proportio trianguli BAD ad sectorem BFD, quàm trianguli BDC ad sectorem BED: Ergo *permutando* maior erit proportio trianguli BAD ad triangulum DBC, quàm sectoris FDB ad sectorem DEB: Sed hæc triangulorum est eadem, vt supra notauimus, quę basium. Proportio verò sectorum eadem est, ac angulorum ex 39. lib. 6. ergo erit maior proportio basis AD ad basim DC quàm anguli albi ad nigrum apud B.

COROLLARIVM I.

HInc & ex 39. lib 6. elem. deducitur quoque, quod habet maiorem proportionem segmẽtum AD ad segmentum DC; quam arcus FD ad arcum DE: quia proportio arcuum est eadem, ac angulorum suorum: Vnde cum AD ad DC segmenta dicant maiorem proportionem, quam anguli albus ad nigrum; dicent etiam maiorem proportionem; quam arcus FD ad arcum DE illis subtensos.

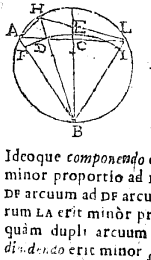
COROLLARIVM II.

HInc etiam videre licet, quòd etiam si segmẽtum non immediatè adiaceat, angulo recto, attamen remotius dicet semper maiorem proportionem ad propinquius, quàm angulus remotiori insistens, angulo propinquiori insistente. Sic DA dicet maiorem proportionem ad AB angulus albus ad nigrum apud A, quòd triangulum DAB sit maius sectore BDE. Triãgulum verò BDC sit minus sectore BDE, vnde in figura sinistra intexes idem argumentum, quòd in propositione deductum est.

THEOR. III. PROPOS. III.

Maior arcus habet maiorem proportionem ad minorem; quam chorda maioris ad chordam minoris in semicirculo.

DIco LH *arcum habere maiorem proportionem ad* HA; *quam chordã* LH *ad chordam* HA. Ducatur LA, & diuiso arcu ABL bifariã in B ducatur HB, & angulus LHA in segmento erit sectus bifariam. Deinde per punctũ D centro B arcus ducatur IEF. Basis autem LA. secta quoque sit bifariam ab EB in triangulo æquicruro LBA.



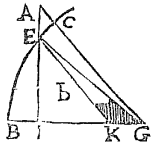
Prob. ex præc. maior est proportio DA segmenti ad DC segmentum, quàm arcus DF ad DE arcum ex 3 h. Ergo inuertẽdo DC ad DA erit minor proportio, quam DE ad DF. Idcoque *componendo* CD, & DA segmentorum erit minor proportio ad DA segmentum; quam ED, & DF arcuum ad DF arcum, & ideo dupli segmentorum LA erit minòr proportio ad segmentum DA, quàm dupli arcuum IEF ad arcum DF. Quadere *dividendo* erit minor proportio LD partis ad DA compartem basis LA, quam arcus LD ad DF, sed vt pars LD ad compartẽ DA basis, ita est crus AL ad LH crus HA ex 3. lib. 6 elem. ob angulum H bifariam sectum, & vt arcus LD ad DF ad centrum, ita est arcus LH ad HA ad circumferentiam ex 39. lib. 6 Elem. Ergo erit minor proportio LH ad HA, hordæ, quam arcũ LH ad HA. Vnde LH arcus h bebit maiorem rationem ad HA; quam chordæ LH ad chordam HA.

THEOR. IV. PROP. IV.

In omni triangulo rectangulo erit maior proportio totius cruris ad suum segmentum angulo recto adiacens, quàm anguli acuti adiacentis segmento ad angulum acutum adiacentem ipsi cruri.

SIt triangulum rectangulum EIG, & ab angulo acuto quolibet V. g. E ducatur recta EK ad latus oppositum IG. Dico *maiorem esse rationem cruris* GI *ad* IK, *quàm anguli* EKI *ad angulum nigrum* G.

Ab angulo itaque G ducatur parallela GA ad EK, centro G transeat per verticem E circulus BEC, & quia longior est AG basis, crure GE ob angulum obtusum. quem subtendit, apud E; ideo circulus BEC secabit intra triangulum AEG, & sector CGE minor erit triangulo GEA. Rursùs; quia GE maius est, quam crus GI ob angulum rectum, quem subtendit, circulus EB extra triãgulum cadet; maiorque erit sector BEG triangulo IEG.



Aduertendũ autẽ est triangula GEI, & AGE, quod sint eiusdem altitudinis se habere ad inuicem, vt bases ex 1. lib. 6. & sectores item, vt supra monuimus, vt anguli inuicem se habent ex 39. lib. 6. Elem.

Probatur. Triangulum GAE est maius sectore GCE, quare si comparentur eidem triangulo GEI maior erit proportio trianguli maioris, quam sectoris ad dictum triangulum GEI: Sector verò iste GCE habet maiorem rationem ad dictum triangulum GEI, quàm ad alterum sectorem GEB triangulo ipso GEI maiorem, quare multò maiorem rationem habebit triangulum AGE ad triangulum GEI, quàm sector GCE ad sectorem GEB; cùm multò maius sit triangulum AGE comparatum triangulo GEI, & sic eius comprehendet magis, quam sector CGE respectu sectoris EGB: quare etiam cõponendo triangulum AIG compositum, ad triangulum simplex GEI maiorem rationem habebit, quam sector totus compositus GCB ad sim. licem sectorem GEB; Et ideo etiam angulus totus seminiger ad G ad angulum nigrum apud G, vt præmonuimus, & ideo insuper ita erit basis tota AI ad basim IE segmentum; sed vt est ex 4 lib. 6. AI ad segmentum IE; ita quoque GI tota ad segmentum KI; Ergo GI habebit maiorem proportionẽ ad KI, quam angulus semialbus G parti nigræ; sed angulus totus semialbus G est æqualis angulo K ob parallelismum linearum GA, & KE: Ergo tota basis GI dicet maiorem proportionem ad segmentum KI; quam angulus K ad angulum nigrum G.

COROLLARIVM.

COllige quoque, quod erit quoque GK segmentum in maiori proportione ad KI, ac angulus GEK, quod opponitur nigro G, ad ipsum G nigrum; quia probatum est esse in maiori proportione AE ad EI; quam angulus albus G ad nigrum G; sed angulus GEK est æqualis albo; erg AE ad

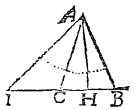
EI, & ideo GK ad KI ob eandem proportionem, erit in maiori proportione, quã GEK angulus ad nigrũ G.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si sit maior proportio lateris ad latus, quam basis ad basim in triangulis duobus alterum crus commune habentibus, & basim eiusdem lineæ; erit etiam angulus subtensus segmento basis maiori maior angulo minori segmento insistente.

SIt ABI triangulum; & in eo ducatur AH, sitq; maior proportio AI ad BA, quàm segmenti IH ad segmentum HB. Dico, *& angulum* HAI *esse maiorem angulo* BAH.

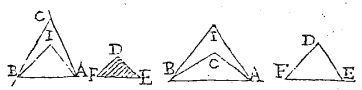
Prob. Nam, cum sit maior ratio HI, detruncetur talis portio, vt sit AC ad AB, vt CH ad HB ex propos. 3. lib. 6. erit angulus HAC æqualis angulo BAH. Ergo HAI erit maior, vtpote, quòd HAC sit eius pars.



THEOR. VI. PROP. VI.

* *Si dentur duo triangula, quorum lateris ad latus ratio sit maior, quam basis ad basim angulus verticalis erit minor. At si sit minor laterum proportio, quam basis, erit angulus maior.*

QVoniam latera ponuntur maioris proportionis, quam bases, & AC est ad ED in maiori proportione, quam AB ad EF. Pone AI esse ad ED vt AB ad EF, ideo quoq; AC habebit maiorem proportionem ad ED, quam IA ad ED. Vnde ex 10. l. 5. AC maior erit, quã AI. Sic dicas de crure BI si fiat ad DF, vt AB ad EF bases, quæ erit maior proportio CB ad DF, quam IB ad DF; erit itaque maior, vnde crura, cum sint maiora ex 21. lib. 1. conuenient extra triangulum, & minorem angulum concludent, quam BA, & IB & minorem, quam EDF, quia ex 5. lib. 6. sunt triangula ABI, & EDF æquiangula.



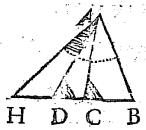
Sic dicas de minori proportione laterum, quam basium. Si enim dicat minorem proportionem AC ad ED, quam AB ad EF; fiat AI ad ED, vt AB ad EF, quare AC dicet minorem proportionem ad ED, quam AI ad ED: Vnde erit minor AC, quam AI. Sic dicas de latere BC, quod dicit minorem proportionem ad FD, quam AB ad EF, quare si fiat IB ad DF, vt AB ad FE, crus CB dicet minorẽ proportionẽ ad ED, quã BI ad FD, quare erit crus CB minus ex propos. 10. lib. 5. quam BI, ideoq; triangulum AIB erit maius, quam triangulum ACB quod erit minus anguluſq; ACB maior, quam AIB, sed AIB est æquiangulum triangulo EDF, ex 5. lib. 6. Ergo ACB erit angulus maior, quam angulus EDF.

THEOR. VII. PROP. VII.

Bases trium triangulorum in vnum verticem conuenientium erunt continuè proportionales, si anguli duo exceſſuum sint æquales, & medium sit ſoſcelum.

SInt triangula ABC, & BAD, & BAH, quorum anguli, quo vnus alium superat niger, & nigerrimus sint æquales. Dico, & bases futuras esse continuè proportionales BC, & BD, & BH, dummodò latus BD sit æquale lateri BA.

Probatur. Angulus ADC niger est æqualis duobus internis, & oppositis angulo nempe H, & angulo ad A nigro in triangulo DAH; angulus verò niger ad D est æqualis angulo semialbo ad A, nempe BAD ob æqualia crura subtensa, quare angulus semialbus ad A erit æqualis nigro ad A, & ad H. Angulus verò nigerrimus pars semialbi est æqualis nigro; quare residuum album erit æquale angulo ad H. Itaque triangulum HAB erit æquiangulum triangulo BAC; siquidem angulus B communis est; angulus albus A æqualis angulo H; quare, & reliquus BAH erit æqualis angulo C nigro ex Coroll. propoſ. 17. lib. 1. quare hæc triangula habebunt latera proportionalia, ex 4. l. 6. & BC erit ad BA, seu BD, cui ipsa BA æquatur, vt BA, seu BD ad BH.



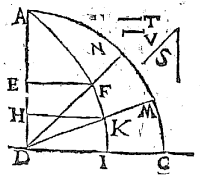
EXPENSIO II.

De triangulis, quo ad angulos secundum rationem datam constituendis.

ANtiquitas tota; totusque ingeniorum nostrorum nixus in id elaborauit, vt posset angulos in triangulis iuxta datam proportionem diuidere, maximè si de trifariatione agitur; & præter ea, quæ antiquitùs inuenta sunt, nihil inuenit noua ætas, quod antiqua inuenta promoueret; Dinostratus itaque, & Nicomedes quadratricem lineam ad id inuenere, & Nicomedes Conchoideam lineam; quos modos breuiter tradere intendimus:

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Angulum datum mediante quadratrice iuxta proportionem datam diuidere.



SIt exhibita Quadratrix AFI, proportioque V ad T, & angulus S. Fiatque ei æqualis ãgulus CDN, & parallela ad basim ducatur FE, Fiatq; vt V, & T ad T ex pr.

15. lib. 6. elem. Sic ED ad aliam, & inuenietur DH à puncto itaque H ducatur parallela HK ad basim ID, & per K agatur radius DM, eritque arcus CM ad arcum MN, vt V ad T.

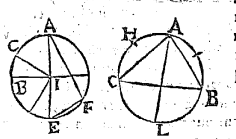
Probatur. Nam ex propoſ. 18. tract. 18. de lineis curuis, vt est portio lateris DB ad latus DA, sic est arcus NC ad quadrantem totum CA, vt autem DA latus ad HD partem, sic Quadrans CA ad arcum MC ex eadem cit. propoſ. Ergo *ex æquo*, vt pars DB ad partem HD lateris, hoc est, vt V, & T ad T ex constructione. Sic CN arcus ad CM arcum. Quare *dividendo* EH erit ad HD hoc est *dividendo* quoq; V ad T. veluti NM ad MC.

PROBL. II. PROPOS. IX.

Triangulum constituere, cuius duo anguli inter se habeant proportionem datam.

SIt quadrans circuli AB ope Quadratricis diuisus in C secundum proportionem datam; mensureturque arcus AC gemina vice in circumferentia AF; ducaturque AF, & FE, habebitque triangulum AFE duos angulos, qui habebunt proportionem datam arcus AC ad arcum CB; nempe angulus ad E erit æqualis AIC ad centrum, vtpote quod subtendat duplo maiorem circumferentiam ex effectione, & sic angulus ad A duplus anguli CBI.

Quod si velimus, & tertium angulum datam habere proportionem, totus semicirculus ACL secundùm proportionem datã diuidatur, replicando in AH, HC, & CL quadrantis arcus datos, & quilibet arcus in circulo gemina vice mensuretur, vt omnes rursùs replicati æquent totam circumferentiam, & puncta ABC coniungantur, & erit factum, quod postulatur; habebuntque anguli eam proportionem, quam habent partes arcuum AH, & HC, & CL secundum proportionem datam eo modo, quo diximus ope Quadratricis inuentam.

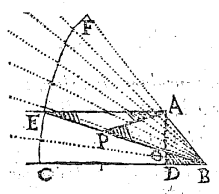


PROBL. III. PROPOS. X.

Angulum datum ope Conchoidis trifariam secare.

SIt angulus datus acutus ABC, & à quolibet puncto lateris, quod placuerit, demittatur perpendicularis in aliud latus AD, prolungeturque latus BD in C, & fit DC addita pars dupla alterius lateris BA, & ab A ducatur parallela AE ipsi DC, describaturque centro B Conchois CEF, & ad punctum E, quo secat, à puncto B ducatur BE; anguluſque niger B erit tertia pars totius anguli ABD dati, & altera pars alba eius duplum erit.

Probatur OE ex descriptione Conchoidis æquatur ipsi DC: Quare diuisa in P bifariam OP æquabitur dimidiatæ DC, & ideo ipsi BA, cui tota DC dupla est ex constructione; & quia OAE angulus ex effectione rectus est, circulus centro P descriptus transibit per tria puncta OAE ex propoſ. 18. lib. 3. elem. Quare AP erit radius, & æqualis OP, & PB, & BA; quare anguli nigri ad A, & E erũt æquales ex 14 lib. 1. elem. & angulus niger ad P, vtpote externus illis duobus erit æqualis, & duplus vni eorum E: at ob æqualitatem laterum BA, & AP angulus P niger æquatur albo B: quare angulus B albus erit duplus anguli E nigri: sed hic, vtpote ab incidente in parallelas AE, & BC ex propoſ. 30. lib. 1. elem. factus æquatur angulo B nigro: Ergo angulus albus B est duplus anguli nigri B; & sic ABD sectus est, & diuisus in tres partes, quarum duæ sunt pars alba, reliqua pars nigra.



EXPENSIO III.

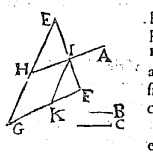
De Angulis, quoad latera secundùm datam rationem constituenda.

VIdimus modum constituendi angulos proportionales; modo restat videndum quomodo, & latera proportionalia secundùm datam rationem efficiamus.

PROBL. I. PROPOS. XI.

Dato angulo à puncto extra illum ducere lineam, quæ crura iuxta datam proportionem detruncet.

SIt datum punctum A, & ab eo ducenda sit linea, quæ iuxta datam proportionem B ad C detruncet latera anguli E; ita vt sit vnum ad alterum, vt C ad B. Eligatur quodlibet punctũ F, & fiat, vt C ad B ex propoſ. 15. lib. 6. elem. sic EF ad EG, & GF ducatur dein ab A parallela ipsi FG, quæ sit AIH, & erit IE *ad* EH, *vt* C *ad* B.



Patet ex prop. 4. lib. 6. elem. Nam FE est ad EG, ideſt, vt C ad B ex effectione; vt EI ad EH: Ergo erit EI ad EH, vt C ad B. Quod intelligitur etiam si intra triangulum hæc praxis operi demandetur.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Ad datum punctum intra angulum lineam ducere, quæ ab eo puncto remaneat diuisa secundùm datam rationem.

SIt in præcedenti fig. datum punctum K per quod ducenda sit linea, vt K diuidat eam in proportiones datas B ad C.

Ducatur parallela KI lateri GE, à puncto K; & fiat, vt B ad C, sic EI ad IF, & ducatur à puncto F per punctum K linea recta FG. Dico KG *esse ad* KF, *vt* B *ad* C.

Patet,

Patet, quia est EK ad KF, vt EI ad IF, nempe, vt B ad C ex constructione, ergo etiam GK erit ad FK, vt B ad C.

PROBL. III. PROPOS. XIII.

A dato puncto extra angulum ducere lineam, quæ diuidatur à lateribus anguli secundùm datam rationem.

SIt datum punctum B, & angulus A, & ducatur quæcumque à B puncto, quæ secet anguli A latera, & deinde fiat, vt data proportio K ad L, sic CB ad CD, & à puncto D ducatur parallela ipsi CE, & occurrat lateri AF prolungato, ac tandem ducatur BF iungens B, & F puncta. Dico BE *esse ad* EF, *vt* K *ad* L.



Patet, quia ex 4. lib. 6. est, vt BC ad CD, quæ ex effectione est, vt K ad L; sic BE ad EF. Ergo BE ad EL est, vt K ad L.

EXPENSIO IV.

De potentijs laterum triangulorum quorumcumque.

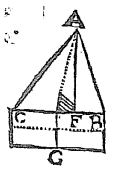
LIcet supra viderimus l. 2. elem. potentias laterum triangulorum comparatas ad inuicem remanent tamen aliqua, quæ vtpote vtilia superficiebus conorum non rectorum proximè inueniendis, hìc non debent posthaberi.

PROBL. I. PROPOS. XIV.

In omni triangulo quadrata laterum simul sumpta sunt æqualia quadratis duobus sumptis, tum dimidiæ basis; tum quadratis duobus lineæ à vertice in eam medietatem deductæ.

TRes casus habet propositio, secundùm quòd perpendicularis cadit, vel enim extra triangulum ducitur, vel intra latera ipsius trianguli, seu est latus ipsius trianguli, vt in rectangulis, quos omnes casus seorsim ostendemus, est autem prop. Pappi, sed aliter eam dabimus.

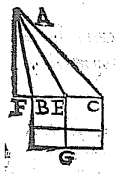
Cadat primùm perpendicularis intra triangulũ, vt est AF in triangulo BAC; sitq; BC basis bifariam diuisa in E, & ducta AE. Dico, *quod quadrata ex cruribus* BA, *& AC simul sumpta æquãtur duobus quadratis lineæ* AF, *simulq; duobus quadratis medietatis* BE.



Probatur. Quadratum AB ex 14 lib. 2. est minus quadratis ex BE, & AE rectangulo BE, & EF bis sumpto; quod est BG ex eò quia angulus BEA sit acutus, & triangulum Oxigonium. Rursùs quadratum AC maius est quadratis AE, & EC ex 13. lib. 2. rectangulo ex EC, & FE bis sumpto: quod est CG, eo quia angulus CEA sit obtusus, & triangulum Amblygonium, quare tantò maius est quadratum ex AC quadratis ex AE, & EC; quantò minus est BA ijsdẽ quadratis AE, & CE, vel equali BE, cum enim BE, & EC sint æquales, & FE eadem etiam rectangula BG, & CG bis hinc inde sumpta erunt æqualia: Quare si ex AE, & EB quadrata gemina vice sumantur, æquabunt quadrata BA, & AC, cum tantum reponat quadratum AC quantum tollit quadratum BA.

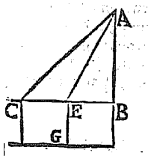
* Sit secundus casus, in quo perpendicularis extra cadat in triangulo secundo, & adhuc affirmo *quadrata* BA, *& AC simul sumpta æquari quadrato duplici ex* AE, *& quadrato item duplici ex* BE *medietate basis*.

Probatur. Quadratum ex AC, vtpote in Amblygonio oppositum angulo obtuso B in triangulo ACB maius est quadratis crurum AE, & EC duobus quadratis ex BE, & EC equalibus, & duobus rectangulis ex BE, & FB, s. rect. CB, & BF, vt lib. 2. elem. p. 12.



Quadratum verò BA minus quadratis AE, & BE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF, vt ostendam. Ergo, cum tantùm defficiat quadratum ex BA quantùm augescit quadratum ex AC, super quadrata AE, & EC, si hæc duplentur, illa simul sumantur, supplente altero deffectum alterius quadrata laterum BA, & AC æquabunt duo quadrata ex AE, & duo ex EC, vel EB.

Quòd autem BA quadratum deficiat à quadrato AE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF, patet ex 13. lib. 2. elem. Nam ex AE quadratum maius est lateris AB, & BF quadratis duobus rectangulis ex BE, & BF, ita quòd AE quadratum contineat in se quadratum ex BE, & duo rectangula ex BE, & BF, & quadratum ex AB, cui quadrato AE si addamus insuper ex BE quadratum istud AE cum addito BE superabit quadratum, ex AB duobus quadratis ex BE & duobus rectangulis ex BE, FB: quare AB quadratum, minus erit quadrato ex AE, & BE duobus quadratis ex BE, & duobus rectangulis ex BE, & BF.



Casus 3. Cadat perpendicularis, & sit ipsum crus AB in triangulo BAO tertio Tunc ex AC quadratum erit malus quadratis ex AB, & EC duplici rectangulo EC, & EB, ex 13. lib. 2. quod est quadratum CC bis sumptum: BA verò deficiet, à quadratis BE, & AE quadrato BE bis sumpto, quia AB cùm BE quadratum illud AE ex prop. 11. lib. 2. exæquat. Quare defectus cruris BA æquatur excessui cruris AC, super quadrata ex AB, & BE. Quare simul posita ex BA, & AC quadrata æquabunt quadrata ex AE, & BE bis sumpta.

EX-

EXPENSIO V.

De angulis in figuris rectilineis,

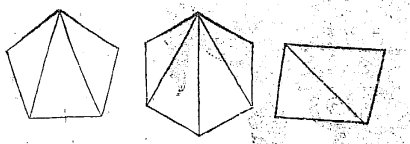
VIsa angulorum secundùm se constitutione, cognitisque proprietatibus modo eos, vt figuris rectilineis applicatos consideramus, siue illę regulares sint, seu irregulares.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Qualibet figura rectilinea continet bis tot angulos rectos, quota ipsa est inter figuras rectilineas.

QVelibet figura recti linea continet angulos bis tot æquales rectis quota ipsa est inter figuras rectilineas. V g. prima figura est triangulum; illius anguli duobus rectis æquabuntur. Secunda, seu oblonga, seu Trapezia; illius itaq; anguli, eo quòd sit secunda bis tot rectis, nempe quatuor erunt æquales. Tertia est Pentagonum, seu æqualium laterum, seu non. Sex itaque rectis eius anguli æquales erunt.

Ratio est, quia quælibet figura in tot triangula diuidi potest, quota ipsa est inter figuras rectilineas trahendo à quouis angulo rectas ad vnum aliquem illorum: Sic triangulum non nisi in triangulum diuidi; quadrata verò figura in duos angulos: at pentagona in tres, sexagona in 4. vt vides hic factum.



At ex 17. lib 1. propos. demonstratum est inter nos cuiusCumque trianguli angulos æquales esse duobus rectis: Quare quæ figura non potest diuidi, nisi in vnum angulum trahendo de angulo ad angulum rectas, vt triangulum, æquabitur duobus rectis, quæ in duos, vt quadratum quatuor rectos exæquabit, quæ in tres, vt pentagona sex rectis æquos angulos obtinebit sexagona octo angulos rectos complebit, & cæt. Sed quæres, quà ratione cognoscatur figura inter figuras talem sedem occupare V.g. esse decimam, vel vndecimam figuram.

Respondetur numeranda esse latera, vel angulos, & detractis duobus (duo enim latera figuram constituere nequeunt, sicut nec duo anguli solum, vt patet) ille numerus residuus, quam sedem occupet in serie figurarum demonstrabit V. g. data figura 20. vel angulos, vel latera numeret detrahe 2. remanebit 18. illa itaque figura inter figuras erit decimaoctaua.

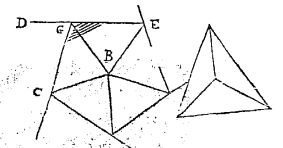
CAST

THEOR. II. PROPOS. XVI.

Anguli cuiuscunque figuræ rectilineæ æquantur his tot rectis, quot angulos obtinet, seu latera detractis rectis, quatuor.

VVlt propos. quòd numerentur latera, seu anguli cuiuscunque figuræ, & eo numero duplicato detrahantur quatuor, & residuus numerus angulos rectos demonstrabit, quibus anguli æquales sunt. V.g. Pẽtagoni sunt anguli, vel latera; quinq; duplica hunc numerum 5. erunt 10. à quo si detrahas 4. remanebunt 6. indicans quinque angulos pentagoni sex rectis esse æquales.

Probatur. Quia figura quælibet in tot triangula diuidi potest à singulis eius angulis trahendo lineas ad aliquod punctum in medio assumptum, quot ipsa habet latera, seu angulos, vt vides hic factum in triangulo, & pentagono.



Quare cum ex propos 17. lib. 1. elem. quilibet trianguli angulus sit æqualis duobus rectis, sequitur, vt triangula ea in qualibet figura iuxtà numerum angulorum, vel laterum facta sint æqualia bis tot rectis, quot sunt anguli illi: sed omnes illi habent angulos circa punctum medium figurę consistentes omnes simul sumptos æquales quatuor rectis, vt collegimus propos. 12. lib. 1. qui ad angulos figuræ non pertinent: quare si detrahatur, remanebunt reliqui ad figuram pertinentes: Sic, si ex 10. auferantur 4. erunt reliqui 6. anguli recti, quibus 5. anguli pentagoni æquales sunt.

THEOR. III. PROPOS. XVII.

Anguli cuiuscumque figuræ externi à latere producto, & sibi coniuncto effecti æquant solùm quatuor rectos.

ANgulos exteriores cuiuscumque figuræ, qui fiunt à lateribus versus eandem partem seriatim deductis, vt vides factum in pentagono B omnes sunt æquales tantum 4. rectis.

Deducitur ex propos. 10. lib 1. elem. vbi asseritur, quòd linea super aliam consistens angulos duos, hinc, & inde facit duobus rectis æquales, quare cum quodlibet latus figurę cuiuslibet insistat super alium productum, vt est CG super DE; sequitur, vt angulus niger figuræ internus, & angulus albus externus sint æquales duobus rectis, & cum omnes ita se habeant, sequitur esse æquales omnes interni, & externi bis tot rectis; quot ipsi sunt V. g. in fig. 5. angulorum decem angulis rectis; quia 5. interni, & interni 5. sunt; Sed iam diximus internos esse æquales sex rectis: sequitur, quòd externi sint solum æquales 4. rectis.

COROLLARIVM.

HInc potest colligi modus cognoscendi in figuris rectilineis, & equilateris regularibus quot gradus quilibet eius angulus, tum internus, tum externus, tum ad centrum contineat, cum enim quilibet rectus angulus 90. partes, gradusque contineat fit, vt ex cognitione rectorum deueniamus in cognitionem continentiæ, quam anguli figuræ possidet sic cum anguli ad centrum sint 4. rectis æquales; qui 360. gradus continent, & illi V. g. in Pentagono sint 5. si per 5. diuidatur 360. dabit 72. numerus silicet graduum, quem continet angulus B, & quia anguli externi, vt G quatuor quoque rectis sunt æquales, angulus quoque G 72. gradus continebit, sed quia anguli interni 6. rectis sunt æquales, qui dant 540. gradus diuiso hoc numero per 5. dabit 108. grad. pro continentia cuiuscumque anguli interni.



TRACTATVS XX.

De Lineis circulo circumpositis.

VIsis Linearum proprietatibus secundùm se, modo incipimus eas considerare, vt margines superficiei, atq; figuræ; & quia vt 3 lib. Elem. vidimus, omnes figuræ perfectę adiumento circuli describuntur; ideo eas, vt applicatas circulo consideramus.

EXPENSIO I.

De principijs huius Tractatus.

PRæcipuus scopus huius Tractatus est considerare lineas, quæ circuli peripheriæ, vel eius datis portionibus subtenduntur, quatenùs mensurabiles sunt, vel mensura adæquata, si lineę sint semidiametro commensurabiles, quę tanquam rationalis respectu omnium assumitur, & tanquam ea, iuxta cuius partes omnes alię linęæ diuidendę sunt; vel, si sint incommensurabiles, saltem mensurâ proximâ.

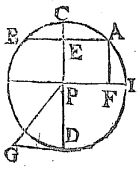
Circulus omnis ex libito hominum in 360. partes diuiditur, quæ Gradus appellantur, & omnis gradus in 60. partes, rursùs intelligitur diuisus, quæ minuta dicuntur; rursùsque omne minutum in 60. partes ponitur diuisum, quæ secunda, & quodlibet horum in 60. partes inciśum iterum, quæ Tertia vocitantur, & sic Quarta, Quinta, Sexta: semper subdiuidendo vsque ad 10.

Iisis itaque partibus circuli linea aliqua subtensa vel circumscripta si non omnibus saltem Gradibus, & minutis notæ longitudinis respectu radij reperire fuit necessarium; si non adequatè, saltem proximè, & cum intensibili differentia à vero.

Linearum verò rectarum, quæ circa peripheriam circuli considerantur aliæ sunt intra, aliæ sunt extra, aliæ eam secant. Quæ intra circuli periph riam existunt illæ sunt subtensę, quæ, & cordę dicuntur, & Sinus.

DEFINITIO I.

CHorda itaque est recta linea in circulo dirimens eum in duo segmenta, & vtrumque pariter subtendens.



Talis est AB in circulo ABCD, quæ subtendit segmentum BCA, & BDA, quòd licet verum sit, tamen, cũ sinũ EA in se continens accipitur, vt minorem portionem BCA subtendens consideratur.

DEFINITIO II.

SInus Rectus est dimidiata chorda à diametro ei perpendiculari secta.

Talis est EA. Sinus verò est nomen Arabicum vsurpatum in hanc significationem à Mathematicis. Licet Vitalis in suo Lexico Mathematico ex eo velit sinum appellatum, quòd claudat curuitatem arcus.

DEFINITIO III.

SInus Versus est diametri portio chordæ, seu sinui recto perpendicularis inter chordam ipsam, & peripheriam inclusa.

Talis est CE inter BCA ambitum, & EA sinum, seu BA chordam existens, qui etiam dicitur sagitta.

DEFINITIO IV.

SInus complementi est sinus rectus illius arcus, qui alium complet.

Talis est AF, qui est sinus arcus AI complentis arcum CA vsque ad quadrantem, qui dicitur etiam sinus secundus.

DEFINITIO V.

SInus totus est radius ipsius circuli.

Assumitur verò radius: vt rationalis respectu omnium aliarum, seu chordarum, seu sinuum, ideoque à recentioribus supponitur diuisus in partes 10000000. licet Ptholomeus cum posuerit partium 60. Arzael par 150. sed experimentum docuit minutiorem diuisionem esse maioris commodi.

Linęæ, quæ extra peripheriam sunt communi nomine dicuntur secundæ, & sunt tangentes, quarum definitionem lib. 3. def. 2. explicauimus. Talis est DG quarum terminus est secans aliqua, quæ proueniat à centro, & in ipsam tangentem terminet, vt PG. Itaq; cum semper diameter PD in punctum contactus ductus faciat angulos rectos, cum tangente ex lib. 3. Elem. prop. 20. Radius cum tangente, & secante semper faciet triangulum rectangulum, cui secans PG basis sit.

EXPENSIO II.

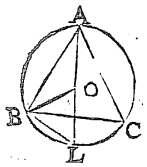
De lineis portionibus peripheriarum inscriptis, quæ latera alicuius figuræ regularis intexunt.

QVæ lineæ circulo inscriptæ aliquam figuram regularem constituunt notiores sunt, & fundamentum, quo cæteræ inueniantur. Vnde ab istis doctrina exordienda. Vidimus autem propos. 15. lib. 4. elem. Latus Hexagoni æquari radio; vnde de reliquarum figurarum lateribus sermo erit.

THEOR. I. PROPOS. I.

Latus Trianguli circulo inscripti potentiâ triplum est semidiametri.

SIt triangulum ABC æquilaterum in circulo ABC. Dico *eius latus posse inseruire pro latere quadrati, quod erit triplo maius, quàm quadratum semidiametri*, BO, qui æqualis est BL lateri hexagoni ex propos. 15. lib. 4. Euclid.



Probatur. Quadratum basis AL in rectangulo BAL est æquale quadratis rectarum EA, & BL, ex 11. lib. 2. quòd angulus B in semicirculo: rectus sit ex 28. lib. 3. Sed quadratum à diametro factum est quadruplum quadrato sui dimidij, & semidiametri BL, vel BO, ex Coroll. propos. 6. lib. 2. Ergo reliquum quadratum ex BA æquat reliquas tres partes, quæ vna cum quadrato ex BL, vel BO quartæ parti æqualis, omnes quatuor partes quadrati AL exæquat: vnde solum quadratum ex AB erit triplum quadrati OA radij, & consequenter ipsum latus AB triplo amplius poterit.

COROLLARIVM.

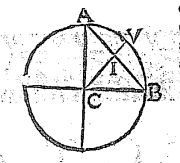
HInc est, quod si diametrum in se multiplices, & quadres, sic, & semidiametrum: deinde quadratum semidiametri à totius diametri quadrato subducas, & à residuo radicem quadratam extrahas, quòd inquam ea radix erit latus trianguli AB, & chorda, quæ subtendit 120. grad. cuius medietas est sinus 60.

Aduerte autem, & hoc sit vniuersale monitum, quod vt exactissimus sit calculus sinus totus duabus zifris augendus, & à radice quadrata, deinde vna figura abijcienda est; in qua aliquis error in maiori, vel minori excessu inesse potest.

THEOR. II. PROPOS. II.

Latus quadrati circulo inscripti potest duo quadrata ex semidiametro constituta.

PAtet. Nam latus quadrati in circulo subtendit quadrantem: Ideo angulus C rectus: Vnde ex 11. lib. 2. quadratum ex basi BA rectanguli ACB æquatur duobus quadratis alteri ex semidiametro AC, alteri ex semidiametro CB.



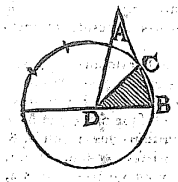
COROLLARIVM.

COlligitur. Quòd si quadretur semidiameter auctus duabus zifris, & duplicetur, & à toto radix quadrata eruatur, illa abiecta vltima figura datura sit latus quadrati, & chordam AB, cuius medietas est sinus 45. grad.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si hexagoni, & decagoni latus in eodem circulo descriptorum componantur tota recta linea extrema, & media ratione secatur.

SIt latus decagoni BC, & ei addatur AC æqualis semidiametro DB, quę, & erit latus hexagoni. Dico *totam* AB *sectam esse in* C *extrema, & media ratione*. Nempe quadratum contentum sub AC esse æquale rectangulo sub AB, & CB contento.



Prob. Progress. 1. Triangula ADB totum, & nigra pars sunt æquiangula, vt ostendam; Ergo ex 4. lib. 6. ita est proportionatum AB, latus ad DB basim in triangulo maiori ADB, vt latus DB in triangulo nigro minori vel æquale AC ex constructione basi CB. Cùm ergo sit tota AB ad segmentum maius AC, vt idem ad minus CB ex prop. 19. lib. 6. erit rectangulum sub extremis contentum æquale quadrato mediæ.

Remanet solum probandum triangula ABD, & minus nigrum esse æquiangula.

Progress. 2. Angulus niger apud D est quinta pars semicircumferentiæ nimirum duorum rectorum, vtpote angulus decagoni, quòd BC ex Thesi sit latus decagoni. Ergo reliqui duo C, & B nigri æquales inuicem ob æqualitatem laterum subtensorum erunt quatuor partes duorum rectorum, vt omnes simul sint æquales duobus rectis ex 17. propos. lib. 1. & siguli duæ partes, nempe dupli anguli nigri apud D. Sed angulus C niger est æqualis ex prop. 17. l. 1. duobus internis, & oppositis A, & albo apud D, qui æquales inuicē sunt ob crura DC, & CA suptensa æqualia. Ergo duplus vni eorum V. g. angulo A, sed, & erat duplus angulo nigro apud D, ergo isti angulus A, & niger apud D erunt æquales.

Progress. 3. Hincque probabitur angulum D totum nigrum, albumque trianguli maioris esse æquale angulo C nigro minoris. Nam est totus duplus anguli A; cùm quilibet, nempe niger D, vt ostensum est, & albus D ob æqualitatem laterum sint æquales ipsi A: Ergo totus albus, nigerque D ipsi A duplus, ergo totus æqualis nigro angulo B duplo quoque, vt secundo progress. anguli nigri D.

Tandem angulus B est communis, ergo triangulum magnum, & paruum nigrum sunt æquiangula; cùm de singulis angulis probata sit æqualitas in ambobus, & hinc erit AB ad AC, vt AC ad CB: quare recta AB, quę constat ex latere decagoni, & hexagoni extremâ, & mediâ ratione secta est.

COROLLARIVM

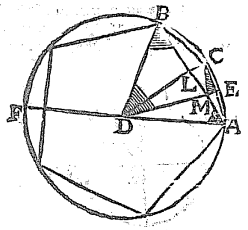
HInc, si diametrum auctum duabus zifris, & hoc quadratum diuidas per semidiametrum similiter auctum excipies latus decagoni.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si in circulo pentagonum æquilaterum describatur, pentagoni latus potest, quod potest, & latus decagoni, & latus sexagoni.

DVo intendo demonstrare alterum, quòd pentagoni latus possit latus sexagoni, quod possit quoque latus decagoni; Ideoque, vt ambo.

Probentur. Sit BA latus pentagoni, quod subtendat arcum BCA; isque arcus diuidatur per medium in C; ducaturque à centro D semidiameter DC; connectanturque subtensę, quę erunt latera decagoni CB, & CA; semidiametrique ducantur BD, & DA, & rursùs diuiso arcu CA per medium in E, ducatur semidiameter DE; & secet chordam BA in M, & CA in I; connectaturque MC.



Probatur duo trlangula BAD, & BMD sunt, vt deinde ostendam, æquiangula, & angulus apud D niger est æqualis angulo A nigerrimo, & angulus niger B cōmunis, ergo ita erit BA ad BD, vt BD ad ad BM. Ideoque rectangulum sub extremis contentum BA latere Pentagoni, & BM, eius portione erit æquale quadrato ex media BD, radioque ex 19. lib. 6.

Progress. 2. Æquiangula quoque sunt, vt ostendam, triangula nigrum totum CMA & maius ipso ABC, cuius angulus B est æqualis angulo nigro C, & niger apud A communis. Ergo eadem ratione erit AB ad AC, vt AC ad MA: Ideoque rectangulū sub AB, & MA extremis æquale erit quadrato mediæ CA ex 19. lib. 6. Sed hæc rectangula, nempe primi progr. sub BA, & BM, & secundi sub BA, & AM æqualia, sunt quadrato ex tota BA, ex 4. prop. lib. 2. Ergo talia quoq; erunt quadrata illis æqualia, nempe quadratum ex BD æquale rectangulo, & tota AB, & maiori segmento, & quadratum CA æquale rectangulo ex tota, ex minori segmento, ista inquam duo quadrata erunt æqualia quadrato ex BA: Ergo BA latus pentagoni potest quadratum BD lateris sexagoni, & CA lateris decagoni.

Remanet primo ostendendum triangula BAD, & minus BMD esse æquiangula. Quod ita conuincitur. Angulus A nigerrimus est in peripheria: Ergo vt sit æqualis BDE ad centrum debet esse supra duplò maiorem circumferentiam, cum super æqualem sit subduplus ex 23. lib. 3. Talis verò est circumferentia FB, nempe duplo maior super quā insistit A nigerrimus angulus ad circumferentiam respectu BCE circumferentiæ, quam comprehendit angulus niger D ad centrum, vt consideranti patet, cum FB sit 6. ex circuli 20. partibus BE verò 3. Angulus verò niger apud B est communis. Ergo reliquus reliquo æqualis, cum tres anguli cuiuscumque trianguli duobus rectis æquentur ex propos. 17. lib. 1. Coroll.

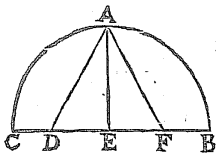
Prob. Deinde triangula BAC maius, & seminigrum CMA esse æquiangula. Nam anguli in minori nigro apud A, & apud C niger sunt inuicem æquales ob æqualitatem laterum, vt considerānti patet; item angulus A albus est æqualis angulo apud B trianguli CBA maioris, cum sint super æquales circumferentias CA, & CB. Ergo idem angulus apud B albus trianguli ABC erit æqualis alteri nigro minoris trianguli apud A, & consequenter angulo C nigro eī æquali: Cùm ergo B maioris, & C nigri minoris trianguli sint æquales, & reliquus albus apud A communis, erunt quoque duo reliqui æquales: Vnde triangulum maius BAC triangulo minori AMC erit æquiangulum.

PROBL. I. PROPOS. V.

Latera decagoni, & hexagoni in eodem circulo inuestigare.

SIt circulus, vel quod sufficit semicirculus CAB, cuius diametro AB sit perpendicularis EA, & diuiso bifariam semidiametro in F ducatur FA, cui æqualis sumatur FD, & à puncto D ducatur ad A recta AD. Dico rectam ED esse latus Decagoni, & secundo AD esse latus Pentagoni.

Probatur. Nam DB est secta media, & extrema ratione in E: quare ED minus segmentū erit latus decagoni, & EB maius segmentum erit latus sexagoni ex propos. 3 huius.



Probatur antecedens, quod DB secta sit media, & extrema ratione. Nam ex propos. 9. lib. 2. Radius EB sectus est bifariam in F, & ei addita est recta BD. Vnde rectangulum ex tota DF, & addita DE vnà cum quadrato ex EF medietate est æquale quadrato medietatis, & additæ vt vno latere FD facto, sed FD est æqualis lineæ AF ex constructione. Ergo ipsius AF quadratum dicto rectangulo, & quadrato ex medietate radij æquale erit. Sed quadratum ex AF est quoque æquale quadratis AE radij, & EF eiusdem medietatis ex 11. lib 2. Quamobrem si quadratum illud EF demātur, remanebunt quadratum ex AE, vel quod idem ex maiori segmento EB, nempe

nempe radio, & rectangulum ex tota DB, & additâ DE comprehenso æqualia: Quare DB erit secta extrema, & media ratione.

Probatur secunda pars. Nam ex 11. secundi AD potest, & quadratum ex EA, & quadratum ex DE: sed DE est latus decagoni, vt modo ostensum est EA hexagoni, cùm sit radius. Ergo ex propos. anteced. est latus pentagoni.

COROLLARIVM.

HInc patet modus, quo eruatur latus Decagoni. Nam numero radij in se multiplicato, & numero medietatis radij quoq; in se ducto, ab o simul colligantur, & ex toto radix quadrata eruatur, & obtinebitur Linea AF, à qua dempto numero medietatis radij, nempe EF remanebit DE latus decagoni. Radius verò duabus zifris augendus, vt præcisior sit calculus, & deinde ex radice extructa expungenda figura vltima est.

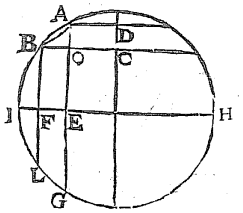
COROLLARIVM II.

ET hinc quoque fit, quòd ex antec. pentagoni latus habeatur. Nam numero radij aucto duabus zifris ad maiorem precisionem in se ducto, & Decagoni quoque in se ducto, si à toto simul aggregato radix quadrata extrahatur dabit DA latus pentagoni.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Quindecagoni latus potest quadrata lineæ, quà differt semilatus trianguli à semilatere Pentagoni, & eorum sinuum versorum differentiæ.

PRobatur per 16. lib. 4. Euclid. recta Inscripta inter basim trianguli, & pentagoni latus tertium est latus quindecagoni, vt AB, quæ est inter punctũ A, in quo cadit basis trianguli, cuius vertex in H, & B, quo item incipit à pũcto B tertium latus



pentagoni ab H: Erit ergo AE semilatus trianguli & FB pentagoni, & differentia OA. Sinus verò versus semilateris pentagoni est CB, & trianguli est DA, & eorum differentia OB; cum ergo OBA triangulum sit rectangulum: ex 11. lib. 2. basis AB quadratum æquabitur quadratis ex OB, & OA.

COROLLARIVM.

QVare Colligitur, quod si semilatus FB subducatur AE relinquetur AO, qui in se ducetur. Repartitis verò complementis DA, & CB, vt infra docebo, & minori à maiori subducto relinquetur OB, qui in se multiplicabitur: numeri verò in se ducti, tum AO, tum OB aggregentur. Nam extracta radix quadrata, dabit chordam AB, & latus quindecagoni Gr. 24. quæ dimidiata erit sinus Gr. 12.

EXPENSIO III.

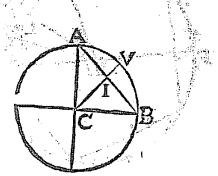
De proportione laterum figurarum circulo inscriptarum, cum diametro.

NE frustra quandoque laboremus in lateribus prædictarum figurarum inueniendis, oportet prius videre, an sint lineæ rationales, & ideo numeris exprimibiles: si namq; numeris partium, in quas diameter diuisus est exprimi nequeat earũ longitudo, frustra quis nescius calculum reiteraret, vt tandem partes numero exprimeret, quæ exprimi nequeant.

THEOR. I. PROPOS. VII.

In quadrato diametrum incommensurabile est lateri, seu semidiametro cui est inscriptum.

PRobatur ex demonstratis lib. 2. & propos. 6. in Coroll. Quadratum factum ex diagonali AB est duplum quadrati facti ex latere, & radio CB: Ergo hęc quadrata non possident rationem talem, quam quadratus numerus ad quadratum numerum debet habere: sed quam numerus ad numerum ex Coroll. 1. enim propos. 16. lib. 8. inter numeros, quorum vnus sit duplus alterius non cadit medius



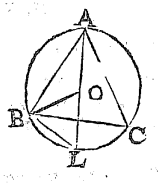
proportionalis; & sic inter eos non potest intercedere proportio, quæ inter quadratos numeros mediat ex eadem 16. propos. . Cum ergo quadratum diametri diagonalis AE ad quadratum lateris sit solum, vt numerus ad numerum ex propos. 6. lib. 10. erunt longitudine duo incommensurabiles latus, & radius BC, & diagonalis AC, quæ est chorda subtensa quadranti, & ideo etiam diametro toti incommensurabilis erit.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

In triangulo latus ipsius semidiametro, in quo inscribitur incommensurabile est.

PRobatur. Nam ex propos. 1. latus trianguli AB potest inseruire pro quadrato, quod erit triplo maius; quam semidiametri AO: Sed 1. ad 3. non habent proportionem, quàm quadratus numerus ad quadratum numerum ex Coroll. 12. lib. 8.

Ergo



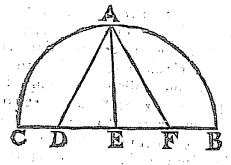
Ergo nec quadratũ semidiametri ad quadratũ lateris inscripti trianguli. Quare ex prop. 6. lib. 9. latera horũ quadratorum erunt incommensurabilia.

THEOR. III. PROPOS. IX.

In Pentagono, & Decagono latus diametro est incommensurabilis linea, tum longitudine, tum potentia.

*PRobatur primo de Decagono. Nam assumpta fig. prop. 5. præcedentis quadratum dimidij radij EF est quarta pars quadrati totius EA. Sed linea AF potest efficere quadratum æquale duobus quadratis, & lineæ AE, & lineæ EF. Ergo potest quintuplo magis, quam dimidius radius EF. Quare lineæ EF & DF longitudine incommensurabiles erunt ex propos. 10. lib. 10. quia possunt quadrata, quæ proportionem habent, vt numerus ad numerum; non autem, vt quadratus numerus ad numerum quadratum.

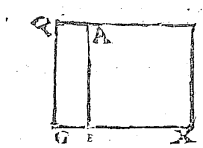
Si itaque à DF recta æqualis ipsi FA auferatur semiradius EF rationalis respectu totius diametri, eique commensurabilis. Cum à linea integra maiori DF, potestque magis, quàm minor EF quadrato rectæ AF, quæ linea toti maiori est incommensurabilis, quia quadratum AF est quater, & DF quinquies maior, quàm EF, & ideo cum quadrata se ge-



rant, vt numerus ad numerum; ipsa latera erunt incommensurabilia. Cum ergo maior DF plus possit, quam minor EF quadrato DE lateris sibi maiori incommensurabilis, ipsaque minor EF sit exposite. Rationali nempe diametro commensurabilis longitudine, & potentia, recta DE ablata EF minori erit Apotome; Et quia EF quadratum est ad quadratum ex FD, vt numerus ad numerum; ideo DE erit Apotome quinta ex 24. vel 21. propos. lib. 10.

Probatur secundo de latere pentagoni AD. Nam potest efficere quadratum æquale quadrato lateris DE, & EA. Linea verò DE est irrationalis cùm ostensa sit Apotome.

Cùm ergo DE sit irrationalis, quadratum eius, vtpote ex irrationali factum, erit omninò irrationale ex 25. lib. 10. Vnde si applicetur ad rationalem AE rectangulum illius quadrato æquale ex



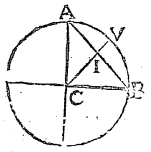
35. lib. 1. Hoc efficiet latitudinem, seu alterum latus EG rationali ipsi EA incommensurabile longitudine, cum rectangulũ ZE sit ad rectangulum AX, velut basis GF ad basim XE ex pr. 1. lib. 6. & ideo ex prop. 5. lib. 10. GE, erit incõmẽsurabile ipsi EX. Vnde additũ ipsi rationali EX efficiet totam lineam GX longitudinem incommensurabilem ipsi Rationali AE, atque irrationalem ex prop. 10. lib. 10.

Erunt itaque incommensurabiles GX, & AE id est GZ: Vnde ex propos. 26. lib. 10. rectangulum, quod continent XZ erit Irrationale. Sed huic rectangulo est æquale quadratum EX DA: Quia rectangulum GA ex const: factum est æquale quadrato, ex DE constituto. Ergo linea AD potens hoc rectangulum est irrationalis ex prop. 25. lib. 10.

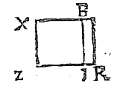
THEOR. IV. PROPOS. X.

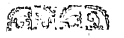
Latus Octogoni est diametro incommensurabile.

*PRobatur. Nam considerato schemate prop. 2. sit radius CI perpendicularis ipsi lateri quadrati AB; eritque semiquadratum CIB. Vnde diagonalis huius quadrati CB erit duplo maior in potentiâ, quàm CI, & ideo vt ex prima propos. huius Expens. constat erunt longitudine incommensurabiles CI, & CB, ablata itaque CI, à radio CV, vel CB reliqua erit Apotome, nempe irratio-



nalis etiam potentiâ, & ideo eius quadratum irrationale. Applicetur itaque rationali potentiâ IB, vt in antecedenti fecimus rectangulum æquale quadrato rectæ IV, & sit BR. & erit longitudo IR ex 2. lib. 10. irrationalis ipsi IB, vel equali IZ; ideoq; cùm duæ ZI, vel æqualis IB, & IR. sint irrationales tota erit irrationalis, & ex Cor. 2. popof. 26. lib. 10. rectangulum XR erit quoque irrationale. Vnde latus octogoni VB potens efficere quadratum huic rectangulo XR æquale erit irrationale. Potest autem efficere quadratum rectangulo XR. æquale. Quia potest efficere quadratum æquale quadratis duobus VI, & IB: quæ æqualia sunt huic rectangulo XR ex effectione.





EXPENSIO IV.

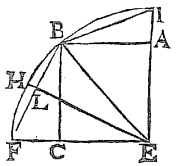
De circulo inscriptis, quæ figuram non constituunt.

FIgimus de lineis inscriptis circulo, quæ figuram faciebant, modo de illis, absque respectu ad figuram vllam, sed determinatæ quantitati graduum subtensis: Eas vero in duas classes diuidemus, & hic agemus de illis subtensis, quę vt inueniatur radicis quadratę extractionem deposcunt: deinde alias trademus, quibus tractandis radix quadrata adhibenda non est.

THEOR. I. PROPOS. XI.

Sinus complementi, & sinus recti quadrata æquantur quadrato radij. Sicut, & quadrato chordæ æqualia sunt sinus versi, & sinus recti quadrata.

PRobatur BAE rectus est angulus. Vnde ex 11. lib. 2. Quadrata ex BA sinu, & AE, vel æquali EC sinus complementi erunt æqualia quadrato radij BE.



Probatur secunda pars. Nam angulus C rectus est. Ergo sinus versi CF quadratum, & recti sinus CB erũt æqualia quadrato chordæ EF, & est eadem ratio de sinu recto BA, & verso AI, qui æquantur chordæ BI.

COROLLARIVM I.

HInc dato sinu recto BA si ducatur in se, & subducatur à sinu toto in se ducto, & à residuo dematur radix quadrata; Illa dabit sinum complementi BC, quo ablato à sinu toto remanebit sinus versus IA.

COROLLARIVM II.

SI verò hic sinus versus in se multiplicetur, & coniungatur cum quadrato sinus recti V. g. quadratum fiat ex FC, & coniungatur cum quadrato ex CB, vel quadratum BA cum AI Radix quadrata subducta à toto dabit chordam BF, vel BI, cuius medietas est sinus dimidiati arcus BI, vel BF, vt est sinus BL arcus BH.

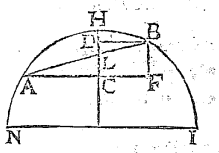
COROLLARIVM III.

QVod si duplices sinus complementi, & sinum rectum habebis chordas, quæ totum arcum subtendunt, nam si duplices BC sinum complementi habebis Chordam duplicis arcus FB, sicut si duplices sinum rectum BA habebis Chordam duplicis arcus BI.

THEOR. II. PROPOS. XII.

* *Chordæ cuiuslibet quadratum est æquale quadrato duorum sinuum simul positorum, quorum arcus simul illa subtendit, & quadrato differentiæ sinuum versorum.*

SIt Chorda AB subtendens arcum AHB, qui sit diuisus in quascumque duas portiones AH, cuius sinus rectus AC versus CH, & HB arcum, cuius sinus DB rectus, & versus DH. Dico, *quod si sinus recti cõponantur ita vt efficiant* ACF, & deinde sinus minor versus DH à sinu maiori CH subducatur, vt remaneat DC, vel equalis FB, dico inquam, quòd quadratũ Chordæ AB est æquale duobus quadratis, quorum vnum est factum ex latere AF aggregato sinuum rectorum, & alterum DC, vel BF differentia sinuum versorum.



Probatur facilè. Quia triangulum ABF est rectangulum. Ergo quadratum ex AB ex 11. lib. 2. est æquale quadratis ex AF, & FB.

Quòd autem triangulum ABF sit rectangulum, patet, cùm anguli ad C, & D sint recti, & latera CF, & DB sint æqualia, sicut, & DC, & FB ex effectione. Vnde etiam angulus F rectus erit.

COROLLARIVM.

MOdus vniuersaliſſimus hinc enascitur, quo plurimi sinus reperiantur. Nam si duo quæcumque latera, seu chordas superius Expens. 1. inuentas dimidiaueris erunt sinus recti, quibus ex præcedenti reperies sinus complementi, qui subducti à sinu toto relinquent sinus versos. Si ergo duos ex sinibus ita repertos iunxeris, & quadratè multiplicaueris, & eorum sinus versos minorem à maiori subduxeris, differentiamque quadratè quoque multiplicaueris, multiplicatosque numeros simul iunxeris, & ab aggregato radicem quadratam subduxeris; illa erit Chorda, quæ illos duos arcus inequales subtendit, quę diuisa per medium dabit sinum medietatis summæ arcus, quam simul vniti efficiunt. V. g. sit chorda decagoni Gr. 36. 6180340. posito sinu toto 10000000. Medietas erit sinus Gr. 18. nimirum 3090170. Sic Sexagoni Grad. 60. est 10000000. medietas est 5000000. Gr. 30. Hinc sinus complementi Gr. 18. nimirum Gr. 72. est Par 9510565. qui subductus à sinu toto relinquit sinum versum 489435. Sic sinus complementi Gr. 30. sunt Gr. 60. quorum sinus est 8660254. subductus à sinu toto relinquit sinum versum 1339746. à quo subductus sinus versus alter primo inuentus dabit latus BF 850311. qui in se multiplicãdus. Sic iuncti sinus 5000000. & 3060170. dant 8060170. qui pariter multiplicãdus in se, & deinde iungendi numeri ita multiplicati; à quorum summa extracta radix quadrata dabit chordam Gr. 18. & 30 simul nempe 48. quæ dimidiata erit sinus Gr. 24. Par. 4067361.

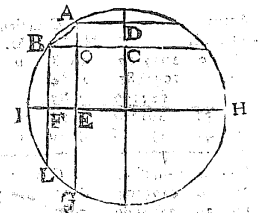
Sic si iunctis sinibus Gr. 24. & 30. & in se multiplicatis, multiplicata quoque differentia sinuum versorum in se, deinde aggregentur numeri ita multiplicati, & ab aggregato radix excipiatur, illa dabit chordam Gr. 54. & dimidiata sinum Gr. 27.

Sic idem agas iunctis sinibus 24. & 27. habebis sinum Gr. 26 1/2. Et si iungas 27. & 30. Gr. sinus habebis sinum 28 1/2, & cæt. At si iungas sinum Gr. 30. cum sinu Gr. 36. nimirum cum dimidiata chorda pentagoni habebis sinum arc. 33. Si verò medietates, vt supra reperiantur continuè dabunt multò plures sinus.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Quadratum chordæ differentiæ duorum arcuum est æquale quadratis differentiæ sinuum versorum, atque rectorum eorumdem sinuum.

REassumatur fig. propos. 6. in qua AE; & BF sint sinus cuiuscumque arcus ABIG, & BIL differentia eorũdem sinuum erit AO. Sic eorum sinus versi sint FI minoris arcus, & IB maioris differentia erit FB, vel OB. Dico, *quòd quadrata harum differentiarum sunt æqualia quadrato chordæ* AB.



Probatur. Quia triangulum AOB, est rectangulum, ergo ex 11. lib. 2. Euclid. vera erit propositio, & quadrata ex lateribus differentijsque OB, & OA æqualia erunt quadrato chordæ, & basis AB.

COROLLARIVM

HÆc propositio deseruit ad inueniendas eas chordas quarum arcus vniti superant quadrantem. Nam tunc poterimus vti subtractione subducendo à sinu tum verso, tum recto arcus, sinum arcus minoris, vt habeatur gemina differentia sinuum OA, & OB, ex quibus differentijs tanquam ex lateribus in numerum quadratum redactis, & vnitis, subducendo radicem quadratam reperiemus chordam differentiæ dictorum arcuum, nempe illius arcus AB, quo differt IB ab IA.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Quadratum cuiuslibet chordæ una cum rectangulo gemino, quòd fit à sinu complementi, & toto sinu, tanquam ex lateribus, æquatur geminis quadratis factis à sinu toto.

SIt Chorda FE. Dico, quod eius quadratum minus est quadratis radiorum BE, & FE rectangulo duplici comprehenso sub FE radio, & CE sinu complementi.

Probatur ex propos. 13. lib. 2. Euclid. Quia chorda BF, vt in fig propos. 11. & duo sinus toti EB, & FE faciunt triangulum oxigonium, ergo ea propositio hic verificabitur, quę eodem sensu vniuersaliter ibi probatur.

COROLLARIVM.

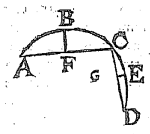
HInc deducitur; quomodo reperta chorda, siue per additionem, siue per subductionẽ, vt ex 12. & 13. propos. huius reperiatur sinus versus, & complementum sinus, nec non, & sinus rectus illius arcus, cuius chorda componendo, vel subducendo duos sinus inuenta sit.

Pone itaque chordam inuentam esse FB, & cupis scire sinum versum FC. Quoniam quadratum FB, si vniatur cum rectangulo ex FE sinu toto, & EC sinu complementi bis accepto equatur quadratis laterum FE, & EB, qui sunt sinus toti. Multiplicetur chorda FB in se, sicut & sinus toti in se ducantur gemina vice, & ab hoc numero aggregato sinus totius geminâ vice in se ducti dematur numerus chordę in se ductus: nam reliquus erunt duo rectangula ex EF sinu toto, & CE sinu complementi. Diuidatur bifariam & medietas erit vnium ex rectangulis, cuius latus FE notum est; quod est sinus totus. Vnde diuisa medietas remanens per sinum totum dabit latus CE sinus complementi quo habito, & subducto à sinu toto, remanebit FBC sinus versus, cuius quadratum, vt ex 11. huius subductum à quadrato Chordę FB relinquet numerum, à quo subducta radix quadrata, dabit sinum rectum CB.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Est maior proportio arcus maioris ad minorem, quam chordæ subtensæ maiori ad chordam subtensam minori.

ID non probabimus eâ euidentiâ, qua Regiomontanus, & nos supra ostendimus prop. 3. Tract. 19. cum res per se clara sit. Dicit itaq; quod arcus maior ABC comparatus ad minorem CED comprehẽdit plures partes minoris, quam comprehendat chorda maioris AC partes minoris CD. Ostenditur verò sic. Nam certum est; quòd magis curuatur ABC arcus super CA Chordam, quam CED arcus super suam Chordam CD; patet ex sagittâ FB, & GE: sed quò magis curuatur aliqua linea, eo plures partes continere necesse est, cùm longiùs spatium mensuret. Ergo arcus ABC, qui magis curuus est super rectam AC, quam minor arcus, plures partes continebit illius arcus, quam quòd contineat AC Chorda maior respectu minoris Chordę CD.



COROLLARIVM.

HInc eruitur, quod chorda vnius gradus sensibiliter non differat ab arcu suo sicut, nec sinus 30. minutorum; cum sensibiliter super illam non dum arcus curuetur. Sic quod maior proportio arcus vnius Gradus ad arcum 45. minutorum, quam chordæ ad Chordam. Idest, quod

si arcus vnius Grad. comprehendit m. 45. & insuper 15. minuta tertiam eorum partem; quod chorda vnius gradus non comprehendet totam Chordam 45 minutorum, & insuper eius tertiam partem; sed paulò minus. Sic quod sit arcus Gradus 1 m. 30. comprehendit arcum vnius gradus vnica vice & insuper eius medietatem; quòd Chorda ipsius arcus Gr. vnius, & m. 30. non cõprehendet chordam arcus Gr. vnius semel, & insuper chordæ eius medietatem, sed paulò minus, & idem dicas de sinubus.

COROLLARIVM II.

HInc eruas quoque; quomodo propè verum Sinum vnius gradus requiras, licet non certò, nec infalibiliter, sed tamen adeo propè veritatẽ, vt nullus error sensibilis subrepi queat. Dividatur sinus 261769. repertus propos. 11. huius Coroll. Arcus Gr. vnius m. 30. in sex partes, & sexta pars erit 43628 ½. Sic sinus 130897. minutorum 45. in tres partes, eritque tertia pars 43632. Si ergo daremus sinui vnius gradus quatuor vicibus sextam partem hanc 43628 ½ sinui vnius Gr. m. 30. esset ipse sinus Gr. vnius part. 174512 ½. Et sinus ipse Gr. 1. m. 30. eum comprehenderet semel, & insuper dimidiam ipsius partem, aut vicibus quatuor ex sex, quibus constat ipsa maior, vt arcus Gr. vnius m. 30. comprehendit gradum vnum, nempe 4. vicibus ex sex partibus, quibus ipse grad. maior Gr. 1. m. 30. constat.

At si daremus quatuor partes, ex quibus tribus constat sinus minutorum 45. & comprehenderet sinum 45. vt Gr 1. arcum m. 45. esset 174528. Differentia autem est par. 16 ½, vel 17. Quamobrem electis ½, & quid minus, nimirum partibus 12. proximè addemus eas partibus 174512. vel residuum 4. subtrahemus partibus 174528. & efficiemus sinum partium 174524., quæ sinum minutorum 45. non continebit semel cum tertiâ parte: quia sic deberet esse 174528. at est paulò minùs, & continebitur à sinu Gr. vnius m. 30. non semel cum medietate eius, sic enim esset 174512. sed paulò minus. Vnde proportio arcus maioris Gr. vnius ad arcum minorem m. 45. erit maior, quia illum continet, semel cum tertia parte, quàm sinus maioris ad minorem, qui eum non continet semel cum tertia parte; sed paulò minùs, & maior arcus Gr. 1. m. 30 ad arcum vnius grad. habebit maiorem proportionem, quàm sinus maior ipsius ad sinum minoris, quòd contineret arcum minorem semel, & medietatem eius; sinus verò maior minorem sinum contineat semel, & minùs medietate.

COROLLARIVM III.

HInc verò sinum arcus habebis minorem 15. minutis; medietas enim Chordæ vnius gradus dabit Sinum m. 30. par. 87264. cuius reperies chordam ex Coroll. 2. propos. 11. cuius medietas erit minuto. um 15.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Tabulam sinuum ordinare, & omnino complere.

DOctrina, quam tradidimus sufficiet ad tabulam sinuum condendam, licet, vel facilitatis gratia, & maioris abundantiæ, etiam cæteras regulas trademus infrà.

Itaque ex lateribus inuentis figurarum regularium Quadrati, Pentagoni, Exagoni, & Quindecagoni, ita cæteri sinus educentur. Nam illi erunt chordæ arcuum, quos subtendunt, & medietates sinus, quorum dimidiabis arcus ex Coroll. 2. propos. 11. & harum semissium inuenientur sinus. Deinde harum semissium reperiantur complementa ex Coroll. 1. eiusdem. Inuentorum autem cõplemẽtorum accipiantur semisses, & earum sinus reperiantur ex Coroll. 2. prop. eiusdem, & sic successiuè, vt in appositis tabellis videre potes.

Tabella arcuum ex latere Gr. 24. Quindecagoni nascentium.

Arcus N. Gr.	M.		Complementa: N. Gr.	M.	
1 12	0	2079117	1 78	0	9781476
2 6		1045285	2 84		9945219
3 3		523360	3 87		9986295
4 1	30	261769	4 88	30	9996573
5 0	45	130896	5 89	15	9999143

Comp. 1. Semisses.			Comp. Semissium.		
6 39	0	6293204	6 51		7771460
7 19	30	3338069	7 70	30	9416415
8 9	45	1693495	8 80	15	9856[illegible]

Comp. 2. Sem.					
9 42		6691306	9 48		7431448
10 21		3383679	10 69		9333804
11 10	30	1822355	11 79	30	9832549
12 5	15	871557	12 84	45	9961947

Comp. 3. Sem.					
13 43	30	6883549	13 46	30	7258744
14 21	45	3705574	14 69	15	9288097

Comp. 4. Sem.					
15 44	15	6977905	15 45	45	7163019

Comp. 6. Sem.					
16 30	30	5075384	16 59	30	6661192
17 15	45	2630312	17 74	45	9647878

Comp. 7. Sem.					
18 30	15	5037740	18 79	45	8638355

Comp. 9. Sem.					
19 24.		4067366	19 66	9	9135455

Comp. 10. Sem.					
20 34	30	5664262	20 55	30	8241262
21 17	15	2965416	21 72	15	9510199

Comp.

Comp. 11. Sem.			Compl. Semissium.		
N. G.	M.		N. G.	M.	
22 39	45	6364390	22 50	15	7688418

Comp. 13. Sem.					
23 23	15	3947439	23 65	30	9187912

Comp. 16. Sem.					
24 29	45	4972165	24 30	15	8681988

Comp. 19. Sem.					
25 33		5446390	25 57	0	8386706
29 16	30	2842153	26 73	30	9588197
27 8	15	1434926	27 81	45	9896514

Comp. 20. Sem.					
28 27	45	4656145	28 62	15	8849876

Comp. 23. Sem.					
29 32	45	5409745	29 57	15	8410390

Comp. 25. Sem.			Comp.		
30 28	30	4771588	30 61	30	8788121
31 14	15	2461533	31 75	45	9692309

Comp. 26. Sem.					
32 36	45	5983246	32 53	15	8012538

Tabella Sinuum, qui nascuntur à latere Sexagoni Gr. 60.

Arcus, & Semis. N. Gr.	M.		Complem. N. Gr.	M.	
1 30		5000000	1 60		8660254
2 15		2588190	2 75		9659268
3 7	30	1305262	3 82	30	9914449
4 3	45	654031	4 86	15	9978589

Complemẽti 1. Sem.			Compl. Semissium.		
5 37	30	6087614	5 52	30	7933533
6 18	45	3214395	6 71	15	9469301

Comp. 3. Sem.					
7 41	15	6593458	7 48	45	7518398

Comp. 5. Sem.					
8 26	15	4422887	8 63	45	8968727

Tabella Sinuum, qui nascuntur ex latere Pentagoni Gr. 72.

Arcus, & Semis. N. Gr.	M.		Complem. N. Gr.	M.	
1 36		5877852	1 54		8090170
2 18		3090170	2 72		9510565
3 9		1564345	3 81		9876833
4 4	30	784591	4 85	30	9969173
5 2	15	392598	5 87	45	9992290

Semis. 1. Comp.			Compl. Semissium.		
6 27	0	4539905	6 63	0	8910065
7 13	30	2334454	7 76	30	9723699
8 6	45	1175374	8 83	15	9930685

Semis. 3. Comp.					
9 40	30	6494480	9 49	30	7604060
10 20	15	3461171	10 69	45	9381913

Semis. 4. Comp.			Compl. Semissium.		
N. G.	M.		N. G.	M.	
11 42	45	6788607	11 47	15	7343225

Semis. 6. Comp.					
12 31	30	5214986	12 58	30	8526402
13 15	45	2714405	13 74	15	9624552

Semis 7. Comp.					
14 38	15	6190940	14 51	45	7853169

Semis. 9. Comp.					
15 24	45	4186597	15 65	15	9081432

Semis. 12. Comp.					
16 29	15	4886212	16 60	45	8724960

Tabella Sinuum, qui nascuntur à latere quadrati Gr. 90.

Arcus, & Semis. N. Gr.	M.		Complementa: N. Gr.	M.	
1 45		7071068	1 45		7071068
2 22	30	3826834	2 67	30	9238795
3 11	15	1950903	3 78	45	9807853
4 33	45	5555702	4 56	15	8314696

COROLLARIVM I.

EX his itaque tabellis habebis iam inuentos sinus arcuum 120. qui se superant m. 45. & licet ordo sit confusus; poteris tamen in seriem collocare, & sic 45. minutorum augmentum ordinatum dignoscere.

Si autem, & arcuum, qui se superant min. 15. tantummodo, sinus percupias, id deinde efficies ex propos. 12. huius addendo sinum arcus 39. grad. sinui arcus Gr. vnius, & exquirendo chordam grad. 40. ex notâ sinuum versorum ipsorum differentiâ, vt ibi docemus, hic itaque arcus grad. 40. & eius Semisses, & complementa eodem modo, ac præcedentes tabellæ compositæ sunt, dabunt multos, multosque arcus, qui prædictos 15. minutis superant.

Tabella Sinuum ex additione sinus grad. 39. & Gr. 1. resultans, nempe ex latere Nonagoni.

Arcus, & Semis. N. Gr.	M.		Complem. N. Gr.	M.	
1 20		3420201	1 70		9396926
2 10		1736482	2 80		9848078
3 5		871557	3 85		9961947
4 2	30	436194	4 87	30	9990482
5 1	15	218140	5 88	45	9967620

Semis. 1. Comp.			Semissium, Compl.		
6 35	0	5735764	6 55	0	8161520
7 17	30	3008058	7 72	30	9537169
8 8	45	1521234	8 81	15	9883515

Semis. 2. Comp.					
9 40, & cæt.		6427876	9 50		7660445

Semis. 3. Comp.					
10 42	30	6755902	10 57	30	7372773
11 28	15	& cæt.	11 68	45	& cæt.

Et sic produces ipsam tabellam vsque dum poteris ; illa enim ferè omnes gradus è 15. in 15. minuta progredientes adimplebit, si iungantur, & in ordinem redigantur cum arcubus præced. tabellarum ipsius arcus cum sinibus adiunctis.

Deinde ex arcu Gr. 52. m. 30. subducemus arcum m. 30. & acquiremus arcum Gr. 52. cuius chordam perquiremus ex 13. propos. huius, & habebimus sinum grad. 26. cuius perquiremus complementa, & semisses, & complebit omninò numerum Grad. 360. qui excrescunt 15. minutis se augendo : sicque illius tabulæ stabit initium.

Tabella Sinuum enascentium ex subductione arcus m. 30, ab arcu Gr. 52. m. 30.

Arcus N. Gr.	Semis. M.			Complem. N. Gr.	M.		
1 26	0	4383712		1 64	0		8987940
2 13	0	2249511		2 77	0		9743700
3 6	30	1132632		3 83	30		9935058
4 3	15	566928		4 86	45		9983917

Semif. I. Comp.			Compl. Semissium.		
5 32		5299192	5 58		8486481
6 16		2756573	6 74		9612617
7 8		1391731	7 82		9902681
8 4		697565	8 86		9975640
9 2		348995	9 88		9993908
10 1	& cæt.		10 89		& cæt.

COROLLARIVM II.

VErùm, si pigeat tanti laboris, scias aliquos vti differentijs ipsis inter sinus Arcuum se superantium m. 45. & earum partibus proportionalibus.

Itaque dispositis sinubus arcuum se 45. minutis superantium hoc modo.

G. M.	Sinus	Differentiæ Præ.
12 15	1950903	
12 0	2079117	128214
12 45	22 6974	127857
13 30	2354454	127480
14 15	2481533	127179

Subduces sinus minores à maioribus, vt habeas differentias ipsas primas, quas singulas in tres partes æquales diuides. Inde sinui datorum graduum V. g. 12. addes, & habebis sinum maiorem minutorum 15. nempe Gr. 12 m. 15. saltem proximè, & si adhibueris in supputationibus sinum maiorem saltem duabus zifris etiam admodum exquisita hæc regula erit, vsque ad grad. 45. Nam postea cæteri Sinus per Inuentorum sinuum arcuum se superantium m. 15. complementa inuenienda sunt.

Sit ergo Sinus Gr 12. silicet 2079117. differentia est à sinu maiori Gr. 12. m. 45. Par. 2206974. differentia inquam est Partium 127857 quæ tri fariam diuisa tertã partem exhibebit 42619. Addesq; deinde sinui G. 12. m. 15 qui est 2079117. & erit 2121736. qui erit quidem paulo minor, quam is, qui in sinubus ponitur ; Sed abiectis duabus figuris, quæ abundant ad dextram erit exquisitus sinus 21217. Gr. 12. m. 15. posito sinu toto 100000. at si maior supponatur sinus, vt in tabulis : tunc sinus inuenti ex sinu aucto insuper duabus zifris erunt maiores, quàm hic ponuntur : vnde error etiam, qui in hac regula contingere potest abiectis 2. figuris corrigetur. Cum non possit vltra duas primas figuras ad dextram extendi.

Si verò cupias sinum Gr. 12. m. 30. addes prædicto 2121736. eandem differentiam, & fiet sinus 21643(55. abiectisque duabus figurls dextris erit sinus exquisitus Gr. 12. m. 30. posito sinu toto 100000. & sic de cæteris vsque ad 45. Gradus : ex inde enim mediantibus regulis traditis, vel tradendis complementa exquiri debebunt sinuum arcuum inuentorum, & sic omnes sinus arcuum excrescentium m. 15. acquisiti erunt.

COROLLARIVM III.

HInc quoque cognosces, quomodo sinus minutorum reperiantur. Namque si iam, vt præsupponitur reperti sint præced. tabularum sinus adhibendo sinum totum auctum duabus zifris, cum vix differat grad. 0. m. 1. vsque ad 45. Gr. sinus adeo paruâ additione aucti à curuitate ipsius circuli ipsi arcui additâ ; hinc fit, quod per regulam proportionum possint exquiri.

Primò itaque accipe differentiam inter sinum V. g. m. 30. & min. 45. quæ erit 43632. Dicesque si minuta 15. quibus discrepat arcus maior à minore dant differentiam 43637. quid m. 5. ? & habebis partes 14544. quæ additæ ad sinum m. 30. Partium 87265. efficient sinum 101809. minutorum 35.

Iam verò reperto sinu arcus m. 35. Part. 101809. si differentiam, qua discrepat ab arcu minori in quinque partes diuiseris, & singulas addideris sinui m. 30. efficies successiuè sinus m. 31. & 32. & 33. & cæt. & hoc exactius succederet ; si, vt monui, assũptus fuerit sinus totus auctus duabus zifris. Quinta igitur pars differentiæ 14544. est partium 2908 $\frac{4}{5}$, quam addes sicut tabella ostendit.

Ita verò sequeris differentias inter sinum arcus maioris Gradibus 15. ab arcu minori in quinque secando, & sinui minori singulas quintas partes successiuè addendo vsque ad arcum Gr. 45. Nam repertis ita omnibus istis sinubus, quærenda sunt deindè modo supra tradito Coroll. 1. prop. 11. huius, eorum complementa, & sic tota Tabula omnibus Sinibus appositis erit completa.

Sinus m. 30	87265 $\frac{4}{5}$ 2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 31	90173 $\frac{4}{5}$ 2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 32	93082 $\frac{4}{5}$ 2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 33	95991 $\frac{4}{5}$ 2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 34	98900 $\frac{4}{5}$ 2908 $\frac{4}{5}$
Sinus m. 35	1018090

EX-

EXPENSIO V.

De Sinibus, Chordisque inueniendis sine extractione Radicis Quadratæ.

QVæ diximus supra satis sunt ad tabulam sinuum efficiendam. Verùm ad ampliorem eruditionem, & vt laboriosam, & minus notam inuentionem radicis quadratæ effugiamus suppositis cognitis lateribus figurarum regularium ; ex inde sequenti doctrina eam quoque tabulam condere poterimus.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Si in circulo quadrilaterum sit descriptum, rectangulum ex diametris factum est æquale duobus rectangulis simul sumptis qui sub oppositis lateribus comprehenduntur.

SIt ABCD rectangulum descriptum in circulo, seu segmento. Dico *rectangulum descriptũ ex duabus diagonalibus* AD, & BC *esse æquale rectangulo* descripto à duobus lateribus oppositis AB, CD, & rectangulo à CA, & DB lateribus oppositis contento.



Quod vt probetur.

Progr. 1. Eligatur aliquis angulus à latere diagonali comprehensus, vt BAF niger apud A, qui vel sit æqualis, vel minor, quam alter ad eandem partem eodem diametro : & latere contiguo comprehensus qualis angulus CAD ad A. Si est æqualis nihil fiat ; si est minor, vt in exemplo est A in maiori abscindatur æqualis angulus, & sit ad A angulus niger trianguli CAE, quibus nigris, & æqualibus ; si addatur albus communis EAF remanebunt æquales niger, albusque EAB, & niger, albusque CAF, diagonalis verò CB erit secta in duas partes in E ; Quapropter ex 3. lib. 2. Euclid. rectangula duo sub partibus, & altera diagonali AD comprehensa erunt æqualia rectangulo sub duabus CB, & AD concluso.

Progr. 2. Triangula BAE, & CAD sunt æquiangula, angulusque niger apud A, & albus in maiori triangulo CAD est æqualis nigro, & albo BAE ex constructione.

Anguli verò B, & D nigri, eo quòd inexistant eidem circumferentiæ AC sunt equales ex 24. lib. 3. Euclid. Quare, & reliqui ad E, &c. Ergo ex 4. lib. 6. Euclid erit eadem proportio CD basis ad crus AD maioris, ac basis BE ad crus AB minoris trianguli. Ergo ex 18. lib. 6. rectangulum sub extremis CD, & AB erit æquale rectangulo sub medijs BE, & AD.

Progr. 3. Idem dicendum est de triangulo nigro CAE, quod est æquiangulum triangulo ABD : Nam nigri CAE, & FAB apud A sunt anguli æquales ex constr. albus verò apud D, & niger apud C ; eò quod inexistant eidem circumferentiæ AB sunt quoque æquales, quare, & reliqui. Ergo eodem argumento. Ita erit in proportione AD ad BD, vt AC ad CE : Ideoque rectangulum sub extremis lineis clausum, nempe AD, & CE erit æquale illi, quod à medijs BD, & AC clauditur.

Progr. 4. Notandum est itaque, quòd rectangulum ex 2. progr. est factum ex tota diametro AD & maiori portione alterius diametri EB, & æquatur rectangulo laterum AB, & CD oppositorum, & rectangulum ex 3. progr. est ex eodem diametro AD, & minori portione alterius diametri CE æquaturque rectangulo ex reliquis lateribus oppositis BD, & AC. Rectangula autem duo ex diametro tota, & portionibus alterius facta æquantur illi facto ex integris diametris AD, CB, vt prænotauimus ex 3. l. 2. Eu. progr. 1. Quare hoc rectangulum ex diametris erit æquale duobus rectangulis quorum quodlibet ex duobus lateribus oppositis quadrilateri circulo inscripti componitur.

COROLLARIVM I.

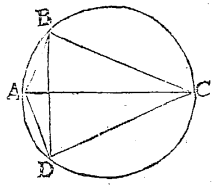
HInc eruitur quomodo datis duabus chordis, & chordis repertis complementorum vsq; ad semicirculum ex Coroll. 2. propos. 11. possimus venire in cognitionem chordæ, quæ inter duos arcus datarum chordarum intercipitur, vel quo simul superant semicirculum, vel quo arcus datus superat allum ; sine extractione Radicis quadratæ. Nam datis Chordis CA, & BD multiplicabuntur simul, vt fiat rectangulum sub ipsis comprehensum : Deinde repertis chordis complementorum vsque ad semicirculum AD, & CB arcuum ABD, & CAB inuicem pariter multiplicabuntur, & erit rectangulum æquale rectangulo ex CA, & BD, & rectangulo ex AB, & CD. Subducito itaque rectangulum notum ex lateribus CA, & BD, remanebitque rectangulũ ex DC, & AB, quo diuiso per totum diametrum dabitur chorda arcus AB, quæ diuisa per medium dabit sinum dimidij arcus AB, quò dati arcus BD, & AC deficiunt à semicirculo. Hunc autem sinum obtinebis quoque si opereris dimidio diametro, & dimidijs omnibus chordis acceptis. Nam ita est totum ad totum, vt dimidium ad dimidium. Quod si ponas vnum arcum esse CAB, alterum ABD, chorda AB reperta erit arcus illius, quo dati arcus simul sumpti superant semicirculum : At si arcus dati sint CA, & CAB reperta chorda esset illius arcus quo vnus superat alium, vt patet.

COROLLARIVM II.

HInc quoque chorda summæ duorum arcuum reperitur. Pone itaque te habere notas Chordas AB, & AD ; earum complementa ad semicirculum reperiantur BC, & DC : Deinde lineæ diagonales ducantur, quarum vna sit diameter AC, altera BD in quadrilatero ABDC : Multiplicetur itaque AB latus per oppositum DC ; item AD per oppositum BC habebimusque duo rectangula æqualia rectangulo facto ex diagonalibus AÇ, & BD, si ergo aggregatum duorum rectangulorum ex lateribus AB, & CD necnon,

&

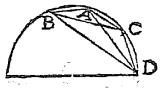
& AD, & BC diuidatur per totum diametrum prodibit Chorda BD, quæ diuisa bifariam dabit sinum



dimidij arcus BAD. Poteris quoque vti dimidiatis lateribus, & dimidio diametro, & prodibit idem sinus dimidij arcus BAD.

COROLLARIVM III.

POteris quoque datâ chordâ simplicis arcus; & chordâ dupli arcus reperire chordam tripli. Sit ergo chorda arcus AC simplicis, & arcus ACD duplicis. Inuenietur chorda tripli BACD, si chorda simplicis arcus multiplicetur in se nimirum chorda CD, & æqualis AB laterum oppositorum quadrilateri BACD, deinde multiplicetur in se



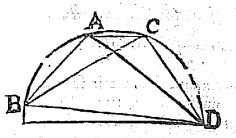
chorda dupli arcus, nempe diagonalium AD, & BC, & ab hoc rectangulo per multiplicationem facto deducatur rectangulum primo factum per multiplicationem laterum BA, & CD, & residuum æquabitur rectangulo ex lateribus oppositis AC, & BD. Vnde si hoc rectangulum diuidatur per latus notum AC; relinquetur latus BD tripli arcus chorda, & si vtaris dimidiatis chordis eueniet sinus dimidij arcus BACD.

COROLLARIVM IV.

SI autem noueris chordam tripli arcus BACD, simplicis BA, & cupias chordam duplicis. Oportet multiplicare AB simplicis arcus chordam in se, & habebis rectangulum sub lateribus æqualibus oppositis comprehensum, deinde simplicis arcus chordam cognitam per arcus tripli chordam multiplicabis, & habebis rectangulum ex BD, & AC, quæ vnita æquabunt quadratum ex diagonalibus AD, & BC. Vnde educta radix quadrata dabit chordam AD, quod licet ad hunc locum minus spectet, cum nostrum institutum sit docere, quomodo sine extractione radicis quadratæ datis lateribus figurarum circulo inscriptarum possint omnes sinus reperiri; nolluimus tamen omittere.

COROLLARIVM V.

POteris quoque reperire ex chordis notis dupli arcus tripli, & simplicis chordam quintupli arcus. Chorda simplicis arcus sit AC, dupli arcus CD. Si multiplices CD, & BA æquales inuicem habebis rectangulum, quadrilateri BACD sub oppositis lateribus contentum; multiplicabis quoque diagonales BC, & AD in se, & obtinebis rectangulum, à quo demes rectangulum ex oppositis late-

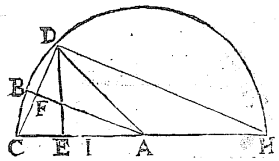


ribus constitutum BA, & CD, residuumque diuides per latus AC, iam cognitum, & prodibit chorda BD arcus quintuplicis BACD.

THEOR. II. PROPOS. XVII.

Quadratum sinus recti est æquale rectangulo ex sinu verso duplicis arcus, & medietate radij confecto.

PRobatur. Nam triangulum CDH ad circumferentiam, est rectangulum, vt etiam tale est CDE, angulusque C communis, ergo ita erit CH diameter, & basis ad chordam, & latus minus CD trianguli majoris, vt idem latus, chordaque, & insuper basis in triangulo minori ad CE latus minus: Et ideo ex propos. 19. lib. 6. quadratum ex chorda CD, tanquam ex medio æquale



erit rectangulo ex extremis confecto CE, & CH. Ergo, & quarta pars quadrati ex CD, cuius latus est medietas, FD, est æqualis quartæ parti rectanguli, quæ comprehenditur à CI semiradio, & CE sinu verso duplicis arcus, quod est intentum: hæc verò quarta pars posset constitui; si placeaet ex semisinu verso, & toto radio CA, vt considerantl patet.

COROLLARIVM.

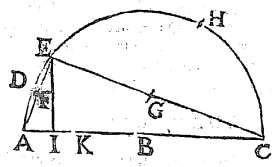
HInc est, quod si multiplices sinum rectum CF in se, & deinde diuidas per semiradium CI quod habeas sinum versum duplicis arcus CE, qui subductus à sinu toto dat sinum complementi EA. Sic quoque, quod si multiplices sinum versum CE per semiradium CI, & ex numero multiplicato radicem quadratam eruas, quod sinum rectum CF obtineas.

THEOR. III. PROPOS. XVIII.

Vt dimidium sinus totius se habet ad sinum dimidij alicuius arcus, ita sinus complementi eiusdem dimidij ad sinum totius arcus.

SIt dimidium AK, Sinus totus AB; dupletur ipse sinus totus, & sit ABC diameter, & hac diametro fiat semicirculus. Sitque in eo sinus EF, dimidij arcus AD totius arcus ADE: Sinus verò totius arcus eiusdem ADE sit IE, complementum arcus dimidij ED sit EH, & ducta EC sinus illius cõplementi EH sit EG. Dico, *quod ita est dimidium* AK *sinus totius ad sinum* EF *dimidij arcus, vt refertur sinus* EG *complementi eiusdem dimidij in proportione ad sinum totius* EI.

Quod vt probetur considera AEC angulum; quod si in circumferentiâ, & EIC ex Hypothesi esse rectangula, angulumque communem esse apud C. Vnde, & erunt æquiangula, vt constat ex propos. 8. lib. 6. & ideo ex 4. Euclid. lib. 6. latera circa æquales angulos erũt proportionalia. Ideoque erit, vt basis AC trianguli majoris ad crus minus AE, ità basis EC ad crus minus IE minoris trianguli EIC. Quamobrem dimidium quoq; AB totius diametri, & basis se habebit ad idem suum crus minus AE, vt dimidium EG basis EC minoris IEC trianguli se habet ad EI crus minus in ipso. Radius AB, & GE, itaque iam sumantur non vt dimidia, sed cum sint in eadem proportione, ac sua tota veluti tota accipiantur, & erit AB ad AE, vt EG ad EI. Vnde eodem argumento; denuò concludemus intentum. Nam dimidium sinus dimidij & quarta pars AK basis AC erit ad dimidium sui cruris AE. nempe ad sinum EF dimidij arcus ADE, vt sinus EG complementi ad sinum IE duplicis arcus.



COROLLARIVM I.

QVòd si obtineas cognitiooem sinus recti AF dimidij arcus AE & sinus complementi eiusdem EG potes acquirere cognitionem sinus duplicis arcus EI per regulam auream. Nam si multiplices sinum complementi EG per sinum rectum EF, & diuidas per medietatem sinus totius AK habebis sinum EI rectum duplicis arcus ADE.

COROLLARIVM II.

SIc si obtines cognitionem Sinus duplicis arcus, & sinus complementi simplicis eiusdem posses deuenire per regulam auream in cognitionem sinus simplicis arcus. Nam si multiplices dimidium sinus totius AK, cum sinu duplicis arcus IE, & aggregatum diuidas per sinum complementi dimidij arcus EG habebis sinum simplicis arcus FE. Nam EG, qui est sinus complementi dimidij arcus EH est ad EI sinum duplicis arcus, vt dimidium sinus totius AK est ad sinum simplicis arcus AF, quare rectangulum factum ex medijs AF sinu simplicis arcus & GE complementi eiusdem æquale est rectangulo facto ex extremis AK dimidio sinus totius, & IE sinu duplicis arcus.

Si verò è contra diuidas rectangulum ex IE, & AK per sinum simplicis arcus FE habebis sinum complementi simplicis arcus EG, sicque dato sinu duplicis arcus, & dimidio sinus totius, & sinu simplicis arcus deuenies in cognitionem sinus complementi eiusdem arcus simplicis.

PROBL. I. PROPOS. XX.

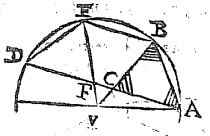
Arcus tertiæ partis Chordâ datâ chordam totius arcus inuestigare.

SIt data chorda AB, & opporteat inuenire chordam AD, quæ arcum totum subtendat.

Fiat, vt VA sinus totus ad AB chordam datam; ita AB ad BC. Deinde rursus adhibitâ regula proportionum fiat, vt radius BV ad residuum VC inuentæ BC, sic Chorda data AB, vel æqualis BE ad aliud, & inuenietur CF; Quia ergo AC, & FD sunt æquales ipsis AB, & BE: si addatur ipsis nuper inuenta CF efficietur AD, quæ quærebatur.

Quòd, vt ostendatur, ducta EV ponatur AC æqualis ipsi AB, & prolungetur in D. Dico *in primis* BED *arcum esse duplum arcus* AB, & ideo AED arcum, quem subtendit AD esse triplum arcus AB.

Prob. Nam angulus niger B est æqualis nigro C ob æqualia crura AB, & AC ex effectione: Quare & angulus A semialbus erit æqualis nigro B ob æqualia crura AV, VB, nempe radios, & ideo quoque nigro C, & sic B, & C anguli nigri trianguli ABC erunt æquales angulis B, & A trianguli BAV. Quare, & reliquus angulus niger A in triangulo ABC erit æqualis albo V in triangulo BAV ex propos. 17. lib. 1. elem. Sed A niger est ad circumferentiam. ergo vt æqualis duplo maiorem circumferentiam subtendet BED, cum si subtenderet æqualem subduplus esset; ideo addito EB totus arcus ABED erit triplus arcus solius AB.

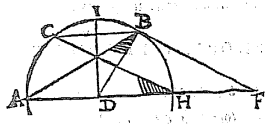


Prob. 2. Quòd radius sit ad datam AB, vt AB ad BC: cum enim triangula sint æquiangula habebunt latera circa æquales angulos proportionalia. Ergo erit, vt AV ad BA basim, ita eadem crusque AB ad BC. Et hinc ex 4. lib. 6. erit BV ad residuum VC inuentæ BC, subducte à sinu toto, vt BE ad CF, quæ cum AC, & DF complet subtensam AD.

THEOR. VI. PROP. XXI.

Radius est ad chordam, quadrantem superantem, vt ipsa chorda ad diametrum addita Chordæ dupli excessus.

SIt data AB, quæ superet quadrantem, & duplus excessus sit CB. Dico, *quòd radius* AD *est ad* AB, *vt* AB *chorda ad* AF *diametrum cum* HF *æquali* CB dupli excessus IB, quo arcus ACB superat quadrantem AI.



Probatur. Nam triangula ABD, & ABF sunt æquiangula, & angulus A est æqualis angulo F ob parallelismum linearum æqualium ipsi AB, quæ sunt CH, & BF; siquidem ob id, tam angulus A, quam F æquantur tertio angulo H nigro, angulus verò A communis vtrisque æquatur angulo B nigro ob æquales radios: Ergo, & reliqui ex Cor.2. propos.17. lib.1.: Quare habebunt hæc triangula latera circa æquales angulos proportionalia, eritq; AD crus ad AB basim, vt ipsa AB crus in triangulo ABF ad AF basim.

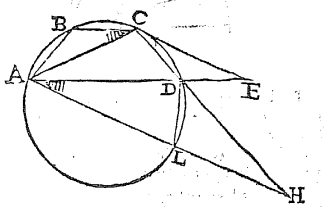
COROLLARIVM.

HInc si datâ chordâ AB excedente quadrãtem facias regula aurea, vt semidiameter AD ad AB, ita AB ad aliud inuenies AF, à quo inuento subduces diametrum, & restabit HF idest æqualis CB dupli excessus, quo superat data chorda quadrantem.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Tres subtensæ prima arcui simplici secundæ duplici, tertia triplici æqualibus sunt tres continuè proportionales: si prima tertiæ addatur, vt sit vltima proportionalis.

ADdatur AB prima tertiæ AD. Dico AB, AC, & AE *esse tres continuè proportionales*.



Extensâ AD fiat æqualis linea CE ipsi AC. Et ostendendum prim*o* esse BA ad CA, vt CA ad AE. Anguli DAB albus est bifariam sectus linea AC, & partes DAC, & CAB equales sunt: sed angulus E ipsi CAD ob æqualia crura ex effectione, sicut C niger albo CAB æquantur. Ergo triangula, ECA, CBA æquiangula sunt; quare erit, vt crus BA ad basim AC, ita AC ad AE ex 4. lib.6. elem.

Deinde ostendendum est ED æquari ipsi AB. Triangulum EDC est æquiangulum triangulo CBA. Angulus enim E ostensus est æqualis angulo nigro C: Angulus ABC subtendit totam periferiam exceptis duabus partibus BC, & BA; quibus ineſt; sed angulus CDA subtendit duas ipsas partes CB, & BA. Ergo residuus angulus exterior EDC totam reliquam, peripheriam occuparet, cũ duo anguli apud D duobus rectis æquentur, & ideo ad centrum positi insisterent semicirculo. Vnde ad peripheriam totam peripheriam vsurparent. Quare EDC angulus æquabitur angulo B: cum ergo sint æquiangula triangula ob duos angulos equales ex Cor.2. pr.17. lib.1. ita erit BA ad CB, vt DC ad DE: sed BA, & CB sunt æquales. Ergo etiam DC, & ED linea; linea verò DC æquatur ipsi CB ex hypothesi.

Sit deinde HD æqualis ipsi DA. Dico rursus CA esse ad EA, vt AD ad AH in proportione. Sunt enim ECA, & HDA triangula equiangula ob angulos ipsorum apud A æquales ex Thesi, & consequenter H, & E cum triangula sint æquicrura: vnde, & reliqui æquales ex Coroll.2. propos.17. lib.1. Quare erit vt CA crus ad EA basim, ita DA crus ad AH basim.

Deinde assero HL æquari ipsi CA. Nam HLD triangulum est æquiangulum triangulo DCA. Nam angulus H æquatur nigro A, & angulus DCA obtusus subtendit totam circumferentiam exceptis tribus partibus, ideſt arcum DC BA: Sed angulus DLA subtendit easdem tres partes; & est internus, ergo reliquus HLD externus equatur ipsi DCA: & totam reliquam circumferentiam in circumferentia positus subtenderet. Quamobrem DC erit ad CA, vt DL ad LH: quare permutando DC erit ad DL; vt CA ad LH; sed CD, & LD sunt æquales. Ergo LH, & CA erunt æquales.

COROLLARIVM.

HInc deduces modum, quo triplices, & quadruplices, aut quintuplices, & cæt. arcum propositum. Cuiuscumque arcus subtensam inuenias. Nam datâ subtensâ arcus simplicis BA, & arcus duplicis CA si adhibitâ regulâ aureâ multiplices subtensâ arcus duplicis in se, & diuidas per subtensam arcus simplicis habebis AE, cui subducta ipsa BA, ideſt DE tertiam subtensam DA arcus triplicis exhibebit. Quoniam ostendimus BA esse ad CA, vt CA ad AE. Deinde si rursus assumas DA, & ei addas DE, vel BA, vt fiat EA, & regula proportionum dicas si CA dat EA, quid dabit AE? inuenies HA, quæ subductâ ipsâ CA, dabit subtensam AL arcus quadruplicis LCA, & sic de alijs.

COROLLARIVM II.

ELlicies. Quomodo ex cognitione chordarum, quæ latera figurarum, de quibus diximus Expensione prima, & chordarum arcuum, qui earum arcus complent vsque ad semicirculum, quæ acquiri possunt ex propos.18 possimus deuenire in cognitionem cæterorum omnium sinuum. Nam dimidientur chordæ, & erunt sinus dimidij arcus. Sic earum complementa vsque ad semicirculũ, & erunt sinus complementorum vsque ad quadrantem

tem. Deinde per propositiones positas omnes alios arcuum sinus se inuicem superantium 45 minutis possumus reperire, & deinde ex dictis Coroll.2.prop.15. reperto sinu, arcus vnius. Similiter omnes alios arcus, qui 15. minut. alter super alterum augentur inuenire, ex Coroll.1. & 2.prop. 16. & tandem ex regula aurea omnes alios, qui vnico minuto continuò excrescent augmento.

V. g. data chorda decagoni 24. dimidiata erit sinus Gr. 12. Sicut, & complementi chorda 156. Gr. dimidiata erit Gr.78. complementi arcus 12. Primo itaque ex Corollar. propoſit. 18. habebis sinum versum duplicis arcus Gr. 24. quo subducto à Radio erit residuum eius complementum Gr. 66. & consequenter chorda duplicis arcus Gr.132. Quibus obtentis potes etiam obtinere cognitionem sinus recti ex prop.17. Coroll.1. arcus eius duplicis 48. & eius complementi gr. 42. ex Cor.pr.18. Deinde cum iam habeas sinum Gr.42. potes reperire eius duplum sinum gr. 84. & eius complementi gr. 6. Et hinc gr.3. deinde gr.1. m. 30. & tandem gr. 0. m. 45. Quo habito poteris reperire per ordinem omnes sinus, qui differunt m. 45. ex Coroll. propoſ.22. vsquequo compleas 120. arcus inter quos reperies sinus couenientes, vt supra docuimus. Vel vtendo alijs propositionibus positis datâ chordâ arcus 12. & arcus 30. ex propoſ. 17. Coroll. 2. inuenies chordam summæ datorum arcuum G. 42. cuius sinum cõplementi ex prop. 18. vel 19. reperies sinum arcus G. 46. & dimidij huius arcus ex propoſ.19 duplicabisq; & erit chorda totius arcus 46. istis itaque duabus chordis gr. 12. & G. 46. ex propoſ.16. Coroll.2. inuenies chordam summæ arcuum illarum chordarum, nempe arcus 58. cuius medietas sinus erit arcus 29. & ita proſequeris diuersimodè sinus, complementaque, & chordas combinando: Nam eodem modo omnes sinus reperies, qui se superant m. 45.

EXPENSIO VI.

De reperiendis sinubus aliquibus per solam subductionem, & additionem.

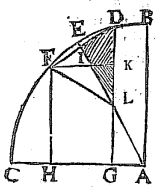
QVia facilitas in omnibus, & temporis compendium placet in multis sinubus inuendis singulari breuitate, & facilitate hàc regula posſumus vti; quam præmiſſa vnica propoſitione trademus.

THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Differentia sinuum rectorum peripheriarum duarum à circuli sexta parte æquali interuallo remotarum æquantur sinui recto peripheriæ alterius interualli à circuli sexta parte.

SInt in quadrante ABC peripheriæ duæ EF, & ED æquali interuallo ab E circuli sextantæ remotæ, quarum sinus DI, vel FI; sinus verò arcuum, qui ab E circuli sextante æquali interuallo seiungũtur sint FH sinus arcus FC, & GD sinus arcus DC, quorum differentia sit KD. Dico KD *differentiam esse æqualem sinui recto* FI, *vel* ID *interualli, seu* DE, *seu* EF. Ducatur itaque AE, & ab L, vbi secat AE ducatur LF.

Probatur. Triangulum DFL est æquiangulum. Habemus enim duo triangula rectangula prorsus æqualia nigrum, & album. Nam latera quidem IF, & ID æqualia sunt, latus verò IL commune.



Propterea ex pr. 22. primi, & bases erunt æquales. Vnde, & anguli ad L albus, & niger æquales: Sed angulus niger ad L est partium 30. æquatur enim angulo LAB apud A ex pr 30.l.1. ob parallelismum linearum AB, & GD. Ergo alter niger ad D erit G.60. ad hoc, vt cum angulo recto ad I æquetur duobus rectis ex prop.17.l.1. Sic philosofare de albo ad F ob angulum album ad L. æqualẽ angulo ad L nigro, qui est Gr.30. qui, & compoſiti facient totum DLF Gr. 60. Ergo æquilaterum erit triangulum, & æquiangulum, & perpendiculares KF; & LE dimident, vt angulos bifariam, sic, & latera bifariam. Ergo erit KD differentia sinuum rectorum, & IF sinus rectus interualli, quo distat arcus FC ab arcu gr. 60. CE erunt æquales.

COROLLARIVM I.

SI itaque notum habeas sinum rectum arcus V. g. 36. & sinum rectum interualli vsque ad 60. arcus Gr. 24. & addas simul istos duos sinus efficies sinum arcus 84. Sinus enim ille V.g. EF gr. 24 æquatur differentiæ KD arcus 84. nimirum arcus, qui compoſitus est ex arcus 60. & interuallo 24. qui erat inter 60. & 36. vnde additus FI sinus G. 24. sinui arcus FH Gr. 36. facient sinum GD arcus 84.

COROLLARIVM II.

SIc si notos habeas duos sinus arcuum, qui æqualiter distent ab arcu gr. 60. vt sunt duo sinus HF arcus 36. gr. & GD arcus gr. 84. & subducas vnum ab alio, habebis sinum arcus interualli; quo alteruter eorum distat à gr. 60. nempe DE sinum arcus ED, vel FE.

COROLLARIVM III.

SIc si demas notum sinum ID interualli ED, à maioris arcus sinu GD pariter cognito habebis sinum HF minoris arcus.

Et hoc de sinibus dictum sit quatenus ipsi inueniri possunt, cùm de cæterò de eis iterum reassumendus sit tractatus, quatenus mediantibus ipsis arcus inueniri queunt.

EXPENSIO VII.

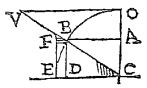
De tangentibus, & secantibus.

SEcantium atque tangentium ex præcedentibus inuentis quantitates deducuntur; ex proportionibus enim, quas ad sinus habent, earum mutuas proportiones breuiter explicabimus.

THEOR. I. PROP. XXIV.

Quam proportionem habet Sinus complementi ad sinum rectum, eam habet Sinus totus ad tangentem arcus.

PAtet. Nam sinus complementi AB arcus BO complentis vsque ad quadrantem arcum BE est æqualis CD ob parallelogrammum rectangulũ ABCD: Sed CBD, & CFE sunt triangula æquiangula, vt patet, & BD, & EF parallelæ. Ergo ex prop. 4. lib. 6. Eucl. Ita erit CD sinui AB complementi æqualis ad BD sinum rectum, vt CB radius ad EF tangentem; quod est propositum.



Quod si constituas OB pro arcu, & AB pro sinu recto BD erit sinus complementi. Quare eadem ratione sinus rectus AB, vel æqualis CD erit ad sinum complementi BD, vt CE ad EF; quare in hoc casu, quam proportionem habet sinus rectus ad sinum complementi eam habet sinus totus ad tangentem ipsius complementi.

COROLLARIVM.

HInc potes dato sinu recto, & sinu complementi, & radio inuenire tangentem, seu sinus recti, seu complementi. Nam si multiplices sinum totum per sinum complementi, & diuidas per sinum rectum, habebis tangentem complementi. Quod si multiplices sinum totum per sinum rectum, & diuidas per sinum complementi, tangentem habebis arcus, cui rectus sinus subtenditur.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Radius medio loco proportionalis est inter tangentem arcus, & tangentem complementi.

PRobatur. Nam triangula CEF, & COV sunt æquiangula. Ergo ex propos. 4. lib. 6. ita erit OV crus maius, & tangens ad OC radium, vt radius CE, & crus maius in minori triangulo ad EF crus, & tangentem.

Quod autem triangula VOC, & CFE sint æquiangula non est dubitandum. Nam sunt rectangula ad O, & E ob tangentes perpendiculares; vnde reliqui anguli nigri simul sumpti C, & F erunt æquales vni recto, quare angulus niger F erit complementum anguli C. Ergo æqualis angulo ad C albo, & eiusdem complementum, & ob eandem eandem rationem angulus albus V erit æqualis nigro C.

COROLLARIVM.

HInc emergit Rectangulum tangentium esse æquale quadrato sinus ex propos. 17. lib. 6. Eucl. & ideo in se ducto sinu toto; si diuidas per notam tangentem arcus habebis tangentem complementi, & si diuidas per tangentem complementi, resultabit tangens arcus.

Vnde faciliter tabulæ tangentiũ extrui possunt: Nam ex 24. propos. inuentis tantùm tangentibus dimidij quadrantis, cæteras inuenire poteris ex hac propositione, & quidem per solam diuisionem quadrati sinus totius.

THEOR. III. PROPOS. XXVI.

Sinus totus medio loco proportionalis est inter sinum complementi eiusdem arcus, & secantem eiusdem arcus.

PRobatur ex præmissis. Nam CBD, & CEF sunt triangula æquiangula: Ergo ita erit ad basim, & sinum totum CB sinus complementi CD, vel AB, vt idem sinus totus, cruſque CE est ad secantem CF.

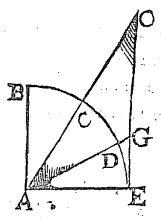
COROLLARIVM.

HInc verò deduces multiplicatum sinum totum in se, & diuisum per sinum complementi exhibiturum secantes arcuum, quos complent. Ita CE sinus totus multiplicatus in se, & diuisus per AB sinum complementi BO exhibebit secantem CF arcus EB.

THEOR. IV. PROPOS. XXVII.

Secans arcus minoris semiquadrante additæ tangenti facit tangentem arcus, qui prædictum continet, & semissem sui complementi.

SIt arcus ED, cuius secans AG, tangens GE, complementum sit arcus DB, & medietas eius DC. Quare arcus continens arcum primo propositum ED, & semissẽ illus complementi DC erit arcus EC. Dico *eius tangentem fieri* EO. *si* AG *secans arcus* DE *addatur tangenti* GE.



Probatur. Sunt enim æquales AG, & GO. Ratio est; quia anguli nigri ad A, & O sunt æquales; Vnde, & latera eis subtensa erunt æqualia. Sunt autem æquales; quoniam æquantur vni tertio angulo BAC, quòd est anguli CAE, seminigerrimi complementum, sicut angulus niger O est complementum eiusdẽ CAE in rectangulo AEO triangulo.

triangulo. Cùmque BAC, & O niger, eiusdem CAB sint complementa erunt æqualia; sed BAC æquatur ipsi DAC nigro ex constructione; ergo niger O, & niger A erunt æquales: quare, & latera AG, & OG subtensa æqualia erunt.

COROLLARIVM.

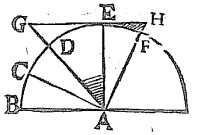
HInc habes. Quod cognitis secantibus, & tangentibus omnium Gr. vsque ad 45. possis per solam additionem omnes alias tangentes maiores, quam 45. graduum reperire, addendo silicet secãtes tãgentibus V.g. si habeas tãgentẽ, & secantem arcus Gr. 24. & eas addas simul efficies tangentem arcus 57. Gr. qui continebit semel 24. & insuper medietatem complementi eius, quod amplectitur gr. 66.

THEOR. . PROPOS. XXVIII.

Secans arcus æqualis est tangenti arcus eiusdem, & tangenti eius complementi.

SIt arcus ED, cuius tangens BE; medietas verò eius complementi DB, sit DC, vel arcus æqualis FE, cuius tangens EH. Dico, *quòd tota* GH *ex tangentibus arcus, & semissis complementi æqualis est secanti* AG.

Probatur. Nam anguli ad H niger, & A niger, & albus in triangulo HGA inuicem sunt æquales. Ergo, & latera subtensa ex 15 propos. lib. 1. Elem. erunt æqualia. Quod verò anguli sint æquales H niger, & totus A semialbus ostenditur. Nam pars alba ad A ex Hypothesi est æqualis angulo BAC.



Ergo reliquus ad H niger in rectangulo AEH erit æqualis angulo CAE, vt ex propos. 17. lib. 1. Eucl. Cor. 2. Talis verò est totus angulus HAG, nimirum æqualis angulo CAE, cùm habeat partem nigram communem, & albam ex Thesi angulo BAC, & æquali CAD æqualem; vnde H, & A anguli, & ideo crura in triangulo HGA erunt æqualia.

COROLLARIVM.

HInc euenit; Quod si simul componantur tangens arcus V. g. 24. & tangens semissis complementi eiusdem, nempe arcus 33. efficiatur secans arcus 57. Vnde multæ ex secantibus, atque tangentibus sola additione enasci possunt; Et hęc de secantibus, & tangentibus; quatenùs ipsę inueniri possunt, quatenùs verò per eas arcus inueniuntur, & quatenus inuicem referuntur infra tractabimus.



TRACTATVS XXI.

De Logarithmis.

MIro, & perutili inuento iungere Geometricis proportionalibus Arithmeticos cogitauit primus Ioannes Neperus Schotus, vt facilior calculus astronomicus per solam subtractionem, & additionem prodiret, quod inuentum licet ab Henrico Briggio aliter, deinde ordinatum sit; quia tamen eadem proportionum basi nititur, ideo hic cum (vt moris nostri est) fundamenta rerum tradere cupiamus, Neperi inuentionem ne dum, sed & ordinem, qui nobis magis arridet, explanabimus.

EXPENSIO I.

Cur Arithmetici proportionales Geometricis vniantur.

ARithmetici quatenus Geometricis proportionalibus vniti vocantur Logarithmi.

Vt sunt Geometrici	1	3	9	27	81	243	729
Arithmetici	0	2	4	6	8	10	12
Arithmetici	19	17	15	13	11	9	7

Seu simul cum Geometricis decrescant, vel crescant, seu hi deficiant, dum Illi augentur.

Annalogia verò, & similitudo, quam habent inuicem proportionales Arithmetici, & Geometrici in causa fuit, cur simul vnirentur, quàm hic diuersis propositionibus explicabimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Si duo numeri Geometrici inuicem multiplicati componunt tertium, eorum Logarithmorum aggregatum erit tertij Logarithmus.

SInt tres Geometrici proportionales,

10	100	1000
3	6	9

Dico, *quòd, si 10. multiplicatus per 100. facit 1000. quod item primus Arithmeticus vnitus secundo facit tertium.* sic 3. vnitus cum 6. facit 9.

Probatur. Nam extenduntur in maius, ex propos. 17. tract. 14. de proport. part. 1. proportionales Geometrici per multiplicationem denominatoris proportionis: at verò ex propos. 10. par. 2. Tract. 14. Arithmetici per additionem differentiæ. Si ergo in Geometricis primus terminus sit denominator, vt hic 10. & in Arithmeticis primus terminus sit differentia, necessariò sicut 10. multiplicando secundùm 100. facit 1000. ita 3. additus 6. faciet 40. tertium terminum.

THEOR. II. PROPOS. II.

Proportio Geometrica applicata proportioni Arithmeticæ incipit à Zifra 0. vel à millione, vel simili numero 10. qui vnitate additis zifris constet.

SI sit proportio Geometrica continua proportionalitate, vt 10. 100. 1000. 10000. & Arithmetica, quę à 0. incipiat, vt 0. 4. 8. 12. 16.

Arithmetica	10.	12.	14.	16.	18.	20.
Geomerrica	1.	10.	100.	1000.	10000.	10000.
Arithmetica	0.	4.	8.	12.	16.	20.

Dico, quod hæc Series Arithmeticorum infra positorum benè demonstrat Geometricos, ex eo quòd reperto arithmetico bene reperiatur correspondens Geometricus. *Atque ideo eis series Arithmetica bene addita sit.*

Probatur. In eo enim similitudine correspondent, quòd si duo Geometrici inuicem multiplicati producant tertium. Arithmetici quoq; additi, & simul positi producunt tertium. Sic quia 10. & 1000. se multiplicando producunt 10000. ita 4. Aritmeticus sub positus vnitus arithmetico 12. producit 16: At si progressio inciperet à 4. tunc primus additus secundo non faceret tertium, vt hęc.

4. 7. 10. 13. 16. 19.

Nam nec 4. radicalis additus numero 10. producit 13. nec 10. & 13. producunt 16. Ergo numerus radicalis zifra esse debet, vel vnitas iuncta zifris, vt expeditè proportio Arithmetica deseruiat geometricę. Sic si numero 14. addatur 16. faciet 30. à quo ablatus 10. vel vnitas secundi loci ad sinistram dat 20. sicut 1000 per 100. multiplicatus dat 100000.

Non interest autem, an retrograda sit, & crescentibus Geometricis, Arithmetici decrescant, vt hìc

1	2	4	8	16	32	64	128
31	28	25	22	19	16	13	10
100	94	88	82	76	70	64	58

Nam pari modo in ostendendo tertio proportionali se gerunt; sed crescentes per additionem ostendunt tertium proportionalem maiorem; decrescentes verò minorem. Si tamen numerus radicalis sit ad maximum appositus, vt in prima serie; secùs si sit ad minimum Geometricum, nam; & decrescentes maiorem quòque ostendunt.

THEOR. III. PROPOS. III.

Si numerus Geometricus per numerum diuisus producit tertium proportionalem, sic & Arithmeticus à primo subductus relinquit tertium.

Vt	1	3	9	27	81	243	729
	0	4	8	12	16	20	24

QVia ergo 27. diuisus per 3. producit 9. ita 4. subductus à 12. relinquit 8. & quia 9 diuidendo 243. producet 27. sic, & 8. subductus à 20. relinquit 12. Logarithmum numeri 27.

Ratio eadem quę propositionis primæ adhibita cautela antecedentis propositionis, quoad Arithmeticos nempe à zifra, vel vnitate additis zifris progressionem debere incipere.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

Sicut trium Sinuum proportione Geometrica continuatorum quadratum medij est æquale quadrato ex extremis inuicem multiplicatis effecto. Ita Arithmeticorum appositorum duplum medij æquatur aggregato extremorum.

3	9	27	81
4	8	12	16

SIc multiplicatus 9. in se facit 81. vt 3. per 27. at Arithmeticus 8. duplicatus facit 16. quem numerum faciunt 4. & 12 iuncti. De Geometricis patet ex propos. 5. tract. 14 part. 1. De Arithmeticis constat ex propos. 2. part. 2. tract. 14.

THEOR. V. PROPOS. V.

Quatuor Geometricè proportionalium, sicut factum ex ductu mediorum æquatur facto ex ductu extremorum: Ita suorum Logarithmorum aggregatum mediorum, æquatur aggregato extremorum.

3	9	27	81	243	Geometrici
5	10	15	20	25	Arithmetici.

ITa duo extremi Geometrici 3. & 81. faciunt 243. quem faciunt 9. & 27. medij inuicem multiplicati; sicut Arithmetici iuncti 5. & 20. extremi faciunt 25. quem faciunt 10. & 15. medij simul aggregati.

Patet de Geometricis ex propos. 6. part. 1. tractat. 14. de Arith. quoque ex propos. 1. part. 2. tractat. 14.

THEOR. VI. PROP. VI.

Sicut ex numero in se semel ducto producitur quadratus, & iterum in productum ducto efficitur cubus, & rursus in cubum ducto efficitur supersolidus; sic Arithmeticus duplatus quadrati efficit Logarithmum, triplatus cubi quintuplatus supersolidi.

Geomet.	1	2	4	8	16	32	64	128 256
Arithmet.	0	3	6	9	12	15	18	21 24

NAm ex propos. 24. lib. 8. Elem. qui ab vnitate continuè proportionales Geometrici tertium quemque habent quadratum. Quartum verò cubum, & duobus intermissis quemlibet sequentem. Septimum autem cubi quadratum, & quinque intermissis quemlibet sequentem, & cæt.

Sed si ab vnitate continuè proportionalibus Geometricis sui quique applicentur proportionales Arithmetici incipientes à zifra, secundus erit duplex primi, & quartus triplex secundi. Cùm enim primus radicalis numerus sit 0. & idem numerus semper addatur, sequitur necessariò, quòd secundus sit duplus primi, & quartus duplex secundi. Sed ex propos. 9. Element. lib. 8. quot inter vnum numerum V. g. 8. ab vnitate continuè proportionalium Geometricorum, & vnitatem cadunt proportionales Geometrici, tot, & inter illum, & alium in eadem ratione existentem vt 64. necesse est cadere. Ergo quot inter eorum proportionales Arithmeticos, & zifram cadunt partes eædem, tot etiam inter ipsum V. g. 8 & alium vtpote 64. necesse est replicare. Tot enim replicantur partes ternæ, quot proportionales Geometrici sunt. Quia itaque inter 1. & 8. duo proportionales Geometrici reperiuntur, & tres computato ipso 8. etiam trina vice replicabitur 3. & fient 9. At quia idem numerus proportionalium mediat inter 8. & 64. tricies insuper idem 3. replicabitur; Vnde fient cum primo 18. Quia ergo inter quodlibet quadratum, & radicem medius proportionalis cadit numerus, hinc est, quòd duplicatus proportionalis arithmeticus sit numerus quadratis: at quia inter radicem, & cubum duo proportionales cadunt, hinc est quod debeat tripplicari, & quia inter radicem, & quadrati quadratum; vel supersolidũ quinquies proportionales mediant hinc est, quòd quinquies replicatus exprimat supersolidum, & cæt.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

Numeri dati Geometrici, si radix Quadrata, Cuba, Superſolida extrahatur. Eius Logarithmus bipartitus, tripartitus, vel in quinque ſecatus erit Logarithmus radicis.

PRobatur, quia Logarithmus radicis efficitur Logarithmus quadrati, ſi dupletur; cubi, ſi tripletur, ſuperſolidi, ſi quinquies ſumatur; Ergo Logharithmus quadrati bipartitus efficietur quadratæ radicis numerus, cubicæ tripartitus, ſuperſolidæ per quinque ſecatus.

COROLLARIVM.

HInc ergo euidenter patet. Quod multiplicationi Geometricę correſpondet additio in Arithmeticis ex 1. h. propoſ. & diuiſioni ſubductio ex 2. huius propoſ. Extractioni radicis quadratæ bipartitio, ſicut quadrationi duplatio ex propoſ. 7. & 4.

Regulæ aureæ additio, & deinde ſubductio ex propoſ. 5. Extractioni Radicis cubæ tripartitio. Superſolidæ per quinque partitio, ſicut quintuplicatio reſpondet ſuperſolidæ multiplicationi, & triplicatio Cubicationi.

Si ergo Arithmetici Geometricis applicentur, patet, quòd inuentis Arithmeticis, inuenientur quoque Geometrici. Cumque Arithmetici per additionem, bipartionem, triplationem, ſubductionem inueniantur, ſequitur, quòd etiam Geometrici correſpondentes eodem quoque modo inuenientur. Sint itaque Geometrici cum applicatis Arithmeticis.

Arith.	40	35	30	25	20	15	10	5	0
Geom.	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561
Arith.	0	5	10	15	20	25	30	35	40

Sitque datis 3. & 27. reperiendus tertius proportionalis. Tabellam inſpicio, & Arithmeticos 5. Geometrici 3. & 15. Geometrici 27. colligo; duplicoque 15. & fiunt 30. ſubduco deinde 5. & fiunt 25. Concludo itaque quod 25. eſt tertius proportionalis Arithmeticus. Video itaque quinam Geometricus illi reſpondeat, & ille eſt 243. concludo itaque, quod 243. eſt tertius proportionalis Geometricus, & quòd ita ſit 3. à 27. vt 27. ad 243.

Sic datis tribus proportionalibus, queritur quartus V. 3. & 27. 81. Aſſumo Arith. correſpond. 5. 15. 20. Addo 15. ad 20. fiunt 35. ſubduco 5. relinquitur 30. Logarith. numeri 729. qui ſe habet ad 81. vt 27. ad 3. Sic, ſi quæras quadratum Geometrici 9. duplabis Arithmeticum ipſius 10. & erit 20. Logarithmus quadrati 81. vel, ſi cupias numeri 6165. ſcire radicem; 40. Logarithmum bipartire, & habebis 20. Logarithmum radicis 81. Vel ſi quæras radicem cubam numeri 729. tripartire 30 & habebis 10. indicans Geometricum 9. radicem cubam ipſius: Et idem aſſerendum licet numeri ſint contrario modo, & dum Geometrici augentur Arithmetici decreſcant, vt monui.

COROLLARIVM II.

ELiciès quoque id, quod ferè fundamentum eſt operis. Similiter proportionatorum Geometricorum æquidifferentes eſſe Arithmeticos, ſeu illi parui ſint, ſeu magni. Nempe eam differentiam Arithmeticam mediare inter duos Arithmeticos duorum Geometricorum, ac inter alios duos Arithmeticos, qui ſint aliorũ Geometricorũ, ſeu maiorum, ſeu minorum, ſed eandem proportionem habentium: Ita vides, quòd eadem differentia mediat inter 5. & 20. Logarithmos proportionalium Geometricorum 3. & 81. quæ mediat inter Logarithmos 25. & 40. Geometricorum 243. & 6561. nimirum 10. Ratio euidens ex dictis, Nam quot ſunt proportionales intermedij Geometrici tot additiones ſunt in Arithmeticis; cum itaque ſimiliter proportionati Geometrici habeant, vel eandem proportionem; vel duplicatam, vel triplicatam, vel quadruplicatam, vel certe vno intermedio, vel duobus, vel tribus ſic, & Arithmetici habebunt, vel eandem differentiam, vel duplam, vel triplam, vel quintuplam, & cæt. Vnde ſimiliter proportionalium Geometricorum erunt æquales ſemper differentiæ in Arithmeticis.

EXPENSIO II.

De ſerie facili Geometricorum reperienda, cui Arithmetica ſeries deſeruiat.

PRogreſſio Geometrica admodum difficilis maximè ſi de prolixa ſerie agatur: vnde ad difficultatem leniendam ijs in numeris ea progreſſio eligenda eſt, quæ fiat per ſubtractionem, vel additionem. Tam enim ſupra 1. par. Tr. 14. pr. 19. innuimus, multas eſſe progreſſiones Geometricas, quæ additione, & ſubtractione obtinentur.

Sed neque hoc quidem ad facilitatem nanciſcendam ſufficit; ſed & fractiones vitandæ, & ſummũ numerorũ augmentum. Sic modus, quem Tract. 19 part. 1. propoſ. 17. innuimus fractiones non vitat, & proportio dupla fit per additionem. Sed in infinitum prope numerum augetur.

Præſſumpt. 1. Ad hoc, vt progreſſioni Geometricę poſſit applicari progreſſio Arithmetica debet eſſe continua, ſaltem ſecundum aliquam maiorem partem; alioquin ſi Geometrica non per eandem proportionem progrederetur, Arithmetica continua, quæ ſæpe per æqualia ſpatia progreditur, ei applicari nequaquam poſſet, & fruſtra applicaretur, quia ſilicet ſimiliter proportionatorum non eſſet æquidifferens, vt debet eſſe ex Coroll. 2. expenſ. præced. Logarithmus.

Præſſ. 2. Duplex progreſſio eſt autem alia continua, & abſoluta, quæ ſilicet nullis tabulis alligatur, alia eſt interrupta, & relatiua, quæ ſinubus apponitur, vt innoteſcant eorũ proportiones: Hæc verò non potuit fieri ſine illâ, cùm enim proportionales ſinus non ſint in eadem proportione continua, ideo ex præſſumpto 1. huius expenſ. non potuit ei progreſſio Arithmetica continua applicari: Quare priùs debuit conſtrui tabula quædam continua, ex quâ deinde proportionales numeri Arithmetici applicandi proportionalibus ſinuum decerperentur ſecundùm, quòd illi continui Geometri iſtis diſcontinuis occurrebant, & ijſdem

ijſdem numeris, vel ſaltem valde proximis reſpondebant. Sint V. g. continui

32	64	128	256	512	Geometrici
5	10	15	20	25	Arithmetici

Sitque alia proportio non continua 32. & 64. & 255. 511. quia hic 32. eſt eiuſdem quantitatis, ac 32 in continua Geometricorum ſerie repertus; dico eius logarith. eſſe 5. ſic quia 64. in non continua eſt eiuſdem quantitatis ac 64. in continua, dico eius logarith. eſſe 10. Sic Geometrici 255. quia accedit ad 256. eſſe 20. & 511. eſſe 25. quia accedit ad 512. & licet vnitas in iſtis paruis numeris generet differentiam ſenſibilem, in magnis tamen numeris vnitas eſt ſpernenda, vt inſenſibilis, quid enim eſt 1. reſpectu 1000000. centum millium?

Præſſumptum 3. Et hinc eſt, quòd magnus numerus elligendus ſit, tum quia differentia, ſi qua eſt, reddatur inſenſibilis in multitudine partium, tum quia, vt propoſ. 7. Tr. 14. par. 1. in magno numero plurimæ latent proportiones, & ideo in lõgam ſeriem in magno numero proportiones diſtendi poſſunt.

Præſſumptum 4. Tabula quoque, vel ſeries numerorum abſoluta ſecundum duplicem finem, ob quem ſit duplex eſt; alia enim ſit ob computos vulgares, vt proportionalibus quibuſcunque reperiendis deſeruiat, & de hac infra breuiter loquemur; alia, vt ex ea deinde excerpantur numeri Arithmetici, qui ſinibus deſeruire debent, & de hac modo loquimur.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

In prolixam ſeriem Geometricos faciliter, & ſine fractionibus, quæ negotium facrant, in ordine ad tabulas ſinuum Logarithmis exornandas extendere.

PRæceptum primum. Ex 10000000. ſinu toto triginta ſex proportionales ſubtractione partis centeſimæ educantur, quæ eſt 100000. ideſt reſpectu decem millionum centum millia, ita enim eſt 1. ad 100. vt eſt 100000. ad 10000000. Hoc autem fit ſubtrahendo primo partem centeſimam à decem millionibus, & à reſiduo eiuſdem reſidui partem centeſimam, & à reſiduo hoc poſteriori centeſimam quoque eiuſdem reſidui partem, & ſic ſucceſſiuè, vt in exemplo.

Quia enim centeſima pars reſidui 9900000. eſt 99000. ideo ſubducitur rurſùs eadem figura 99. cũ omnibus zifris poſthabitis duabus à primo reſiduo, & remanet 9801000. cuius etiam centeſima pars eſt idem numerus duabus zifris reiectis, ideo rurſus ſubducitur 98010. à 9801000. Vides itaq; facilitatem operis iam, atque etiam ſecuritatem; facilis enim computus, non adeo faciliter errorem admittit.

Habemus itaque 36. proportionales, qui ſe inuicem excedũt proportione, quæ eſt inter 1. & 100. inter quos omnes aut centum millia, aut ferè millia centum intercedunt.

Cur autem non reperiantur plures eſt in cauſa quod reliqui minores non ſunt neceſſarij eò, quòd ſeries proportionalium Geometricorum ſatis ſit, quæ peruenìat vſque ad Sinum 45. Graduum, qui eſt 7071068. Nam iſtis habitis proportionalibus, à quibus decerpi poſſint proportionales Arithmetici; qui applicentur ſinubus, qui ſucceſſiuè ſubtendunt Gradus à 90. vſque ad 45. & reliqui deinde omnes ex iſtis, vt patebit innoteſcent.

Prob. autem propoſ. licet res per ſe clara ſit. Nam cum à quolibet numero ſemper decima pars illius auferatur, ſit, vt quilibet remanens ſe habeat ad integrum, vt 9. ad 10. quare omnes numeri à quibus decima pars ablata ſit, erunt ad numerum ſe immediatè maiorem tanquam 9. ad 10. propterea que ſemper in eadem proportione reperientur.

Præceptum 2. Sed quia incipiunt in profequendo aliquę fractiones ſuboriri; cum nequaquam ſpernendæ ſint, ideo additis zifris totus numerus in fractiones redigendus; Sic ſi ex 1000. partem 100. auferre volo illa erit 10. & reſiduum erit 990. Cuius pars centeſima erit 9. & $\frac{90}{100}$.

Quare ſi reducas totum integrum 90. in fractiones multiplicando per denominatorem 100. habebis 99000. & $9\frac{90}{100}$ huius 99000 numeri comprehendet partes 990. Et hinc eſt, quod additis duabus zifris ad dextram ſit numerus augendus, vt capiat fractiones, & conſequenter hæc ab altera, vt integri ipſi, ſucceſſiuè poſſit extrahi, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. primi Ordinis.

Geometri.		Arithmetici.
10000000	00	
100000	00	
9900000	00	100543 7632988
99000	00	
9801000	00	201087 5265976
98010	00	
9702990	00	301631 2898958
97029	90	
9605960	10	402175 0531946
96059	60	
9509900	50	502718 8164934
95099	00	
9414801	50	603262 5797922
94148	01	
9320653	49	703806 3430900
93206	53	
9227446	96	804350 1063888
92274	46	
9135172	50	904893 8696876
91351	72	
9043820	78	1005437 6319864
90438	20	
8953382	58	1105981 3962852
89533	82	
8863848	76	1206525 1595840
88638	48	

8775210 28	1307068	9228828
87752 10		
8687458 18	1407611	6861816
86874 58		
8600583 60	1508155	4694804
86005 83		
8514577 77	1608699	2327792
85145 77		
8429432 00	1709242	9960780
84294 32		
8345137 68	1809786	7593768
83451 37		
8261686 31	1910330	5226756
82616 86		
8179069 45	2010874	2859744
81790 69		
8097278 76	2111418	0492732
80972 78		
8016305 98	2211961	8125720
80163 05		
7936142 93	2312505	5758708
79361 42		
7856781 51	2413049	3391696
78567 81		
7778213 70	2513593	1024684
77782 13		
7700431 57	1614136	8657672
77004 31		
7623427 26	2714680	6290680
76234 27		
7547193 99	2815226	3923668
75481 92		
7471721 07	2915770	1556656
74717 21		
7397003 86	3016313	9189644
73970 03		
7323033 83	3116857	6822632
73230 33		
7249803 50	3217401	4455620
72498 03		
7177305 47	3317945	1088608
71773 05		
7105532 42	3418488	8721596
71055 32		
7034477 10	3519032	6354584

Præceptum 3. Quia verò isti proportionales multò minores numero sùt sinubus, qui subtẽdunt omnes arcus à Gradu Nonagesimo vsque ad 45. Ideo inter quoscumque istorum proportionalium alij reperiendi sunt, qui inuicem dicant proportionem, vt vnum ad mille, ita vt sinus totus excedat primum proportionale solùm 10. millibus, & quia fractiones adhuc minutiores suboriuntur; ideo per adiectionem zifrarum effugienda earum difficultas: tot autem addendæ sunt ad dextram, quot reliquuntur ad sinistram ratione iam præcepto 2. tacta, vt vides in hoc exemplo.

Tabula 1. Ordinis 2. interposita inter 10000000. & 9990000. præc. tabulæ.

Geometrici.	Arithmetici.
10000000 000	
10000 000	
9990000 000	10009 0438435
9990 000	
9980010 000	20018 0876870
9980 010	
9970029 990	30027 1315305
9970 029	
9960059 961	40036 1753740
9960 059	
9950099 902	50045 2192175
9950 099	
9940149 803	60054 2630610
9940 149	
9930209 654	70063 3069045
9930 209	
9920279 445	80072 3507480
9920 279	
9910359 166	90081 3945915
9910 359	
9900448 807	100090 4384360

Tabula 2. Ordinis secundi interposita inter 7177305. & 7105532. præcedentis Tabulæ.

Geometrici.	Arithmetici.
7177305 470	3317945 1088608
7177 305	
7170128 165	3327954 1527043
7170 128	
7162958 037	3337963 1965478
7162 958	
7155795 079	3347972 2403913
7155 795	
7148639 284	3357981 2842348
7148 639	

Geometrici.	Arithmetici.
7141490 645	3367990 3280783
7141 490	
7134349 155	3377999 3719218
7134 349	
7127214 806	3398008 4157653
7127 214	
7120087 592	3398017 4596088
7120 087	
7112967 505	3408026 5034523
7112 967	
7105854 538	3418035 5472958
7105 854	

Quia ergo 7177 cum fractis $\frac{3\,1\,7\,3\,0\,5}{1\,0\,0\,0\,0}$ millesima pars proportionalis 7177503. ideo hæc ipsa subducitur, & ad hoc, vt etiam fracti capiant in ea, & subtrahi consequenter possint tres zifræ addendę, sic enim septem milliones centum septuaginta septem millia, & trecentum quinque vnitates multiplicantur per mille, & septem fiunt milliones millionum, respectu cuius numerus $\frac{1\,0\,0\,0\,0}{1\,0\,0\,0\,0}$ qui erat fractio iam euadit integer.

Si verò quis vellet hunc secundum tabullarum ordinem minutiorem reddere posset auferre à singulis quingentesimam partem nempe primo auferendo 5000. quæ est quingentesima pars numeri 10000000. & diuidendo residuum per 200. continuè, & quotum, qui prouenit, auferendo ab antecedenti.

10000000 00000	
5000 00000	
9995000 00000	
4997 50000	
9990001 50000	
4995 00125	
9985007 49875	

Præceptum 4. Confectis omnibus istis tabulis, quia neque proportionales sufficiunt: ideo inter quoscumque proportionales eodem modo alij interferendi, & cõponendæ minutiores tabulæ, quę secundùm decem millesimam partem altera alteri accrescat, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima tertij ordinis inter 10000000 & 9999000. interposita.

Geometrici.	Arithmetici.
10000000 0000	
1000 0000	
9999000 0000	1000 4550242
999 9000	
9998000 1000	3001 9100484
999 8000	
9997000 3000	3001 3650726
999 7000	

Geometrici.	Arithmetici.
9996000 6000	4001 8200968
999 6000	
9995001 0000	5002 2751210
999 5001	
9994001 4999	6002 7201452
999 4001	
9993002 0998	7003 1751694
999 3002	
9992002 7996	8003 6301936
999 2002	
9991003 5994	9004 0852178
999 1003	
9990004 4991	10004 5402420

Tabula vltima tertij ordinis interpositæ inter 7112967. & inter 7105854.

Geometrici.	Arithmetici.
7112967 5050	3408026 5034523
711 2967	
7112256 2083	3409026 2584765
711 2256	
7111544 9827	3410027 4135007
711 1544	
7110833 8283	3411027 8685249
711 0833	
7110122 7450	3412028 3235491
711 0122	
7109411 7328	3413028 7785733
710 9411	
7108700 7917	3414029 2335975
710 8700	
7107989 9217	3415029 6886217
710 7989	
7107279 1228	3416030 1436459
710 7279	
7106568 3949	3417030 5986701
710 6568	
7105857 7381	3418031 0536943

Præceptum 5. Cum autem iam proportionales inuicem accrescant, vt sinuum, quorum differentię sunt maiores, vel eumdem numerum exequent, vel proximè accedant: ideo (nisi maior tedullitas, quam par sit adhibere quis vellit) iam non inter omnes proportionales Tabularum, ordinis quarti nouos proportionales Geometricos proijciemus; sed tantum inter aliquos, qui nimirum sinui toto viciniores in numeris sunt. Cum enim tabulam non absolutam, sed quæ finibus deseruat cõdamus: inde est, quòd illi solùm proportionales sint inueniendi, qui proximè accedunt ad proportiones

tiones sinuum; & quia sinus; quò magis appropinquant sinui toti, eò minoribus discrepãt differentijs; inde etiam proportionales inueniendi, quorum proportiones sint minores inter illos proportionales Geometricos, qui magis accedant ad sinum totum: Si autem tabulæ absolutæ conderentur, meliùs esset etiam inter omnes interserere, quo enim minutiores differentiæ, eo exactiores tabulæ absolutæ, Itaque inter hos postremos quarti ordinis proportionales, alios iterum interseremus, qui iuxta centum millesimam partem, & secundùm vnam ex istis partibus singuli proportionales maiores existãt, vt vides in hoc exemplo.

Tabula prima ordinis quarti interposita inter 10000000. *&* 9999000. *præced. Tabula.*

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	00000		
	100		
9999900	00000	100	0005024
	99 99900		
9999800	00100	200	0010048
	99 99800		
9999700	00300	300	0015072
	99 99700		
9999600	00600	400	0020096
	99 99600		
9999500	01000	500	0025120
	99 99500		
9999400	01500	600	0030144
	99 99400		
9999300	02100	700	0035168
	99 99300		
9999200	02800	800	0040192
	99 99200		
9999100	03600	900	0045216
	99 99100		
9999000	04500	1000	0050240

Tabula vltima Ordinis quarti interposita inter 7106567. *&* 7105857. *præcedentis Tabulæ ordinis tertij.*

Geometrici.		Arithmetici.	
7106568	39490	3417030	5986701
	71 06568		
7106497	32922	3417130	6036725
	71 06497		
7106426	25425	3417230	6041749
	71 06426		

Geometrici.		Arithmetici.	
7106355	18999	3417330	6046773
	71 06355		
7106284	12644	3417430	6051797
	71 06284		
7106213	06360	3417530	6056821
	71 06213		
7106142	00147	3417630	6061469
	71 06142		
7106070	94005	3417730	6066869
	71 06070		
7105999	88035	3417830	6071893
	71 05999		
7105928	82036	3417930	6076917
	71 05928		
7105857	66108	3418030	6081944

Præceptum 6. Inter autem singulos proportionales huius, proportionales alij interponendi, qui dicant proportionem, vt vnum ad millionem, vt in hoc exemplo.

Tabula prima ordinis quinti interposita inter 1000000. *&* 9999900.

Geometrici.		Arithmetici.	
10000000	000000		
	10 000000		
9999990	000000	10	0000010
	9 999990		
9999980	000010	20	0000020
	9 999980		
9999970	000030	30	0000030
	9 999970		
9999960	000060	40	0000040
	9 999960		
9999950	000100	50	0000050
	9 999950		
9999940	000150	60	0000060
	9 999940		
9999930	000210	70	0000070
	9 999930		
9999920	000280	80	0000080
	9 999920		
9999910	000360	90	0000090
	9 999910		
9999900	000450	100	0000100

Tandem pro vltimo præcepto inter huius posteriores ordinis proportionales adhuc interserẽdi sunt alij numeri, qui se habeant, vt vnum ad decem milliones, & quia minutiæ sunt minimæ potes sequi, ita vt sint 100. proportionales interpositi

inter primum, & secundum tabulæ quarti ordinis; quibus omnibus creatis deinde Arithmetici apponendi sunt, vt sequenti expensione docebimus.

Et licet inter primum, & secundum quartæ tabulæ 10. proportionales interseri sit necesse; quia in fine, cum appropinquant sinui toti, sinus vix crescunt, inter tamen alias sufficiet vsque ad quartum ordinem inclusiuè, vel vsque, si cupias exactissimè operari, ad proportionem, quam habent 1. ad millionem, vt præcepto sexto.

Tabula extensa sexti ordinis.

Geometrici.		Arithmetici.		Geometri.		Arithmetici.	
10000000			00000000				
9999999	0000000		100000 10				
				9999949	0001254	51	0000051
9999998	0000001	2	0000002	9999948	0001305	52	0000052
9999997	0000003	3	0000003	9999947	0001357	53	0000053
9999996	0000005	4	0000004	9999946	0001410	54	0000054
9999995	0000009	5	0000005	9999945	0001464	55	0000055
9999994	0000014	6	0000006	9999944	0001519	56	0000056
9999993	0000020	7	0000007	9999943	0001575	57	0000057
9999992	0000027	8	0000008	9999942	0001632	58	0000058
9999991	0000035	9	0000009	9999941	0001690	59	0000059
9999990	0000044	10	00000 10	9999940	0001749	60	0000060
9999989	0000054	11	000001 11	9999939	0001809	61	0000061
9999988	0000065	12	00000 12	9999938	0001870	62	0000062
9999987	0000077	13	00000 13	9999937	0001932	63	0000063
9999986	0000090	14	00000 14	9999936	0001995	64	0000064
9999985	0000104	15	00000 15	9999935	0002059	65	0000065
9999984	0000119	16	00000 16	9999934	0002124	66	0000066
9999983	0000135	17	00000 17	9999933	0002190	67	0000067
9999982	0000152	18	00000 18	9999932	0002257	68	0000068
9999981	0000170	19	00000 19	9999931	0002325	69	0000069
9999980	0000189	20	0000020	9999930	0002394	70	0000070
9999979	0000209	21	0000021	9999929	0002464	71	0000071
9999978	0000230	22	0000022	9999928	0002535	72	0000072
9999977	0000252	23	0000023	9999927	0002607	73	0000073
9999976	0000275	24	0000024	9999926	0002680	74	0000074
9999975	0000299	25	0000025	9999925	0002754	75	0000075
9999974	0000324	26	0000026	9999924	0002829	76	0000076
9999973	0000340	27	0000027	9999923	0002905	77	0000077
9999972	0000367	28	0000028	9999922	0002982	78	0000078
9999971	0000395	29	0000029	9999921	0003060	79	0000079
9999970	0000424	30	0000030	9999920	0003139	80	0000080
9999969	0000454	31	0000031	9999919	0003219	81	0000081
9999968	0000485	32	0000032	9999918	0003300	82	0000082
9999967	0000517	33	0000033	9999917	0003382	83	0000083
9999966	0000550	34	0000034	9999916	0003465	84	0000084
9999965	0000584	35	0000035	9999915	0003549	85	0000085
9999964	0000619	36	0000036	9999914	0003634	89	0000086
9999963	0000645	37	0000037	9999913	0003720	87	0000087
9999962	0000682	38	0000038	9999912	0003807	88	0000088
9999961	0000720	39	0000039	9999911	0003895	89	0000089
9999960	0000759	40	0000040	9999910	0003984	90	0000090
9999959	0000799	41	0000041	9999909	0004074	91	0000091
9999958	0000840	42	0000042	9999908	0004165	92	0000092
9999957	0000882	43	0000043	9999907	0004257	93	0000093
9999956	0000925	44	0000044	9999906	0004350	94	0000094
9999955	0000969	45	0000045	9999905	0004444	95	0000095
9999954	0001014	46	0000046	9999904	0004539	96	0000096
9999953	0001060	47	0000047	9999903	0004634	97	0000097
9999952	0001107	48	0000048	9999902	0004732	98	0000098
9999951	0001155	49	0000049	9999901	0004830	99	0000099
9999950	0001204	50	0000050	9999900	0004929	100	0000100

EXPENSIO III.

De Arithmeticis proportionalibus repertæ Geometricorum seriei copulandis.

PRæassumptum 1. Numeris Geometricis post confectas omnes series Arithmetici copulandi sunt, in quo considerandum est nullius laboris esse; si numerorum series altera alteri continua proportione copularetur; sed quia ita non est: at quælibet, & proportionem mutat, & ob fractos in eundem numerum non incidit, hinc est, quod industria ludendum sit, & ingenio.

Præassumptum 2. Obseruandum quoque, quòd alicuius quantitatis incommensurabilis tunc explicatur sufficienter mensura, cùm inter terminos parùm distantes malorem, & minorem clauditur, ita quòd nec maiore maior sit, nec minore minor. Termini verò tunc parum distant, cùm illi sunt magni numeri, & parua differentia dissentiunt, vt 1000:010. & 10000040. Si ergo demonstretur aliquam quantitatis mensuram inter illos limites contineri, sufficienter expressa dicitur, vt si dicatur aliquam quantitatem esse inter 10000025. & 10000030. Ratio est; quia differentia 5. vnitatum respectum magni numeri 10. millionum nullius pretij est, nullius sensus, & ideo quidquid inter illos numeros adeo parum differentes clauditur, vt æquale putatur, cùm nec ea quidem differentia 5. vnitatum illos à sensibili æqualitate eliminet, licet quoad intellectum verè sint inæquales.

THEOR. I. PROPOS. IX.

In progressione Arithmeticâ deseruiente Geometricæ à quocumque numero, prout libet, possumus incipere.

PRobatur. Quia nulla naturali connexione connectuntur Arithmetici, & Geometrici. Dum enim quidpiam V. g. se mouens deorsum facit 10. passus, & secundo æquali tempore faciat centum passus augendo Geometricè velocitatem multi alij mouentes se progressiuè possunt facere qui quatuor, qui quinque, qui septem passus, vt secùdo eodem tempore, eosdem quatuor, vel quinque, vel septem efficiant. Sic alterans, qui producit 3. gradus caloris in primo instanti, & in secundo 9. comitem, potest habere allum debilem eale facientem, qui non nisi vnum gradum caloris ijs singulis instantibus efficiat.

Præassumptum Elligatur itaque numerus aliquis V. g. vnitas, qui post zifram addendam sinui toti, addatur, secundo proportionali. Incipimus autem à zifra iuxta documenta propositionis 2. huius partis. Vnitati quoque multas zifras addimus, vt fiat $1\frac{0}{100000000}$, vt in illa inter capedine, quæ est inter 1. & $\frac{1}{100000000}$, nempe vnitatem, & decem millionum particulam, in quam vnitas præsuponitur diuisa, multę fractiones capiant, quæ fortè incidunt, vt experientiâ docebit.

PROBL. I. PROPOS. X.

Tabulæ totius sexti ordinis numeros Arithmeticos inscribere.

HOc faciliter fit. Nam electo primo numero, qui addatur primo proportionali post sinũ totum, cui zifra additur; idem semper deinde addendum; sic si primo post sinum totum 9999999 10000000. addatur $1\frac{0}{100000000}$, secundo 9999998.00000001. addendũ erit $2\frac{0}{100000000}$, & tertio Geometrico 9999997 00000c3. Arithmeticus subiungendus $3\frac{0}{100000000}$. Verum expeditiùs loco denominatoris 10000000. adduntur numero 3. tot zifræ, quot intermediant inter eam minutiam 3. & vnitatem sinus totius. Vnde semper denominator decem millionum subintelligendus est.

Probatur autem ex 2. propos. expens. 1. Nam in progressione Arithmetica; quæ incipit à zifra aggregatum duorum generat tertium; sicut duo Geometrici inuicem multiplicati tertium generãt: itaque si primo idem primus addatur, generabitur secundus, & si secundus addatur primo generabitur tertius, & sic consequenter.

Probatur secundo omnes Geometrici proportionales sextæ tabulæ expansæ eandem proportionem habent, ergo ex Coroll. 2. expens. 1. huius. Omnes Arithmetici eandem differentiam habebunt. Vnde additus primus Arithmeticus, qui est differentia, quâ ipse discrepat à 0 habebitur secundus, & sic successiuè, donec perseuerant Geometrici in illa continuâ proportione, quam protraximus vsque ad 100. proportionales, vt vides in superiori exemplo Tabulæ 6. ordinis.

THEOR. II. PROPOS. XI.

Eodem augmento, vel diminutione augetur, vel decrescit Arithmeticus proportionalis duorum datorum proportionalium Geometricorum quorumcumque, quo Arithmeticus sinus totius, & alterius Geometrici proportionalis, ad quem simili proportione referatur, ac datus Geometricus ad datum alium Geometricum.



SInt dati Geometrici expressi linea AB, & AC, & sinus totus linea AD, qui sit ad AF, vt AC proportionalis maior ad AB minorem. Dico, quod proportionalis Arithmetici differentia, seu decrementũ, qua decrescit Arithmeticus proportionalis Geometrici AC, vt possit applicari Geometrico AB eadem est, ac quæ mediat inter sinum totum AD & proportionale Geometricum AF.

Probatur. Quia similiter proportionatorum Geometricorum est eadem differentia, augmentum, seu decrementum ex Coroll. 2. propos. 7. huius. Sed eadem est proportio ex Hypothesi inter Geometricos AC, & AB, quæ est inter sinum totum AD, & proportionale Geometricum FA, ergo etiã eadem differentia Arithmeticorum, seu (quod idem est) augmentum, seu decrementum ex Coroll. 2. Expens. 1.

COROLLARIVM I.

HInc deduces quomodo datis duobus proportionalibus, & sinu toto ellicias per regulam Auream quartũ proportionale in eadem proportione V. g. sit datus proportionalis minor secundus quarti ordinis 9999900. & quinti ordinis vltimus 9999900. $\frac{4}{100000000}$, & sinus totus 10000000. Sitque reperiendus proportionalis numerus, ad quem se habeat sinus totus, vt datus maior 9999900. $\frac{5}{100000000}$ ad 9999900. Multiplicetur hic per sinum totum, & diuidatur per 9999900. $\frac{4}{100000000}$, & prodibit quartus proportionalis 99999 99 $\frac{2}{100000000}$. Verum, quia hic computus ob magnitudinem numerorum, & fractionum euadit prolixior infra alium modum in hac ipsa expensione trademus: Siquidem in hoc computo oportet sinum totum multiplicare in 9999900. & deinde ob diuisionem faciliorem proijcere in fractiones illud multiplicatum, ita vt sint post quinque 9. viginti tres zifræ, & deinde diuidere totum illum numerum per 9999900. 0004929.

THEOR. III. PROPOS. XII.

Cuiuslibet proportionalis Geometrici in tabulis non reperti Arithmeticus est inter Arithmeticum maioris proportionalis, & minoris.

QVia dantur aliqui proportionales Geometrici, qui in continuam seriem non sequuntur, & de ipsis iam visum est, quòd eandem habent differentiam Arithmeticorum, quæ est inter sinum totam, & aliud quoddam proportionale minus, quod in eadem proportione, sit. Ideo inuento illo proportionali ex Coroll. eiusdem propositionis potest euenire, vt euenit sæpius, vt in aliquem numerum Tabulæ sexti ordinis, vel etiam aliarum, cum omnes confectæ fuerunt, & de tabulâ sinuum Arithmeticis, Logarithmisque exornanda agatur; non incidat, ideo oportet ex secunda huius expens. praxi videre quinam sint termini proximi, inter quos includatur. V. g. inuentũ est proportionale 9999 99 $\frac{5}{100000000}$ ad quem se habet sinus totus, vt ad 9999900. proportionalis 9999900 $\frac{7}{100000000}$. Sed nullus est proportionalis in tabula sexta iam logarithmis exornata, quæ talis quantitas sit; sed 9999999 $\frac{0}{100000000}$ est minor; at sinus ipse totus immediatus est maior. Dico ergo quod Arithmeticus proportionalis inuenti includitur inter Aritmeticum sinus totius, & Arithmeticum proportionalis 9999999 $\frac{1}{100000000}$, & ideo quòd est inter 0. & 1. 0000001 qui termini propinquissimi sunt, cum non differant, nisi solâ vnitate; quæ quidem est pars minima respectu omnium proportionalium Arithmeticorum, qui tabulam totalem intexturi sunt.

Probatur autem. Quia non potest esse æqualis Arithmetico 10000001. esset enim Arithmeticus proportionalis Geometrici minoris 9999999 $\frac{3}{100000000}$ non potest esse 0. esset enim terminus radicalis ipsius sinus totius: Ergo erit aliquis medius inter 0. & 1. 0000001. sicut, & ipse radicalis Geometricus est aliquid medium inter sinum totum, & 9999999 $\frac{0}{100000000}$.

COROLLARIVM.

HInc igitur emergit, quòd si accipias aliquid medium inter 0. & $1\frac{0}{100000000}$ hoc quodcumque illud sit erit proportionalis Arithmeticus Geometrici inuenti; quia cum sint terminis propinquissimi ex præassumpt. 2. non differunt sensibiliter à vero; ideoque pro termino Arithmetico proportionalis Geometrici superiùs inuenti 9999999 $\frac{3}{100000000}$. potes accipere ipsam differentiam, quâ differt sinus totus à proportionali inuento, quæ est $\frac{3}{100000000}$ Igitur Arithmeticus inuenti proportionalis erit 0. $\frac{3}{100000000}$, vel aliquid tale, quæ differentia addita Arithmetico 100. 0000100. fiet 100. $\frac{3}{100000000}$, vel 100 $\frac{1}{100000000}$.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Differentia, qua augescit quodlibet proportionale Arithmeticum à sinu toto est ipse Arithmeticus, si series incipiat à zifra.

PAtet ex dictis. Nam cum auferatur terminus radicalis à quocumque termino Arithmetico remanet differentia, quâ differt ipse à termino radicali; sed hic terminus radicalis, nempe à quo incipit progressio ponitur 0. ex Hypothesi; ergo ablato eo remanet ipse numerus, vt erat: Quare ipse erit terminus, & differentia, quâ differt à termino radicali 0. qui est proportionalis Arithmeticus sinus totius.

COROLLARIVM I.

HInc autem resultat, quod cum idem sit Arithmeticus cuiuscumque Geometrici inter sinum totum, & illum ipsum Geometricum, cui ita est sinus totus, vt alius Geometricus ad alium. Si habeamus illam differentiam Arithmeticam ex præced. Coroll. habeamus quoque differentiam Arithmeticorum quibuscumque Geometricis in simili proportione existentibus applicatorum; Nam ex Coroll. 2. expen. 1. huius, vbi est eadem proportio geometricorum, ibi etiam est eadem differentia Arithmeticorum. Quare cum ex Coroll. prop. 11. huius ita sit 959,900. ad 9999900. 0004500. vt 9999999. 9995499. ad 10000000. eademque quoque erit differentia Arithmeticorum.

At quia eadem est hæc differentia cum Arithmetico ipso ex hac propos. & iam nouimus ex Coroll. propos. 11. Arithmeticum ipsum esse 0004924.; hinc est, quod hic ipse quoque sit differentia, quæ deseruiet etiam pro differentia inter 9999900. 9999900. 0004500. Geometricos eiusdem proportionis cumque huius habeamus Arithmeticum 100. 0000100. si hanc differentiam ei addamus fiet 100. 0004924. Arithmeticus sinus 9999900. qui cum minor sit suo comproportionali, eius Arithmeticus

cus debet augeri, cum elegerimus seriem Arithmeticam, quæ augetur dum decrescit Geometrica.

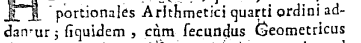
COROLLARIVM II.

HInc obtinebis modum, quo alij omnes proportionales Arithmetici quarti ordini addantur; siquidem, cùm secundus Geometricus sit in proportione ad sinum totum, vt tertius ad secundum, & ita consequenter, & iam habeamus logarithmum secundi ex præc. Coroll. respectu sinus totius nempe 100. 0005024. habebimus quoque logarithmum tertij per additionem eiusdem quantitatis, vt fiat 200. 0010048. & sic successiuè addendo semper eandem quantitatem, Ratio euidens est ex dictis, quia ita 9999900. secundus est sinui toti, vt tertius 9999800.

00100. est ipsi secundo 9999900. Appositis verò omnibus logarithmis, vltimus illius tabulæ primæ 4. ordinis, qui est 99990000. 045000. habebit pro logarithmo 1000. 0050240. Dato verò hoc proportionali, & proportionali primo tertij ordinis 9999000 ——c, & sinu toto quæremus proportionale quartum ex Coroll. propos. 11. h., quod erit 999999. 9559955., quod se habeat ad sinum totum, vt proportionale Geometricum 9999000 se habet ad 9999000. 04500.. Quo reperto ex Coroll. 1. propos. 12. Ipsa differentia, quà differt à sinu toto, erit quoque differentia Arithmetica addenda logarithmo noto 1000. 0050240. Geometrici 9999000. 0450., vt fiat Arithmeticus Geometrici 9999000. hæc autem est 4400042. quare Arithmeticus erit ferè 1000. 0005024. & quia proportionales quarti ordinis, qui interponuntur inter 9999000. & inter 9998000. 0001400 quilibet se habet ad suum sequentem, vt 9999900. ad 10000000. hinc per adiectionem eiusdem quantitatis 100. 0005024. possunt omnes formari habito proportionali Arithmetico primi Geometrici 9999000. & sic de alijs interpositis inter quoscumque Geometricos ne dum primæ tabulæ quarti ordinis; sed & omnium tabularum eiusdem ordinis. Ipsos autem proportionales Arithmeticos apponendos Geometricis quinti ordinis habebis, si sibi addas repertum Arithmeticum 100. 4550242. Ratio est toties tacta, quia Geometricus quilibet se habet ad suum antecedentem V. g. 9998000. 1000. ad 9999000 vt ipse 9999000. se habet ad sinum totum. Idem quoque ages in exquirendo primo Arithmetico secundi ordinis dato vltimo primæ tabulæ ordinis tertij Geometrico 9990004. 4991. primo secundi 9990000. & sinu toto acquirendo quartum proportionale, & ex illo differentiam Arithmeticam addendam Arithmetico iam dato vltimo tabulæ primæ tertij ordinis 10004. 5402420., quo habito cæteri omnes innotescunt. Vnde totus labor consistit in primis solum Aritmeticis cuiuslibet tabulæ primæ inueniendis cæteri enim omnes illis datis habentur. Aduerte autem numeros post punctum esse fractos, & subintelligi lineam subductam, & sub linea tot zifræ, quot sunt figuræ, & insuper vnitas ad sinistram, quod & in sequentibus obseruabimus.

THEOR. V. PROP. XIV.

Ita est maius proportionale ad sinum totum, vt differentia duorum proportionalium est ad differentiam sinus totius, & alterius ad quod eandem proportionem dicat.



SIt vt prius datus Geometricus CA, qui sit ad AB, vt AD sinus totus ad AF. Dico quoque, quòd ita est CB differentia ad DF differentiam, vt est CA sinus ad totum sinum AD.

Nam si est totum ad totum, vt ablatum ad ablatum. Ergo, & reliquum ad reliquum tale erit, vt est totum ad totum ex propos. 19. lib. 5. Element. Cum ergo sit totus CA ad ablatum AB, vt totus sinus AD ad ablatum AF, ergo, & reliquum nempe differentia BC est ad differentiam reliquam DF, vt est CA ad totum AD.

THEOR. VI. PROPOS. XV.

Ita est maior Geometricus proportionalis ad differentiam inter ipsum, & minorem, vt est sinus totus ad differentiam inter ipsum, & proportionalem alterum simili proportione Geometrica affectum.

MAneat eadem constructio, vt prius, Dico, *quod ita est proportionalis maior* AC ad differentiam CB, vt est sinus totus AD ad differentiam DF.

Probatur ita est in proportione, differentia BC ad differentiam DF, vt proportionale AC est ad totum sinum DA, & *vicissim*, ita erit proportionata BC differentia ad AC, vt differentia DF ad sinum totum AD, vnde, *& conuertendo* AD erit ad DF; vt AC ad BC.

COROLLARIVM.

HInc deduces modum, quo datis duobus proportionalibus, & sinu toto ellicias quartù proportionale, ad quod se habeat sinus totus, vt proportionalis datus maior se habet ad minorem. Quoniam ita se habet maior Geometricus datus ad differentiam, quæ intercedit inter ipsum, ac minorem datum, sicut sinus totus ad differentiam, quæ intercedit inter se, & alium simili proportione sibi respondentem, vt Geometrici dati. Ideo dato Geometrico maiori V. g. vltimo primæ tabulæ tertij ordinis 9990004. 4991000. & primo tabulæ primæ secundi ordinis 9990000. habebis differentiam 4. 4991000. Itaque proportionali 990000. & differentia 4. 4991000. & sinu toto exquires quartum proportionale; nempe differentiam inter sinum totum, & sinum eo minorem, sed in consimili proportione, quæ erit 4. 5035c1, quam demes à sinu toto, & habebis proportionale 9999995. 4963985. quod ita se habebit ad sinum totum, vt 9990000. ad 9990003. 4991000. Iuxta itaque documenta propositionis 11. huius, quære hoc proportionale in sexta tabula, & non reperies

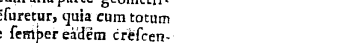
reperies, sed aliquid maius nimirum 9999996. 0000005. & quid minus 9999995. 0000009. Inter itaque hos terminos consistet Geometricus repertus 9999995. 4963985. & consequenter etiam Arithmeticus, nempe quid medium inter Arithmeticum 40000004. & 5. 0000005. Geometricis terminis applicatos sola vnitate distantibus; quare poterit esse 4. 5036015. ipsa nempe differentia Geometrica. Cum verò Arithmeticus, quo differt Geometricus à sinu toto sit etiã differentia iuxta propositionem 12. & differentia eadem Arithmetica sit similiter geometricè proportionatorum ex Coroll. vltimo expens. 1. huius sequitur, vt Arithmeticus repertus sit quoq; differentia addenda Arithmetico noto 10004. 5402420. vt fiat 10009. 0438435. Arithmeticus Geometrici mininoris 9990000. Quo habito omnes habentur eiusdem ordinis tertij addendo eandem quantitatem antecedenti termino. Sicut, & intermedij omnes, qui pertinent ad quarti ordinis tabulas addendo ijsdem Arithmeticis tertij ordinis, à quibus incipit intersitio, primum quarti ordinis Arithmeticum, & sequendo eandem additionem, donec omnes interpositi sint arithmeticis exornati.

Sic, si cupias Arithmeticum primæ tabulæ primi ordinis, eodem modo poteris inuenire. Datur enim 9900448. 8070000. Geometricus secundi ordinis, & 9900000. Geometricus primus tabulæ primæ primi ordinis, quorum differentia est 448. 807000. quæ dat adhibitâ regulâ proportionum differentiam geometricam quarti proportionalis à sinu toto 453. 3198532. quæ differentia subducta à sinu toto dat quartum proportionale 9999546. 6801468. quòd in tabula prima ordinis quarti reperitur cadere inter 9999500. 0100000. & inter 9999600. 0060090. & hoc est minus quidem repertũ proportionale, sed maius illo: itaque Arithmeticus numerus quoque erit maior, quam 400. 0020096. & minor, quam 500. 0025120. Vnde differentia Geometrica addita minori Arithmetico dabit proximè Arithmeticum proportionalé inter vtrumque medium paucissimis vnitatibus à verò distantem. Quia ergo quartus proportionalis differt à maiori 9999600. 0060000. & differentia est 53. 3258532. Si hanc differentiam, vel quid minus addamus Arithmetico minori 400. 0020096. fiet Arithmeticus 453. 3278528. differentiaque inter Arithmeticos Geometrici 9900448. 8070000. & 9900000. 0000000. Cum autem sciamus Arithmeticum Geometrici 9900448. & cæt. qui est 10009. 4357360. si hac differentiam addamus fiet 100543. 7632988. vnde cum sit vltimus secundæ tabulæ ad sinum totum, vt quilibet primæ ad suum antecedentem erit quoque hæc differentia inter quoscumque Arithmeticos primæ tabulæ.

THEOR. VII. PROPOS. XVI.

Sicut decrescit, vel augescit quodlibet continuâ progressione Geometrica procedens quoad partes assignatas maiores; ita quoad singulas partes in infinitum minores augetur, vel decrescit.

PRobatur. Eo, quòd cum se continuè eadem progressione moueat necessariò assignatâ quælibet pars motus, quæ mensuretur æquali portione temporis augescet, vel decrescet respectu alterius eodem æquali tempore mensurata, quod si quælibet alia pars Geometricè procedens mensuretur alia minori parte temporis, adhuc tamen in eadem proportione erit cum alia parte geometrica, quę eodẽ tempore mẽsuretur, quia cum totum Geometrica proportione semper eadem crescendo, vel decrescendo continuè se moueat singulæ eius partes assignabiles eadem proportione inuicem correspondere debebunt cum sint omnes eiusdem rationis, & essentiæ. Ita si sit linea



AB, quæ crescat continuè, & Geometricè, & augmẽtum mensuretur, à linea XV. æqualiter crescente, & Arithmetica, ita quod dum crescit Geometrica ab A in C illa Arithmetica crescat, ab V in T, & dum hæc se auget à C in D illa moueatur à T in S. Si sumatur VM in geometrica. eiq; correspondeat AI; secundę MT æquali correspondebit IH, quæ in proportione Geometrica erit cum AI, vt CD cum AC.

COROLLARIVM I.

HIuc eruitur alius modus Arithmeticos reperiendi qui Geometricis applicari possint V. g. detur numerus Geometricus præcedens 9900448. 807. cuius notum habeamus Arithmeticum 10009. 4354360. cupimusque scire Arithmeticum 9900000. Iam scimus quot proportionales cadunt inter 9900448. & cæt. & proportionale eo immediatè minus 9890548. 359. nempe tot ex 12. prop. 8. Element. quot inter 10000000. & 9900000. nempe 10 tertij ordinis inter quos cadunt 10. quarti; & inter hos quoslibet 10 quinti ordinis, ita quod erunt 1000. proportionales. Quot ergo sunt proportionales Geometrici minores assignati inter dictos Geometricos maiores, tot erunt partes æquales in differentia applicatorum ipsis Arithmeticorum, & quia illa differentia est 10009. 0438435. ideo si diuidatur per 1000. habebimus 10. &. 0090438. partem æqualem, quæ semper augetur Arithmeticus, dũ Geometrici 1000. accrescunt inter vnum 9900448. & cæt. & inter 9890548 & cæt. Geometricos maiores.

Incipiamus itaque distribuere in suos proportionales progressionem. Sic; donec occurrat Geometricus, vel de quo quærimus, vel ei propinquus.

9900448 8070
990 0448

9890058 7522

Quia ergo iste primo eductus iam est minor eo, de quo quæritur, ideo non progrediemur amplius, sed cum debeat esse inter istos maiorem, & minorem, ideo ad hoc, vt illum inueniamus minutiorem instituemus progressionem sic.

9900448	80700 A	9900052	79650
99	00448	9	90225
9900349	80252	1 9900042	89645
99	00349	9	90004

9900050

9900240	79903		2	9900032	99641
99	00240			9	99003
9900151	79650		3	9900023	09638
99	00151			9	90002
9900052	79509	B	4	9900013	19636
99	00052			9	90001
9899953	79457	C		9900003	29635

Erit itaque inter hos duos B, & C postremos cum vnus sit maior alius minor 9900000. de quo quærimus, quare opporteret adhuc inter istos alios proportionales vltimos inuenire in eo ordine, in quo sunt proportionales quinti ordinis, sed isti non possunt esse plures, quam 52. iuxta numerum vnitatum, quę super 9900000. accrescunt in Geometrico B 9900052. vt patet ex quinta tabula. Quia, ergo inter A, & illum, de quo quærimus quatuor Geometrici intercluduntur, ideo quater accipiuntur partes Arithmeticæ superius inuentæ 10. 90438. & fient 40. 361752. qui si rursus multiplicetur per 10. ob proportionales interceptos inter quoslibet eorum minores eiusdem speciei, vt in quinto ordine fient 400. 3617520. cui si etiam addantur 52. vnitates, fient 452. cū fractis suis addendi Arith. 10009. & cęt.

Vel etiam meliùs accipiantur Arithmeticæ differentiæ iuxta singulos Geometricorum ordines, quia ergo inter primum Geometricum A, & de quo quæritur 9900000. nullus intercipitur Geometricus tertij ordinis, ideo nullus accipitur illius ordinis Arithmeticus, quia verò intercipiuntur 4. quarti, ideo quater accipitur Arithmetica differentia quarti 100 0005024. vt fiant 400 0020096. cui addimus Arithmeticum Geometrici 52. quinti ordinis 52. 0000052. & fit Arithmeticus quæsitus 452. 0020148. addendus Arith. 10009. &c. vt fiat Geometrici 9900000. de quo quærebatur.

COROLLARIVM I.

NOtabis nostros numeros extremarum tabularum exijsse paulò maiores in Arithmeticis differentia proximè 2500. quàm quas composuit ipse Neperus. Rario verò huius rei est, quia ipsi est primus tabulę primæ 100483. & cæt. nobis vero 100543. & cæt. quia ipse sumpsit aliquid minùs, quàm quòd differentia Geometrici dabat, nos quid maius ipsa eadem differentia sumpsimus, vtpote ad libitum, vt patet ex Coroll. propos. 15.

COROLLARIVM II.

ADuerte quoque Arithmeticos, non solùm crescere per numeros integros, sed etiam per fractiones, quòd in reperiendis illis, qui primis tabularum Geometricis applicantur necessariò fractiones essent admittendæ, quæ per continuam additionem deinde crescebat in immensum. Vnde spretæ ab initio, deinde magnum errorem poterant causare, incepit ergo crescere series Arithmetica, ne dum simplici vnitate, sed addita fractione 000000 1. vt in illa fractione daretur locus, quo possint successiuè, & allæ, fractiones recipi, & continuè addi. Verùm hæ fractiones in tabula sinuum, seu absoluta Logarithmica contemnendæ, quòd solùm deseruiant ad continuam earum additionem, ob quam successiuè in integros transeunt, quum singulę singulis in progrediendo adduntur.

EXPENSIO V.

De Logarithmis in tabulas sinuum transferendis.

COnfectis omnibus tabulis, & ijs Logarithmorum serie instructis, vltimus labor postulat, vt illos in tabulas sinuum transferamus. vnde sit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Logarithmos tabulis sinuum applicare vsq; ad sinum gr. 45. à sinu toto.

DAtum sinum per tabulas supra positas logarithmis instructas quære, vel enim occurret prorsùs idem, vel non pluribus, quam 10. vnitatibus distans, si perduxisti tabulas vsque ad ordinem quintum, quòd, si vsque ad ordinem quartum differet 100. vnitatibus. Quære ergo in tabula sexta, quid vnitates illæ, quibus differūt isti duo Geometri exhibeāt in Arithmeticis, & hoc adde Arithmetico reperti proportionalis si sit minor subducito, si sit maior eo, qui in tabulis logarithmicis inuenitur, eritq; logarith. dati sinus.

V. g. datur sinus 7107995. requiro illum in tabulis proportionalibus, reperioque in tabula vltima tertij ordinis numerum proximum minorem 7107989. cuius logarithmus est 3415020. differtque Geometricus à dato 6. vnitatibus. Reperio itaque has vnitates in tabula sexti ordinis Geometrica, & dant mihi 4. vnitates correspondentes pro Arithmetico competente, quas addo logarithmo 3415029. fitque logarithmus 3415014. Sinus dati 7107995. fracti verò posthabendi, quia illi ad solam continuationem tabularum requirebantur.

Veritas verò huius operationis ostenditur ex propos. 15. Posset etiam reperiri ex Coroll. prop. 12. & ex Coroll. propos. 15. sed facilius per hanc, atque certius.

COROLLARIVM I.

HInc omnes sinus vsque ad centum facilliter dantur per solam inspectionem Tabulę ordinis sexti. Nam cum ibi proportionales sola vnitate decrescant quilibet occurret cum logarithmo addendo spretis fractis, vt modo non amplius necessarijs, cum solùm ad condendas tabulas requirantur: sic sinus 9999995. reperies logarith. 7. Sic 9999905. reperies logarithmum 95. cum fracto 0000095. qui spernendus est.

COROLLARIVM II.

REperies quoque sinuum aliorum logarithmos, qui cadunt in tabulam quinti ordinis, vel quarti sic. Dati sinus 9999105. reperitur proximus proportionalis in tabula prima quarti ordinis 9999100. quia ergo ille sinus est maior 5. vnitatibus, logarithmus 900. diminuendus vnitatibus 5. ex tabula sexti ordinis, sed quia adsunt fracti

fracti satis sensibiles vltra integros, ideo accipiendæ sunt 4. eritque logarithmus 896. vel 895. sinus 9999105. Eidemque logarithmo 35. vnitates ex tabula sexti ordinis addendæ, vt fiat logarithmus sinus sequentis 9999065. Sicque erit 930. logarithmus ipsius sequentis, & sic de omnibus alijs, vt vsus ipse ostendet.

Ita quoque fecimus in reperiendo logarithmo applicando sinui Gr. 45. qui necessarius est ad reliquorum sinuum logarithmos inueniendos. Namque, cum sit sinus ille 7071068. erit inter proportionales primi ordinis 7105532. &c. & 7034477. & cæt. incepimus itaque proportionales secundi ordinis interponere, vt vides hic.

		Logarith.
7105532	420	3418488
7105	532	
7098426	888	1
7093328	462	2
7084237	834	3
7077152	897	4
7070075	745	

Est ergo sinus quæsitus inter hunc vltimum, & penultimum: quare interiaciemus proportionatertij ordinis. sic

7077152	8970	
707	7152	1
7076445	1818	2
7075737	5373	3
7075029	9596	4
7074322	4607	5
7073615	0285	6
7072907	6670	7
7072200	3763	8
7071493	1563	

Deinde alij proportionales quarti ordinis interponendi quales sunt.

7071493	15630	
70	71493	1
7071422	44137	2
7071351	72715	3
7071281	01364	4
7071210	30083	5
7071139	58873	6
7071068	87734	

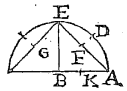
Hic ergo vltimus est valdè propinquus, & differt solum fractis à sinu dato. Accipiamus ergo logarithmos conuenientes ordinis primi proportionali, qui est 3418488. 8721596. deinde ex prima tabula secundi ordinis accipiemus quarti proportionalis logarithmum 40036. 1753740. deinde ex prima tertij accipiemus octaui Geometrici logarithmum 8003. 6301936. tandem ex prima tabula quarti ordinis accipiemus sexti Geometrici logarithmū iuxta. n. interpositorū log. 597. 0229847. & omnes in vnam summam redigemus, eritque logarith. sinus Gr. 45. nimirum 3467125 $\frac{1}{2}$. abiectis omnibus fractis.

Præassumptum. Quia vsque ad dimidium tabulę sinuū tabulas proportionales logarithmicasq; ordinauimus. Modo quomodo reliquis sinubus logarithmi applicandi inueniantur docendum est; & hoc non, quia vsque ad vltimum sinum deduci non possent, sed solum ad laborem leuandum. Ad id verò est necessarius logarithmus dimidij sinus totius. Vnde quomodo reperiatur, tradendum est.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Sinus 45. Graduum est medium proportionale inter sinum totum, & dimidium sinus totius.

SVpra probauimus propos. 18. expens. 3. cùm ageremus de sinibus inueniendis; quòd dimidium sinus totius AK se habet ad sinum dimidij alicuius arcus EA, vt sinus complementi illius dimidij EG ad sinum totius arcus BE; sed sinus 45. Grad. est æqualis suo complemento, & sinus arcus dupli ipsius est sinus totus; ergo ita se habet AK



dimidium sinus totius ad EF sinum 45. Grad. vt eius, & illi æquale complementum EG ad sinum dupli arcus EB, qui est sinus totus, & consequenter EF, & EG æquales sunt medium inter AK dimidium sinus totius, & BE sinum totum, & ideo si ex eis fiat quadratum illud erit æquale rectangulo ex sinu toto, & dimidio eius facto ex propos. 19. lib. 6. element.

COROLLARIVM.

HInc est, quòd cùm exp. 1. huius tract. propos. 6. & 4. duplatio Arith. æquiualeat quadrationi, & propos. 3. subductio diuisioni. Si logarithmus sinus 45. gr. dupletur, & ab eo duplato subducatur logarith. sinus totius, qui est 0. relinquetur dimidij sinus totius Arithmeticus, & quia supra reperimus Arithmeticum 45. Grad esse 3467125 $\frac{1}{2}$, si dupleturerit 6934251. & subducatur 0. silicet nihil ab eo auferatur, erit idem logarithmus sinus dimidij nempe sinus 5000000.

PROBL. I. PROPOS. XIX.

Dato logarithmo dimidij ſinus totius, & ſinus maioris arcus, quam Gr.45. cum complemento eius dimidij, reperire dimidij arcus, vel ſinus logarithmum.

PRæſupponitur, quòd ſint appoſiti omnibus ſinibus ſui logarithmi à 90. vſque ad grad.45. & ſint alij, quærendi minores dimidio, & conſequenter minores, quàm ſinus Gr. 45. Vnde, & eorum complementum erit cognitum, cùm arcus, qui quæritur ſit minor, quam gr.45. eius complementum erit ſinus arcus maioris, quam Gr. 45. & conſequenter eius logarithmus erit notus. Addantur itaque ſimul arcus dati logarithmus, & dimidij ſinus totius, & à ſumma auferatur logarithmus ſinus complementi dimidij ipſius arcus, & reſiduum erit logarithmus ipſius dimidij.

Probatur autem ex propoſ.15. Expenſ.8. de ſinubus. Nam dimidium ſinus totius ſe habet ad ſinum alicuius arcus, vt ſinus complementi ſe habet ad ſinum dupli arcus. Vnde rectangulum ex medijs ex propoſ.18. Elem. erit æquale rectangulo ex extremis, & ſic in geometricis ſi multiplicentur ſimul extrema, nempe dimidium ſinus, & ſinus dupli arcus, & diuidantur per complementi ſinum, dabit reſiduum ſinum dimidij arcus. vt ibi diximus; ſed vt propoſ.1. expenſ.1. h. diximus in Arithmeticis aggregatio æquialet multiplicationi, & ex prop.3. ſubductio diuiſioni, ergo aggregatus logarithmus dimidij ſinus, cum logarithmo totius arcus æquialebit eorundem Geometricæ multiplicationi, & ſubductus logarithmus complementi æquialebit diuiſioni factæ per eiuſdem ſinum, & conſequenter reſiduum ex ſubtractione logarithmica erit logarithmus dimidij arcus. Exemplum verò tale eſt.

Sit Logarithmus Gr. 45. m. 15. ex tabula tertij ordinis 3415023. complementum dimidij huius arcus eſt Gr. 67. m. 22 $\frac{1}{2}$ culus logarith. ex tabula prima per regulas proximè traditas repertus eſt 801930. logarithmus verò dimidij ſinus totius eſt, vt ſupra 6934251. Addo itaque hunc dimidij ſinus totius logarithmum logarithmo ſinus arcus dati 3515023. fitque ſumma 10349274. à quo ſubduco logarithmum complementi, remanetque logarith. 9547344. ſinus dimidij arcus 22. 37 $\frac{1}{2}$.

COROLLARIVM.

HInc datis omnibus logarithmis ſinuum arcuum maiorum, quam grad. 45. obtinere poteris omnes logarithmos ſinuum arcuum vſque ad 22 $\frac{1}{2}$ Gr decreſcentium, & iſtis datis obtinebis logarith. arcuum vſque ad 11. Gr. & m. 15. & ex iſtis rurſus omnium arcuum logarithmos vſque ad gr.5. m.38. & tandem vſq; ad primum prorſus minutum.

EXPENSIO VI.

De Tabulis ordinandis, & Logarithmis tangentium addendis.

PRæceptum 1. In qualibet paginæ faciæ 9. columnæ, ſeu arulæ oblongæ diſtinguantur lineis tali, tum longitudine, tùm latitudine, vt commodè numeros capere poſſint inſcribendos, ita quod 61. verſus, ſeu lineas numerorum ſecundum longitudinem ſingulæ comprehendant, & latæ, vt 8. numeros capere poſſint, & ſi de tangentibus agitur vſque ad 11. exceptis prima ſiniſtra, & vltima dextra, quæ duos tantum numeros ſua latitudine capere debent, lineamentiſque tranſuerſis decem ad maiorem diſtinctionem decuſſentur.

Præceptum 2. Primæ columnæ ſiniſtræ G. cum numero graduum, & m. pro indicio minutorum ſuper ſcribendus; perque totam longitudinẽ incipiendo à 0. & deſcendendo vſque ad 60 numeri incluſiuè excreſcẽtes notãdi. None verò columnæ dextræ nihil ſupra ſcribendum, ſed incipiendum à 60. & decreſcentibus numeris peruenien dum vſque ad 0. incluſiuè, & tandem numerus 89. & hæc de prima, & ſecunda facie paginæ primæ; cæteræ verò ſucceſſiuè habebunt Gr.1. & 88. ſic Gr.2. & 87. & in reliquis hoc ordine eſt procedendum.

Præceptum 3. Secunda verò columna ſiniſtra continebit ſinus illorum minutorum, qui in prima continentur, ſicut, & dextra octaua ſinus illorum, qui nona columna extenduntur, & conſequenter Graduum, qui ſupra ſcripti ſunt primæ, & infraſcripti nonæ. Hos autẽ ſinus, vel repertos habebis ex tractatu de ſinubus, vel deduces ex tabulis ſinuum vulgaribus, vt Reinholdi, &c.

Iſtis autem ſinibus dextris applicabis logarithmos repertos vt ſupra ex Coroll. propoſ.16. primo, & ſecundo, & hi occupabunt 7. dextram columnam. Siniſtris verò ſinibus applicabis logarithmos repertos ex propoſ.19. & iſti extendentur per totam columnã ſiniſtram tertiam, ſexta verò, & 4. inſcribendæ ſunt tangentes, & tandem 5. & media remanente differentiales numeri ſcribendi ſunt, qui pro tangentibus apponuntur, Oriũtur autem iſti à ſubductione logarithmorum ſextæ columnæ, à logarithmis tertiæ, & id quod remanet à ſubtractione inter vtraſque tangentes hac media columna ſcribendum.

THEOR. III. PROPOS. XX.

Primæ Nonæque columnæ Gradus, & minuta ſibi ſunt inuicem arcus, & complementa.

PRobatur. Nam cum illa prima inciplat à 0. creſcendo iſta à 60. minutis ſuper 89. ſit, vt quantùm creſcit illa prima, tantùm decreſcat nona, & conſequenter, quòd huic tot minuta, ſeu gradus defficiant, quot primæ aucti ſunt, & è contra. Quare ſimul additi alter alterius complebit numerum, vt fiant 90. Gr. & ſic erunt ſibi inuicem complementa.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. XXI.

In prima columna continetur angulus acutus rectanguli minor; in nona dextra angulus acutus eiuſdem maior.

PRobatur. Nam ex propoſ.17. lib.1. elemẽt. omnis rectanguli anguli omnes duobus rectis ſunt æquales, qui cũ ſit vnus in rectãgulo rectus, alij duo ſimul erunt vni recto æquales; Vnde alter angulus alterius complementum erit, vt ſunt arcus, qui prima, nonaque columna conti nentur, vt dictum eſt propoſ.20.

THEOR. V. PROPOS. XXII.

Secunda Columna continentur crura minora minores angulos ſubtendentia: in octaua verò crura maiora maiores angulos ſubtendentia.

PAtet, quia in ſecunda minorum angulorum, & arcuum ſinus continentur, ſicut in ſexta ſinus arcuum maiorum, & angulorum.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quod ex ſinu dextro octauæ columnæ, & ſiniſtro ſecundæ, & ſinu toto rectangulum triangulum componatur.

THEOR. VI. PROP. XXIII.

Logarithmi tertiæ columnæ ſunt Logarithmi proportionis cruris minoris rectanguli ad eius baſim, ſeu Hypothenuſam, ſicut, & logarithmi ſeptimæ ſunt logarithmi proportionis cruris maioris ad eandem Hypothenuſam. Suntque ſibi inuicem antilogarithmi nempe complementorum logarithmi.

PRobatur prima pars. Nam proportio quam habent crura cum baſi tunc innoteſcit cum baſis per crura diuiditur, ita proportio 5000000. ſinus Gr. 30 eſt ad ſinum totum 10000000. vt 1. ad 2. quia diuiſus ſinus totus per crus 5000000. dat 2. Sed ex dictis propoſ. ſubductio in logarithmis æquialet diuiſioni: Ergo logarithmus cruris ſubductus à logarithmo ſinus totius dabit logarithmum proportionis cruris cum ſinu toto: Sed logarithmus ſinus totius eſt 0. Ergo ſubductus relinquit numerũ, vt erat, & ita ne dum eſt logarithmus ſinus: ſed etiam proportionis eiuſdem ſinus cum ſinu toto.

Probatur ſecunda pars. Quia ſinus, quibus applicati ſunt, ſibi dextrorſum, & læuorſum correſpondentes ſunt ſibi inuicem complementa. Ergo, & logarithmi ipſorum ſibi inuicem ſunt antilogarithmi.

THEOR. VII. PROPOS. XXIV.

Tangentium, & ſecantium, quæ ſupra ſinum totum excreſcunt logarithmi infra 0. intelligendi; ita quod ſint minores nihilo tot vnitatibus, quot ſunt in ipſo logarithmo.

PRobatur. Nam cum à 0. creſcant logarithmi noſtri, dum à ſinu toto ipſi ſinus decreſcunt neceſſe eſt, quòd ſi dentur aliquæ lineæ, vt ſunt Tangentes arcuum maiorum, quam 45. Gr. & omnes ſecantes, quæ creſcunt vltra ſinum totum, quòd illarum logarithmi vltra 0. decreſcant.

COROLLARIVM.

VNde logarithmi poſſunt ſumi, & vt defectiui, & vt abũdantes. Abundantes erunt, ſi intelligantur creſcere ſupra 0. vt vſque nunc fecimus: defectiui verò ſi infra 0. decreſcere intelligantur, & taliter aliquos intelligere erit neceſſe, ſi tangentibus, & ſecantibus eos applicare voluerimus, quæ vltra ſinum totum excreſcunt.

THEOR. VIII. PROPOS. XXV.

Si Logarithmos tertiæ columnæ ſiniſtræ, & ſeptimæ dextræ, vt defectiuos conſideraueriмus erunt logarithmi Hypothenuſarum, ſeu ſecantium Arcuum, quibus ſunt complementa, & Anthilogarithmi.

Sic logarithmi ſinuum arcuum dextrorum fient logarithmi ſecantium ſiniſtrorum arcuum, & è contra.

PRobatur. Nam propoſ.18 Tr.20. de ſinubus probauimus ſinum totum eſſe medium proportionale inter complementum arcus, & ſecantem eiuſdem arcus, & ideo, quòd multiplicatus in ſe, & diuiſus per complementum daret arcus illius ſecantem: ſed quia in logarithmis additio æquialet multiplicationi, & ſubductio diuiſioni, ideo ſi 0. logarithmus, ſinus totius addatur ipſi 0 & ab hac ſumma ſubducatur logarithmus complementi arcus V. g. logarithmus arcus dexteri, relinquetur idem logarithmus minus, quam 0. ſecans arcus ſiniſtri, cui arcus dexter eſt complementum. Erunt verò logarithmi conſiderandi, vt infra 0. deficientes, quòd omnis ſecans ſuper ſinum totum excreſcat, vt modò diximus.

THEOR. IX. PROPOS. XXVI.

Differentiales mediæ columnæ sunt logarithmi proportionis cruris maioris respectu minoris, & logarithmi fœcundarum, seu tangentium, tum arcuum dextrorum, tum sinistrorum, sub diuersa tamen consideratione. Nam vt abundantes sunt differentiales, logarithmique tangentium arcuum sinistrorum minorum Gr 45. at vt defectiui sunt logarithmi tangentium arcuum dextrorum maiorum gr. 45.

PRob. secunda pars. Nam ex prop. 16. tract. 20. habemus, quòd eadem proportio est sinus cõplementi ad sinum arcus; quam sinus totius ad tangentem. & ideo, quod multiplicatus sinus totus per sinum arcus, & diuisus per sinum complementi, exhibeat tangentem arcus; vel è contra multiplicatus per sinum complementi, & diuisus per sinum arcus exhibeat tangentem complementi. Sed in Arithmeticis ex propos. 1. & 3. huius, additio equialet multiplicationi, & subtractio diuisioni; Ergo si logarithmus sinus alicuius arcus addatur logarithmo sinus totius, qui est 0. & ideo remaneat, vt erat ante, & subducatur ab eo logarithmus sinus complementi dabitur tangens arcus, & si subducatur ab eo sinus arcus dabitur tangens complementi, ideo eædem differentiæ erunt, & logarithmi arcuum, & logarithmi complementorum, arcuum quidem, vt abundantes, & quatenùs logarithmi sinuum maiorum, quam Gr. 45. subducuntur à sinuum minorum maioribus logarithmis, vt relinquatur tangentis logarithmus; complementorum verò quatenus defectiuæ, & logarithmi maiores sinuum minorum, quam 45. Gr. subducuntur à minoribus logarithmis maiorum sinuum, vt relinquatur tangẽtis logarithmus. Maiores verò numeri à minoribus subduncuntur per intellectum; quatenus intelligitur minori tot vnitates deficere, quot sufficiunt ad hoc, vt subduci possit; ita 15. subducitur à 4. cum intelligitur illi 4. vnitates 11. deficere, quas si haberet 4. à 15. posset subtrahi, cùm tunc esset iunctus cum 11; & 4. & 11. faciunt 15. numerus verò 15. à 15. subduci potest, & ideo differentię logarithmicæ sumptæ, vt deficiẽtes. & vt à minoribus logarith licet maiores possunt subduci; sunt illæ ipsæ, quas dant minores logarithmi à maioribus subducti. Sicut 11. est eadem differentia, quam dat numerus 4 subductus à 15. & quam dat 15. subductus per intellectum à numero 4.

Probatur prima pars, quod differentiales sint quoque logarithmi proportionis cruum: Nam tunc proportio vnius cruris ad aliud obtinetur, cùm crus minus diuidit maius. Quotiens enim est denominator proportionis: Sed in logarithmis deductio æquialet diuisioni, & differentiales numeri sunt orti à subductione logarithmorum minoris cruris à maioris cruris logarithmis. Ergo sunt logarithmi illi numeri differentiales proportionis vnius cruris ad aliud.

COROLLARIVM.

COllige, quod si tangentium logarithmis vtaris in exercenda regula proportionum, & iubeat, tãgentis logarithmũ debere demi, vel addi, fiaddit signũ † hoc, quod significat logarithmum tangentis debere sumi, vt abundatem, tunc obediendum est; & cum præcipit regula, quòd subducatur logarithmus tangentis; vel addatur; si signo defectiuo hoc — in tabulis notetur, è contra faciendum.

Logarith.

1 Sinuum G.45. vsq; ad 90.	2 Tangentium	3 Sinuum G. ab 1. vsq; ad 45.
0	80	90
4	72	76
8	64	68
12	56	68
16	48	64
20	40	60
24	32	59
28	24	52
32	19	48
39	8	44
40	0	40

Quod concipies à serie numerorum logarithmicorum hic appositа, qui imstantur logarithmos sinuum, atque tangentium in suo progressu.

Series itaque prima cogitetur, tanquam si essent logarithmi minores sinuum arcuum maiorum, quàm 45. Graduum; Secunda sint differentiæ, & tanquam tangentium logarithmi habeantur; Tertia putentur tanquam logarithmi sinuum arcuum minorum, quàm 45. gr. quia sunt maiores Arithmeticis primæ seriei.

Quia itaq; tangens est ad sinum totum, vt sinus arcus ad sinum complementi: differentialis tangentis maiorum arcuum, quàm 45. Gr. & consequenter maior sinu toto, diuidet logarithmum sinus totius 0. & logarithmum arcus maioris, quam 45. Grad. aggregatos, & prodet logarithmum arcus minoris, quam 45. Gr. V. g. arcus logarith. 24. diuisus per differentialem 40. daret logarithmum desideratum; sed quia differentialis 40. est defectiua respectu logarith. 24. ideo addenda est, & fiet 64. logarithmus arcus minoris, quàm Gr. 45.

At si tangens sit minor sinu toto; etiã sinus quæsitus erit minor dato; Vnde logarithmus V. g 94. additus sinui toti, & minutus differentiali 32. dat logarithmum arcus maioris pariter 32. quia f. hic differentialis 32. consideratur, vt abundans. Vides itaque, quod quando desideratur logarith. sinus minoris arcus, quam Gr. 45. differentialis, quæ debebat addi subducitur, at quando desideratur sinus arcus maioris, quàm gr. 45. logarithmus differentialis, quę debebat addi, etiam additur. Quia si 24. cum differentiali 32. minorem nihilo facit 56. qui æquat ipsum 56. maiorem nihilo. Ergo 28. cum 32. facit 60. ob additam differentiam 4. quam addit 28. numero 24. & sic 32. cum 32. facit 64. & sic 36. cum 32. facit 68. & cæt. quare additá differentialis logarithmò minori constituet maiorem, sicut ablata minorem logarithmum cum tamen iuxta regulam semper deberet subduci, nisi differentiales deficerent, & inciperent contrario modo à 0. crescendo dum sinus deficiunt.

Itaque collige regulam Generalem, quod in defectiuis addendis cum abundãtibus, seu logarithmis sinuum, qui omnes sunt abundantes, cum differentialibus, seu in logaritgmis sinuum, sed vt secantium sumptis, & ideo omnibus defectiuis, addere idem est, ac subducere.

In defectiuis verò ab abundantibus subducendis, vel è contra, subducere idem est, quod addere. Quia silicet subducendo acquiritur id, quod addendo esset consequendum, vel addendo id inuenitur, quod subtrahendo debuisset reperiri.

EXPENSIO VII.

De Logarithmis numerorum absolutorum.

CVm ex applicatione logarithmorum sinubus arcuum facilitas singularis in regula proportionum tractanda emerserit, cùm ad inuentionem ipsorum sinuum adhiberetur. Excogitauere Authores numeris quoque absolutis, & naturali propagatione crescentibus logarithmos addere, vt ipsa regula aurea simili facilitate constaret in numeris absolutis assumpta; quod etiam inuentum ab ipso Nepero innuitur; sed obscurissimè, exposuit tamen, vtcumque Henricus Briggius; sed feliciùs operi mandauit in suis Chiliadibus, quæ ab 1. vsq; ad 100000. excrescunt naturali augmento.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

In serie numerorum ab vnitate continuè proportionalium, si numerus quilibet alterum multiplicet. Eius logarithmus erit aggregatum logorithmorum ipsis multiplicantibus se inuicem, applicatorum naturali ordine progredientium.

SInt proportionales ab vnitate numeri in serie dispositi 1. 2. 4. 8. & cæt. & eorum logarithmi naturali ordine propagati 1. 2. 3. 4. & cæt. Dico, quòd si aliquis V. g. 2. multiplicet aliquẽ alium nempe 16. & faciat 32. huius facti logarithmum esse aggregatum logarithmi duorum numerorum se multiplicantiũ ideſt logar. 1. & 4. nimirum 5. Sic si 4. multiplicet 32. & faciat 128 logarithmus huius numeri 128 erit aggregatũ logarithmi 2. & logarithmi 5. applicatorũ numero 4. & 32. quod aggregatum est 7.

Propor.	Log.
1	0
2	1
4	2
8	3
16	4
32	5
64	6
128	7
256	8
512	9
1024	10

Probatur ex dictis prop. 1. huius.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Si aliquoties numerus aliquis in se, & in productum multiplicetur, & vltimum productum diuidatur, genitos excedent quoti ipsi solâ vnitate; addito verò primo termino æquabuntur.

PRobatur. Sit 1204. factus ex multiplicatione 2. in se, & in productos successiuè, erunt geniti 9. at si diuidatur successiuè Mult. per 2. Quoti erunt ijdem vtique V. g. 512. postea 256. & cæt. vsque ad 2. sed 2. insuper capit in se semel; Ergo Quoti vnica vnitate vices multiplicationum excedent: at si genitis addamus latus, & primam radicem 2. erunt æquales.

Mult.	Quot.
2	1
4	1 2
8	2 3
16	3 4
32	4 5
64	5 6
128	6 7
256	7 8
512	8 9
1024	9 10

1024

THEOR. III. PROPOS. XXIX.

Numeri diuisi per 10. quoties fieri potest, quoti tot erunt numero, quot ipsæ figuræ vna dempta ad dextram.

SIt numerus quilibet 1679087. diuidendus per numerum 10. primus quotus erit 167908. secundus erit 16790. tertius erit 1679. quartus erit 167. quintus erit 16. sextus erit 1. ipsæ verò figuræ vna dempta sex restant.

* Probatur. Quia tot erunt decimæ, & decimę decimarum, & cæt. ex propos. 1. tract. 8. quot sunt loca excepto vltimo loco ad dextram, qui est vnitatum locus: Si ergo quilibet numerus V. g. millio per 10. diuidatur habebimus centesimas millium, vel vnam, vel 2. vel 4. & cæt. vsque ad 9. quæ si diuidentur per 10. vel duas, vel tres vsq; ad 9. dabũt decimas millium, quæ si diuidentur per 10. dabunt vnitates millium, ideſt decimas centesimarum, vel 1. vel 2. vel 3. vsque ad nouem; & si rursus diuidantur, exhibebunt decimas decimarum, & tandem vnitatum decimas. Itaque diuisio per 10. reddit eundem numerum ad locum inferiorem proportionẽ significantẽ per decimas ab vnitate crescẽtẽ: Quare cũ vltima figura ad dextram, iam decimas non significet, diuidi nequit: Vnde quotus ex diuisione 10. in vltima figura haberi non poterit: Quadere tot erunt quoti si diuidatur numerus aliquis per 10. quot erunt figurę vltima dempta.

THEOR. IV. PROPOS. XXX.

Quot sunt notæ in vno quoque factore, tot erunt in facto, & aliquando vna minus.

SInt multiplicatores 234. & 845. qui inuicem se multiplicent, factus erit 197730. nempe totidem figuris, quot sunt in multiplicatoribus vnitates; at 234. multiplicet 145 genitus erit 24930. nempe minutus vnicæ figura, ex eo numero figurarum, quo vterque multiplicatus, & generans constat.

Pro-

* Probatur ex regula multiplicationum tradita prop.14.& 15.tract.8. Nam vltimâ ſiniſtra figura B multuplicâs poſſint numerũ productum vnitates ſignificantem tertio loco, vt in A. Vel ergo genitus ex dextro vltimæ figuræ ſiniſtræ B facit 3. aut ad ſummùm 4. figuras, vt diximus; ſi tres facit additis duobus locis CD faciũt quinque; ſi quatuor additis duobus locis CD, ſunt ſex: Ergo tot figuræ erunt in genito, quot in vtroque generante, vel tantùm vnâ minùs vna. 234 1145 1170 936 ACD 234 0

THEOR. V. PROPOS. XXXI.

Si ſeries aliqua producatur numerorum duorum ab vnitate continuè proportionalium donec logarithmum vltimus terminus conſequatur, qui ab vtriuſque logarithmorum multiplicatione gignitur; Is terminus erit, tum vnius, tum alterius datorum ab vnitate continuè proportionalium terminus.

D	A	B	C	K	
0	1	0	0	0	
	2	1		3	
	4	2		6	
	D 8	3	1	9	
1		1	1	1	
	16	4		12	
	E32	5		15	
1	164	6	2	18	
1	128	7		21	
	256	8		24	
	512	9	3	27	
2	1024	10	1	30	
	2048	11		33	
	4096	12	4	36	
1	8192	13		39	
	16384	14		42	
P3	32768	15	5	45	

Sit ſeries numerorum A in qua dati ſint duo numeri 8.& 32. quorum logarithmi 3.& 5. multiplicentur inuicem,& fiant 15. producatur verò ſeries vſq; ad 15. terminos ab vnitate.

Dico, quod vltimus terminus 32768. eſt terminus communis proportionalium datorum numerorũ; ſi ab vnitate excreſcant. V. g. ſi ſtatuatur primus D 8 ab vnitate, & ratio 1. ad 8. in ſeriem cõtinuetur terminus erit prædictus 32768. & ſi ſtatuatur qnoque primus terminus ab vnitate E 32. & ſecundùm eam proportionem, quam poſſidet 1. ad 32. ſeries continuetur, illius ſeriei quoque terminus erit prædictus 32768. cuius logarithmus 15.

* Probatur. Inter D, & vnitates tres mediant proportionales: Ergo, ſi 1. ponatur ad 8. ita 8.ad aliud 64. inter 8. & 64. tres proportionales interferentur ex prop. 9. lib.8. & ſic de alijs. Ergo ſi proportio quinquies repetatur, & producatur vltimus terminus erũt hunc inter vltimũ,& vnitatem 15. termini virtualiter interpoſiti, ideſt poterunt interponi, & numeris exarari eiuſdem proportionis, quæ eſt 1. ad 2. cùm proportio 1. ad 8. quæ quinquies repetitur, ſit proportio 1.ad 2. ter repetita; Ergo vltimus terminus erit idem, ac prædictus 32768. ſiquidẽ eſt iſte decimus quintus terminus progreſſionis proportionis 1. ad 2.

Rurſus ſit alter terminus primus ab vnitate E 32. & fiat, vt 1. ad 32. ita 32. ad aliud P. & proportio producatur, & extendatur in ſeriem, quia ergo inter 1. & 32. quinque termini mediant, etiam inter 32. & tertium P quinque termini interponentur, ſi ergo fiant ex iſtis tres termini virtualiter erunt 15. quia inter 1, & 32. eſt proportio 1. ad 2. quinquies repetita; vnde inter vnitatem, & tertium terminum inuentum erit proportio 1. ad 2. quindecies repetita: ſed etiam 32768. habet proportionem 1. ad 2. quindecies repetitam, ergo iſte erit tertius terminus proportionis 1. ad 32. ſed etiam erat quintus terminus proportionis 1.ad 8. ergo eſt terminus communis harum proportionum.

COROLLARIVM.

Hinc enaſcitur, quòd duorum numerorum in aliqua ſerie eiuſdem proportionis, ſed tamen diuerſimodè repetitæ exiſtentium, enaſcitur inquam, quod quotorum numerus reciprocè ſit proportionalis numero logarithmorum; ita numerus E 32. quoti, quibus diuidit 32786. ſunt 3. logarithmi verò 5. at numeri D logarithmus eſt 3. numerus verò quotorum; quibus diuidit eundem numerum 32786. eſt 5. Quare in numero E 32. vt eſt quotorum numerus ad logarithmorum numerum, ideſt vt 3. ad 5. ſic in numero D 8. eſt logarithmorum numerus ad quotos; nempe vt 3. ad 5. quod ſi adhibeas alios logarithmos vt K, idem erit nempe, vt 9. ad 15. ideſt vt 3. ad 5.

PROBL. I. PROPOS. XXXII.

Datis duobus numeris in eadem continuè proportionalium ſerie poſitis vnâ cum logarithmo naturali vnius, exquirere logarithmum naturalem alterius.

VOcamus logarithmos naturales, qui naturali augmento per vnitates propagantur, vt 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. & cæt.

Sint itaque in præcedenti ſerie dati duo numeri V.g. 8. & 32. deturque huius logarithmus 5. ſitq; exquirendus logarithmus numeri 8. fiat per multiplicationem numeri 8. in ſe, & in productum toties aliquis numerus, donec geniti in numero æquent logarithmum 5. & ſint 5. Sitque vltimus productus 32768. ex prop. præc. hic numerus erit æqualis numero illi, qui fieret ex multiplicatione 32. in ſe, & in factos, qui tot erunt, quot logarithmi naturales numero 8. aſcribendi; quia ita eſt eſt Coroll. numerus quotorum termini 32. quibus diuidit vltimum genitum ad logarithmos naturales ſuos, vt logarithmi numeri 8. ad quotos ſuos, quibus eũdem vltimum genitum diuidit. Si ergo reperiamus quotos, quibus 32. diuidit vltimum terminũ 32768. qui erunt tres habebimus quoque logarithmum ipſius 8. nempe 3, qui debet aſcribi in ſerie prima in qua etiam eſt logarithmus exhibitus numeri 32. quæ eſt præced. propoſitionis ſeries.

	1	0	1 | 0
	32	1	8 | 1
			64 | 2
	1024	2	512 | 3
			4096 | 4
	32768	3	32768 | 5

PROBL.

PROBL. II. PROPOS. XXXIII.

Datis duobus numeris, quibuſcumque, & alterius logarithmo ad libitum ei applicato alterius logarithmum exquirere.

SInt numeri dati 2. & 10. & huius logarithmus ſtatuatur 100. quæraturq; logarithmus ipſius 2.

Primus 2. itaq; ſe ipſum multiplicet, & genitũ ſucceſſiuè, vt multiplicationum numerus deficiat ſolùm vnica vnitate à dato ſecundi 10. logarithmo, qui logarithmus eſt 100. ideo ſint 99. ſe cum ipſo ſint 100. Diuidaturq; rurſùs quoties fieri poteſt, & ex propoſ.28. quoti erunt 100. quia numerus in ſe ipſum ductus, ſi rurſus diuidatur faciet numerum quotorum æqualem numero genitorum & vnum quotum ſupra adiunget, vel æqualem genitis addito primo generante. Numerus itaque vltimo genitus, cuius quoti æquãt logarithmũ 100. n. 10. eſt ille, qui ſi per 10. diuidatur, quoties fieri poteſt, ex præc. quoti eius dabũt logarithmum 2.

Sed, quia ille numerus ob maximam ſuam multitudinem haberi laboriosè poteſt. Siquidem creſcit vltra omnem exiſtimationem, poterimus abſque eius cognitione habere numerum quotorum, quem quærimus, abque eo, quod eum noſcamus, & ſucceſſiuè diuidamus. Nam cùm numerus quotorum, quando diuiſor eſt 10. ſit idem, ac figurarum multitudo vnâ ſolum demptâ ad dextram ex propoſ.32. hinc eſt, quòd ſatis erit noſcere figurarum numerum, quæ terminum vltimum ex 100. multiplicationibus numeri 2. genitũ componunt, quod ad hoc, vt conſequamur breuiùs,& faciliùs, quam fieri poſſit fit.

PROBL. III. PROPOS. XXXIV.

Numerum notarum, & figurarum in vnaquaque multiplicatione obtinere, abq; totali omnium figurarum multiplicatione.

FIet id multiplicando ſolùm res, aut quatuor, aut quinque figuras ad ſiniſtram, quę nec cum toto numero multiplicentur; ſed ſolum cum duabus, vel tribus V.g. ſit numerus 2345. multiplicandus in ſe ad cognoſcẽdum numerum ipſum, vt docuimus tract.8. propoſ.17. ita ſtabit multiplicatio.

```
  2345
  2345
 -----
 11725
  9380
  7035
  4690
 -------
 5499025
```

Figuræque ſingulæ cum ſingulis numeri diuidendi erunt multiplicatæ.

Sed ad agnoſcendum tantùm loca ſufficiet multiplicare in hoc numero duas extremas figuras, quia ex propoſ. 27. huius, quot ſunt notæ in vno quoque factore, tot erunt notæ, & figuræ in genito aliquando vna dempta. Vnde, vt ſciamus, quando ea demenda eſt, vel addenda vltimæ figuræ vel duarũ tantùm multiplicatio erit neceſſaria, aut ad ſummũ quinq; Siquidẽ alię differentię, quæ ex aliarũ figurarũ verſùs dextrã multiplicatione exoriũtur vltimũ numerum non augent, cùm ex propoſ.14 tract.8. non niſi decimæ poſſint transferi, vel vna, vel duæ vſque ad nouem. Quare oportebit ad ſummum habere cognitionem quinq; vltimorum numerorum ad hoc vt cognoſcamus, an translatio ad ſummam 9. decimarum in magnis ad ſiniſtram numeris vltimam notam poſſit augere; ideoque in prædicto numero ſufficiet multiplicatio numeri ſiniſtri 2. & 3. & quia ex prop.15.tract. 8. ſcimus numeros harum notarum ad tertium locum, & quartum pertinere, ideſt ſic, vt vides in exemplo ſtabit multiplicatio.

```
  2345
  2345
 -----
 6900
 4690
 -------
 5380000
```

Vbi 3. neque per totum numerum, eiuſque omnes notas multiplicauimus, ſed ſolum duas extremas, & licet non præbeant eundem numerum, ſed minorem; præbent tamen eundem numerum notarum, vt priùs, quæ ſunt 7. Et licet in numerorũ teſſera, vbi notæ ſignificãt minores numeros, neque multiplicatio vlla eſſet adhibenda, oportet tamen multiplicare ſaltem duas, vel tres vltimas, vt deinde ſucceſſiuè numerus aliarum figurarum poſſit haberi, quæ continua duplicatione inueniendæ ſunt.

PROBL. III. PROPOS. XXXV.

Notarum numerum multis intermiſſis proportionalibus inuenire.

SIt numerus 2. cuius notæ inueniendæ ſint, quæ in vltimo per centum multiplicationes propagato termino inueniuntur, ſi id fiat continua multiplicatione laboriosa res eſt, quare ita inſtituemus multiplicationem.

Ducatur binarius in ſe; & fiunt 4. deinde 4. in ſe, & fiant 16. deinde 16. in ſe, & fiant 256. erunt autem horũ logarithmi, ipſius binarij 1.& quia 4. eſt ipſius quadratum ex propoſ 6. huius, eius logarithmus erit 2. Sic, quia 16. eſt quadratum ipſius 4 eius logarithmus erit duplum ipſius 2. nempe 4.& quia 256. eſt quadratum numeri 16. ideo eius logarithmus erit 8. ſed, ſi volumus peruenire ad 10. multiplicetur primus numerus 4. cum hoc vltimo 256. & producetur numerus 1024. cuius logarithmus naturalis erit aggregatum logarithmi 2. applicati proportionali 4. & logarithmi 8 applicati proportionali 256. Vnde logarithmus erit 10 oſtendens iam virtualiter per has 4. multicationes eſſe completas multiplicationes decem virtualiter,& licet inter 2.& 1024.nõ ſint interpoſitæ actu, intermediant, tamen virtualiter, & potuiſſent deſcribi. Sic autem inſtituendus alius ordo; nam numerus 1024. in ſe multiplicatus dabit numerum primum, cuius logarithmus naturalis erit 20, & hic primus in ſe multiplicatus numerum

merum ſecundum, cuius logarithmus erit 40. & hic ſecundus in ſe multiplicatus dabit alium numerum tertium, cuius logarithmus erit 80. & tandem hic cum primo multiplicatus exhibebit numerum, cuius index erit conflatus ex ſumma logarithmi primo, & tertio applicati, nempe 20. & 80. Vnde erit 100. ſignificabitque vltimum numerum productum continere multiplicationes 100. numeri 2. Veruntamen iuxta præced. prop. non quærimus hic ipſum numerum, ſed ſolum notarum, vnde non erit neceſſe ſingulas figuras multiplicare, cum ſingulis omnibus, ſed ſolùm aliquas ad ſiniſtram.

			Proport.	Logar.	Fig.num.
			1	0	
			2	1	
			4	2	1
			16	4	2
			256	8	3
			1024	10	4
			1048576	20	7
		10	995,11627776	40	13
	12089	2581961463	00000. 00500	80	25
1	267633706002	2823000000	00000. 00000	100	31

THEOR. VI. PROPOS. XXXVI.

Licet numeri naturali ordine progredientes proportionales continuè non ſint, adhuc tamen in aliqua magna ſerie; vbi differentiæ ſint paruæ poterunt proximè, vt continuè proportionales vſurpari.

CErtum eſt, quod minimi numeri in ſerie continua proportionalium non ſunt, & ideo, quod logarithmi illis applicari nequeũt, ex præaſſ. 3. Expenſ. 2. huius: at ſi ſtatuantur, & conſiderentur in aliqua magna progreſſione exiſtentes, vt in ſerie ſucceſſiua proportionatorum Tabulæ primæ primi ordinis exp. 2. huius, tunc poterunt reperiri proportionales, qui propinquiſſimi ſint numerorum naturalium proportionibus: qnia ſilicet, cùm illæ numeroſiſſimæ progreſſiones interualla inſenſibilia reſpectu totius termini habeant, incidet aliquis proximè V. g. vt numerus naturalis 9. ad 10. ſic in præcitata tabula 1. præcit. proportionalis 9043820. ad 10000000. ſe habent proximè, vt 9. ad 10. ſpretis diferentijs 43820. ſic 8016305. ſe habet ad 10000000. vt 8. ad 10. & ſi minores differentiæ eſſent electæ in maiori numero adhuc proportio V. g. 8016305. ad 10000000. magis accederet ad proportionem 8. ad 10. quia partes adhærentes 16305. minores eſſent: Quare patet, quòd numeri naturales in aliqua magna ſerie continua reperiri poterunt, vel ijdem alſqui, vel ſaltem proximè.

PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Numerorum ab 1. vſque ad 10. logarithmos reperire.

STatuatur logarithmus numeri 1. zifra, & numeri 10. maximus aliquis numerus ſit logarithmus 1.00000. 00000. ſi iſti extremi 1. & 10. in aliqua magna ſerie numerorum proportionalium intelligantur, & imaginentur deſcripti, vtpote oportet concipere ob logarithmum maximum denarij, quem elegimus 100000. 00000. Oportebit fateri in illa ſerie adeò magna reperiri tales proportionales, & inſenſibili differentia diſſideant ab ea proportione; quam habent numeri naturales ad denarium ſ. erit numerus aliquis proportionalis ex præc. qui ſe habebit proximè ſaltem, vt 8. ad 10. item alius, qui ſe habebit, vt 9. ad 10. item, qui ſe habebit, vt 5. ad 10. parua differentia, & inſenſibili interuenlente. Horum itaque proportionalium perquirendi ſunt logarithmi, licet ipſi proportionales, nobis noti non ſint.

Quoniam iam nouimus datis duobus numeris, & alterius logarithmo, alterum inuenire, abſque alia cognitione proportionalium; cui reſpondent ipſi logarithmi ex propoſ. 33. ideo ex eius documentis primo multiplicabimus ipſum numerum in ſe, & in productum donec geniti habeant illum logarithmum iam cognitum. Verùm, quia illa multiplicatio, quæ eſſet 100000. 00000. cum ipſo primo termino, nempe tot, quot vnitates in logarithmo dato inueniuntur eſt moraliter impoſſibilis. Ideo ſcias, quòd cum continuata diuiſio, quoad fieri poſſit, deinde ſit inſtituenda per denarium, ad reperiendum numerum proportionalium, & denarius ex 20. prop. h. toties diuidat, quot ſunt ipſę notę in ipſo numero, vnâ demptâ; ideo ſolus numerus notarum nobis eſt neceſſarius, numerus inquam notarum, ſeu figurarum, quę vltimum numerum proportionalem correſpondentem logarithmo denarij integrant, & deſcribunt. Id verò conſequemur ex propoſ. 35. huius, & quia quatuor proportionalibus peruenimus ad denarium logarithmicum, & alijs quatuor ad centenarium; quatuor quoque ad millenarium, & ſic conſequenter, ideo 41. proportionalibus perueniemus ad logarithmum 100000. 00000. ipſo primo numero 2. comprehenſo.

Igitur, cum illius vltimi per 33. propoſ. huius neſciamus quidem numerũ, ſed ſolùm notarũ, quę ipſum conficiunt, quas (ſi conficias progreſſionem modo ibi tradito) inuenires eſſe 30102. 99956. 63. Ideo, ſi ille vltimus ignotus diuideretur per 10. quoties fieri poſſet, eſſent quoti, & proportionales eiuſdem numeri, minùs vna cuius notæ, & figuræ ſunt, nempe 30102. 99956. 62.

Sed ex propoſ. 30. iſta diuiſio per proportionalem datum 10. quæ ſit vltimi termini ex 2. toties geniti, donec obtineat eundem logarithmum denario aſſignatum, iſta inquam diuiſio per 10. dat logarithmum ipſius numeri dati 2. cuius quærimus logarithmum; Ergo logarithmus eius erit inuentus 30102. 99956. 62. & ſic faciendum ad inueniendum logarithmum numeti 3. & cęterorum ſimplicium vſque ad 10. relictis tamen, qui duplam, vel triplam proportionem dicuntad 2. & 3. vt 4. 8. 6. 9. de quibus infra.

Exemplum ſeptenarij.

1	0	
7	1	41
49	2	41
2401	4	4
476490 1	8	7
28 2475249	10	9
79792266 29761 200	20	17
6369805760 9000. &c.	40	34
405362155 9000. &c. vſqi ad 68. n.	80	68
3238447650. & cęt. vſque ad 85. notas	100	85

Et ſic proſequere vſque ad logarithmum denarij.

Aduerte verò plurimas notas maximè in primis numeris eſſe multiplicandas, imo omnes in primis vſque ſaltem ad logarithmum 20. nam error, qui in principio eſt vnius notæ fit notarum plurimarum; Sic in iſtis proportionalibus à numero 2. exortis vnitas prætermiſſa in numero 1023. cauſabit in notis logarithmicis 1000. defectum vnius vnitatis, qui defectus excreſcet in immenſum, vnde in principio multa adhibita diligentia agendũ eſt, vt præcluſus notarum numerus poſſit obtineri.

Tabula falſa:	A
1023 | 10	4
1046529 | 20	7
1095223 | 40	13
1199513 | 80	25
1255332 | 100	31
1575870 | 200	61
2483363 | 400	121
6167075 | 800	241
9718508 | 1000	301

Hac itaque ratione inuenientur numeri 2. 3. 5. 7. logarithmi, quod ſatis erit ad alios inueniendos, eruntque, vt in ſequenti tabella.

Logarithmi numerorum ordine naturali progredientium intermiſſo 4. 6. 8. & 9. numero.

1	000000. 00000
2	030102. 99957
3	047712. 12547
5	069897. 00043
7	084509. 80400
10	100000. 00000

PROB. VI. PROPOS. XXXVIII.

Numerorum, qui ex datorum ſimplicium multiplicatione prodeunt, logarithmos inuenire.

INuentis primorum numerorum poſitorum ab 1. vſque ad 10. logarithmis facile eſt compoſitorum logarithmos inuenire ex propoſ. 25. Nam quia numeri, qui ex multiplicatione duorum numerorum reſultat, logarithmus eſt ille, qui ex eorum logarithmorum additione prouenit; ſi ergo deſideras logarithmum numeri 4. qui reſultat ex multiplicatione 2. & 2. adde logarithmum numeri 2. ipſi logarithmo, ideſt duplica illum, & erit 60205999 13. logarithmus numeri 4. Sic ſi addas logarithmum numeri 2. logarithmo numeri 3. erit numeri 6. logarithmus 7789151250 4. Ita ſi cupias logarithmum numeri 8. addes logarithmum numeri 4. numero 2. & erit 90308998 70. & tandem duplicando logarithmum numeri 3. habebis logarithmũ numeri 9. qui eſt 954242509 4. & ne dum iſtos; ſedomnium etiã, qui ex multiplicatione horum proueniunt addendo ſimul multiplicatorum logarithmos, vt numeri 12. 14. 15. 16. 18. 20. & cęt.

PROBL. VII. PROPOS. XXXIX.

Alios numeros quoſcumque primos ſuper denarium inuenire.

NOn alio modo inuenientur, quàm eo, quo duenari, vel ternarij, vel ſimplicium in compoſitorum logarithmos inuenimus.

Sit ergo inueniendus logarithmus, vndenarij dato logarithmo denarij. Multiplicetur in ſe, & in productũ ter; & deinde primum productum multiplicetur cum vltimo producto, & fiet ordo, cuius logarithmus eſt 10. & numeri notarum 11. erunt. Sicque fiat conſequenter donec denarij conſequaris logarithmum 100000. 00000. & numerum figurarum illius vltimi termini, quem num. fig. diuides continuè per datum numerum denarij, quod ſit auferendo vnam tantum vnitatem, & ille erit logarithmus vndenarij, nimirum 1.0413926852.

Et hic habes exemplum, in quo ſolummodo quatuor notas multiplicauimus ſiniſtras; quamuis quinque, vel ſex ad obtinendum numerum uotarum, certum, & exactum eſſent multiplicanda: ad minus in principio.

Numeri multipl.	Logarith.	Num. fig.
I	0	
II	1	2
121	2	3
14641	4	5
2143588 81	8	6
25637424601	10	11
672727969. & cet.	20	21
4525521984	40	42
20480150 25	80	84
1377730560	100	105
189805729	200	209
360240400	400	415
1297008196	800	834
246170600	1000	1042

Et ſic proſequere vſque ad 41. multiplicationes ſingulis multiplicationibus figurarum numerum apponendo, & ſuos logarithmos; donec logarith. 100000. 00000. qui eſt denarij conſequaris.

TRACTATVS XXII.

De Interſectionibus Planorum.

LIneas vſque adhuc in plano exiſtentes conſiderauimus: modo eas in corporibus ipſis, tanquam eorum ſectiones animaduertimus vt in ſphæricis Theodoſij, Coniciſque Apollonij concipiendæ ſunt. Vnde in primis ſectiones planorum: quæ lineæ rectæ ſunt in hoc Tractatu oportet ſpeculari; de quibus agit Euclides ad initium 11. Sed eorum animaduerſio nobis hoc loco eſt neceſſaria.

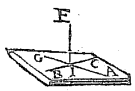
EXPENSIO I.

Principia exhibentur.

QVoſdam ante omnia declarare terminos oportet, vt ritè concipiantur. Vnde fit.

DEFINITIO I.

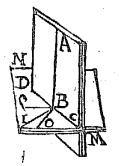
LInea recta plano orthogonalis eſt: cum omnibus lineis eam tangentibus, & in eodem dato plano exiſtentibus perpendicularis eſt.



Sic ſi linea IE cum omnibus AI, & IB, IG, & IC, & cæt. eam tangentibus in I perpendicularis eſt, etiam plano CABG, in quo illæ ductæ ſunt, perpendicularis erit.

DEFINITIO II.

PLanum ad planum rectum eſt; cum quælibet linea recta in vno plano exiſtens, & orthogonalis ſectioni, omnibus lineis eam contingentibus, quæ in altero duci poſſunt, perpendicularis eſt.

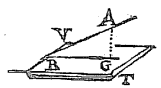


Sic, ſi linea AB perpendicularis ſectioni CD in plano CDA exiſtens ſit perpendicularis lineis OB, IB, & BQ. Planum CDA erit perpendiculare plano MN, in quo illæ ductæ ſunt.

DEFINITIO III.

REctæ lineæ ad planum inclinatio eſt angulus acutus, quem illa facit cum rectâ in plano illo exiſtente in perpendicularem illâ terminante, quæ ab aliquo ſuprimi puncto inclinantis lineæ cadat.

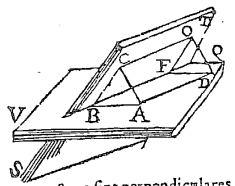
Sic angulus ABG eſt angulus inclinationis lineæ



BA ad planum VT, quòd BG angulum claudens nectatur in G, cum perpendiculari GA, quæ ab aliquo ſublimi puncto; nempe ab A lineæ inclinantis BA cadit.

DEFINITIO IV.

PLani ad planum inclinatio eſt angulus acutus rectis contentus, quæ in vtroque plano ad idem ſectionis punctum ductæ, rectos cum ſectione angulos efficiunt.



Si itaque AB, & AC ſint perpendiculares ſectioni EF, & conueniant in punctum E angulus earum ABC dicetur inclinationis angulus planorum VQ & ST.

DEFINITIO V.

PLanum ad planum, & linea ad lineam ſimiliter inclinata dicitur, cum prædicti inclinationum anguli ſunt æquales.

EXPENSIO II.

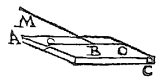
De linearum cum planis habitudine.

CVm ſectiones planorum ſint rectæ quædam lineæ, operæ pretium videre priùs eſt, quomodo rectæ cum planis ſe gerant, ad hoc, vt deinde meliùs planorum ſectiones cognoſcamus.

THEOR. I. PROPOS. I.

Rectæ eiusdem lineæ pars non est in sublimi; altera super planum extensa.

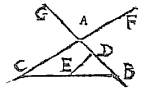
SI plano AC aliquis cogitet ducere lineam, quæ partem extensam habeat in eo, quæ BO; & altera BM eleuetur ab ipso, is fallitur. Nam producta in ipso plano parte BO, versus Q, duæ rectæ MB, & QB idem haberent segmentum BO, quod absurdum est, & contra pronunciatum 10. lib. 1. elem.



THEOR. II. PROPOS. II.

Si duæ lineæ se mutuò secent, in vno plano sunt, & omne triangulum rectis constitutum in vno plano est.

SIt triangulum ABC quoddam lineis rectis conflatum, & concipiatur, tanquam si nullo plano inhæreret, Dico; *quod si plano superponatur ipsi superextendetur ita*, vt secundùm se totum illi insit, & tangat. Nam si non secundùm se totum tangeret, pars quædam V. g. BDE eleuaretur à plano; Ergo, & lineæ AB rectæ pars AD esset in sublecto plano, pars altera DB ab eo eleuaretur, contra præcedentem propos. & sic dicas de linea BC, quæ parte CE tangeret planum, parte BE in sublime fereretur.



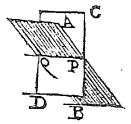
Probatur altera pars, quæ priùs proposita est. Nam in quo plano est triangulum sunt eius latera AB, & AC; in quo verò sunt latera sunt ea quoq; latera ipsa etiam si producantur in F, & G; alioquin lineæ rectæ pars CA esset in plano, pars AF esset in sublimi, quod impossibile est: Quare totæ in plano extendentur, quod vult propositio.

THEOR. III. PROPOS. III.

Omnis planorum mutua intersectio linea recta est.

SEcent se mutuò duo plana AB, & CD in PQ. Dico *hanc sectionem* PQ *esse lineam rectam*.

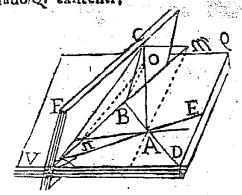
Quòd si recta non credatur erit curua: quia verò sectio à superficie amborum planorum secantium suboritur, hæc curuitas orietur à plano AB, vel à plano CD, & sic alterũ eorum curuum erit, vel ab vtroque, & sic ambo curua erunt. Nam curua erit ea superficies, in quo vndiq; recta extendi nequit. In situ verò sectionis duo puncta necti possunt recta PQ, quæ non tangeret superficies illas, cum in loco sectionis curuentur cum ipsa sectione in eis existente, vt aduersarij volunt.



THEOR. IV. PROP. IV.

* *Si recta perpendicularis alteri lateri anguli inclinationis alicuius plani sustinatur ea erit perpendicularis illi lineæ, & alteri, cuicumque in eodem plano existenti.*

SIt angulus inclinationis CBA, & illi substernatur AC perpendicularis lateri AB; Dico, & hanc esse perpendicularem lineæ cuicumque in eodem plano QV existenti.



Assumatur in sectione BX æqualis CA, & ducatur AX ad sectionem, & CX.

Probatur itaq; primò AC etiam esse perpendicularem lineæ AX. Nam angulus CBX, vtpote sectionis rectus est definit. 4. sicut, & BAC angulus ex hypothesi; latus verò AC est æquale ex constructione cruri BX, at crus AB est communeì ergo duo triangula ABC, & ABX erunt æqualia. Vnde, & bases AX, & BC erunt æquales ex 22. primi Elem. Et ideo duo alia triangula ACX, & BCX erunt quoque æqualia; Habent enim ex præced. argumento crura AX, & CB æqualia; crura verò AC, & BX ex Hypothesi sunt æqualia; basis vero CX communis; vnde ex 23. primi Element. anguli CAX, & XBC erunt æquales; sed angulus XBC rectus est, vtpote sectionis BX cum linea inclinationis BC ex definit. Ergo angulus quoque XAC rectus erit.

Probatur autem etiam de lineis quibuscumque. Nam certum est primò esse quoque perpendiculares lineis AD, & AE productis; cum enim XAC angulus sit rectus, ex 10. primi, etiam BAC rectus erit; & eadem ratione cum BAC sit rectus etiã CAD rectus erit: Idẽ quoq; argumẽtũ poterit fieri de trigulo AMC; si fiat, vt superiùs BM æquale crus perpendiculari AC, & deinde eodem modo probando MAC triangulum esse æquale triangulo BMC, & ideo, quòd angulus MAC sit rectus, vt est MBC.

At si manentibus ijsdem omnibus angulus inclinationis plani intelligatur deprimi, vel ipsum planum, & secare eandem perpendicularem in O; si lineæ AO fiat æqualis BN, & ducatur AN, Idem argumentum valebit. Nam adhuc rectangula triangula ABN, & ABO erunt æqualia ob idem latus AB, & duo æqualia crura AÕ, & BN: Propterea triangula quoque QBN, & AON erunt æqualia. Namq; ob basim communem ON, crus AN cruri EO ostensum æquale, & crus AO, & BN ex hypothesi æquale, æqualia quoque erunt triangula OBN, & AON. Vnde cum NBO sit rectus angulus, etiam NAO erit angulus rectus, & sit poterit ostendi de qualibet aliâ lineâ.

CO-

COROLLARIVM.

HInc elici potest: Quod, si linea allqua recta sit perpendicularis duabus rectis angulum facientibus in aliquo plano, vt AC lineis BA, & AX hęc eidẽ plano sit perpendicularis; siquidẽ ostensum est, talẽ esse omnibus alijs lineis in eo plano existentibus, & eam in A contingentbus. Vnde ex defin. 1. plano quoque VQ erit perpendicularis.

COROLLARIVM II.

DEducitur quoq; eadem ratione lineã CA lateri BA anguli inclinationis perpendicularem, etiam esse perpendicularem plano, in quo latus, triangulumque ABC, perpendiculariter inexistit, & extendatur. Planumque trianguli CAB inclinationis esse quoque plano FB, & QV vtrique perpendiculare.

COROLLARIVM III.

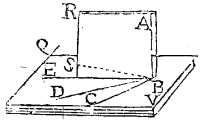
LIneam in plano inclinato, plano, cui inclinat, parallelam, esse quoque parallelam sectioni corundẽ planorũ colligo si V. g. linea CF sit plano QV parallela; esse quoque parallelam ipsi sectioni mx. Ratio est, quia illa CF erit rectangula perpendiculari CA, & plano trianguli CAB: Ergo etiam lineæ CB, & ideo æquidistans lineæ BX; quę eidem CB est perpendicularis.

THEOR. X. PROPOS. V.

Si linea recta tribus rectis se mutuò tangentibus perpendicularis sit, illæ tres rectæ in eodem plano erunt.

SIt linea AB perpendicularis tribus BC, & BD, & BE. Dico *eas esse in eodem plano* VQ.

Probatur. Nam, si aliqua ex ipsis non esset V. g. BE; sed eleuaretur à plano, vt est punctata BS: ducatur per AB, & punctatã BS planum BR. (quod potest esse ex prop. 2. cum productæ se secent in B) quod secabit planum VQ infra punctatam, quæ ab aduersarijs asseritur ab illo plano VQ eleuata; & sectio erit BE; cui BA erit perpendicularis; cum duabus BC, & BD perpendicularis ponatur, & ideo ex Coroll. 1. anteced. propos. etiam plano per eas ducto VQ, & consequenter ex defin. 1. etiam lineæ BE. Quare esset angulus quoque ABE rectus, vt est angulus ABS ex hypothesi, & ideo pars anguli ABS esset æqualis toti ABE; quod est absurdum.



THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si duæ lineæ ab eodem puncto sectionis incipiant, in perpendicularemque plano terminent; si vna erit orthogonalis sectioni, & altera talis erit.

SIt AB in eadem figura propos. 4. perpendicularis sectioni BX in plano QV, & à puncto B sectionis BX in ipsam terminent duæ rectæ; nimirum AB in A, & BC in C. Dico, *quòd, si vna V. g.* AB *erit perpendicularis sectioni* BX, etiam altera CB *eidem sectioni* BX *orthogonalis sit*.

Assumatur itaque in sectione portio BX æqualis perpendiculari AC, & ducatur à puncto C recta CX, & à puncto A recta AX, quo facto, sic.

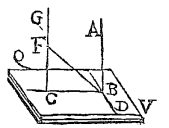
Probatur. Et progressu 1. Triangulum ABC est æquale triangulo ABX: Nam angulus ad A rectus est ob perpendicularem, & angulus ad B ex Hypothesi, crus AB commune; crus verò AC ex constructione æquale cruri BX. Vnde ex 22. primi Element erunt æqualia hæc triangula ABC, & ABX, & basis quoque AX erit æqualis basi CB.

Progress. 2. Hinc autem rursus arguitur triangula CBX, & CAX esse æqualia: Nam basis AX est communis, BC crus in primo progressu cruri AX ostensum est æquale, crus verò AC ex constructione cruri BX. Vnde cum omnia latera; quodlibet suo correspondenti, sint æqualia; triangula ipsa CAX, & CBX erunt æqualia: quare habebunt quoque angulos æquales; sed angulus CAX ob perpendicularem rectus est: ergo, & angulus CBX; quare recta quoque CB incidit in sectionem XB orthogonaliter.

THEOR. VII. PROP. VII.

Si duæ rectæ lineæ eidem plano perpendiculares sint, Parallelæ erunt illæ rectæ lineæ.

SInt duæ rectæ lineæ AB, & CG eidem plano QV perpendiculares. Dico *eas esse quoque parallelas*. Puncta B, & C connectantur, cui fiat perpendicularis alicuius plani sectio DB; hæc etiam erit perpendicularis lineæ ductæ BF à puncto B ad perpendicularem DC ex præc. hinc autem



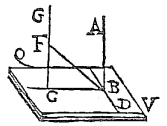
Probatur propos. Linea DB est perpendicularis tribus AB, & BF, & BC; ergo tres istæ ex propos. 5. sunt in eodẽ plano; sed etiam ex pr. 2. in eodem est GC, in quo reperitur BC, & BF: Ergo omnes quatuor sunt in eodem plano: Sed anguli ABC. & BCG ex def. perpendicularium sunt recti. Ergo ex 28. primi duæ AB, & CG sunt parallelæ, cum faciant ipsi BC angulos rectos, & in eodemq; plano existere sit ostensum.

THEOR.

THEOR. VIII. PROP. VIII.

Si duæ parallelæ rectæ lineæ insistunt eidem plano, quarum vna sit perpendicularis, altera quoque talis erit.

SInt rectæ BA, & GC parallelæ ex def. parallelarum erunt in eodem plano extensæ si sit vna normalis V. g. GC. Dico itaque, quòd etiam BA talis erit. Connectatur B, C linea BC, cui fiat perpendicularis D B; ducaturque BF, & EF ex præc. BE erit etiam rectangula lineæ DB.

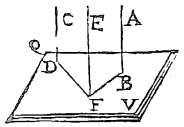


Vnde Probatur linea DB est ad angulos rectos lineis BC, & FB, quæ ex 2. huius sunt in eodem plano; ac linea CG; at hæc est in eodem plano ob parallelismum præsuppositum, ac linea AB: Ergo linea AB est in eodem plano, ac duæ BF, & BC; sed linea DB est perpendicularis duabus FB, & BC angulum in B facientibus. Ergo, & plano, in quo sunt ex Coroll. 1. prop. 4. huius: Ergo ex defin. etiam lineæ BA, cui etiam ad angulos rectos est BC, siquidem GCB est angulus rectus, quòd GC sit perpendicularis, quare ex 32. primi etiam ABC erit angulus rectus: Cum ergo linea BA insistat duabus DB, & BC ad angulos rectos erit quoque ad angulos rectos toti plano QV ex propos. 4. huius, Coroll. 1.

THEOR. IX. PROPOS. IX.

Quæ eidem rectæ lineæ sunt parallelæ, licet non in eodem cum illâ plano, etiam inter se sunt parallelæ.

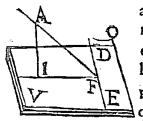
SInt duæ AB, & CD eidem lineæ FE parallelæ, dico illas quoque inuicem esse parallelas. Nam ducantur à puncto F duæ perpendiculares FD, & FB ipsi EF ad lineas CD, & BA hæ perpendiculares erunt in eodem plano VQ ex Coroll. 1. propos. 4. h. Quare ex propos. præced, eidem erunt perpendiculares BA, & CD, quod sint parallelæ perperdiculari FE: quare ex propos. 7. inuicem quoque erunt parallelæ.



PROBL. I. PROP. X.

A dato puncto in sublimi ad subiectum planum perpendicularem rectam lineam ducere.

DVcatur AF à puncto dato A in subiectum planum, vtcumque, & per F ducatur ED ipsi AF perpendicularis, & huic à puncto F ducatur perpendicularis FI ex 8. primi, cui ducatur perpendicularis AI ex 9. propos. 1. à puncto A. Dico *hanc esse perpendicularem plano* QV.



Probatur. Nam AFI est angulus inclinationis planorum, in quibus sint, hinc crus AF, inde FI, & DE erit linea sectionis. Quòd AF, & FI perpendiculares ipsi sint: quare ex Coroll. 2. propos. 4. erit quoque perpendicularis ipsi plano; cùm ducta sit perpendicularis lineæ FI.

PROBL. II. PROPOS. XI.

A dato puncto in plano ad idem planum rectam excitare perpendicularem.

FIat angulus inclinationis in præced. fig. plani AFI ducto priùs à puncto I crure FI: deinde ei ducta sectione perpendiculari ED, cui excitetur à puncto F perpendicularis FA, ex 8. primi, eruntq; FA, & FI in eodem plano: In hoc igitur plano ducatur ab I perpendicularis IA, & hanc dico esse quoque perpedicularem plano QV.

Probatur. Quia est perpedicularis FI cruri anguli inclinationis AFI: vnde ex Coroll. 2. prop. 4. erit etiam perpendicularis plano QV.

EXPENSIO II.

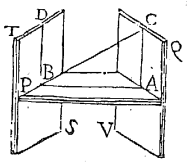
De Planorum interfectionibus.

VIsis correspondentijs linearum non in eodem plano existentium restat, vt modo ipsas planorum interfectiones intueamur.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Quæ plana eandem rectam perpendicularem habent, illa parallela erunt.

SIt linea AB perpendicularis vtrique plano QV, & TS. Dico *plana esse parallela*, idest in infinitum producta nûquam se secare.



Nam si dicatur inclinare inuicem, ad eam partem, in qua inclinant, ducatur in plano vtrolibet V. g. ST recta BD à puncto verò B ipsi BD ducatur normalis BF, & huic BP normalis BC, & tandem connectatur AC. Istæ AC, & BD lineæ etiam rectæ AB erunt normales ex 7. huius. Sed sunt in eodem plano. Ergo etiã erunt parallelæ.

Quod verò sint in eodem plano ostenditur, nam linea AC ex propos. 2. est in eodem plano, ac triangulum ACB: Tres verò AB, & BC, & BD sunt in eodem plano ex propos. 5. quòd sint lineæ BP perpendiculares: Vnde, & AC, & BD in eodem plano erunt, quare

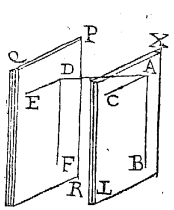
Probatur propos. AC, & BD sunt parallelæ in eodem plano, ergo nunquam conuenient, quare nec plana QV, & TS; in quibus sunt.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Si duæ rectæ se mutuò tangentes ad duas se mutuò tangentes sint parallelæ, & non in eodem plano; plana etiam in quibus sunt, erunt parallela.

SInt duæ AB, & PL parallelæ, quæ tangant duas AC, & PQ parallelas item inuicem: dico *plana, in quibus sunt* QR, & XL *esse parallela*. Quod, vt ostendatur; ducatur AD, plano XL perpendicularis, quæ inpingat in planum RQ; vel enim cadet in P, vel extra, vt in D. A puncto D ducatur parallela DF ipsi RP. & ab eodem puncto D alia parallela DE lineæ PQ, quo facto sic.

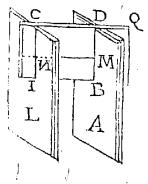
Stat demonstratio, quoniam DF lineæ PR. ex constructione, & eidem ex hypothesi est parallela BA, erunt duæ AB, & DF inuicem parallelæ; sic quia DE ex constructione est parallela lineæ PQ, cui ex hyp. AC parallela est ex 9. h. inuicem quoq; AC, & DE parallelæ erunt: Quoniam itaq; BAD, & CAD rectus est, erit etiam rectus ex prop. 29. primi angulus ADF, & ADE: Quare AD plano PQ ex Coroll. propos. 4. huius erit perpendicularis: Vnde ex anteced. plana erunt inuicem parallela.



THEOR. III. PROPOS. XIV.

Si duo plana parallela plano quopiam secentur, communes illorum sectiones sunt parallelæ.

SInt duo plana parallela A, & L, quæ plano QI secentur. Dico *sectiones* BD, & CI *esse parallelas*.

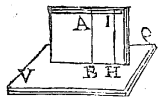


Ducatur enim sectioni BD perpendicularis MN in plano QI, incidet in sectionem plani QI; quæ est CI, si opus sit, producti, vel ergo MNC erit angulus rectus, & sic DB, & CI erunt parallelæ, vel minor recto, & sic planum LC ad partes C alteri plano BA vicinius erit; ergo non parallelum contra hypothesim, vel maior recto, & sic MNI erit acutus angulus. Vnde contra rursùs hypothesim ad partes L planum LD alteri AB magis appropinquabit: Quare necessariò MNC rectus angulus erit. Vnde cum alterni anguli BMN, & MNC sint æquales ex 28. primi erunt parallelæ BD, & CI.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

Si recta linea plano cuipiam ad rectos sit angulos, & omnia que per ipsam plana ad rectos angulos erunt eidem plano.

SIt recta AB plano cuipiam QV orthogonalis. Dico, *quòd omnia plana, quæ per ipsam ducuntur eidem plano ad rectos angulos sint.* Ducatur itaq; per ipsam planum HIBA, & in ipso parallela HI, vel alia quælibet parallela.



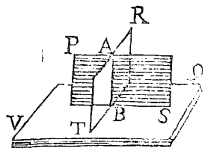
Probatur. Quia HI est in eodem plano, & parallela AB erit quoque plano QV perpendicularis ex 8. huius, & sic de quacunque alia: quare planum AIBH plano QV erit orthogonale. Quod si ducas per AB, aliud quodcumque planum eadem demonstratio erit.

THEOR. V. PROPOS. XVI.

Si duo plana se mutuò secantia plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos angulos erit eidem plano.

SInt in plano QV duo plana SP, & BT ad angulos rectos; quę se secent in AB'. Dico *sectionem* AB *plano* QV *perpendicularem esse*.

Probatur. Nam SB, & BT sectionibus perpendicularis est BA. Ergo ex Coroll. propos. 4. perpendicularis est ad planum QV. Quòd sit perpẽdicularis duabus SB, & BT: sic ostenditur. Nam planum RT rectum est ad planum QV. Ergo omnis eius vbique superficies talis erit. Ergo talis erit in sectione BA, quare eius sectio BA, nec inclinabit versus S; neque ad alteram partem, sed rectangula super SB consistet.

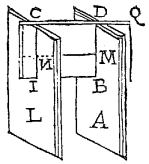


Quod autem talis sit respectu BT etiam ostenditur eodem modo, quia planum SP rectum est: ergo eius sectio non inclinabit versus T, sed recta super BT consistet.

THEOR. VI. PROP. XVII.

Duo plana ad idem planum recta, in quo faciant communes sectiones parallelas parallela sunt.

SInt plana in schemate propos. 14. AD, & LC rectæ ad planum QI, & sectiones DB, & CI parallelæ. Dico *plana quoque esse parallela*.



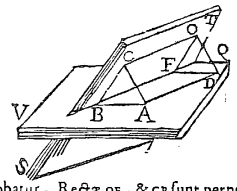
In plano enim QI ducatur MN perpendicularis ad DB, quæ quoque erit recta ad planum AB, ex def. 2. huius, & eadem erit perpendicularis ad IG; & ideo ex eadem defin. ad planum alterum LD recta erit: Cum ergo NM ad vtrumque planum recta sit ex propos.12. plana ipsa parallela erunt.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Planum ad planum inclinans eundem angulum secundum omnem suam superficiem cum alterius superficie facit.

*SIt planum TS, quòd inclinet ad aliud planum QV. Dico, *quòd eius superficies cum alterius superficie vbique eundem angulum facit*.

Sit itaque angulus aliquis inclinationis ficubi ABC, & alter ad quamcumque elegeris partem DFO. ostendendum est hos angulos esse æquales: Sumatur igitur partes æquales de cruribus angulorũ BC, & OF, item AB, & FD, & ducantur DA, OC.

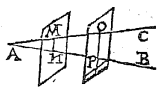


Probatur. Rectæ OF, & CB sunt perpendiculares sectioni ex def. 3. Ergo inuicem parallelæ erunt; sed sunt etiam æquales: Ergo ex 33. primi rectæ quoque OC, & FB parallelæ sunt, & æquales. Idem argumentum conficias de lineis DF, & AB; quia enim sunt perpendiculares sectioni ex defin.4. ideo sunt parallelę, & æquales sunt ex constructione; vnde fit, quòd DA, & FB parallelæ sint, & æquales. Et ideo ex propos.9. huius; quòd CC, & AD sint quoque inuicem parallelæ, & hinc ex prop.33. primi; quòd DO, & AC parallelæ quoque sint, & æquales; cum ergo triangula DOF, & ACB sint æquicrura erunt, & æqulangula: Vnde angulus ABC erit æqualis angulo DFO: & ita probabitur de quocumque alio angulo: vnde vbiq; superficies TS faciet eundem angulum cum superficie QV.

THEOR. VIII. PROPOS. XIX.

Si duæ rectæ lineæ parallelis planis secentur; in easdem rationes secabuntur.

SIt linea AB, & AC; quę vel conuenient in A, vel producantur donec conueniant, siquidem si non conuenient erunt parallelę, vnde in partes æquales secarentur.

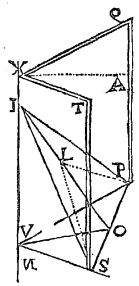


Istę ex prop. 2. erunt in eodem plano; quare si planis parallelis secentur sectiones MN, & OP erunt parallelę, ex prop.14. quare ex 2. sexti erunt, vt AM ad MO ita AN ad NP.

THEOR. IX. PROPOS. XX.

Omnis angulus super eandem basim est minor in plano obliquiùs secante, quàm in minus obliquo; anguli verò reliqui maiores.

*SInt duo plana QV, TV, quę faciant angulum quemcumque SVP in plano PVS sectionis VX. Dico, quòd, si aliud planũ PIS obliquiùs secet, plana inclinantia QV, & TV illud secando facient suis sectionibus PI, & SI angulum PIS acutiorem, & minorem; quàm PVS; quòd vt probetur, ducãtur OV, & OI perpendiculares basi PS; eritque maior ot basis subtensa angulo obtuso, vel recto, qualis est ex hypothesi OVI cum OVN sit acutus, vel rectus, quam crus OV; ideoque sumatur OL equalis OV, in perpendiculari OI coniungaturque PL, & LS; eritque triangulum PLS equale triangulo PSV, vt 17. lib. 1. Elem. Vnde probatur propos. ex 21. propos. lib. 1. elem. Quia ab extremis P, & S duę PL, & LS lineę interiùs constitutę sunt, nempe intra triangulum PIS; Ergo maiorem angulum PLS continebunt, licet ipsę longitudine minores sint quare erit maior angulus PVS equalis angulo PLS, quàm angulus PIS.



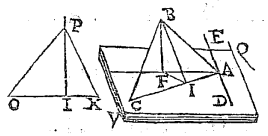
Probatur quoque 2. pars; quia cuiusque trianguli anguli sunt æquales duobus rectis; quare si angulus I sit acutus angulus P obtusus erit, vel maior in triangulo PIO, quam LPO, vel VPO.

PROBL. III. PROPOS. XXI.

* *Crus non perpendiculare plano trianguli eidem plano non perpendicularis, & in data sectione positi, ita constituere, vt in eodem plano alicui sectioni, vel lineæ existenti, perpendiculare sit.*

SIt crus AB trianguli ABC collocandum in plano QV tali modo; vt non existens, nec ipsum crus, nec planum, in quo est perpendiculare triangulo; cum sectione tamen, seu recta DE sit ad angulos rectos.

Trahatur AF in plano QV perpendicularis sectioni DE. Deinde basi XO deducatur perpendicularis à vertice P, & cadat in I; sumptâ ergo distantiâ XI, transferatur super planum in ATC linea. super quam triangulum debet collocari, & ex puncto I educatur linea eidem sectioni AC perpendicularis, quæ sit IF, & ab F vbi secat AF educatur



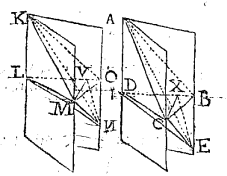
perpendicularis ad planum, quæ sit BF; sumpto tandem interuallo IP posito circini pede in I signetur portione circuli perpendicularis FB; & à puncto B ad L recta ducatur BI, & altera AB: deinde ad interuallum XO signetur AC, & ducatur BC. Dico *triangulum esse collocatum tali modo, vt crus AB sit perpendiculare sectioni* DE.

Probatur. Nam crus IB est æquale cruri PI; sic AI cruri XI; angulus verò AIB, vt ex propos.6. huius, est rectus, vt est angulus XIP. Ergo ex 22. primi, basis quoque AB æqualis basi XP; sed hæc est ex 9. huius propos. recta sectioni DE. Ergo fecimus propositum.

THEOR. XII. PROPOS. XXII.

Si duo triangula æqualia inter duo plana intercipiantur rectanglè, quò magis ad sectionem planorum alter accedit, eò angulum planorum facit altero maiorem. Et quo minùs obliquè incidit, cô eundem angulum facit maiorem.

*SInt duo triangula BCA, & OMK æqualia tum angulis tũ lateribus, & duobus planis singula includantur ad angulos æquales A, & K, quę tangant sectiones AD, & KL planorum intercipientium. Sintque latera BC, & OM, ad ipsa latera NO, & BB recta. Et triangulum OMK ad sectionem LK magis accedat sua basi OM, quam triangulum BCA dico angulum planorum OLM esse maiorem angulo planorum BDC.



Probatur. Quoniam triangulum OMK magis accedit ad sectionem, quàm triangulum BCA, ductis perpendicularibus ad sectionem LK, quæ sint OL, & ML; nec non, & ad sectionem AD ductis perpendicularibus BD, & DC, erunt triangula BCD, & OLM inclinationis planorum, latusque OL ex hypothesi maioris inclinationis erit minus, quam BD, & ML minus, quàm CD super æqualem OM, & BC, basim, seu eãdem, si mente superponantur super eandem basim; quare ex prop. 21. l. 1. El. maior erit angulus OLM, quàm BDC.

Sit triangulum æquicrurum EAC magis obliquum, quam triangulum NMK, ducantur XC, & MV perpendiculares plano OK, & BA, quę omnibus lineis ex def. 1. h. in eo plano existentibus erunt perpendiculares, & consequenter CX, erit normalis lineis XD, & EX, & MV lineæ VL, & VN; Vnde anguli apud V, & X erũt recti, cùmq; bases EC, & NM sint æquales ex Thesi circuli illis basibus EC, & NM pro diametro inseruientibus erunt æquales, & quia sunt rectãgula transibunt per NVM, & per EXC puncta ex 28. l. 3. Et quia maior ponitur inclinatio plani ECA, quã NKM erit ãgulus XEC minor, quam VNM; quare arcus quoque, qui pertingeret ab X vsque ad C minor, quam arcus pertingens ab V vsque ad M ex 36 lib. 6. ideoque subtensa minor XC arcui minori erit minor, quàm VM. Crus verò CD ostensum est maius, quam ML, & consequenter eius quadratum erit maius; si ergo auferatur quadratum CX minus, quam MV quadratum: Ablatum hoc CX quadratum à maiori quadrato CD relinquet residuum maius, quam MV quadratum sublatum à quadrato ML minori: Quaderè XD quadratum; quod ex 11. lib. 2. Elem, est æquale illi residuo erit maius, quàm quadratum residuum VL: Vnde erit maius XD latus, quam VL. Cum itaque XD, & CD latera sint maiora, quam VL, & ML, dicent maiorem proportionem ad VM, quam VL, & ML: quare multò maiorem, quam ML & LV dicent ad XC basim minorem: Ideoque ex propos. 6. Tract. 19. minor erit angulus XDC angulo VML.

COROLLARIVM.

HInc facilè argumentaberis, quod si angulus VLM sit maior angulo XDC, & planũ NML æqualè inclinationẽ, vel obliquitatẽ consequatur, ac planum EDC, quod erit maior angulus quoque NLM, quam ECD. Ratio est, quia cum ponatur VMN æqualis angulo ECX, & anguli apud X, & V sint recti, erunt æquiangula triangula, & quia ponitur VM maius, quàm XC, vtpote sinus perpendicularis anguli maioris existentibus æqualibus ML, & CD tanquàm radijs circulorum, qui ducerentur centro L, & D. Ideo erit quoque NM basis maior, quam EC, cum ergo crura NL, & ED ponantur æqualia sicut, & ML, & CD patet ex 26. lib. 1. angulum MLN esse maiorem angulo EDC.

Aduerte autem, quod etiam si imagineris crus ML commune triangulis OLM, & NLM distinctum, & depressius nihil interest; valet .n. eadem prop. eo quòd semper posset fieri angulus OLM immediatus; si placeret, ita vt in latere ML communicaret.



TRACTATVS XXIII.

SPHAERICORVM PARS PRIMA.

De Sphæræ contactibus, & sectionibus in genere.

SPhæricorum Tractatus ferè absolutè est necessarius ad triangula sphærica sine errore soluenda: Vnde antequam ad eorum notitiam transferamus animum, quæ magis necessaria sunt breui sphæricorum compendio complecti opus fuit.

EXPENSIO I.

De principijs.

QVædam principia huic tractatui deseruientia primò proponenda sunt, & præcipuè definitiones eorum, quæ in superficie speræ puncta imprimi, & circuli describi possunt.

DEFINITIO I.

SPhæra est figura solida vna superficie comprehensa circulis æqualibus vbique circumscriptibilis, ad cuius extimam superficiem à puncto medio lineæ terminantes, æquales sunt.

DEFINITIO II.

CEntrum verò sphereæ est prædictum punctum.

DEFIITNIO III.

AXis sphæræ est recta quædam, quæ per centrum transit, & in superficiem sphæræ terminat.

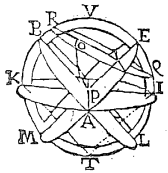
DEFINITIO IV.

POli sunt extrema puncta ipsius axis.

DEFINITIO V

POlus circuli est punctum in sphæræ superficie, à quo omnes lineæ ab eo descendentes, & in ipsum circulum terminantes, æquales sunt.

Itaque centrum sphęræ erit P Poli I,K terminantes axem silicet lineam KI, seu veram, seu mente conceptam per P centrum sphęræ transeuntem. Poli verò circuli IAK sunt T, & V, quia omnes lineę, vt IT, & IK terminantes in marginem circuli IAK erunt equales;



sphęra verò super axem KI volui Imaginatur, si quando in orbem volui concipitur.

DEFINITIO VI.

CIrculus maximus ad maximum inclinat cum arcus minor quadrante circuli vtrique perpendicularis eorum inclinationem mensurat.

Minorum verò inclinatio est angulus acutus inclinationis ipsorum planorum.

DEFINITIO VII.

SImiliter verò, & æquè inclinant circuli, cum arcus angulum inclinationis mensurantes fuerint æquales.

Itaque circulus maximus EAM inclinat ad circulum maximum IAK; quia acutus angulus inclinationis iuxta defin. 4. Tract. 22. IPE mensuratur circuli maximi IVKT perpendicularis vtrisque arcu IQE: huic verò inclinationi circulorum EAM, & IAK est similis inclinatio circulorum BAL, & IAK; quia arcus KB est equalis arcui IQE.

At in circulo minori QR angulus inclinationis mensuratur arcu OP in plano perpendiculari vtrique descripto VITK, centro communi trium eorum intersectione.

DEFINITIO VIII.

CIrculus circulum tangere dicitur, qui tantùm vnico puncto alterum contingit.

Quoniam si secat iam duobus punctis alterum attingit ex propos. 8. lib. 3. Elem. Sic QR circulus secat circulum VITK; quoniam duobus punctis Q & R illum attingit.

DEFINITIO IX.

CIrculi intelliguntur tangnàm planæ superficies quædam sphæram intersecantes, & in eius superficiem terminantes.

DEFINITIO X.

ÆQualiter verò distant à centro, cùm perpendiculares in illos à centro cadentes æquales fuerint, & ille magis, vel minus distare dicitur, cuius perpendicularis fuerit maior, vel minor.

EXPENSIO II.

De situ Sphæræ.

ANtequam ad contemplationem ipsius sphęræ accedamus quædam de eius situ, seu collocatione sunt considerandа, quæ ad ipsam sphęræ considerationem viam sternunt.

THEOR. I. PROPOS. I.

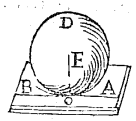
Sphæra planum, vel lineam, in eo, à quâ non secatur, non tangit in pluribus punctis, quam vno.

*PRobatur. Nam sphęra componitur ex circulo circùm acto, aut certè circulus potest duci, quàquà versum per punctum contactus in ipsius sphęræ superficie ex def. 1. Sed circulus non tangit lineam in pluribus punctis, quàm vno, ergo neque circuli in sphęra descripti tangent vllam lineam in plano descriptam, & per contactum transeuntem in pluribus punctis. Ergo neque sphęra ipsum planum, non nisi in vnico puncto continget; alioquin linea in plano duci posset, quæ duos contactus coniungeret, & circulus in sphęra, & sic circulus contingeret lineam in duobus punctis.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si Sphæra planum, vel in eo lineam tangit, recta linea à centro sphæræ ducta ad contactum, ipsi plano, vel lineæ in eo perpendicularis erit.

*PRobatur. Quoniam, si intelliguntur per contactum, circuli tales ducti, qui per centrum sphęræ transeant, vt OD, isti cum centro E sphęræ commune centrum consequentur; cùm tùm sphęræ, tùm circuli centrum ab ambitu ipsorum æquidistet ex def. 15. lib. 1. Elem. & def. 2. huius: Sed omnis linea à centro circuli ducta ad cõtactũ alicuius lineæ, ipsi pr 20. 13. lineæ perpendicularis est; Ergo omnis circuli per contactum ducibilis, lineę rectę, vt BA in plano existenti, & per eius contactum transeunti EO perpendicularis erit: Quapropter etiã ipsa linea EO ipsi plano BA perpendicularis erit ex def. 1. Tract. pteced. cùm omnibus lineis rectis in ipso ducibilibus rectà incidat.



COROLLARIVM.

HInc si sphęra tangit planum, & à contactu erigatur perpendicularis, hęc in centrum sphęrę producta incidet: Quòd id eueniat ex 21. lib. 3. Elem. lineę EO perpendiculariter à puncto contactus circuli super lineam tangentem AB erectę.

COROLLARIVM.

HInc excipies veram esse quoque propositionem conuersam, nempe lineam rectam EO à centro circuli E in contactum O ductam esse plano normalem.

EXPENSIO III.

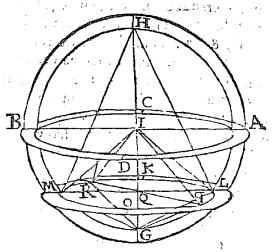
De Polis, Axe, Diametris, Centroque Sphæræ.

ACcedimus ad ea, quæ maiorem cum ipsa sphęra cognationem habent, & ei intrinseca sunt; cum sphęra sine eorum conceptu assertiuè nequeat cognosci.

THEOR. I. PROPOS. III.

Omnis sectio sphæræ circulus est.

*PRobatur. Nam aut secans planum per centrum transit, vel non: Si per centrum trãsit ducantur AI, & IB, nec non, & IH, & IG ad extimas partes in superficie sphęrę, quas planum secat, quę omnes erunt equales; siqu dem pertingunt à centro sphęrę ad eius superficiem, verum, & pertingunt ad extimum ambitum plani secantis (siquidem extra sphęram planũ eã non secat) ergo ex defin. circuli planum sphęram per centrum secans circulus est.

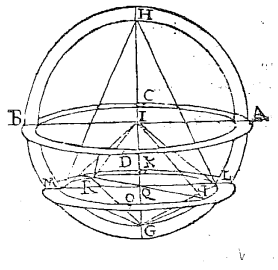


At si non transeat per centrum, vt LKMO ducatur saltem intellectu ad planum secans perpendicularis IQ, & ad exttemos margines IR, & IM, & IP & IL, & omnes erunt equales, vtpote pertingentes à centro ad sphęrę superficiem, & triangulorum QIR, QIM, QIP, & QIL, & cęt. erit commune crus IQ, angulusque Q vbique rectus. Quare poterunt collocari in equalibus semicirculis, quorum diametri equales IR, & LM ex prop. 28 lib. 3. quibus eadem subtensa erit IQ; quare equales arcus in semicirculis equalibus auferet ex prop. 23. lib 3. elem. quare, & residui arcus essent equales, qui subtenderentur à QR, & QM, QP, & QL, Propterea que etiam ex prop. 33. lib 3. ipsę subtensę RQ & QM, sic QP, & QL erunt equales; & cùm de omnibus idem argumentum valeat, itaque omnes ad amoitum plani secantis ductę erunt equales, quamobrem KMOL circulus erit ex def. 21. el.

THEOR. II. PROPOS. IV.

Si in sphæra sit circulus, & centrum circuli cum centro sphæræ recta connectatur, hæc erit plano circulari perpendicularis.

SIt circulus LKMO, cuius centrum Q nectat linea QI cum centro sphæræ I. Dico *hanc esse ei perpendicularem.*



Probatur. Nam ex def. 1. tract. preced. tunc erit perpendicularis aliqua alicui plano, cùm omnibus lineis, quæ in ipsa trahi possunt, erit perpendicularis. Sit igitur linea PQR, connectanturque eius extrema PR centro sphæræ I. Demonstrabitur itaque IQ lineæ RQP esse perpendicularem. Certum est IP, & IR esse æquales. Nam à centro sphæræ in circumferentiam desinunt; sic quoque QP, & QR. Nam à centro circuli in peripheriam ipsius terminantur. Linea verò IQ est latus idem ambobus triangulis. Ergo triangula IQP, & IQR erunt æqualia. Ergo, & anguli æqualibus basibus subtensi, erunt æquales; quarè angulus PQI angulo RQI æqualis erit; & ideo vterque rectus ex 23. primi Elem. Idem argumentum valet de linea LM, & de omni alia. Ergo omnibus lineis ducibilibus in plano LKOM erit perpendicularis, quare, & ipsi plano.

COROLLARIVM.

HInc educes veram esse quoque propositionem conuersam; nempe lineam rectam perpendiculatem à centro circuli eductam in sphæræ centrum cadere: Nam, cùm anguli ad Q sint recti, & QI communis, & QR, & QM, & cæt. vt pote radij æquales, erunt ex propos. 22. lib. 1. Elem. æquales bases IM, & IR, & cæt. Vnde I erit sphæræ centrũ, cùm omnes, quæ ab eo puncto in sphæræ superficiem cadunt, sint æquales.

PROBL. I. PROPOS. V.

Datæ Sphæræ centrum inuenire.

SEcetur sphæra plano quodam, quod circuli erit superficies ex 3. propos. huius, vt LKMO, & ab eius centro perpendicularis erigatur QI, quæ ex præced. Coroll. cadet in centrum: prolungetur vsque ad peripheriam sphæræ, & sit GH; diuidaturque bifariam in I, & punctum I centrum erit sphæræ.

* Probatur: Nam iam ostensum est Coroll. preced. propos. QI in centrum sphæræ impingere; cùm ergo pertingat ad peripheriam sphæræ in G, & H, patet, quòd bifariam diuisa dabit centrum sphęrę, cùm centrum sphęrę ab eius superficie æqualiter distare debeat.

THEOR. III. PROPOS. VI.

Si in Sphæra sit circulus, & à centro sphæræ in circulum ducatur perpendicularis; hæc producta in polos circuli cadet.

SIt perpendicularis IQ producatur vsque ad circumferentiam sphæræ G. Dico G *esse polum circuli*. Connectatur GP, & GR.

Prob. In triãgulis GPQ & GQR ãgulus ad Q tũ huius, tũ alius triãguli rectus est, licet id figura nõ exprimat, & ideo ambo æquales; latus verò QG commune. At latera QP, & QR æqualia, vtpote radij: Ergo ex 4. primi, bases erunt æquales; nempe GR, & GP. Ergo ex def. 5. huius G est polus circuli; idem dicas de puncto H, in quo definit perpendicularis GIH, si intelligas connecti cum M, L extremis lineę ML, vel cum quibuslibet alijs.

THEOR. IV. PROPOS. VII.

Si à polo circuli ducatur perpendicularis ad planum circuli; hæc cadet in centrum eius, & producta cadet in alterum polum.

SIt linea GQ, quæ à puncto G cadat in Q perpendiculariter. Assero *punctum* Q *esse circuli centrum*.

Transeant per Q quęlibet lineę, vt RP, & aliæ plurimæ; sed hęc pro reliquis sufficiat; connectanturque GR, & GP, cum G sit polus circuli ex definitione GR, & GP erunt æquales, & consequenter perpendicularis ex G super linea QP cadens ex 9. Elementorum diuidet RGP angulum bifariam. Quare, & basim, vnde æqualis erit lineã RQP lineę QR. Propterea que Q erit circuli centrum: cùm, & eodem modo possit probari de omnibus alijs lineis.

Probatur 2. pars, quòd transeat quoque per alium polum. Quoniam per centrum circuli trãsit, estque perpendicularis plano circuli transibit quoque per centrum sphęrę; quare ex propos. 6. huius & per alium polum transibit.

THEOR. V. PROPOS. VIII.

Si in Sphæra ducatur recta per polos alicuius circuli; hæc per circuli, & sphæræ centrum transibit.

PRobatur rectę HL, & HM sunt æquales, sicut, & GL, & GM; quia ducuntur à polis ad circũferentiam circuli ex def. 5. huius; latus verò HG

HG est commune; ergo triangula HMG, & HLG æqualia; quamobrem erunt quoque æquiangula, vnde bases QM, QL ex prop. 23. l. 1. in triangulis HQM, & HQL erunt æquales, & ideo Radij circuli erunt.

Anguli etiam ad Q æquales, & ideo recti. Quare HG erit perpendicularis quapropter ex Coroll. prop. 4. huius, sphęrę per centrum, linea HG coniungens polos transibit.

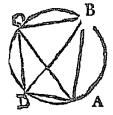
COROLLARIVM.

EX omnibus istis propos. euidens fit: polos duos circuli, centrum eius, & sphęrę esse in eâdem rectâque lineâ ad planum circuli perpendiculari; quæ est sphęrę diameter, cum transeat per eius centrum. Vnde si perpendicularis transeat per vnum ex dictis punctis transibit etiam per reliqua omnia; sicut, & quę transit per duo quęque erit perpendicularis, & per alia transibit.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Dati circuli in sphæra diametrum inuenire.

IN circulo super superficiem sphęrę descripto tria puncta assignentur, & acceptâ circino eorum distantia vnius cuiusque à duobus alijs, notetur AB puncti A à B, & AC puncti A à C, & BC puncti B à C; ductisque lineis AB, AC, BC; lineis BC, & AB, vtpote minoribus, duę perpendiculares CD, AD; à punctis A, & C, in quibus AC basis, & maior distantia terminat, exeant, & à pũcto D, in quod concurrunt ad B ducatur linea, quam affirmo esse circuli diametrum in sphęra descripti.



Probatur. Quia angulus apud C, & A rectus est, erunt reliqui tum huius BCD, tum alterius BAD duobus rectis æquales. Vnde, & compositi simul omnes duobus rectis sunt æquales: Ergo ex prop. 25 tertij quatuor pũcta ABCD erunt in circumferentia circuli. Ducatur itaque circulus, quia angulus est rectus ad C, & alter ad A. Ergo ex 28. tertij erit in semicirculo; quare BCD erit semicirculus. Ergo BD diameter. Erit autem diameter circuli, illi, qui in sphęrâ est, æqualis, quòd triangulum ABC illi triangulo, qui in circulo sphęrico fieret sit equalis ob æquales AB, & BC, & AC distantias, æqualia verò triangula in æqualibus peripherijs æqualium circulorum necesse est esse, cum ob æquales angulos, similes, nempe æqualium numero graduum, arcus sint æquales ex prop. 26. tertij.

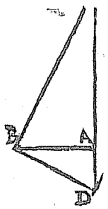
COROLLARIVM.

HInc centrum circuli nullo negotio inuenimus; diuisus enim diameter bifariam ipsum dabit ex prop. 1. tertij.

PROBL. II. PROP. X.

Diametro sphæræ æqualem lineam inuenire.

CIrculus quicumq; in sphęra describatur polo G ad placitum electo in fig. pr. 4. & ex prop. 9. eius radius reperiatur QM, qui sit AB, & erigatur perpendicularis AD, assumpta verò distantia poli G à circuli peripheria GM centro B interuallo GM describator portio circuli, quę secet AD in D, & ducatur BD; deinde ipsi BD erigatur à puncto B perpendicularis BC; producaturque DA in C, & erit DC diametro sphęrę æqualis.



Probatur triangulum CBD est æquale triangulo GMH; Ergo basis DC erit æqualis diametro HG: Quod verò CBD sit æquale triãgulo GHM patet. Nam AB est æqualis ipsi QM, & BD ipsi GM angulus verò apud A rectus, vt ãgulus ad Q: Ergo vt pr. seq. p. 2. arguam triangulum ex 11. pr. l. 1. el. ABD triangulo GQM esse æquale; Angulus verò totus CBD rectus est; Ergo æqualis recto M toti: Vnde, & pars ABC recti situ reliduo QMH erit æqualis cum QMG, & alia pars anguli B ostensę sint æquales ex æqualitate totius trianguli BAD, triangulo GQM. Anguli verò apud A, & Q recti sunt, & basis QM basi AB æqualis ex effectione: Vnde triangulum quoq; ABC ex prop 27. primi triangulo QHM erit æquale; ideoque totum triangulum DCB toti GHM erit æquale, cũ partes vnius partibus alterius ostensę sint æquales. Vnde, & basis CD basi, & diametro sphęrę GH æqualis erit.

EXPENSIO III.

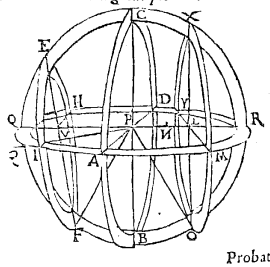
De circulis maximis, & minoribus.

CVm præcipuus scopus huius tractatus sit de circulorum intersectionibus agere; vtpote, quia earũ cognitio ad Trigonometriam sit omninò necessaria; priùs de ipsis circulis agendum est, & eorum natura scrutanda, vt inde ipsorum sectiones inuicem agnoscamus.

THEOR. I. PROP. XI.

Circulorum, qui in sphæra sunt illi maximi sunt, qui per sphæræ centrum ducuntur; Æquales, qui æqualiter distant à centro, Minores, qui longiùs remouentur.

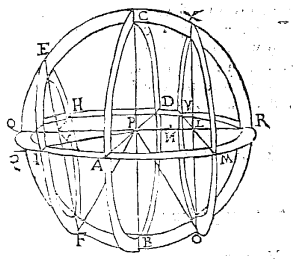
PRobatur prima pars: Nam sit circulus ABCD per centrum ductus, & EFIH non per centrum ductus. Dico *ductum per centrum esse maiorem, consunctis enim eorum centris* FV, *ducatur semidiameter* VF *coniungaturque* PF.



Probatur

Probatur. Quoniam triangulum PFV est rectangulum, maior erit basis PF, quolibet latere, vt VF, qui semidiameter est, vtpote opposita lateri maiori ex propos 18. primi: Sed basis est æqualis lineæ PB, vtpote semidiametri: Ergo semidiameter BP est maior semidiametro VF. Ergo, & circulus maior; & sic potest fieri demonstratio de quolibet alio.

Si verò distent à centro sphęræ æquliter dico circulos fore æquales, quæ est secunda pars. Nam cum PVF, & LOP sint rectagula ex 11. secundi habebunt quadrata basis æqualia duobus quadratis laterum: Sed bases sunt æquales, vtpote radij. Ergo, & ipsarum quadrata. Quare, & quadrata laterum nimirum laterũ OL, & LP simul quadratis laterum PV, & VF simul: sed perpendiculares LP, & PV præsupponuntur æquales: Ergo, & eorum quadrata: vnde, & residua quadrata OL, & VF remanebunt æqualia: Verum quadrata æqualia habent latera æqualia. Ergo latera, & simul radij OL, & VF erunt æquales. Ergo, & circuli quorum sunt radij erunt æquales.



Prob. tertia pars, quòd ille circulus sit minor, qui magis remouetur à centro sphęræ. Nam cùm semper, vt semidiametri sphęræ; bases sint æquales quadrata basium ipsarum, & ideo laterum simul sumptorum, vt priùs erunt æqualia: sed modo ponitur malus V. g. PV, quam PL. Ergo, & quadratum PV erit maius, quam lateris PL, & consequenter quadratum VF minus, quam OL lateris: Quare, & latus ipsum, radiusque VF, erit minus, quam latus OL, simulque radius: Ergo, vt circuli eius radij VF minoris, minor erit.

COROLLARIVM

HInc potes deducere propositionem esse intelligendam inuerso modo, nempe maximos circulos etiam per sphęræ centrum transire; æquales æqualiter distare à centro, & minores magis ab eo remoueri: Nam si istę propositiones inuersæ non essent veræ, nec illę directæ veræ forent; vt patet consideranti.

THEOR. II. PROPOS. XII.

In circulo mæximi circuli mutuò se secant bifariam.

SInt duo circuli maximi in sphęra CBAD, & RAQD. Dico *eos se secare in duas partes æquales*.

Probatur. Nam transeunt ambo, cùm sint maximi ex ante ced. per sphęrę centrum, quare sphęræ centrum erit centrum vtriusque circuli: non autem esset centrum vtriusque, nisi sit in communi eorum concursu, seu sectione DA: quare DA transibit per centrum vtriusque circuli. Ergo erit diameter: ergo ea sectio circulos maximos ambos, vt diametri proprium est ex def. 17. l. 1. el, tract. 4. bifariam secabit.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Circuli se mutuò ex æquo partientes sunt maximi.

PRobatur. Nam ex præced. eorum sectio AD transibit, cum sit diameter, per vtriusque centra. Ergo centra erunt in vtroque eadem: quare, & eadem, quod centrum sphęræ in P: alioquin, si essent extra P in N; linea, quæ per ambo transiret puncta N, & P, & pertingeret vsque ad circumfe-sentiam, tum sphęræ, tum circuli; quæ est eadem, aut esset æqualiter diuisa in N. Ergo non esset in P, & sic superficies sphęræ non æquidistaret à suo centro, aut esset æqualiter diuisa in P: Ergo non in N centro circuli, vt fingitur, & sic BN, & NQ, qui finguntur semidiametri non essent verè tales, cum non essent æquales: ideoque maximi ex 11. h. cum eorum centrum sit idem, ac sphęrę.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si in sphæra maximus circulus circulum quemlibet secet ad angulos rectos; etiam bifariam illum secat, & per polos.

SIt circulus maximus in sphęra RDAQ, qui secet quemcumque OX orthogonaliter, dico, *quod per polos eum secat, & bifariam*.

Ducatur in eo plano orthogonali RADQ à cẽtro P sphęræ perpendicularis LP plano OXMY; hęc transibit ex Coroll. propos. 4. per centrum L circuli OX, siue maximi, siue non maximi, & per polos RQ. Ergo etiam planum, in quo perpendicularis est; nempe superficies circuli maximi RDQA per polos, & per centrum transibit, quare plinorum maximi, & alterius circulo concursus, & sectio YM fiet in centro L, linea itaque sectionis YM per alterius cuiuscumque centrum transibit. Ergo erit diameter eius; ergo diuidet ipsum quemcumque bifariam ex def. 17. lib. 1. el.

COROLLARIVM.

HInc est, quod etiam inuersè propositio intelligenda sit. Nempe circulum maximum per polos cuiuslibet alterius transeuntem bifariam, & orthogonaliter illum secare; quòd tunc linea RQ in maximo per polos R, & Q ducta sit perpendicularis, & per centrum alterius transeat ex Coroll. propos. 8. quare, & superficies RAQD perpendicularis erit ex 15. propos. tract. 2a, & sectionem efficiet radium.

Item per polos, & orthogonaliter, & bifariam non maximum OX secantem, maximum circulum esse; Quia diameter, vel orthogonaliter, vel bifariam secantis RDQA ductus per polos alterius non maximi OX, vel per centrum L; etiam per centrum sphęræ transibit ex Coroll. propos. 8. huius, & consequenter erit diameter circuli maximi ex prop. 11. huius.

CO-

COROLLARIVM II.

HInc etiam est, quòd poli alicuius circuli maximi ab eo quadrante distent. Nam sit circulus DCBA, qui secetur bifariam à circulo RCQB, & per polos QR; igitur CQB erit semicirculus. At polus æqualiter distat à circulo, cuius est polus defin. poli. Ergo dimidio semicirculo ideſt quadrãte QB, vel QC distabit, & sic de quocũq; alio circulo dicetur, qui per polum Q transeat. Quamobrem vndequaque peripheria CABD à polo Q quadrante distabit. Vnde vera etiam erit conuersa propos. quòd si peripheria alicuius circuli à polis suis quadrante distet, illa sit peripheria maximi circuli. Nam si CABD circulus secat RCQB circulum secantem per polum suum in distantiam quadrantis CQ, & QB erunt duo quadrantes CQ, & QB, semicirculus. Vnde bifariam quoque circulum maximum RCQB secabit; quare, cum & ipse ABDC secetur bifariam, quòd secetur orthogonaliter ex 8. huius. Ergo erit circulus maximus ex 13. huius circulus ABDC.

THEOR. V. PROPOS. XV.

Maximus circulus, si per polos alterius maximi transeat, & iste per polos illius transibit.

SIt circulus maximus CEDA, qui transeat circuli maximi RAQD per polos B, C. Dico, & hunc RADQ per polos illius R, Q transire.

Probatur. Nam, si DBAC per polos circuli RAQD transit. Ergo rectus est ex Coroll. propos. præced. Ergo, & iste RADQ rectus erit: Vnde per polos eius transibit ex propos. 14.

COROLLARIVM.

COllige. Quod si duo maximi circuli haberent in eodem circulo maximo polos, quòd inuicem se secabunt, & sectio mutua à circulo, in quo polos habent distabit quadrante. Nam etiam circulus V. g. RCQB habebit polum in circulis CABD, & RAQD, qui in ipso in RQ & CB polos habent, ideoque habebit in loco communi vtrisq; quæ est sectio A, & D, cumque poli distent per quadrante à sectione, ideo C, & R, B, Q circuli RCQB puncta à sectione A quadrante distabunt; sicut, & à D.

PROBL. I. PROPOS. XVI.

Puncto dato in sphærica superficie ex dato diametro sphæræ circulum describere maximum.

CIrca diametrum datum describatur circulus seorsim, qui erit æqualis circulo maximo in sphęra describendo, quem diuidemus in quatuor quadrantes, & vnius quadrantis assumpto interuallo RC dato puncto R describemus circulum ABCD, quem *ajo esse maximum*.

Ille est circulus maximus, qui à polis suis per quadrantem vndique distat ex Coroll. 2. prop. 43. sed hunc duximus quadrante circuli distantem. Ergo est circulus maximus.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Per duo puncta data circulum maximum describere dato circulo aliquo maximo.

FActo polo in ipsis punctis V. g. R, & C interuallo circuli maximi alicuius dati à suo polo, ducantur duo circuli, vt RAQD, & CBAD illi enim erunt maximi, eo quia omnes maximi sint æquales, quòd habeant pro diametro ipsum sphęræ diametrum: deinde facto polo in communi eorum iuntersectione V. g. in A eodem interuallo ducatur circulus. Nam hic transibit per R & C puncta data, & erit maximus.

Probatur. Nam quod sit maximus patet. Interuallo enim circuli maximi ductus est, quòd verò transeat per duo puncta data.

Probatur. Quia circulorum primo ductorum RAQD, CBAD cõmune punctum est A in quo se secant. Ergo ibi facto polo ex prop. 15. circulus ductus transibit per polos amborum, sed puncta data R, & C sunt amborum poli. Ergo per ea circulus transibit.

PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Cuiuslibet circuli in sphæra dati polum inuenire.

ELectis in circulo EIHF duobus punctis H, I diuidatur bifariam ex 34. tertij vterque arcus HEI, & HFI in E, & F, perq; ex præc. agatur circulus maximus RCQB. Diuidatur autem intercepta circumferentia inter E, & F bifariam in Z; *& erit in diuisione circuli polus* Z.

Probatur. Quia circulus ductus RCQB secat datum HEIF ex constructione bifariam. Ergo ex propos. 13. transit per eius polos, & poli sunt in ipso; sed polus æquidistat à circumferentia sui circuli. Ergo erit in meditulio Z, sic enim æquè distabit ab E, & F.

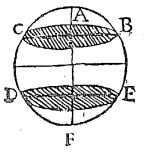
EXPENSIO III.

De circulis minoribus parallelis.

SPecialem merentur expensionem circuli paralleli, vtpote illi, qui diurni motus in Cœlo quædam quoad sensum vestigia sunt, & eorum cognitio, tum sphęricę cęlesti doctrinæ, tum sciantherice præcipuè inseruiat.

THEOR. I. PROPOS. XIX.

In sphæra parallelli circuli circa eosdem polos sunt.



SInt in sphęra ABCDEF paralleli BC, & DE. Dico *eos esse circa eosdem polos*.

Sint enim poli circuli BC punctum A, & F, connectantur linea AF, quæ transi-

transibit per centrum sphæræ ex huius propos. 8. cum ergo circuli præsupponantur paralleli erit perpendicularis ad circulum DE. Vnde per eius polos transibit ex Coroll. expens. 2.

THEOR. II. PROPOS. XX.

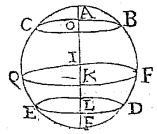
In sphæra circuli, qui sunt circa eosdem polos, sunt paralleli.

SIt eadem sphæra ABEFCD, circaque eosdem polos A, & F sint duo circuli BC, & DE. Dico *esse parallelos*.

Probatur. Nam ex Coroll. propos. 8. per centrum amborum transibit linea AF eosdem polos communes connectens; quare erit ad vtrosque perpendicularis. Vnde erunt illi circuli paralleli.

THEOR. III. PROPOS. XXI.

In sphæra non sunt plures circuli æquales, & paralleli, quàm duo.



SInt in sphæra, si fieri potest, plures circuli æquales, & paralleli, quam duo CB, QS, ED, connectanturque eorum poli recta AF; quæ transibit per I centrum sphæræ, & per O, K, L, centra circulorũ ex 19. h. & quia æquales ponũtur, æqualiter distabunt à centro ex propos. 11. Vnde ex def. 7. perpendiculares erunt æquales. Æqualis igitur erit perpendicularis KI perpendiculari LI, quod esse nequit, pars enim toti æquaretur.

TRACTATVS XXIII.

PARS SECVNDA.

De intersectionibus maximorum circulorum inuicem.

TRigonometriæ ad euitandas fallacias penitùs necessarium est agnoscere genericas triangulorum sphæricorum proprietates, tùm quoad latera, tùm quoad angulos, de quibus primò egit Menelaus, & post ipsum Gebrus Maurolycus, Copernicus Regiomontanus, & alij, quàm plurimi: sed nos, quæ doctrinæ trigonometricæ sphæricæ deseruiunt, tantummodò adferemus.

EXPENSIO I.

De principijs.

INtersectiones maximorum circulorum in superficie sphæræ omnimoda efformant triangula, & prorsus eorundem generum, quæ lineæ rectæ, se inuicem secando efficiunt; vnde hic, & Scalena triangula, & Isoscella, & Amblygonia, & Oxigonia, & Rectangula admittuntur, quorum definitiones iam exhibitæ sunt, vnde reliquas adferemus.

DEFINITIO I.

TRiangulum sphæricum est quòd tribus arcubus maximorum circulorum se intersecantibus continetur.

DEFINITIO II.

ANgulus sphærici mensura est arcus maximi circuli, cuius polus est in ipso angulo duorum arcuum, quos secat.

DEFINITIO III.

ANgulus sphæricus est, quem in sphæræ superficie duo arcus maximorum circulorum se mutuò secantes continent.

DEFINITIO IV.

ANgulus verò rectus, quem duo arcus circulorum maximorum orthogonaliter se secantium continent.

DEFINITIO V.

ACutus verò, qui minor, obtusus, qui maior recto est.

LEMMA I. PROP. I.

Datis duobus arcubus maximorum circulorum, quorum neuter semicirculo maior sit, de maiori æqualem minori portionem abscindere.

HOc fit assumendo subtensam AB æqualem subtensæ arcui minoris, & applicando il-

lam arcui maiori ACD, vt sit AC; arcus enim, quem subtendit, erit æqualis minori arcus AB.

Probatur. Omnes enim circuli maximi sunt æquales; Vnde ex 2. lib. 3. auferent subtensæ inuicem æquales arcus æquales AB, & AC.

EXPENSIO II.

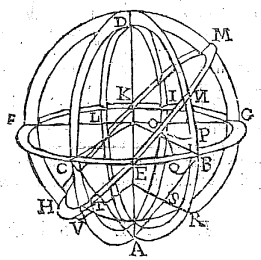
De angulis triangulorum sphæricorum.

ANtequam de totis triangulis pertractemus angulos ipsos seorsim breuiter opus est considerare.

THEOR. I. PROPOS. II.

Duo circuli maximi mutuò se secantes continent duos angulos inter se æquales.

SInt circuli maximi ACDI, & ABDL, qui se intersecent in D, & A, ducaturque polo D, vel A, circulus maximus BCFGIL. Dico *angulum* BAC *esse æqualem angulo* EDC.



Prabatur. Quia eodem arcu BC ex defin. 2. mẽsurantur, qui est arcus circuli maximi in angulis A, & D polos habentis.

PROBL. II. PROPOS. III.

Si duo arcus maximorum circulorum se mutuò secuerint; angulos ad verticem æquales inter se efficient.

DIco *angulos ad verticem* E *nimirum* GEM, & HEF *æquales esse inuicem*, sicut, & FEM, & GEH pariter ad verticem E esse æquales.

Probatur. De primis GEM, & HEF, arcus enim qui polo E mensurant illos HF, & GM sunt æquales, ergo, & prædicti anguli erunt æquales.

Probatur autem arcus esse æquales; nam MFH est semicirculus, sicut, & GMF, Ergo sunt æquales iste portiones, vtpote semicirculi: Auser MF portionem communem; Remanebuntque æquales GM, & FH. Sic de alijs duobus argumentum texitur; sunt enim semicirculi FMG, & HGM: Auser GM arcum communem, & remanebunt arcus GH, & FM, quibus mensurantur anguli GEH, & MEF, æquuales: Quare, & anguli erunt æquales, cum eorum mensura, qui sunt arcus maximi ex eorum intersectione ducti ex def. 2. sint æquales.

THEOR. III. PROPOS. IV.

Arcus super arcum insistens angulos, aut rectos, aut duobus rectis æquales efficit.

SVper GEF arcum insistat arcus ENM. Dico *facere aut duos angulos rectos, aut duobus rectis æquales*.

Probatur. Nam sit perpendicularis; certum duos rectos angulos efficere. Si verò non sit, vt datus arcus; tunc GMF erit semicirculus nimirum æquiualens duobus rectis, estque mensura angulorum, quos insistens in E facit ex def. 2., vtpote ductus à polo E. Ergo, & anguli GEM, & FEM æquiualebunt duobus rectis.

THEOR. IV. PROP. V.

Cuiuscumque trianguli sphærici tres anguli sunt duobus rectis maiores.

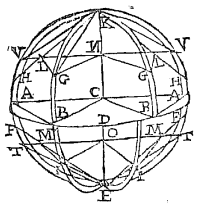
PRobatur. Tres anguli cuiuscumque trianguli rectilinei sunt duobus rectis æquales: Quare si tribus arcubus se intersecantibus AB, & BC, & CA subtendamus tres lineas ille efficient tres angulos duobus rectis æquales; sed arcus supertensi magis deiscunt ad inuicem, & maiorem angulum efficiunt. Ergo tres arcus efficient tres angulos duobus rectis maiores.

Quod autem arcus faciat maiorem angulum in sphæra. Quam linea subtensa patet: Quia quodlibet planũ circuli maximi transit per axem sphæræ. Ergo quodlibet in eius superficie signatum punctum quantò magis remouetur ab axe, tantò magis remouetur ab alio in peripheria similiter signato alterius circuli. Ergo punctum S alicuius subtensæ AB minus remouebitur à T puncto alterius subtensæ CA, quam R, & V in peripherijs puncta signata, quæ magis remouentur ab axe DA, quam S, & T.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Angulus quicumque sphæricus est angulus inclinationis planorum.

SIt angulus sphæricus AKB. Dico *illum esse eundem, ac angulus inclinationis planorum*.



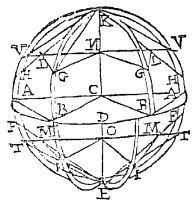
Probatur. Quia angulus AKB sphericus mensuratur arcu AB circuli ABD, ad vtrosque perpendicularis: sed angulus ACB inclinationis planorũ ex Cor. 2. prop 4. Tract. 22. mensuratur eodem arcu. Ergo est idem angulus.

THEOR. VI. PROP. VII.

Si anguli sphærici sint æquales, etiam anguli subtensarum erunt æquales: si maiores, & anguli subtensarum erunt maiores: Si minores tales, & anguli subtensarum erunt.

SInt anguli FEI, & HKG sphærici æquales, dico subtensas HK, & KG facere angulos apud K subtensis arcubus prædictis æqualibus FE, & EI apud E æquales in fig. parte sinistra.

Prob. Nam, si anguli sphærici sunt æquales, ex 6 h. & anguli inclinationis planorum erũt æquales. Ducantur ergo perpendiculares ab I ad interfectionem planorum in O, & ab hoc pũcto O, alia normalis MO. Sic ducatur normalis GN ab arcu GK; qui æquatur arcui IE & rursus alia normalis NV, & ducantur GL, & MI facientes triangula LNG, & MOI.



Progress. 1. Anguli itaque inclinationis planorum erunt LNG, & MOI, sic TE, & VK erunt arcus æquales, cum sinus versi EO, & NK, vtpote arcubus æqualibus GK, & EI subtensi æquẽtur; Cùm ergo etiam KH arcus sit æqualis arcui FE, vt supponitur, remanebunt TF, & HV arcus æquales, & propterea VKH, & TEF anguli ad peripheriam æqualibus arcubus VH, & FT insistentes erunt æquales.

Progress. 2. Cùm autem, & angulus VKN æquetur angulo TEO, quòd sinus rectI VN, & TO æqualiũ arcuum TE, & VK sint æquales & KN, & OE sint quoque æquales; anguli verò ad N, & O ex effectione recti, totum triangulum VKN toti TEO æquabitur. & ideo anguli VKN, & TEO æquabuntur: Auferatur itaque ab æqualibus VKN, & TEO anguli iam ostensos æquales VKH, & FET, & reliqui æquales restabunt LKN, & MEO.

Progress. 3. Quamobrem cùm EOT, & KNV sint anguli recti, & anguli prædicti apud K, & E æquales, & KN, & OE bases æquales; etiam ex prop. 27. lib. 1. Elem. triangula erunt æqualia MOE, & LKN erunt æqualia, & ideo crus NL cruri MO. Sed etiã NG æquatur cruri OI, & anguli MOI, & LNG ostensi sunt æquales, vtpote inclinationis planorum, igitur basis quoq; GL æquatur basi MI ex 22. l. 1. el.

Progr. 4. Sed iam EM æquatur cruri LK ex progr. 3. & GK ipsi EI, vt subtensæ æqualibus arcubus, ex hypothesi. Ergo triangula MEI, & LKG erunt æqualia, cùm habeant latera æqualia quodlibet suo correspondenti; quare etiam anguli subtensarum HKG, & FEI æquales erunt.

Probatur secunda pars. Nam, si angulus sphæricus LKG, & ideo inclinationis planorum LNG est maior angulo sphærico MEI, vel MOI planorum, & tamen sit æqualis arcus IE arcui GK, & HK arcui FE, erit sinus versus KN æqualis sinui OE, & NG rectæ OI, sic VN rectæ TO æqualis, & arcus VK arcui TE, vnde angulus HKV angulo TEF æqualis.

Eodemq; modo VKN erit æquale triangulo TEO ob angulos rectos ad N, & O, & æqualia crura EO, & NK, & angulos ad K, & E æquales. Quare rursùs LN æquabitur cruri MO; sed crus IO æquatur cruri GN angulus verò TOI est maior angulo VNG ex hypothesi, ergo, & basis MI basi LG ex propos. 25. lib. 1. Elem. ideoq; angulus FEI angulo HKG.

Et idem dicas si sit minor inclinationis planorum angulus.

COROLLARIVM.

PRopos. etiã intelligitur conuersa, nempe angulos subtensarum æquales æqualiũ facere angulos inclinationis planorum, & sphæricos æquales.

Sic suppositis HKG, & FEI æqualibus facta eadem constructione triangula VKN, & TOE erunt æqualia ratione prædicta, sicut, & triangula GKN, & EOI. Et ideo crura KG, & EI, nec non, & crura KH, & FE sicut, & anguli NKV, & OET, à quibus ablati æquales anguli VKH, & FET restarent æquales anguli NKL, & OEM, & æquales quoque recti apud O, & N, & crura NK; OE æqualia: Vnde ex prop. 27. l. 1. Elem. æqualia quoque triangula NHL, & OEM propterea, & crura ipsorum KL, & EM; & hinc triangula LGK, & EIM ob crura KG, & EI; sicut KL, & EM æqualia, & angulos LKG, & MEI ex thesi æquales. Quare etiam bases GL, & IM æquales. Et ideo quoque triangula NLG, & MIO ob tria crura tribus æqualia, siquidem NL, & OM ob triangulorum NLK, & EOM æqualitatẽ æqualia sunt sicut, & ob eandem OEI, & NKG triangulorũ æqualitatem æquantur OI, & NG, & bases GL, & IM ostensæ sunt æquales. Ideo triangulorum OIM, & GNL æqualitatem æquales erunt anguli LNG, & MOI inclinationis planorum, & ideo sphærici. Et idem dicas si sint, vel maiores, vel minores inuicem anguli subtensarum, nam tales erunt, & sphærici.

EXPENSIO III.

De lateribus triangulorum sphæricorum, & eorum subtensis.

LAtera triangulorum sphericorum singulares quasdam proprietates obtinent, quas latera rectilineorum non habent; aut saltem non eodem modo; quare oportet agnoscere, in quibus conueniant, aut ab eis disconueniant.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

In omni triangulo sphærico latus quodcumq; minus est semicirculo.

PRob. In fig. pr. 2. duo latera DC, & DB cuiuscumque trianguli V. g. BDC, producta tandem conuenient in semicirculo apud A, cùm sint arcus maximorum circulorum; qui in sphæra ex prop. 11. præced. partis se bifariam secant: Ergo latera trianguli seorsim sumpta minora erunt semicirculo.

THEOR. II. PROPOS. IX.

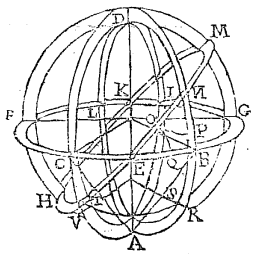
In omni triangulo sphærico duo latera tertio sunt maiora quomodocumque sumpta.

*NAm si maiora nõ sunt, mẽsurata super latus EN, quòd V. g. ponitur maius in triangulo NBE, ipsum æquabunt; ita vt pars ipsius lateris EN, quæ V. g. sit ON æquet latus NB, altera EO æquet latus EB, ducantur circuli arcus minoris OP centro ipso angulo N, interuallo verò latere ON, & deinde alter OQ centro E interuallo crure EO, isti circuli se deberent tangere in O; & rursus in B cum sint mensuræ laterum BN, & BE: quòd est impossibile ex propos. 5. tertij Euclid.

THEOR. III. PROPOS. X.

In omni triangulo sphærico tria latera simul, minora sunt integro circulo maximo.

*PRobatur. Sint latera KMN, & KGB conuenientia in K, & latere BN terminata, & faciant triangulum KNB, si producantur coibunt in E, & facient semicirculos KME, & KGE; & triangulum reliquum EBN. Sed huius trianguli latera duo EN, & EB sunt maiora crure BN ex præc. Ergo si addamus reliquis cruribus alterius trianguli, nempe



cruri KMN, & cruri KGB erunt simul hęc quatuor tribus KMN, & KGB, & NB trianguli propositi KNB cruribus maiora: Sed hęc crura quatuor faciunt duos semicirculos: Ergo tria crura cuiuslibet triãguli sunt minora duobus semicirculis, ideſt integro circulo.

EXPENSIO IV.

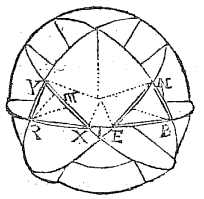
De angulorum, laterumque mutua dependentia, & relatione generica.

VIsis proprietatibus aliquot, tum laterum, tum angulorum secundum se, incipimus angulos lateribus conferre genericè, vt deinde in sequentibus eorum specificam dependentiam aggrediamur.

THEOR. I. PROP. XI.

Si duo triangula sphærica angulum angulo æqualem obtineant, crusq; vnum vni, alterum alteri æquale, etiam basem æquali subtensam angulo æqualem obtinebunt, eruntq; æqualia inuicem.

*SInt duo triangula sphærica BNE, & ZYX, quę angulum E angulo X æqualem habeant, crusq; EN cruri YX, & BE cruri ZX æquale. Dico *etiam basim* BN *basi* ZY *fore æqualem, & ideo triangula inuicem esse æqualia.*



Probatur. Nam subtensę eundem angulum rectilineum habebunt ex propos. 7. huius, & subtensa BE, ex propos. 33. tertij erit æqualis subtensę ZX, NE subtensę YX. Ergo ex propos 12. lib. 1. element. etiam basis recta subtensa BN, erit æqualis rectę subtensę ZY: Quare ex 32. lib. 3. & arcus BN æquabitur arcui ZY.

THEOR. II. PROPOS. XII.

Si duo triangula sphærica crus cruri, & aliud crus alteri cruri æquale obtineant, & angulus comprehensus sit maior altero; etiam basis opposita erit maior altera.

*PRobatur. Quia ponitur angulus sphæricus BEN maior; quàm ZXY, erit ex prop. 7. h. & angulus subtensarum BEN maior subtensarum ZXY; quia verò arcus BE ponitur æqualis arcui ZX etiam subtensa BE æquabitur subtensę ZX, sic quia arcus NE ponitur æqualis arcui YX talis erit, & subtensa NE æqualis subtensę YX. Quia itaque triangulum subtensarum rectilineum habet crus cruri, & aliud crus alteri cruri æquale, angulum autem comprehensum apud E maiorem, quàm angulus apud X erit, & basis recta subtensa BN maior, quam subtensa ZY; ex 24. lib. 1 el. quare ex prop. 22. lib. 3. & arcus BN maior erit arcu ZY.

THEOR. III. PROP. XIII.

Si duo triangula sphærica habeant basim basi maiorē; crus verò vnum vni alterum alteri æquale, & angulum maiorem comprehensum obtinebunt.

ADsit maior basis BN basi ZY, & latera singula singulis æqualia, dico, & angulum E fore maiorem angulo X.

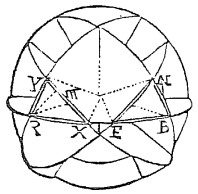
Probatur. Si enim talis non est, erit aut æqualis, aut minor. Nam potest autem esse æqualis. Nam si angulus E esset æqualis angulo X, basis quoque NB æquaretur basi YZ ex 11.h. contra hyp. Non potest esse minor, quia ex præced. maior angulus tunc esset angulus X; quare haberet quoque maiorem basem ZY, quàm BN, & tamen è contrà BN ponitur maior, quam ZY ex hypothesi.

THEOR. IV. PROPOS. XIV.

Si tria triangula sphærici latera alterius trianguli tribus lateribus, singula singulis correspondentibus sint æqualia, habebunt etiam angulos correspondentes, & æqualibus arcubus oppositos æquales.

SInt arcus BN arcui ZY, & BE alteri ZX, & tandem NE tertio YX æqualis. Dico, *& angulos omnes quilibet suo correspondenti, qui nimirum angulis æqualibus subtenduntur, esse æquales.*

Probatur. Nam cum arcus ponantur æquales etiam subtensę singulę singulis erūt æquales. Quare ex propos. 23. lib. I. erunt anguli rectilinei subtensarum æquales: Ergo etiā anguli sphęrici ex Coroll. propos. 7. huius, cum si angulus rectilineus subtensarum sit æqualis, etiā anguli sphęrici arcuum subtendentium sint æquales



THEOR. V. PROP. XV.

Si duorum triangulorum anguli duo quilibet suo correspondenti, sint æquales, & basis adiacens æqualis alteri, arcus quoque, & latera sunt æqualia.

DEntur E angulus æqualis angulo X, & B angulo Z, & basis BE basi ZY in triangulis BNE, & YZX. Dico, *esse æqualia crura* NB *ipsi* ZY, & EN *ipsi* YX.

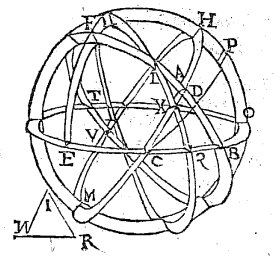
Quòd si non sunt detruncetur XM æquale crus CRVRI EN, & ducatur ZM.

Probatur. Quia ergo XM æquat crus EN ex aduersarijs, & ZX latus EB, angulus autem comprehensus X æquatur angulo E ex hypothesi erit etiam angulus apud XZM ex huius prop. 11. æqualis angulo B, cum, & ipsa tota triangula æqualia sint. Ergo, & angulo XZY ipsi NBE æquali; quòd est absurdum, esset enim pars MZX æqualis toti angulo apud Z in triangulo XZY, & sic dicas de alio latere, vnde si anguli ad basim singuli singulis in duobus triangulis sphericis sint æquales, & crura in ijs correspondentia angulis æqualibus erunt æqualia.

THEOR. VI. PROPOS. XVI.

Si trianguli sphærici duo anguli æquales inter se fuerint, habebunt quoque latera subtensa æqualia.

EXhibeatur triangulum BAC, angulique inuicem æquales sint C, & B. Dico *latera quoque subtensa* BA, *&* AC *esse æqualia.*



Nam si AB maius est, detruncetur id, in quo maius est arcu maximi circuli CDP, ergo æquale latus CA est lateri BD. At ex hypoth. angulus B angulo BCA est æqualis, & arcus BC communis. Ergo triangulum BDC æquabitur triangulo BAC ex 10. huius, pars toti, quod est impossibile.

THEOR. VII. PROPOS. XVII.

Si trianguli sphærici duo crura inter se æqualia sint, etiam anguli oppositi inter se æquales erunt.

TRianguli sphęrici BAC subtensa latera sint BA, & CA inter se æqualia. Dico, *& angulos fore æquales.*

Producantur enim latera æqualia BC, & CA vsque ad quadrantem in O, E, & H sicut, & latus BA in F. Circulique maximi polis B, & C vtrosque quadrantes BE, & BF nectant EF sicut CO, & CH arcu HO Aut ergo arcus OH, & EF conceduntur æquales. Ergo etiam anguli B & C erunt æquales ob ipsorum mensuras æquales, quæ sunt arcus FE, & HO, vel alter est maior altero, & tunc detrūcetur id, in quo maior est, & sit HF; ducaturque arcus maximi circuli CDP, vel ergo transibit per A; sed etiam transibit per C, ergo secat circulum maximum CH circulus maximus PC in duobus punctis, quæ semicirculo non distant contra prop. 12. p. 1. h. vel non transibit per A, sed alibi V.g. in D. Ergo triangulum BDC aliud, quam CAB de quo est quæstio, enasceretur, vnde à proposito eximemus.

THEOR.

THEOR. IX. PROPOS. XVIII.

Omnis trianguli maior angulus maiori lateri subtenditur, & maius latus maiorem angulum subtendit.

ADsit triangulum ABC, in quo angulus BCA sit maior angulo B. Dico *latus* AB *maius esse latere* AC. Fiat angulus BCD æqualis angulo B tunc

Probatur propos. Quia BCD, & DBC anguli æquales sunt, ex prop. 16. arcus quoque BD, & AC erunt æquales. Quapropter addito arcu DA arcui BD duo arcus DA, & BD sunt maiores arcu DB. Ergo, & arcus BA totus oppositus maiori angulo ACB maior erit arcu CA.

Probatur secunda pars. Nam si sit arcus BA maior arcu AC, angulum quoque oppositum BCA maiorem consequetur angulo CBA.

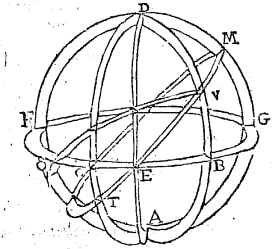
Nam si maior angulus ACB angulo B non est, erit aut æqualis, aut minor: Verùm æqualis esse nequit ACB angulo B. Nam ex 16. h. Latus quoque oppositum BA esset æquale lateri AC contra hypothesim. Sed nec ACB angulo B minor esse potest; Quòd iuxta primam partem huius cum angulus B esset maior subtenderet quoque AC maius latus, quam BA, quod est contra præsuppositum, cùm dixerimus BA esse maiorem arcum, quam arcus AC,

THEOR. X. PROPOS. XIX.

Cuiuscumque trianguli sphærici duo anguli sunt æquales, si vnicus arcus productus vsque ad semicirculum, & alterius crus oppositum simul sumpta semicirculo sunt æqualia.

At si semicirculo sint maiora, angulus oppositus lateri non producto erit maius, si minora minus alio angulo.

SIt triangulū VDT, & VA cruris VD producti vsq; ad semicirculum in A, & crus oppositum TV angulo D sint æqualia semicirculo DVA. Dico *etiam angulos* VDT *producto lateri* DV, *&* DTV *non producto* TV *oppositos esse æquales.*



Probatur. Nam quia VA, & VT sunt æqualia semicirculo DVA, dempto communi VA remanebunt latera VD, & VT æqualia. Quare etiam oppositi anguli apud D, & apud T erunt æquales ex propos. 16. huius.

Si verò crus productum VA, & non productum VT. Sint maiora semicirculo DVA, demptus communis arcus VA, & remanebit crus productum DV minus, quam crus non productum VT. Quare, & angulus oppositus T minor erit angulo D ex propos. 19. huius. E contra dicendum est, si crura sint minora productum AV, & non productum VT semicirculo DVA: Nam dempto communi VA remanebit maius crus DV, quàm VT: vnde maior quoque erit angulus T angulo D ex 19. huius.

THEOR. X. PROPOS. XX.

* *Si duo anguli alicuius trianguli sint æquales, crus adiacens extra sumptum vsque ad semicirculum æquabitur cum crure oppositi alteri angulo, toti semicirculo; Si verò angulus adiacens cruri producto sit maior altero, latus productum, & non productum erunt maiora semicirculo: Si verò angulus adiacens cruri producto sit minor, latus productum, & non productum erunt minora semicirculo.*

SIt præcedens figura, & producatur crus VD trianguli VDT, & ob æqualitatem angulorum apud D, & apud T in triangulo DTV arcui VT, arcus VD est æqualis: addatur arcus VA cruri VD erit semicirculus. Ergo, & additus arcus VA cruri æquali VT efficiet semicirculum.

Probatur 2. pars. Si VD sit minus crus, & VT sit maius, eo, quod angulus oppositus T cruri VD sit minor, quàm angulus D cruri VT oppositus, addita pars AV, quę iuncta parti VD faciebat semicirculum iuncta cruri VT maiori faciet magis semicirculo.

Probatur 3. pars. Nam si VD sit maius crure VT ob angulum VTD ei oppositum maiorem angulo D: addita pars VA ipsi VT minori ipsâ VD faciet semicirculo minus, quę iuncta cruri VD maiori faciebat semicirculum:

THEOR. XI. PROPOS. XXI.

Duo triangula sphærica æquiangula singulis angulis æqualitate respondentibus habebunt etiam latera illis subtensa æqualia.

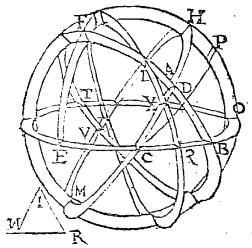
SIt triangulum RNI in fig. pr. 16. æquiangulum triangulo ZCX, ita vt Z angulo R, & X angulo I, & C angulo N sit æqualis, dico, & esse equilaterum singulaque latera singulis lateribus equalibus angulis subtensa equari.

Et quidem si concedatur saltem vnicū latus ZC equale lateri RN, cùm anguli ad basim sint quoque equales, iam clarum est ex prop. 15. huius, cętera quoque latera equari, & totum triangulum toti esse equale.

Quæstio itaque remanet, si omnia latera dicantur esse inequalia, & tunc si ZC nō equat RN equet illud maius CB, ita si CX non equat RI, equet illud maius CA, & ducatur BA, & ita triangulum BAC, ex 11. h. erit equiangulum triangulo ZXC, prontereaq; apud B angulus equabitur angulo apud Z, & X ipsi A interni, vnde, & externi LXC, & LAX. Sed ex

propos.

propos. 2. huius angulus B æquat etiam angulum T duorum semicirculorũ BAT, & BET: quare trian-



gulum ZLT habet duos angulos æquales Z, & T ad basim ZET. Vnde ex præced arcus productus BL, & oppositus ZXL æquabũtur semicirculo. Rursus, quia externus X æquatur angulo A externus verò A æquatur angulo V, erunt anguli LXC, & V comprehensus ab arcu XMV, & LFTV æquales. Quare etiam ex prec. arcus AL productus, & LX oppositus non productus erunt æquales semicirculo; hoc autem est absurdum; quia sunt partes crurum BL & ZL, quę vt supra ostensum est, æquant semicirculum.

EXPENSIO IV.

De laterum, & angulorum specifica dependentia.

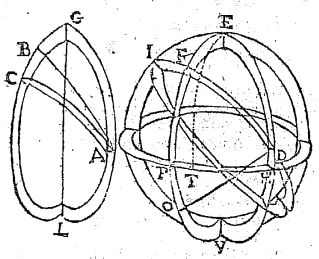
SPecies angulorum erit; si sciamus; an sint acuti, vel obtusi, vel recti, & laterum an sint illa æqualia quadranti, vel inæqualia, aut an polus sit in angulo opposito, vel non sit, quem subtendunt.

THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si detur aliquod triangulum, cuius duo anguli noti quantitate, & crus subtensum vni ex ipsis sit notum in quantitate; reliqua verò latera sint nota, nempe quòd sint, vel maiora, vel minora quadrante seorsim sumpta, non dabitur aliud triangulum, quod habeat angulum, aut crura reliqua in quantitate, aut maiora, aut minora dato.

SIt datum triangulum DFE, cuius duo anguli quantitate noti sint E, & F, & crus DF anguli aliquem notum subtendens; sit verò cognitum V.g. DE latus reliquum esse quadrante minus. Dico *non posse dari aliud triangulum in eadem quantitate vni lateris*, & duorum angulorum, quòd deinde habeat reliquum angulum, seu crus aliquod dato, vel maius, vel minus.

Quod si detur; sit illud CAG; cuius crus CG asseratur ab aduersarijs maius crure FE, & ponatur nihilominus angulum G esse æqualem angulo E, & C ãgulo F, & AC notũ quãtitate esse æquale cruri DF; reliquaq; latera DE, & AG sint cognita in specie; nempe, quod ambo sint quadrante minora.



Assero non posse hoc esse sine absurdo, siquidem crus CG ponitur ab aduersarijs maius, quàm EF detruncetur crus æquale CB. Quia igitur angulus C ex hypothesi æquatur angulo F, & latus AC lateri DF, & crus CB factum est æquale cruri FE; triangulum totum DFE æquabitur triangulo ABC, & sic etiam angulus in CO B æquabitur angulo E, cui æquabatur ex hypoth. angulus G, erunt ergo æquales angulus G, & B trianguli ABC; ideoque etiam angulus L ad semicirculos æqualis ipsi G æquabitur ipsi B; Quare AB, & AL latera opposita cũ sint anguli æquales ad basim BL erũt æqualia; Cũ ergo AL, & AB sint æqualia, si ipsi cruri AG addatur crus AB, æquabitur semicirculo, vt æquabatur prius AG iunctum ipsi AL: Ergo crura AG, & AB sunt semicirculo æqualia ex 20. propos. huius; sed BA æquat ED quadrante minus, ergo AG quadrante est maius contra thesim. Quare aliud triangulum exhiberi nõ poterit æqualium oppositorum angulorum, & lateris, alijs lateribus specie notis, & deinde habeat crus aliquod minus altero dato.

Quòd si detur triangulum, cuius DE crus notũ specie sit quadrante maius, & contendant aduersari dari aliud non ei æqualium laterum sit datum DFE, & ab aduersarijs exhibitum ABC, cuius BA sit quadrante maius, & habeat crus CB minus, quam FE, dicaturque C æqualis angulo F, & B, angulo E, & FD lateri AC: tunc prolungetur latus CB, vsque ad ę quationem lateris FE in G, eritq; triangulũ AGC æquale triãgulo DEF ex prop. 11. h. ob C æqualem angulo F, & crura ambientia correspondenter AC ad DF, & CG ad EF æqualia: quare angulus G æquabitur angulo E, & ideo angulo B. Sed angulus G æquatur angulo L, ergo LBA, & L æquabuntur, ideoque & latera AB. & AL angulis oppositis æqualibus; Si ergo addas AG ipsi AB faciet duo crura æqualia semicirculo: ex propos. 20. huius, sed AG æquat DE maius quadrante. Ergo AB erit contra thesim minus quadrante.

Quare patet cur crura specie nota debeant esse; quia; si non sit nota, tunc potest dari triangulum, quod habeat C angulum æqualem angulo F, & G angulo E, & crus CA cruri FD; quod tamen habeat aliud crus angulo C noto oppositum, nempe BA minus quadrante, quia tunc etiam angulus B æquatur in CBA triangulo angulo G, & ideo angulo E, cum scilicet BA est minus quadrante; CA verò maius, vt simul æquent quadrantem: Vnde pro latere CA, de quo nescimus, an sit, vel maius, vel minus quadrante, posset inuenIri crus BA, cum tamen velemus reperire crus AG.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XXIII.

Si triangulum sphæricum, cuius noti sint quantitate duo anguli, & nota quoque crura angulum incognitum claudentia, in quorum reliquo nõ sit lateris polus nullum aliud triangulum tale dabitur, quod reliquum angulum ignotum, aut crus habeat quantitate diuersum.

COgnascantur trianguli DFE duo anguli F, & E quoad quantitatem, & item quoad quantitatem, sint pariter nota duo latera claudentia angulum ignotum DE, & DF, in quo angulo ignoto polus lateris FE non sit. Dico, *quod omne aliud triangulum in cognitis æquale, erit huic æquale*, etiam in illis, quæ cognita non sunt angulo, & latere. Quod si non est verum; detur aliquod aliud, & sit CAG, cuius angulus G sit æqualis angulo E, & C angulo F trianguli noti, latera quoque singula suo correspondenti CA lateri DF, & AG lateri DE, & in A non sit polus lateris GC; & tamen nec angulus A sit æqualis angulo D, nec crus CG cruri EF. Flat itaque crus GC æquale FE detruncando, vel addendo, & sit CB, trahaturque arcus maximus qui sit AB. Crura itaque AB, & AC erunt æqualia; quòd sint æqualia ambo cruri DE crus AG quidem ex hypothesi; AB verò ex propos. 8. propter æqualitatem triangulorum est enim angulus C, æqualis F angulo, cuius latus CB ambiens, ex dicto aduersariorum æquatur lateri FE, & latus aliud ambiens CA lateri FD ex hypothesi, & ideo AB basi DE erit æqualis: Ergo latera prędicta AB, & AG remanebunt æqualia, & consequenter anguli ABC, & AGB erunt æquales inuicem, vtpote æqualibus lateribus subiecti in eodem triangulo ex prop. 16. huius.

Ex hypothesi autem angulus etiam G est æqualis angulo E, & angulus quoque ABC ab aduersarijs angulo eidem G debet æqualis fateri, cùm sit æqualis angulo Ipsi E ex ea ratione, quòd latus CB lateri FE fecerimus æquale, & latus AB probatũ sit æquale cruri ED, & CA, & FD æqualia. Sunt autẽ duo anguli hinc, & inde ABC ABG æquales duobus rectis ex prop. 3. rursus sunt æquales inuicem, cum ABG sit æqualis angulo G ex primo progress. & eidem ex secundo sit æqualis angulus alter ABC. Quare erunt æquales inuicem, & duobus rectis; Ergo recti. Vnde, & angulus G æqualis ipsis rectus erit; Quare ex prop. 14. primæ partis h. latus AG, & AB transibit per polos cruris, & lateris CG in A contra hypoth. quòd est absurdum. Si verò polus sit in angulo à duobus lateribus cognitis comprehenso E, & anguli sint ambo recti ad basim patet, quod alij anguli ad verticem E, & basis HP possit esse diuersa. Vnde ex illa cognitione nihil certi colligitur, cum multa alia triangula possint dari ita cognita; quæ tamen in basi, & angulo cognito sint diuersa ab eo, de quo quæritur, cum crura EH, & EP possint claudi, vt ET, & angulũ minorem E basimq; HT comprendere manendo in eadem quantitate, nempe quadrantium, & faciendo eundem angulum nimirum rectum cum basi HP, seu HT.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

Si cognitionem habeamus quantitatis vnius, anguli, & duorum laterum ambientium alium angulum tertium, quem cognoscamus, vel acutum, vel obtusum, nullum autem rectum. Nullum aliud dabitur triangulum eandem quantitatem, tum laterum, tum angulorum habens, quòd non sit huic æquale.

SIt triangulum FDB habens duo latera DF, & DE notæ quantitatis ambientia angulum D: sit etiam angulus F quantitate notus, alius autem angulus constet solum specie nimirum angulus E, quod sit, vel obtusus, vel acutus, dico, quod nullum aliud triangulum habens latus lateri, & aliud latus alteri lateri æquale, & angulum angulo æqualem dabitur, quod cognito non sit omninò æquale in omnibus alijs, dummodo angulum rellquum eiusdem speciei habeat, qui à lateribus cognitis nõ ambiatur. Quod si datur sit illud CAG, & sit AG æquale crus DE, & AC æquale DF ambientia angulum A quantitate ignotum, angulusque C angulo F, & reliquus G eiusdem speciei, nimirum acutus prout est angulus E, & tamen crus CG sit maius, quam FE; detruncetur, Itaque crus æquale CB, & ducatur arcus circuli maximi AB.

Nunc Probatur sequi contra hypothesim, angulos specie cognitos ambo acutos esse æquales duobus rectis. Latus AC, cùm sit æquale lateri DF, & latus CB lateri EF, comprehendantque angulum C æqualem angulo F ex propos. 11. huius efficient angulos ad basim B, & A in triangulo CBA æquales angulis D, & E vnusquisque suo correspondenti in triangũlo FED, & basim AB æqualem basi DF. Sed etiam basis AG ex hypothesi ponitur æqualis basi DE; Ergo sunt æquales AB basis, & AG basis, quare anguli oppositi erunt æquales nempe G, & ABG. Hic verò angulus ABG cum suo collaterali ABC est æqualis duobus rectis; quare, si loco eius ponatur angulus G, iste, & ABC erunt æquales duobus rectis, sed angulus ABC iam probatus est æqualis angulo E. Ergo angulus G, & angulus E, quorum ex hypothesi quilibet recto minor dictus est, essent æquales duobus rectis.

Si verò angulus non sit specie notus, non valet propositio; quia poterit dari aliud triangulum notę eiusdem quantitatis, tum anguli vni ex lateribus oppositi, tum crurum, & tamen in cęteris dissentiens; quia scilicet crus ambiens angulum acutum potest ambire etiam angulum obtusum cęteris manentibus, & angulum rectum. Sic crus DF ambiens obtusum angulum DFE potest transferri in O transacto angulo recto P, & ambire acutum DOE, & sic erunt duo triangula DFE, & DOE, quę habebunt angulum E communem, & latus DE idem, & crus DF cruri DO æquale, & tamen in cęteris differentia erunt. Item si angulus non sit notus specie poterit esse rectus, & sic basis poterit esse maior, & minor manentibus cęteris angulis; sit E angulus cognitus quantitate rectus, cęteri verò non cognoscantur tunc P poterit esse rectus, & H rectus, & tamen basis HP à P in T, & angulus E variari.

THEOR.

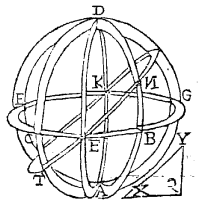
THEOR. IV. PROPOS. XXV.

Si rectanguli sphærici trianguli notam habeam basim specie, & crus & angulum non rectum quantitate non dabitur aliud triangulum, de quo eadem cognoscam; nisi prædicto cognito æquale.

TRiangulum rectangulum ZYX expositum sit; cuius latus YX oppositum angulo recto sit notum specie, & quantitate crus XZ, & angulus X. Dico, *quòd, si detur aliud rectangulum eadem specie* notum, habens latus adiacens angulo recto æquale dato, & angulum æqualem, in alijs omnibus erit triangulo ZYX æquale.

Sit ergo tale triangulum; cuius crus EB sit cruri XZ, & angulus E angulo X æqualis.

Probo in cæteris quoq; æquari. Abscindatur EC æqualis arcui ZX, vel EB; productoque arcu NE æquali YZ in T ducatur à T normalis TCD, & fiet triangulum ETC; quod ex constructione erit æquale triangulo ZYX. Siquidem angulus TEC est æqualis angulo BEN, qui ex hypothesi æquatur angulo X. Latera verò, facta sunt æqualia. Vnde ex propos. 11. huius, & crus TC erit æquale cruri YZ: sed hoc triangulum est æquale triangulo NEB, ergo triangulum NEB erit æquale triangulo YXZ.



Intelligamus DEA maximum esse circulum tactum per duo puncta A, D, quò se secant ADB, & ACD arcus maximi, & per E, tunc sic arguo.

Arcus CE ex hypothesi est æqualis arcui EB, vel XZ, & ideo angulus CAE æqualis angulo EDB, cum arcus CB sit normalis; arcus EA æqualis arcui ED, cum sit quarta circuli; angulus NEB æqualis angulo TEC: quare, & residuum angulorum NED residuo TEA quadrātium GED, & FEA erit æquale, qui angulus residuus à prædictis cruribus clauditur; quamobrem ex propos. 15. totum triangulum residuum NED erit æquale toti TEA, & basis ND basi TA. Ablatis ergo basibus æqualibus illis, à quartis circuli AC, & BD remanebunt crura æqualia NB, & TC.

Probatur etiam de cruribus TE, & NE: Nam cum triangula NDE, & TAE sint æqualia, vt ostendi Ergo, & bases erunt æquales ET, & EN in triangulis æqualibus TAE, & NDE.

Oportet autem scire crus oppositum angulo recto. Nam illo cognito omnia alia necessariò cognoscūtur in triangulum idem, at illo non cognito, sed alio crure non erit idem triangulum necessariò, cum cognito angulo, & crure possit esse basis diuersæ quantitatis.

Nam ponamus triangulum NAE esse talis naturæ, quam describimus propos. 20. quòd eius complementum ND esset cum crure NE æquale semicirculo; tunc angulus N esset æqualis angulo A, & consequenter huic æquali angulo D ex prop. 2. Ita angulus D, & angulus N erunt iidem, & crus BE idem, & tamen triangula BEN, & BDE erunt diuersa; Sic BN in triangulo RNB, & BNE est eadem tamen basis RN, & crus KGB non est idem cum NE, & BN. Oportet ergo scire basis saltem speciem cum alio angulo, nempe si sint, seu arcus maiores semicirculo, vel minores, ne generent fallacias in argumentando, quòd teste Clauio, lib. primo reuolutionum, Copernicus, & Regiomontanus agentes de triangulis sphæricis in assignatis casibus non aduertentes mirè hallucinati sunt.

EXPENSIO V.

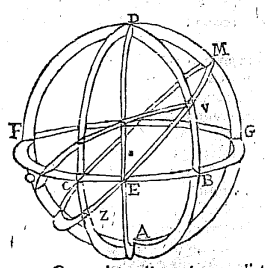
De specie laterum, & angulorum cognoscenda.

LIcet multoties ipsum triangulum propositum, de quo tria in quantitate innotescant, seu latera, seu anguli, vt cetere partes, deinde reperiantur, vt plurimùm offerat speciem quoque partium incognitarum quantitate; aliquandò tamen, euenit, quòd propositum triangulum, seu suo situ, seu alia ratione nullam partium incognitarum specificam notionem exhibeat: vnde operę pretium tunc erit aliquas hic assignare rationes, vnde specifica cognitio desumatur.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

Cuiuscumque trianguli sphærici duo anguli super eandem basim erunt æquales duobus rectis simul sumpti: si reliqua latera simul sumpta erunt æqualia semicirculo, at si sint maiores, maiora, si verò sint minores duobus rectis, crura quoque erunt minora semicirculo.

TRiangulum AZV exhibeatur, cuius duo anguli dati VAZ, & AZV super eandem basim AZ duplici recto æquiualeant. Dico, *& latera subtensa* AV, *&* VZ *fore semicirculo æqualia.*



Probatur. Cum enim collaterales anguli AZV, & DZV sint æquales duplici recto ex prop. 3. sicut ex thesi VAZ, & AZV; si auferatur communis AZV erunt æquales VZD, & VAZ ad inuicem; quòd cum ablato communi AZV ex hypothesi, essent æquales duplici recto, & ideo ex 2. propos. huius VZD, & D erunt inuicem æquales. Quare ex propos. 29. erūt æquallà semicirculo trianguli DVZ cruris DV complementum AV, & basis VZ, nempe reliqua crura trianguli propositi AVZ.

Quòd

& quod si A angulus AZV sit maior quilibet recto, cū AZV, & collateralis DZV angulus sit sēper æqualis angulo duplici recto, sequitur, quòd ablato AZV, qui cum DZV est equalis duobus rectis, remaneant angulus A, & ideo D angulus, angulo DZV maior quoque. Et hinc ex propos. 20. quòd existente minori VZD angulo D, quod complementum VA, & basis VZ sint maiora crura semicirculo.

At si angulus A esset minor, cum angulo AZV quilibet recto; esset collaterali DZV, angulus D æqualis angulo A pariter minor, vnde ex prop. 20. eadem complementum VA, & basis VZ remanerent minora semicirculo crura dati trianguli AVZ.

COROLLARIVM I.

HInc est. Quod si habes specificam cognitionem trium angulorum V. g. angulorum A, & AZV, & AVZ potes deuenire in cognitionem specificam laterum. Nam si duo ex istis angulis erunt super latus aliquod assumptum V. g. AZ; videbis an tertius, cum altero ipsorum faciat duos rectos. Nam latera ambientia tertium tunc erunt æqualia semicirculo, si faciant magis, quàm duos rectos, latera tertium angulum ambientia erunt maiora semicirculo, quòd si minores simul sumpti sint duobus rectis erunt minora tertium angulum claudentia latera semicirculo.

COROLLARIVM II.

QVod si duorum angulorum ad basim AZ, & vnius lateris habeas notitiam specificam, reliquorum quoque laterum specificam notitiam habebis. Nam si latus AZ oppositum minori angulo AZV erit quadrans certum est ex Coroll. pro. pos. 18. quòd aliud crus AV angulo maiori ppositum AZV erit maius, ideo; quòd simul erunt maiora semicirculo. Sic si latus AV oppositum maiori angulo non excedet quadrantem latus oppositum minori AZ minus erit quadrante. Vnde duo latera tertium angulum ambientia erunt minora semicirculo.

THEOR. II. PROPOS. XXVI.

Si sint in vnoquoque triangulo duo latera quadrantibus æqualibus singula æqualia in angulo verticali erit polus.

PAtet, quia polus circulorum maximorum distat quadrante à circulis, quorum est polus. Si ergo singula duo latera BD, & DC in triangulo BDC, sint quadrantes erit in angulo D polus.

COROLLARIVM

HInc facilè fallaciam propos. 22. vitabis, si latera cognita erunt, vel maiora, vel minora quadrante.

THEOR. III. PROPOS. XXVII.

Cuiuscumque trianguli sphærici duo anguli super eandem basim erunt æquales duobus rectis simul sumpti, si latera reliqua simul sumpta sint æqualia semicirculo, & si sint maiora maiores; si minora, minores erunt duobus rectis.

PRobatur. Quia VBA, & ZV latera in triangulo VAZ sunt ex præsupposito æqualia semicirculo, producto latere VA vsque ad semicirculum in D, erunt in triangulo VZD anguli VZD, & D æquales ex propos. 19. huius. Sed collaterales ad Z nimirum VZD, & VZA sunt æquales duobus rectis. Ergo ablato VZD æquali angulis æqualibus A, & D (tales enim sunt ex propos. 1.) remanebunt VZA, & VAZ super eandem basim AZ æquales duobus rectis.

Si verò sint duo crura AV, & VZ maiora semicirculo maiores erūt anguli A, & Z simul, duobus rectis Nam ex propos. 19. maior erit angulus D, & consequenter æqualis A, quam VZD, qui cum collaterali est æqualis duobus rectis: illo VZD, itaque ablato minori angulo, remanent A, & collateralis VZA maiores duobus rectis super eandem basim ZA: si enim quando æquales erant D, & VZD æquabantur duobus rectis VZA, & A, modo quia D est maior ob augmentum laterum VA, & AZ vltra semicirculum, erunt quoque illi minores, & è contra angulus A, & angulus AZV maiores duobus rectis.

Si verò crura ZV, AV sint minora semicirculo, erit D minor angulus, quàm alter in eodem triangulo VZD, qui erit maior, ex propos. 19 & consequenter angulo A. Ablato itaque VZD maiori, & cum collaterali VZA æquali duobus rectis remanent VZA, & A: anguli minores duobus rectis.

COROLLARIVM.

HInc est. Quòd si duorum laterum habeamus cognitionem specificam, & anguli inueniemus, & cognoscemus specificè reliquos angulos, an sint ambo, vel maiores, vel minores duobus rectis ad effugiendam fallaciam propos. 14.

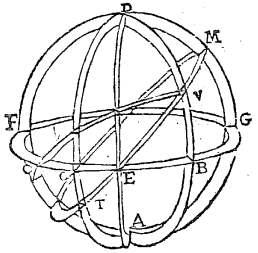
Nam quia scio crura VZ, & AV esse maiora semicirculo, cognosco quoque duos angulos A, & Z in triangulo VZA esse maiores duobus rectis, quod si deinde per cognitionem quantitatiuam agnoscam VZA angulum esse minorem recto, angulus A erit obtusus.

At si latera VZ, & AV essent minora semicirculo, essent quoque anguli Z, & A in triangulo VAZ minores duobus rectis; sed si habeo cognitionem, quod Z, aut rectus, aut maior recto sit, ideo A minor erit.

THEOR. IV. PROPOS. XXVIII.

In omni triangulo ſphærico rectangulo, cuius duo perpendiculares arcus ſint quadrante minores, anguli reliqui erunt acuti, & ſi reliqui anguli ſunt acuti, erunt omnes arcus quadrante minores.

SIt triangulum rectangulum EVB, & ſint arcus VB, & EB quadrante minores. Dico *angulos apud* E, *&* V *eſſe acutos.*



PRoducatur crus EB, & BV vſque ad quadrantem in O, & D. Atque per E ducatur circulus AED à puncto D.

Probatur DEA eſt circulus maximus. Ergo puncta D, & E abſunt quadrãte ab eius polo G, ergo GD eſt quadrans ſicut. & GE: quare angulus GED eſt rectus, & hinc GEM minor recto.

Sic quia arcus OB cadit perpendiculariter ob angulum rectum B ſuper circulum DBA, poli eius in ipſo erũt circulo BO, & OV; ſed poli abſunt quadrante à circulo maximo: ergo erit in O polus circuli ABD: quare OV erit quadrans, & BVO angulus rectus, ergo BVE erit acutus.

Probatur ſecunda pars, & ſint anguli BVE, & BEV acuti: fiant recti. Quia poli circuli maximi abſunt quadrante ab eo, ideo poli circuli maximi DBA, erunt in O, ergo BE minor erit quadrante. Sic, quia poli circuli maximi FEE erunt in D, ideo crus BV minus erit quadrante: At quia poli circuli maximi GMD erunt in E, ideo crus EV erit minus quadrante alioquin, & EB eſſet quadrans.

COROLLARIVM I.

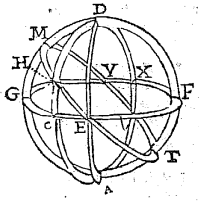
HInc eſt, quod ſi rectangulum triangulum omnes reliquos acutos habeat angulos, quòd certò affirmari poſſit latera eſſe quadrante minora ad eſſugiendam fallàciam propoſ. 14.

COROLLARIVM II.

HInc etiam ſequitur, quod ſi alicuius trianguli ſphærici rectanguli duo arcus perpendiculares ſint quadrante maiores, vt IDX, & CEFX. vel etiam anguli ab baſim I, & E obtuſi, quod ipſa baſis ſit quadrante minor. Quoniam ſi crura IDX & CEFX ſunt quadrante maiora CI, & CE reſidua erunt minora. Vnde anguli ad baſim I, & E in triangulo ICE erunt acuti ex præc. Ergo reliqui externi obtuſi, qui pertinent ad triangulum, cuius crus IDX, & alterum CEFX. Vnde baſis erit IE eadem quadrante minor. Et idem dicas de angulis conuertendo propoſ.

COROLLARIVM III.

SIt verò in triangulo rectangulo perpendiculare crus ſit maius, quàm quadrans, at alterum ſit minus, vt in triãgulo YIC, crus CI, & crus YGC, baſis YMI erit maior quadrante & anguli reliqui vnus quidem maior recto, alter verò minor. Nam angulus GYM erit æqualis angulo CBI ex prop. 2. angulus MIC externus obtuſus, eòquòd internus CIE pertinens ad triangulum CIE ſit oſtenſus acutus ex propoſ. 18. baſis verò erit maior quadrante. Nam baſis IE reſidua oſtenſa eſt quadrante minor.



COROLLARIVM IV.

QVòd ſi anguli reliqui alter acutus ſit, alter obtuſus, crura, vnum erit maius, alterum minus quadrante, ſed baſis quadrante maior.

Nam angulus apud Y acutus in triangulo YCI æquatur angulo apud E in triangulo CEE; ideo angulus E erit acutus; angulus quoq; I reliquus obtuſi externi erit acutus in eodem triangulo CIE: Vnde duo crura, & baſis erit minor quadrante. Ergo reſiduum baſis IMY, & cruris CGY erunt maiora quadrante, crus verò CI remanet idem minus quadrante.

COROLLARIVM V.

SI angulus in ſphærico rectangulo eſt acutus, vt Y, & arcus adiacens eſt maior quadrante, vt YGC; etiam angulus oppoſitus MIC erit obtuſus; alioquin ſi eſſet rectus, ſequeretur, quod arcus quoque YGC eſſet quadrans, contra hypotheſim, quia tunc polus eſſet in circulo DCAX & GCFX, ideſt in X communi puncto ex propoſ. 4. 1. part. Si verò eſſet acutus iam eſſent duo acuti; Vnde arcus YGC eſſet quadrante minor ex propoſ. 18.

Quod ſi angulus eſt acutus, & adiacẽs crus perpendiculare eſt minus quadrante, erit quoque angulus alter acutus ei cruri oppoſitus. Patet, quia ſi eſſet maior, crus oppoſitum eſſet maius quadrante ex præc. Cor.

COROLLARIVM VI.

SI angulus eſt acutus oppoſitum crus perpendiculare eſt quadrante minus, quod ſi eſt obtuſus vnus angulus, perpendiculare crus erit maius quadrante. Nam ſi eſſet minus etiam angulus eſſet acutus contra theſim.

Nam vel erunt duo anguli obtuſi, & ſic ex Coroll. 2. duo crura perpendicularia erunt quadrante maiora, quod ſi obtuſus, & alter acutus, adhuc ex Coroll. 3. erit crus oppoſitum angulo maiori maius quadrante.

Et idem dicas de acuto. Nam duo anguli acuti faciũt crura minora quadrante, & vnicus acutus V dat crus ei oppoſitum minus quadrante velut CI, vt patet conſideranti.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXIX.

In omni triangulo ſphærico Iſoſcele, ſi duo crura æqualia ſint quadrante minora erit angulus vterque ad baſim acutus; ſi maiora obtuſus; ſi æqualia quadranti rectus. At è contrà de angulis, ſi anguli æquales ad baſim ſint acuti, arcus erunt minores quadrante, ſi obtuſi maiores, ſi recti quadranti æquales.

SInt enim primo GD, & DB æqualia crura quadrãti, angulus ſit ad verticem D quicumque, ſemper anguli ad baſim B, & C erunt recti. Siquidem facto polo in D, quia GD, & DB ſunt quadrantes GB ductus circulus erit idem ac baſis, nempe circulus maximus, & ideo ex Coroll. 1. prop. 14. part. 1. huius, anguli apud G, & B recti erunt.

Quod ſi ſint in triangulo Iſoſcele BVB minora crura quadrante BE, & BV. Dico *angulos ad* E, *&* V *eſſe acutos.*

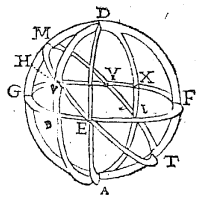
Probatur. Quoniam enim crura ponuntur minora quadrante producto latere BE vſque ad ſemicirculum in Y erit BGY maius quadrante, & BV minus, vt priùs. Vnde angulus apud V, ſcilicet MVB maior angulo MYC, vtpote oppoſitus maiori lateri ex propoſ. 18. huius. Sed angulus Y æquatur angulo E ex 1. huius. & V internus ex Theſi æquatur angulo E trianguli VEB: Quare ãgulus externus MVB ſuperabit internũ VEB. Vnde internus erit acutus; cùm ſimul ambo ſint æquales anguli duobus rectis ex propoſ. 32. h. & ideo E acutus erit.

Et hinc patet quoque latera maiora quadrante habere oppoſitos angulos obtuſos; ſi quidem EFX, & VDX crura reſidua maiora quadrante habebunt angulos oppoſitos obtuſos DVE, & VEF, vtpote reſiduos ab angulis VEB, & EVB.

Patet quoque ſecundam partem oppoſitam eſſe veram. Nam in triangulo Iſoſcelle GBD ſi anguli G, & B ſint recti, GD, & BD crura erunt quadrantes eo quod in arcu GBEF ſit polus.

Si verò anguli ſint acuti in Iſoſcele triangulo EVB arcus BV, & BE erunt minores quadrante. Nam ex propoſ. 20. ſi duo anguli ſint æquales crus BGY, & crus BV æquabuntur ſemicirculo. Sed crus BGI, vtpote angulo oppoſitum obtuſo, quod ſit reſiduum anguli EVB, eſt maius crure BV oppoſitum angulo Y minori, vel E ex propoſ. 18. huius. Ergo eſt maius YGB quadrante, cum ſi æquaret quadrantem etiam æquaret BV, quia duos quadrantes, ideſt ſemicirculum æquarent. Quadere cum YGB ſit crus maius quadrante crus BV erit minus, & BE quoq; vt eius reſiduum.

Quare patet angulos quoque obtuſos obtinere latera oppoſita quadrante maiora, nam triangulo cuius crura ſint EEF, & XDV, & baſis VE, quia E, & V anguli in triangulo EVB oſtenſi ſunt rectis minores, erunt reliqui externi obtuſi, & quia BE, & BV crura trianguli EVB ſunt oſtenſa minora quadrante reliqua EFX, & VDX erunt maiora; Quadere ſi aliquis Iſoſcelles habeat angulos ad baſim obtuſos, vt DVE, FVE; crura, vt EFX, & VDX erunt quadrante maiora.



COROLLARIVM I.

HInc euenit, quòd, in omni triangulo ſphærico, cuius omnes arcus ſint quadrante maiores, vel vnus quadrans, omnes anguli ſint obtuſi. Nam in triangulo EID, cuius duo crura DXI, & DE ſint maiora quadrante, baſis autem ETI. Detruncetur DI in X, ita vt DX æquet crus minus. & ducatur EFX arcus. Angulus itaque FED æquabitur angulo FXD, ſed cum ſint maiora crura quadrante, vel quadrantes, anguli erunt obtuſi, vel recti, ergo tanto magis addito angulo FET angulus DET obtuſus erit, & ſic de quocumque alio aſſeras.

COROLLARIVM II.

HInc quoque educitur omnes arcus eſſe quadrante minores, ſi omnes anguli ſint acuti. Nam ſi VMD trianguli omnes anguli ſunt acuti maiori angulo DMV fiat ãgulus æqualis HVD. Erũt itaq; duo oppoſiti æquales; acutus verò eſt angulus M ergo, & angulus æqualis DVH: quare, & crura ſubtenſa erunt minora quadrante ex præced. DH, & MV, ergo tantò magis MD.

Aduerte tamen, quod hæc duo Corollaria non conuertuntur: ex eo enim quod omnes anguli ſint obtuſi non infertur omnia latera eſſe quadrante maiora. Nec ex eo, quod omnia crura ſint quadrãte minora infertur omnes angulos eſſe acutos: In triangulo enim cuius crura VDX, & XFE baſis EV eſt minor quadrante, tamen anguli omnes obtuſi ſunt, vel vnus rectus tantum. Et ſic in triangulo EBV omnia crura ſunt minora quadrante: tamen angulus B erit, vel rectus, vel obtuſus, vt patet conſideranti.

EXPENSIO VI.

De casu perpendicularis in triangulis sphæricis.

QVoniam ad sollutionem triãgulorũ obliquãgulorũ inter alias regulas illa est expedita, & facillima, per quam triangula obl quangula ad duo rectangula reuocantur ducendo perpendicularem. Ideo hic de casu perpendicularis breuiter agendum, vt omnis postea in sphæricorum solutione triangulorum relegetur difficultas.

THEOR. I. PROP. XXX.

In omni triangulo sphærico, si anguli ad basim sint, aut obtusi ambo, aut acuti, normalis arcus intra triangulum cadit.

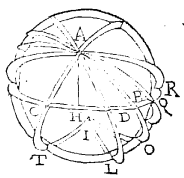
SIt triangulum DAC, & duo anguli D, & C ad basim CD sint acuti. Dico *perpendicularem intra triangulum* DAC *cadere*.

Probatur ex Coroll. 5. propos. 28. Nam cadat extra. & sit AB, & sequetur absurde simul esse AB maiorem, & minorem quadrante. Quoniam enim C ponitur angulus acutus, erit crus ei oppositum AB perpendiculare minus quadrante. Rursus, quia D trianguli ADC est acutus, externus ADB erit obtusus. Quare crus normale AB ei oppositum erit quadrante maiusex eodem Coroll. minus inquam. & maius quadrante, quod esse nequit. Idem demõstrabis in triãgulo DCLT, in quo obtusi anguli sunt DCT, & CDL ad basim. Nam si IOB sit crus normale extra cadens DCT obtusus requiret illud maius quadrante. & BDL acutus collateralis anguli CDL requiret illud DOI minus quadrante.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

In omni triangulo obliquangulo, cuius duo anguli ad basim sint vnus acutus, alter obtusus; perpendicularis minor quadrante extra triangulum cadit ad partes anguli acuti.

SIt triangulum QAD, angulusque Q in illo sit acutus alter D obtusus, & AB perpendicularis dicatur intra triangulum cadere, & sequetur idem absurdum præced. propos. Nam quia Q ponitur angulus acutus normale crus AB intra cadens erit minus quadrante ex propos. 28. Coroll. 6. h. Rursus quia QDA ponitur obtusus, crus orthogonale AB erit maius quadrante, maius, & minus, quod esse nequit.



Quod verò normalis minor quadrante cadat ad partes anguli acuti patet ex prop. 28. h. Coroll. 4. quia acutus angulus in rectangulo subtendit crus minus quadrante.

THEOR. III. PROPOS. XXXII.

* *In triangulo sphærici basim, cuius duo crura sint minora quadrante, aut maiora duo crura perpendicularia cadere nequeunt.*

PRob. Nam cadant in CAQ triãgulo, & sint AB, & AD. Itaq; ex Coroll. 2. prop. 13. h. tract. part. 1. in CDQ circulo basis, polos habebunt.

Sed ex Coroll. propos. 18. huius par. 1. intersectiones maximorum circulorum mutuæ quadrant & distant à circulo, in quo polos habent, ergo intersectio A à circulo maximo CDQ quadrante dimidiabit. Quapropter AB, & AD putatę normales quadrantes sunt. Quia ergo punctum A distat quadrante à circulo QDC, etiam AC, & AQ quadrantes erunt contra thesim, & idem dicas, si anguli sint obtusi ob eandem rationem. Vnde si duæ perpendiculares in basim cadunt etiam crura perpendicularia erunt, & anguli duo ad basim recti.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIII.

* *In nullo triangulo sphærico, cuius angulus ad basim sit obtusus, vel rectus: alter verò acutus, duo arcus æquales etiam si non normales cadere possunt.*

SIt triangulum RAD, & angulus in D obtusus, angulus vero QRA apud R acutus; deinde si cõtendat aliquis, posse cadere intra triangulum arcus æqualis arcui AB, sit ille QA.

Quoniam itaque AQ, & AB arcus sunt æquales, erunt quoque æquales anguli apud Q, & B in ipso ideo normalis arcus ab A ductus intra triangulum QAB cadet, & ideo intra triangulum RAD; sed intra triangulum RAD cadere nequit ex prop. 31. huius, sed extra; cum ponãtur anguli ad basim R acutus, & D obtusus in triangulo RAD, ergo caderet, & non caderet intra, quod esse nequit,

THEOR. V. PROPOS. XXXIV.

Duo arcus æquales extra triangulum, cuius anguli ad basim vnus sit acutus, alter obtusus in basim productam cadere nequeunt è regione anguli acuti intra perpendicularem.

SIt triangulum RAQ à cuius vertice A cadat arcus normalis in H, contendatque aliquis, quod è regione anguli R. acuti ab A duo arcus æquales cadere possint inter puncta H, & R, quæ sint AB, & AD.

Probatur. Quia ergo AB, & AD ponuntur æquales, erunt anguli ad basim B, & D æquales, & ideo perpendicularis intra triangulum BAD caderet: crus, ergo AD esset vltra perpendicularem non citra, vt ponitur in Thesi, quod caderet intra D, & Q, & ideo non in H.

TRAC-

TRACTATVS XXIII.

PARS TERTIA.

De maximorum circulorum in sphæra, mincrumque intersectionibus, contactibusque mutuis.

VIsâ mutuâ maximorum circulorum intersectione, vltimus labor subit, in consideranda natura tactuum, & intersectionum, quas faciunt maximi circuli, cum minoribus.

EXPENSIO I.

De Contactibus minorum circulorum.

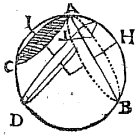
MAximi circuli tangere se nequeunt; cum vt probatum est, se solùm secare possint bifariam; contactus itaque est circulorum minorum, vel cum maximis, vel inuicem.

THEOR. I. PROP. I.

Si in sphæra duo circuli secent in eodem puncto circumferentiam eius maximi circuli, in quo polos habent, se mutuò tangent illi circuli.

SIt circulus AB, & AC, qui in eodem puncto A secent maximum circulum BHAIC, in quo polos H, & I, obtinent. Dico *se contingere in eodem puncto* A.

* Probatur. Nam in eodem puncto, & non alibi secant ABC. Ergo ibi se contingunt; neque enim possunt in eodem puncto secare; nisi in eodem puncto conueniant, & vniantur circuli AB, & AC. Quod autem non alibi possint conuenire, patet. Nam in eodem puncto deberent circulum maximum alium cõtingere, vel ergo illũ circulum maximum secarent bifariam, polis suis I, & H, & sic essent circuli maximi ex prop. 12. contra Thesim, vel non bifariam. Ergo arcus IAH, & alterius maximi esset minores semicirculo quare BDA, & alius non esset circulus maximus contra hypothesim, cùm arcu HI distarent minori semicirculo eorum sectiones.



Quod autem esset circulus maximus, qui per alium contactum transiret, patet. Nam ductis ad illum contactum diametris planum eius per illos transibit ex propos. 2. Tract. 22. vnde ex Coroll. 1. propos. 14. h. esset maximus, cum bifariam circulos CA, & AB diuideret, & per polos I, & H transiret.

THEOR. II. PROPOS. II.

In sphæra, si duo circuli se mutuò tangant, maximus circulus per eorum polos descriptus per eorum contactum transibit.

* PRobatur. Nam si circulus maximus BAG transiens in eadem fig per polos H, & I minorum circulorum non transibit per contactum A transibit alibi in L, vel ergo erit ad idem interuallum à polo H, & sic non erit ad idem interuallum à polo I; alioquin esset idem circulus: quòd si non esset ad idem interuallum à polo I; sed V. g. ad maius IL; Ergo circulus DL interuallo IL descriptus erit maior se cotingentibus in A circulis, & consequenter secabit alterum in L: Sed ex præced. propos. debet tangere, quòd circulus maximus transeat quoque per eorum polos, & per L, in quo ipsum secant AB, & DL. Ergo secabit, & tanget, quòd est absurdum.

Aliter. Ductis diametris CA, & AB ad contactũ A; cùm se tangant in A, erunt in eodem plano ex prop 2. Tract. 22. Ergo planum circuli per AC, & AB diametros transibit. Eritque circulus maximus, cùm eos duidat bifariam, & transibit per polos I, & H ex propos. 14. Coroll. 1. part. h. 1.

THEOR. III. PROP. III.

Si in sphæra duo circuli se mutuò tangant, circulus maximus per vnius polos, & per contactum amborum deductus, per alterius quoque polum transibit.

TRanseat circulus maximus ABC in eadem fig. per polum I, & per contactum A. Dico *transire quoque per polum* H.

* Probatur. Nam, si CAHD transiens per I, & A non transit per polum H, ducatur aliquis alius, qui transeat per vtrosque polos: Vel ergo erit idem circulus, & sic habemus intentum, vel non idem, & si duo maximi circuli se secant in contactu A, & in polo I. Quare distantia IA esset semicirculus ex propos. 12. par. 1. Sed nec potest esse quadrans, cùm sit distantia AI circuli minoris

ioris à ſuo polo, quæ non eſt quadrans, cum ſphæram mediam non diuidant, vt maximi ex propoſ.10. Ergo neque poteſt eſſe geminus circulus maximus, quare erit idem, qui per contactum, & per amborum polos tranſibit.

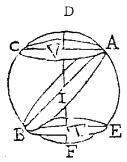
THEOR. IV. PROPOS. IV.

Si in ſphæra maximus circulus aliquem circulum minorem tangat, tanget eį æqualem, & parallelum.

TAngat circulus AB maximus, minorem AC; Dico, *quòd, & alterum tanget parallelum, & æqualem circulo minori* AC. Deſcripto circulo maximo ACB per contactum, & per polum circuli AC, qui tranſibit, & per polum circuli AB ex 2.h.

Inueniantur poli circuli AC, qui ſint F, & D; circaque alterum polum F à plano circuli AC remotiorem deſcribatur circulus ad interuallum BF. Dico *hunc tangere circulum maximum* AB, *eſſeque alteri* AC *per æqualem, necnon, & æqualem.*

* Probatur primò. Quod ſit æqualis; ductis enim diametris AC, & AB, EB, & FD. Angulus AID erit æqualis angulo FIB, vtpote ad verticem: anguli verò apud V & T recti ſunt, crus IA verò eſt æquale cruri IB. Ergo ex propoſ.27. elem.1. totum triągulum AIV toti BIT erit æquale. Quare, & crura AV, & BT erunt æqualia, quæ ſunt ſemidiametri circulorum AC, BE



Probatur quoque ſecunda pars. Quod ſint paralleli, quia recta DF per eorum polos trãſit; Ergo perpendicularis ipſis eſt; igitur circuli quoque AC, & EB ſunt paralleli.

Probatur tertia pars. Quòd tangat circulus EB circulum AB: quia ex conſtructione in eodem puncto ſecat circumferentiam ACBE in B.

COROLLARIVM.

HInc manifeſtum eſt puncta contactuum eſſe per diametrum oppoſita. Nam tangunt, vbi duo circuli maximi in B, & A, ſe interſecant, quorum interſectiones ſemper ſemicirculo diſtant, ex propoſ.12.par.1.

THEOR. V. PROPOS. V.

Si ſint in ſphæra duo circuli æquales, & paralleli; maximus circulus, qui eorum alterum tetigerit, reliquum quoque tanget.

SInt in eadem figura, quæ ſupra duo circuli paralleli & æquales AC, & EB, tangatque BA circulus maximus, alterum eorum in A. Dico, *& reliquum tangere in* B.

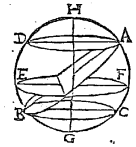
* Probatur. Nam ſectiones maximorum ACBE, & AB diſtant ſemicirculo ADB, ſicut etiam contactus minorum EB, & AC diſtant ſemicirculo ſibi. Ergo ſemicirculus idem ducit A contactum, & alterum B, & interſectiones maximorum ACBE, & AIB mediabit, ergo punctum terminans contactum B, & ſectionem B, erit idem, vtpote extremum ſemicirculi ACB, tum contactus, tum ſectiones menſurantis.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Si in ſphæra aliquis circulus ad aliquem ſphæræ circulum maximum obliquus ſit, tanget is maximus duos circulos æquales quidem inter ſe, parallelos autem illi circulo, ad quem obliquus eſt.

SIt in ſphæra circulus quicumquè AB obliquus ad aliquem maximum EF. Dico, *quòd hic maximus tanget duos circulos* deſcriptibiles parallelos dato EF, & æquales inuicem AD, & BC.

Sint H, & G poli circuli dati EF, per quos, & per polos quoque circuli AB circulus maximus deſcribatur ADCB: Deinde centro H interuallo HA circulus minor ducatur AD tangens AB maximum in A; quare ex præcedenti tanget, & alterum ei æqualem, & parallelum CB. Ergo iam habemus AD, & CB eſſe inuicem



æquales, & parallelos.

Probo etiam eſſe parallelos circulo FE. Nam cum AD ſit deſcriptus ſuper eiuſdem FE polos erit ei parallelus ex 19. propoſ. primæ partis. Vnde omnes erunt paralleli AD: EE, & BC.

EXPENSIO II.

De circulorum minorum, & maiorum interſectionibus proportionalibus, & æqualibus.

POſt circulorum minorum tactus communes, oportet eos comparare, & componere cum maximis, & ſectiones eorum mutuas conſiderare.

THEOR. I. PROPOS. VII.

* *Si maximus circulus maximum ſecet ſectio diameter ſphæræ, circulique eſt.*

PRobatur, vt in fig.prop.4.h. Nam ex 10.primæ partis tranſeunt per centrum ſphæræ, & ambo. V.g. ACBE, & AIB habent illud pro communi centro; ſed non poſſunt habere pro communi centro centrum ſphæræ, niſi in communi eorum ſectione cum in alijs partibus inuicem nõ concurrant; Ergo communis, eorum ſectio tranſibit per centrum. Sed quæ linea tranſit per centrum ſphęrę, circulorumque, eorum diameter eſt. Omnis ergo ſectio maximorum circulorum ſphęrę, & ipſorum diameter erit.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. VIII.

* *Si circulus maximus per polos minorem ſecet, ſectio chorda eſt reſpectu maximi, & diameter eſt reſpectu minoris; quòd ſi non ſecet per polos ſectio vtrique chorda eſt.*

SEcet maximus BOAQ per polos B, & A minorem HIFS. Dico *ſectionem in minori eſſe diametrum, in maximo eſſe chordam* in fig. ſeq.prop.

Probatur. Quia chorda eſt linea in circulo dirimens illum in duo ſegmenta, & vtrumque pariter ſubtendens: ſed ſectio FH diuidit maximum BOAQ in duo ſegmenta FOAH, & FBH, & ſubtendit ea, ergo chorda eſt.

Patet verò ex dictis prop.16.par.1.huius FH eſſe diametrum reſpectu minoris.

Si verò non ſecet per polos maximus ERAI minorem XRQT in vtroque circulo ſectio chorda eſt, per ſe patet cum diuidat vtrumque circulum in duo ſegmenta circulum quidem maximum in RAT, & RBT; minorem verò in RXT, & RQT ſegmenta, & omnia ſubtendat.

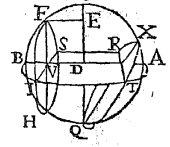
THEOR. III. PROPOS. IX.

* *Circulus minor ſecans duos maximos polos in eorum normali ſectione habens. Sectionem illam maximorum diuidit in ſinum verſum, & ſinum complementi.*

Ipſa verò ſectio in duos ſinus rectos ſecatur, etiamſi ſolum in altero maximo tantùm ſuum polum obtineat.

SIt circulus AFBQ maximus, qui ſecet normalẽ maximum SBIAR ſectione AB, & polo B, ſeu alibi dummodo in AFBQ circulo, ducatur minor circulus FHIS, ſectioque eius cum maximo AFBQ ſit HF. Dico *ſectionem* AB *dirimere* FH *in duos ſinus rectos* VE, & VH, ſicut, & chordam IS, ſeu in alio circulo chordam RT.

Probatur. Nam ſinus rectus eſt dimidiata chorda; ſed AB ſectio diuidit ſectionem FH, vel SI, vel TR. bifariam, quæ ex præc. eſt chorda; ergo diuidit in duos ſinus; Diuidit autẽ bifariã, quia AOBQ, ex pr.14.p.1.h. circulus maximus diuidit circulum totum HF, ſeu XQ bifariam: Vnde tranſibit per centrum. Ergo maximi, & minoris communis ſectio QX, vel FH per centrum tranſibit, cùm eorum vtraque ſuperficies per centrum feratur, & inſiſtet perpẽdiculariter chordę FN, TR, vel SI. Vnde eam bifariam diuidet ex propoſ.27.lib.3. Coroll.6.



Probatur quoque, quòd ſectio FH dirimat ſemidiametrum, & ſectionem BD in duas partes, quarum vna DV ſit ſinus complementi.

Nam ſinus complementi eſt ſinus arcus reſidui vſque ad quadrantem, vt EF, ſed DV eſt æqualis ipſi EF. Ergo DV erit quoque ſinus complementi; Quòd autem ſint æquales DV, & EF patet; quòd, vt ſinus debeat eſſe perpendicularis ſectioni, duorum maximorum orthogonaliter ſe ſecantium, eo quia OFB debeat eſſe quadrans, vt FE ſinus ſit arcus FO, complentis arcum BF, vſque ad quadrantem terminantem in O. Sectio quoque FV ad ſectionẽ DV perpendicularis eſt ex cit.pr 14.cor.1. Vnde DVFE, erit rectangulum, & conſequenter latus EF, erit æquale lateri VD.

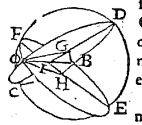
Probatur tertia pars. Nam ſinus verſus, & pars diametri orthogonalis inter ſinum rectum, & circumferentiam intercepta; ſed talis eſt pars ſectionis VB. Ergo eſt ſinus verſus.

THEOR. IV. PROP. X.

Si in ſphæra duo circuli ſe mutuò ſecent, maximus circulus per eorum polos ductus ſecabit bifariam, ſegmenta eorum circulorum.

DEntur duo circuli in ſphæra CD, & EF, qui ſe mutuò ſecent in OB. Dico, *quòd maximus circulus* DFE, *per eorum polos ductus bifariam ſecabit eorum ſegmenta* BFO, & BCO, *ſicut* BDO, & BEO.

* Probatur. Nam ex prop.14. par.1.h. cor.1. bifariam circuli DC, & EF ſecti ſunt à maximo circulo EDF. Quare vtraque ſuperficies circulorũ EF, & DC circulo maximo EDF perpendicularis erit ex 14. propoſ. primæ partis.



Propterea que eorum communis ſectio ex 9.h. quę linea recta erit, cum planæ ſuperficies ſint, bifariã ſecta erit à diametro EF DC per cẽtra G, & H tráſeunte. Cũ ergo IO ſit æquale cruri IB, & IH crus commune, angulique ad I hinc inde recti; triangulum totum HIO, toti HBI erit æquale: Quamobrem, & angulus BHI angulo IHO erit æqualis, propterea que BF quoque arcus arcui OF, qui angulum menſurant, erit æqualis; & hinc OE arcus reſiduus de ſemicirculo EOF erit æqualis reliquo reſiduo BE ſemicirculi FBE. Idem oſtendi poterit de triangulis BGI, & IGO, quòd ſint æqualia, & hinc, quod anguli BGI, & IGO ſint æquales, vnde, & arcus eos mẽſurantes BC, & OC, & hinc ſegmenta, vt OIC, & ICB, & cæt. erunt æqualia.

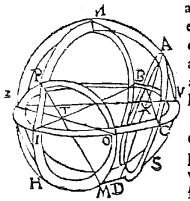
THEOR. V. PROP. XI.

Si in ſphæra duo circuli æquales, ſiue maximi, ſiue non maximi ſecent eundem circulum aliquem, & intercipiant circuli maximi per eorum polos tranſeuntis arcus æquales; eorum ſegmenta erunt æqualia.

DVplici ſchemate vtemur, quorum alterum circulos maximos exprimat alterum minores.

Sit ergo circulus ABCD, & alter POZM, qui ſecent eundem circulum VBCZ, & à circuli maximi per polos ſecti VBCZ, & ſecantis PZOM tranſeuntis interci-

tercipiat arcum PI æqualem arcui VA alterius circuli maximi, seu etiam eiusdem, dummodo transſcat per polos ipſius ſecti VCBZ, & alterius ſecantis ACBD; ideoque vtrique plano recti ſint iſti circuli per polos tranſeuntes.

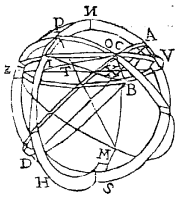


Dico arcus, quos abſcindunt ſe ſecando eſſe æquales; nempe arcum CVB eſſe æqualem arcui OIZ; nec non, & arcum CAB eſſe æqualem arcui OPZ.

Probatur. Quia arcus VA deſcendit perpendiculariter ſuper vtrumq; planum, quod ſecat, VX, & XA ſectiones erunt perpendiculares ſectioni BC, tales quoque erunt ſectioni OZ, ob eandem rationem arcus perpendicularis PI, ſectiones TP, & TI; & ideo ex propoſ. 9. ſinus arcuum, quibus ſubtenduntur V. g. AC ſinus erit XA, & XC arcus VC, & cęt. & arcus ipſi erunt ex 14. pr. p. 11. h. diuiſi bifariam in V, & A, & in P, & I, quibus poſitis.

Si itaque oſtendemus VX ſinum eſſe æqualem ſinui TI erit quoq; arcus VC æqualis arcui IZ, vel VB arcui IO. Sic ſi oſtendemus XA eſſe æqualem ſinui TP oſtendemus ſimiliter arcus ſubtenſos eſſe æquales AC ipſi OP, vel AB ipſi PZ, & ideo arcus integros CVB eſſe æquales arcubus OIZ, & CAB ipſi OPZ.

Hoc autem ita eſt, quia triangula rectilinea VAX, & TPI ſunt æqualia, vnde, & latera erunt æqualia.



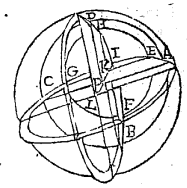
Id verò ſic demonſtratur VA recta ſubtenſa ob æqualitatem arcuum perpendicularium ex theſi æquatur ſubtenſæ arcui PI, ſic arcus MHIP, & AVSD æquantur ob æqualitatem diametrorũ AD, & PM cum circuli ex theſi ponantur æquales, ablato ergo VA ab AVSD, & PI à PIHM reſtabũt DSV, & IHM æquales arcus quibus ex 26. lib 3. inſiſtent anguli æquales rectilinei VAD, & MPI apud A, & P. Sic, quia VZ ſectio, & BI eſt eiuſdem circuli VCZ diameter ſubtendet æqualem arcum circuli perpendicularis BNI, & VNZ, à quibus ablatis æqualibus arcubus ex theſi VA, & PI reſtabunt æquales arcus BNP, & ANZ, quibus inſiſtunt anguli rectilinei BIP, & AVZ, triangula itaque rectilinea AVX, & TPI duos angulos æquales habent apud A, & V ijs, qui ſunt apud P, & I ſuper baſim æqualem VA, & PI, vnde erunt triangula æqualia; & ideo TP æquabitur ipſi XA, ſicuti, & TI ipſi XV: ex 27. l. 1. el. quare arcus OPZ, & CAB æquabuntur inuicem, ſicut etiam arcus BVC, & ZIO.

THEOR. V. PROPOS. XII.

Si in ſphæra maximi circuli à polis parallelorum deſcribantur, truncant eos in patet proportionales, ipſi verò truncantur ab eis in partes æquales.

SInt in ſphęra circuli paralleli ABCD, & EFHG, à quorum polis deſcribantur circuli maximi BFHD, & AEGC. Dico circumferentias parellelorum interceptas inter circulos maximos, vt AD vel EH eſſe ſimiles; arcus verò maximorum intercepti inter ſuperficies parallelorum, vt AE, & DH eſſe æquales.

Sint enim eorum communes ſectiones AC, & EG, ſic HF, & DB iſtę erunt parallelæ cum circulorum ſuperficies ipſæ ſint parallelæ, rurſùs ſe interſecabunt in communi puncto EG, & HF quidem in K, at AC, & BD in P facient autem æqualem angulũ apud K, & apud P, eò quòd ſint ex 14. p. 11 planorũ AIL, & IDL ſectioni LI perpendiculares. Vnde, & arcus EH, & AD erunt ſimiles, nempe eundem angulum ſubtendentes, vel eundem numerum graduum comprehendentes; quorum circulus 360. ennumeret.

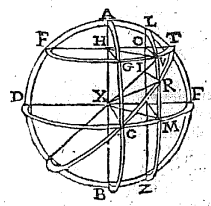


Probatur quoque ſecunda pars. Quia enim arcus ex definitione poli ſunt æquales à polo I demiſſi in circulum, vt IE, & IH, ſic eadem ratione IA, & ID, ſi illi minores IE, & IH ab iſtis maioribus IA, & ID auferantur reliqui AE, & HD erunt æquales arcus.

THEOR. VI. PROPOS. XIII.

* *Si in ſphæra duo circuli maximi ſe mutuò orthogonaliter ſecent; circulus verò obliquus tangat vnius parallelum. Parallelus alteri ſecabit, tum parallelum, tum circulum obliquum in partes ſimiles.*

*PRoponantur circuli maximi DCE, cui parallelus ſit FGT. Deinde orthogonalis illi ſit BCA; cui obliquus ſit CRT; quem, & parallelum EGT,



quem

quem, & parallelum FGT ſecet, parallelus LRMZ maximo æquidiſtans BCA. Dico ita eſſe arcum TV, ad TR, arcum, vt eſt circulus ad circulum, ideſt TV, & TR eundem numerum gr. continere.

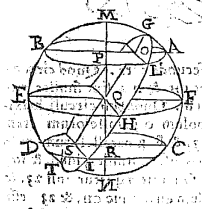
Probatur. Nam triangulum XHT eſt æquiangulum triangulo OIT, vnde ex 4. propoſ. 6. elem. ita eſt XT diameter ad HT diametrum, vt IT ad TO. Ergo ex 19. lib 5. elem, & reliquum XI ad reliquum OH, vt totum XT ad totum HT, ſe habebit. Sed HT eſt æqualis HV, vtpote ſemidiametri, & XR ad XT, vt pariter ſemidiametri. Ergo ita ſe habet XI ad HO, vt XR ad HV, & *permutando*, ita ſe habet XI ad XR, vt HO ad HV. Quare in triangulis HOV, & XIR, habemus duo latera proportionalia, in quibus notus eſt angulus, tũ apud O, tũ apud I, quòd ſit rectus. Angulus verò reliquus apud X in triangulo XIR, & reliquus apud H in triangulo HOV ſunt minores recto, eo quod quadratũ CRT, & GVT partes ſint, ergo ex propoſ. 7. lib. 6. elem. erunt triangula æquiangula, & angulus apud H erit æqualis angulo apud X. Quare, & arcus eos ſubtendentes erunt ſimiles, nimirum RT, & VT, vnde, & reſidui EG, & VG.

THEOR. VII. PROPOS. XIV.

Si in ſphæra duo paralleli circuli, & maximus ipſorum ſecent aliquem maximum, in arcus æquales inuicem ſecabunt, & omnes alios in arcus æquales inuicem.

SI in ſphæra ſit circulus ABCD, in quã etiam paralleli AB, & CD, & maximus ipſorũ FE reperiãtur, ſecetq; circulum illum in arcus æquales FA, & FC. Dico, *& quemlibet alium P. g.* GHIT *in arcus æquales* LH, & HI *ſecare*:

Probatur. Nam tranſeat iſte circulus ACBD per polos parallelorum MN ſecabit bifariam, & etiam ſegmenta ipſorum ex propoſ. 14. p. 11 h. eruntque diametri AB ſectiones, & CD, ſic GT, & MN. Vnde ſe inuicem intercipient, facientq; triangulum OPQ, & QRS. Quia



ergo FA, & CF ponuntur æquales erũt portiones diametri, ſinuſq; æquales PQ, & QR, vtpote æqualibus arcubus ſubtenſæ, vt eſt videre ex prop. 9. h. Anguli verò ad P, & R recti; anguli autem ad verticem Q æquales: vnde duo triangula rectangula OPQ, & QRS erunt æquilatera. Ea propter baſes quoque erunt æquales QS, & QP: quamobrem arcus quoque HL, & HI, quibus ſinus ſunt, erunt æquales.

Quòd ſi datus circulus non tranſiret per polos, & eſſet V. g. GEHIT. Fiat aliquis, qui tranſeat, & tunc ob angulos rectos, & angulos ad verticem æquales; baſimque æqualem QO, & QS, vtpote arcubus æqualibus ex hypotheſi HL, & HI ſubtenſa; erunt triangula rectangula OPQ, & QRS æqualia. Vnde, & crus QP cruri QR, & ex eo arcus AF arcui FC; hinc verò ad quemlibet alium circulum obliquum priori argumento inferes.

THEOR. VIII. PROPOS. XV.

In ſphæra paralleli circuli, inter quos, & maximum parallelorum æquales arcus circuli alicuius maximi intercipiuntur, ſunt æquales; illi verò inter quos, & maximum parallelorum maiores arcus intercidunt circuli alicuius maximi, ſunt minores.

DVplicem caſum habet hæc propoſitio; quia poteſt aliquis circulus maximus tranſire per polos parallelorum, vel non tranſire: Sed quocumque modo, tranſeat, ſiue non tranſeat, ſint itaque paralleli in fig. antecedenti AB, & CD minores, EE maximus. Aliquis verò circulus maximus, vt GLHIT non tranſeat per polos parallelorum NM. At ita ſecet eos, vt tamen arcus HI, & HL à maximo, & minoribus intercepti ſint æquales. Dico, *& minores* ALB, & DIC *ſore inuicem circulos æquales.*

Probatur. Nam ducto per polos parallelorum M, N circulo maximo AFNEB, faciet ſectiones in quolibet AB, & CD, necnon EF, & TG circulos bifariam ſecantes ex 14. prop. 3. par. 1. diametrique erunt, & quia arcus HI, & HL ponuntur æquales, erunt arcus FA, & FC æquales ex præcedenti, ſicut eſt EB, & DE. Ablatis igitur arcubus æqualibus FC, & DE à ſemicirculo FCNDE, & item arcubus æqualibus FA, & EB à ſemicirculo FAMBE, remanebunt arcus AMB, & CND æquales: Quare, & ſubtenſæ, diametriq; CD, & BA erũt equales, vnde, & ipſi circuli paralleli CID, & ALB. Et hinc patet ſecũda pars eodem argumento, nempe, quod paralleli ſint inæquales illi, qui arcus inæquales inter ipſos, & maximum parallelorum intercipiunt.

THEOR. IX. PROPOS. XVI.

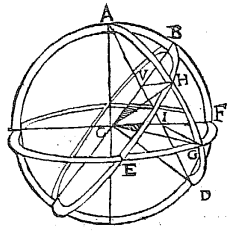
Si in ſphæra circulus tranſeat per vnum polum vnius, & per aduerſum polum alterius circulorum inclinatorum inuicem, ille circulus ab illis abſcindet æquales arcus.

SIt circulus AHGD, qui circulorum inclinatorum inuicem FGE, & BHE per polos tranſeat per vnum vnius nimirum D circuli BHE, & per alterum A alterius FGE, & ſecet eoſdem inclinatos circulos in G, & H. Dico, *quod arcus intercepti* FG, *&* HB *erunt æquales.*

Probatur. Arcus CHA æquatur arcui DGH, quòd quilibet circulus ſubtenſas à ſuo polo ex defin. 6. habeat æquales. Quare anguli, GDA, & HAD, qui fierent ductis rectis AH, GD, vtpote peripherijs æqualibus inſiſtentes HGD, & GHA eſſent æquales.

Progreſſ. 2. in triangulo quoque DCA anguli ad D, & A ſunt æquales ob æquales ſemidiametros, quibus ſubtenduntur ex propoſ. 14. elem. 1. Trianguli verò DCV angulus rectus eſt cum DFB ſit quadrans ex Coroll. 2. prop. 14. p. 1. ſic in triangulo CIA angulus C rectus eſt eadẽ ratione. Quare reliquus apud V reliquo apud I, triangulaque IAC, & & DVC erunt æqualia. Vnde etiam baſes IA, & VD erũt æquales; Ablatâ itaque parte intermedia

la IV communi residuum VA residuo ID erit æquale.



Progress. 3. Chorda autem HA æquatur chordæ DG, quas imaginatione suple, vtpote æquali peripheriæ DG, & AH subtensæ. Quia enim GA, & HD sunt æquales, ablata communi portione HG, reliqui arcus HA, & GD restabunt æquales.

Progress. 4. Cum itaque triangulis HAV, & GDE angulus D ex 1. progr. angulo A, & ex 2. latus VA lateri DI, & ex 3. latus AH lateri GD sit æquale. Ergo ex prop. 22. el. 1. erunt æqualia, & basis HV basi GI æquabitur. In triangulis tandem HVC, & GIC habemus IC, & CV crura æqualia ex 2. progr. & HV, & GI ex 4. & HC, & GC sunt radij. Ergo angulus niger angulo nigro æqualis. Et ideo arcus BH arcui FG æquabitur, sicut EG, & EH residui.

THEOR. X. PROPOS. XVII.

Si in sphæra sint parallelicirculi, & describantur maximi circuli, qui vnum quidem parallelorum tangant; reliquos verò secent, circumferentiæ parallelorum interceptæ inter eos maximorum circulorum semicirculos, qui non concurrunt, similes erunt; maximorum verò circulorum circumferentiæ inter duos quoscumque parallelos interceptæ erunt æquales.

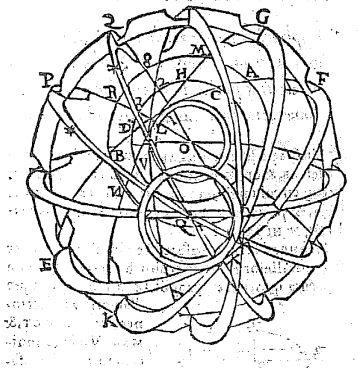
IN sphæra paralleli circuli descripti sint AB, & CHD, & IL, qui eundem polum habeant O; describanturque maximi circuli AFXE, & MGXK, qui tangant parallelum IL in punctis L, & I; & reliquos parallelos secent in punctis A, C, D, B, & M, H, V, N; se verò inuicem apud 3, & X, in duos semicirculos more maximorum circulorum.

Dico arcus IC, & ID, sicut LH, & LV esse equales; necnon, & arcus CA, & BD; sic, & HM, & VN arcus maximorum circulorum inter parallelos Interceptos esse æquales. Arcus verò parallelorum inter circulos maximos interceptos, vt CH, & AM, sic, & DV NB esse similes.

Ducantur ad ineundam probationem circuli maximi OLP, & OIZ transeuntes per puncta contactuum I, & L, & transeuntes per polum O, & Q parallelorum, & per polos maximorum tangentium * * ex propos. 3. huius. Quare ex prop. 10. bifariam secabunt segmenta ipsorum maximorum, & minorum: Vnde segmentum MLN V. g. maximi, & minoris MRN erunt bifariam sect in R, & L, sic; & AED maximi, & A 8 B erunt bifariam sect in 1, & 8, & eadem dicas de segmentis circuli angustioris CHDV: Quarè erunt æquales prædicti arcus, vtpote bifariam sect. Erit ergo æqualis arcus IC, maximi arcui ID eiusdem, & IA arcui IB. Vnde ablato communi arcu CID; remanebit quoque arcus AC arcui DB maximi circuli FIE inter parallelos intercepti æqualis; idem probabitur de arcubus MH, & VN; quòd sint æquales LM, & LN à quibus ablatus arcus communis HV, æquales restituet HM, & VN.

COROLLARIVM.

IMò arcus quoque AC, & HM; sicut VN, & DB erunt æquales, quòd ostenditur. Nam arcus ACDB, & MHVN sunt æquales ex propos. 11. Quia secant eũdem circulum minorem AMBN duo maximi FCE, & GHK, & maximi OIZX, & ORPX per eorum polos * *. transeuntium intercipiunt arcus æquales LR, & I 8, & ob eandem rationem arcus quoque CID, & HLV æquabuntur. Cùm ergo AC DB, & MH, VN sint arcus æquales ablatis æqual bus CID, & HLV restabunt AC, & MH, sicut, VN, & DB æquales.



Probatur quoque secunda pars. Quod circumferentiæ minorum, vt CH, & H 2 sint similes circumferentijs AM, & M 8. Quoniam circuli maximi IZQ, & LPQ per polum O parallelorum transeunt, erunt arcus 2 3. & 8 R parallelorum polo O descriptorum ex propos. 12. similes; ideo, & HC, & AM erunt similes. Quia HC æquatur ipsi 23. & AM ipsi 8 R. Probandum est, itaque CH, & 23. esse arcus æquales, & item AM, & 8 R. Demonstratur autem eò, quia ex propos. 11. CHD, & HLV sint æquales; vtpote duo maximi eundem parallelum secãtes, & æqualem arcum L 3, & I 2 circuli maximi OIZQ, & OLPQ transeuntiũ per eorum polum O intercipientes. Quare, & semiarcus illorum (tales enim sunt ex propos. 10. huius C 2, & H 3) erunt æquales. Ablato ergo communi arcu H 2, erant æquales CH, & 23. Sed 23. est similis arcui R 8 ex propos. 12. huius; Ergo etiam CH erit similis arcui AM.

Idem poterit probari de arcubus DV, & NB. Quòd sint inuicem similes; siquidem VD, & 32. sunt æquales, eò quia semiarcus 2 D, & 3 V sint æquales. Vnde ablato communi arcu 3 D remanebunt 23. & DV æquales: sed 2 3 est similis arcui R 8. Ergo, & VD similis erit arcui BN.

Maximè

Maximè, quia eodem argumento AM, & BN probantur æquales arcui 8 R. Siquidem A 8, & MR semiarcus sunt æquales: Ablato ergo communi arcum 8 remanent AM, & 8 R æquales, & ita dicas de arcu NB; quòd sit æqualis eadem ratione arcui 8 R.

THEOR. XI. PROPOS. XVIII.

Circuli, qui tangunt eundem parallelum æqualiter sunt inclinati ad maximum parallelorum, & poli eorum æqualem à polo maximi paralleli habent distantiam.

SIt figura præcedens, & omnia in ea disposita, vt priùs. Quia ex def. 6. par. primæ circulus ad circulum inclinat æquè, cum maximi circuli perpendicularis ad ipsos ambos arcus angulum, quem faciunt eorum plana in se secando, mensurat: Ideo videndum est; an inter circumferentias tangentium eundem parallelum, vt FADE GHVK, & maximum parallelorum FZEK, æquales circumferentiæ perpẽdiculariũ vtrisque maximorũ circulorũ intercipiãtur: circuli autẽ OZQ, & OPQ sunt perpendiculares, vtpote transeuntes, vt in præced. probatione fecimus, per eorum contactus IL, & per eorum polos * *, & per polos etiam Q, & O paralleli maximi FZPEK. Quia itaq; OP, & OZ sunt quadrantes maximorum, quòd transeat maximus FZPEK. per eorum polos ex Coroll. propos. 14. primę partis huius, ideo erunt inuicem æquales. Arcus verò OI, & OL ex prop. 18. par. 1. h. sunt æquales, quibus ablatis à quadrantibus OZ, & OP residua supererunt IZ, & LP equalia, quæ intercipiuntur inter circulos FADE, & GHVK tangentes eundem parallelum, & ad maximum parallelorum FZEK inclinati. Cum itaque sint æqualia residua maximorum, tum tangentibus, tum maximo parallelo perpendicularium. Ergo tangentes eundem parallelum æqualiter sunt inclinati.

Probatur secunda pars, quod habeant polum æquè distantem à polo maximi parallelorum. Polus distat à circumferentia maximorum quadrante. Ergo inter FADE, & KNVG tangentes eundem parallelum, & polum * * ipsorum quadrans interest IZ *, & LP *; sed etiam inter polum maximi parallelorum, & circumferentiam parallelorum, quem tangunt, intermediant arcus æquales OI, & OL, additis ergo istis arcubus æqualibus illis quadrantibus IZ *, & LP * remanabunt arcus æquales OIZ *, & OLP *. Vnde, & æqualiter distabunt à polo Q, vel O, vt patet.

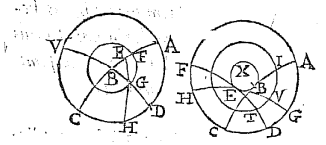
COROLLARIVM.

HInc est quòd cum distent æqualiter à polo parallelorum, , poli eundem parallelum tangentium, quod possint vniri circulo aliquo parallelo, qui per eorum puncta * * transibit, cum equaliter distent à polo O, & consequenter à polo Q.

THEOR. XII. PROPOS. XIX.

Maximi circuli qui similes circumferentias parallelorum circulorum in sphæra auferunt isti; aut per parallelorum polos transeunt, aut eundem vnum parallelum tangunt.

IN Sphæra maximi circuli ABC, DBV auferant circumferentias similes AD, & DC ex parallelis ADV, & FG. Dico, quòd si alter ex maximis circulis transeat per polos parallelorum, quod etiam alius transibit; quòd si alter tangat, & alter quoq; tanget; quòd si VNUS non tangat, nec per polum transeat, nec alter continget, vel per polum transibit parallelorum. Sed ambo parallelum minorem contingent; Transeat ergo primo ABC per polum B parallelorum. Dico, & maximum DBV per eundem polum B transire, & erit polus in communi sectione, quod si id negetur, & dicatur punctum B quo se intersecant non esse polum, sed aliud punctum E. Ducatur ex polo E per punctum G arcus circuli maximi HE. Iste ex prop. 12. auferet circumferentias parallelorum similes HA, & GF. Ergo inuicem erunt similes AD, & AH, vtpote eidem arcui FG similes. Ergo cum si ut eiusdem circuli erunt quoque æquales, totus inquam AH arcus cum sua parte AD. Non potest itaque euenire, quòd AD, & FG sint arcus similes, & transeunte per polum ABC maximo non transeat quoq; per polum B, et in eo non se intersecet DBV.



Tangat secundo maximus ABC parallelum BE. Dico, & alium maximum DEF eundem tangere, si enim non tangit, sed secet, ducatur maximus aliquis, qui tangat in puncto E, & secet maximum ABC, & sit GH. Quia ergo GH tangit ex propos. 17. BXE, ideo AG, & IV, & BE erunt arcus similes, sed ex hypothesi similes quoque sunt AD, & IT, & BE. Ergo, & inuicem erunt simil s IV, & IT, sicut, & AG, & GD; & ideo cum sint in ijsdem circulis, erunt æquales AG, & AD sicut inuicem IV, & IT erunt æquales pars toti, quod esse nequit.

Non tangat tertio ABC parallelum IVT, sed secet: Nec transeat per polum parallelorum X. Dico alterũ quoq; DEF secare, nec transire per polum X. Sed ambos maximos contingere circulum parallelum minorem, si tamen auferant circumferentias de parallelis similes.

Probatur. Nam ex prop. 6. cum obliquus sit, siquidem si rectus esset transiret per polos ex Cor. propos. 13. quod non ponitur. Is continget parallelos inuicem, & etiam circulis aliquantis minoribus ADC, & IVT, & æquales inuicem, quorum alter est BE, qui minor erit prædictis parallelis cui eos secet ABC, hùc autem tangat: Probo etiam DEF ipsos minores parallelos tangere, quorum alter est

DE. Si enim non tangit; alter GEH circulus maximus tangat. Secetq; maximũ ABC. Quia ergo GEH tangit eundem parallelum BE ex propos. 17. erunt arcus AG, IV, & BE similes, sed tales ex thesi sunt arcus AD, & IT, & BE. Quare cum sint similes vni tertio EB arcus IV, & IT erant inuicé similes, cumque sint eiusdem circuli, erunt quoque equales pars toti, quod esse nequit, sic, & AD, & AG erunt similes, & eadem ratione æquales, quod est absurdum, pars enim esset equalis toti.

EXPENSIO III.

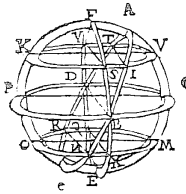
De sectionibus maximorum cum minoribus inæqualibus, & non similibus.

QVia circulum obliquum alteri, vt Zodiacus Æquatori in sphæra cœlesti, circulus perpendicularis eorum alteri, qualis est Horizon Æquatori, non secat æqualiter, vt experimentũ docet; sed dum æquales partes Æquatoris perorĩũtur; non tamen æquales partes Zodiaci emergunt; ideo ad tractatum de sphæra funditùs intelligendum, hæc vltima Expensio percurrenda est, in qua de istis sectionibus peragitur.

THEOR. I. PROPOS. XX.

Si in sphæra maximus aliquis circulus aliquos minores in eadem descriptos secet, & non per polos in partes inæquales eos secabit, & segmenta erunt æqualium parallelorum ad easdem partes huius hemisphærij segmentis parallelorum alterius hemisphærij inæqualia, & hinc semicirculo maiora, inde minora.

SIt ABCD circulus maximus, qui secet parallelos VIKT, & MRNOZ, & non per polos. Dico eos minores secare in partes inæquales: nempe esse partem maiorem IKT parte IVT, & sic NMR parte RON. Describatur ex circumferentia maximi parallelorum PBQD maximus FBED, qui per Q eius polum transeat, & per sectiones BD, & sit ei perpendicularis: diuidet is parallelos bifariam in XZ, & SY ex pr. 14. Cor. h. par. 1. Quare patet, quod NMR erit maior, quam NOR, & IKT, quam IVT.



Dico secundò. Quòd ad easdem partes segmenta erunt inuicem inæqualia. Nam minor est RON, quàm IKT ex probatione præcedenti.

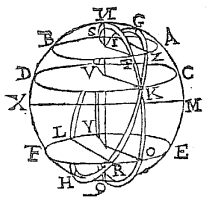
Dico tertio. Quòd ducto maximo parallelorum ad easdem partes ABCD hinc ab illo segmenta sunt semicirculo minora, vt RON, inde maiora IKT; Vt probatum est, cùm SKY, & XOZ sint semicirculi; quibus additur ITVS, vt sit maior, auferatur XZNB, & fiet minor arcus semicirculo.

THEOR. II. PROP. XXI.

Si in sphæra circulus maximus parallelos aliquos circulos secet, & non per polos parallelorum arcus ad easdem partes in dimidio hemisphærio sunt maiores, quàm, vt sint similes arcubus in altero hemisphærio existentibus, vel è contrà.

SEcet in sphæra parallelos AB, & CD, & EF, & non per polos maximus circulus GH. Dico arcus IBZ in hemisferio MNX esse maiores; quam vt sint similes arcubus RFL alterius hemisphærij MQX.

Per puncta KV, & per polos N, & Q duo circuli, seu semicirculi maximi NYQ describãtur, & NKQ. Isti ex prop. 12. h. arcus similes intercipient KDV, & SBT, ergo ZBI erit maior; quam quod sit similis arcui KDV; sic OFY erit arcus similis arcui KDV. Ergo KDV erit maior, quàm, quòd sit similis arcui RFL, & ideo quoque ZBI erit maior, quam, quod sit similis arcui RFL.



THEOR. III. PROPOS. XXII.

Si in sphæræ superficie intra circuli cuiusque peripheriam punctum aliud à polo signetur, & per illud arcus plurimorum maximorum circulorum agantur, qui per polum prædicti circuli transit arcus, erit maior omnibus alijs, & residuus minor.

Reliquorum verò propinquior maximo remotiore semper maior erit.

Et æqualiter distantes æquales erunt.

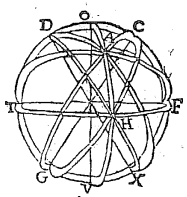
SIt punctum A signatum in superficie sphæræ intra circuli, siue maximi, siue non, peripheriam CDGK, perque punctum A plurimi maximorum circulorum arcus agantur, vt CA, & AG, & FA, & AD, & vnus transeat per polũ H prædicti circuli CDGK, & sit AV, cuius residuus arcus sit AO. Dico maximum esse arcum AV, qui per polum H transit, & residuum eius AO minimum; cæteros verò propinquiores, vt AG remotioribus, vt AD esse maiores, & æqualiter distantes, vt AF, AT æquales.

Trahantur per polum H, & per puncta circumferentię circuli CFGD arcus maximorum circulorum HG, & HD, puncta inquam per quæ transeunt arcus primo ducti. Sic TH, HE, & cæt. Tunc sic.

* Probo primam partem propositionis, ex propos. 9. partis huius secundæ. Cuiuscumque triangu-

guli sphærici duo crura reliquo sunt maiora. Ergo in triangulo AHG erunt maiora crura AH, & HG crure AG. Sed duo crura VH, & HG ex prop. 18. huius part. 1. sunt æqualia. Nam arcus HG, & HV ducti sunt à polo H arcus AH idẽ. Ergo arcus AV maior est, quam AG, & eadem ratio est de crure AT, & TH, vt patet, & de omnibus alijs.

Probatur secunda pars de residuo arcu, quòd sit minimus. Nam duo crura HA, & AC reliquo HC sunt maiora ex cit. propos. 9. secundę partis huius: Sed arcus HO est æqualis cruri HC ex prop. 18. huius part. 1. Si ergo auferatur cõmunis arcus HA, remanet AC residuo AO maius.



Probatur quoq; tertia pars. Quod AG sit maior arcu AD. Nam crus HA est commune, & duo crura HG, & HD æqualia: angulus verò AHG maior angulo AHD. Vnde ex propos. 12. secundæ partis huius, basis AG subtensa angulo maiori maior erit basi AD.

Probatur tandem vltima pars, quod AF, & AT sint æquales ex prop. 11. p. 1. Nam AH latus est cõmune; crura HE, & HT æqualia; angulus ab illis comprehensus FHA ob hypothesim æqualis distantiæ ab arcu OAV, necessariò est equalis angulo AHT: Ergo, & basis AF basi AT æqualis.

THEOR. IV. PROPOS. XXIII.

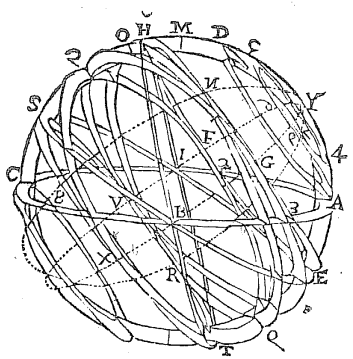
Si in sphæra maximus circulus vnum quidem circulum tangat; alium autem ei parallelum secet positum inter sphæræ centrum, & circulum, quem tangit; polus autem eius dicti maximi fuerit inter parallelum, quem tangit, & quem secat; circuli maximi tangentes parallelum, quem secat, erunt ad illum inclinati.

Rectissimus autem tangentium erit in eo puncto, in quo maius segmentum bifariam diuiditur; humillimus, in quo minus segmentum bifariam diuiditur.

Illi verò arcus, qui tangunt in punctis à prædictis contactuum æquè distantibus similiter inclinati sunt, qui verò magis accedunt ad contactum humillimi, magis inclinati sunt, quàm, qui ab eo longiùs absunt.

Poli verò tangentium sunt in parallelo ipsi, qui tangitur, & ipso minore.

SIt in sphæra maximus circulus ABCI, qui tangat parallelum AD, secet verò parallelum EGHF positum inter sphęrę centrum, & circulũ AD, quem tangit. Polus autem circuli maximi prædicti ABCI sit in M inter parallelos AD, & EF HG; circuli verò maximi contingant parallelum, quem secat in G, in N, in H, in F, hi nempe limirum HBTI, & SBEI, & FZXQ, & GZVP, & NOBQ. Dico omnes esse ad circulum ABCI inclinantes. Secundo Rectissimum esse HBTI tangentem in puncto H, in quo maius segmentum 3 H 2 paralleli, qui tangitur, bifariam diuiditur à maximo per polum transeunte, qui est AMCT. Humillimum verò esse BSIE, qui tangit in opposito puncto E, vbi idem AMCT secat paralleli minorem arcum 2 E 3.



Tertiò æquidistanter ab istis punctis tangentes esse eodem modo inclinatos: sed qui distat magis, in quo tangit humillimus illum eleuatiorem esse.

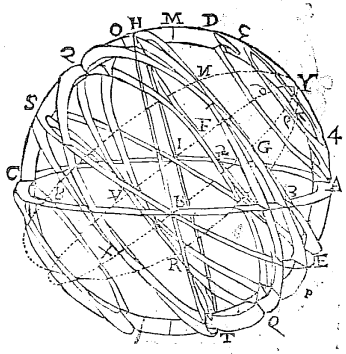
Quarto polos esse in parallelo 45. minore illo AD, qui tangitur, sed tamen ei parallelo.

Probatur primo hæc vltima pars, vtpote fundamentum cęterarum. In circulo maximo AMCT secante, vtpote ei perpendiculari erit polus circuli tangentis AICB, & distabit ab eius ambitu quadrante. Quia ergo distantia MA est quadrans, & YH est quadrante minor, vtpote à parallelo EH ad eius polum Y: Si mensuretur ab H quadrans versus A non perueniet ad A, vtpote, quod sit maior quadrante, cum polus M debeat esse inter H, & Y ex thesi. Verùm excedet Y, quòd sit HY minor quadrante; Vnde cadet in puncto 4. inter A, & Y, & polo Y interuallo Y 4. describetur circulus 45. hic polos omnium tangentiũ in se continebit. Describantur enim per polum Y, & puncta contactuũ N, F, G, E, & cæt. arcus maximorum circulorum punctati YN, & YF, & YG, & YE erunt omnes arcus à polo Y ad parallelum EH æquales. Nempe YE, & YG, & YN, & YH, & YF. Sunt quoque arcus residui vsque ad parallelum minorem 45 equales Y 9. Y 4. Y 6. Y 7. & Y 5. ob eorum parallelismum. Quare, si addatur prædictis erunt omnes æquales, sic EY 5. & HY 4 sic NY 7. & GY 6. & FY 9. erunt æquales: sed HY 4. vnus est prædictis arcubus probatus est quadrans. Ergo omnes quoque alij erunt quadrantes, cùm ergo circumferentia circuli 4, 5. remoueatur quadrante à circumferentijs tangentium, vt remouetur H 4. & in 4. sit polus, erit etiam in omnibus alijs punctis illius circuli 4. 5. polus aliorum circulorum tangentium.

Probatur prima pars, & secunda, quia intra ambitum circuli ABCI punctum Y electum est prę-ter eius polum M; à quo ducti sunt arcus YMC, transiens per eius polum, & YA eius residuum, & YAE, & YN 8, & YFI, & YGB, qui etiam transeunt

per

per cõtactus H,N,F,G,E,& polum 5.& 4.7.9.6.circulorũ maximorũ tangentiũ EBI5,& HBTI,& cęt.& ideo iſtis omnibus ſunt perpendiculares. Vnde, & tangentium prędictorum ad ſecantem circulum ABCI inclinationem menſurant ex def.6. p.11. h. Quamobrem ex propoſ.22. huius arcus YHC erit maior, quàm Y N 8, & hic quam IFY, cui erit æqualis Y G B, & hi maiores, quàm Y 4 A. Quia autem diximus in prima probatione YDH, & YN,& YF, & YG, & YE eſſe arcus æquales; Si hos arcus æquales à ſucceſſiuè inæqualibus auferamus, remanebit maius reſiduum HC reſiduo N 8,& hęc reſiduis FI. & GB, & hæc reſiduo nullo arcus IE nihil enim remanet ablato arcu YE; Hi verò om-



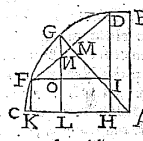
nes arcus inclinationem menſurant arcuum tangentium: Quare cum remaneant inæquales, & ſemper minor, qui magis remouetur ab arcu YMC tranſeunte per polum M, manifeſtè patet, diuerſam continuè tangentium eſſe inclinationem, & ſemper maiorem eorum circulorum recedentium magis à polo M; minores enim arcus inter eos,& circulum ad quem inclinant ABCI intercipiuntur. Patet quoque tertia pars, quòd ſi arcus ſint æquales, VE BY, & IY, qui ſunt quadrantes inclinationem fore æqualem,cum ablatis æqualibus arcubus GY, & FY reliqua debeant ſupereſſe æqualia BG, & FI.

THEOR. LEMMAT. I. PROPOS. XXIV.

Portiones diametri ſubtenſæ arcubus æqualibus, quò propinquiores ſunt alteri diametro in quadrante, eò ſunt maiores.

SIt ABC quadrans, in quo ſumantur arcus æquales DG,& GF ducanturque perpendiculares DH, & GL, & FK. Dico portiones diametri HL, & LK eſſe inæquales, & illam eſſe maiorem, quæ magis alteri diametro AE propinqua eſt, nempe HL maiorem eſſe, quam LK Ducatur diameter GA,& chorda DF, & IF parallela ſubtenſo diametro AC:

Quia ergo DF ſecta eſt bifariam in M, vt ſatis conſtare poteſt ex 27.El.l.3 Cor.6. erit maior ND, quam FN. Quia verò in æquiangulis triangulis ita eſt DF ad IF, vt NF, ad OF ex 4.lib.6.elem. reſiduum quoque ex 22.l.5.el. DN ita erit ad IO, vt NF ad OF, ſed DN eſt maius, quam NF, ergo etiam IO,



quam OF, ex propoſ.12.lib.5. & ideo etiam LH æquales, quàm LK.

COROLLARIVM.

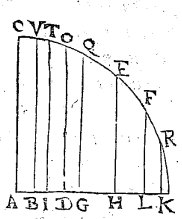
HInc manifeſtè patet, quod ſi transferatur LH propinquius ad AB minorem arcum ſubtenſuram, ſicut, & LK. Quia, ſi ſubtenderent æqualem arcum, iam ipſi arcus quo viciniores alteri diametro eo ſegmenta diametri maiora non ſubtenderent; cum ſubtenderent ipſa eadem, quæ ſubtendebant ſibi remotiores arcus.

THEOR. LEMMAT. II. PROPOS. XXV.

Portiones diametri duobus arcubus inæqualibus ſubtenſæ remotioribus ab altero diametro in quadrante; ſi illi diametro alteri viciniores arcus ſubtendant, illi arcus erunt inuicem inæquales, & remotior erit minor.

SInt arcuũ equaliũ, & diametri portiones LH, & LK, quæ trãsferãtur viciniores diametro alteri AC. Dico *eas ſubtendere duos arcus inuicem inæquales, maioremque eſſe* VO *propinquiorem diametro alteri* AC; *quam* OQ *remotiorem*.

Probatur. Sinus verſus LK eſt minor, quàm LH ſinus ſubtendẽtes arcus æquales ex præc. quia ſubtendit arcum remotiorem. Tranſferatur in DG, & DB manente eodem interuallo, eritque minor DG, quam DB: Menſuretur itaque à puncto D ſinus DG, & ſit DI: cadetque punctum I inter D, & B puncta. Quare arcus TO inter parallelas IT, & OD comprehenſus eſt minor; quã OV inter OB, & OD parallelas diſtantiores clauſus; ſed arcus TO eſt maior, quàm OQ, vtpote vicinior alteri diametro AC ex præced. Coroll. Ergo tantò maior erit VO ipſos TO arcus maior.



COROLLARIVM.

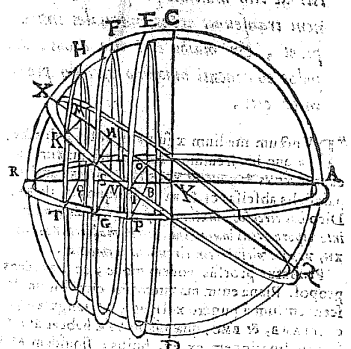
HInc etiam patet, quod etiam ſi portiones diametri prædictæ diminuantur,& fiant minores in eadem proportione,quòd adhuc tranſlatę arcus inæquales ſubtendant, & quod maior arcus ſit propior alteri diametro. Quoniam enim ponitur KL ad DG, vt HL ad BD, & LK eſt minor, quam HL; erit etiam DG minor, quam BD: Vnde, ſi DI fiat æqualis ipſi DG, cadet inter B,& D: Quare arcus VD erit maior arcu TO, quod parallela inter D, & O tendat: Sed TO eſt maior, quàm OQ ex præced. Coroll. vtpote ſemidiametro AC vicinior: Ergo tantò magis VO erit maior, quàm OQ.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXVI.

Si in circumferentia maximi circuli ſit polus parallelorum, qui per partes æquales quadrantis alicuius circuli maximi obliqui ad eoſdem ducti ſint; hi ex eo circulo, in quo polos habent inæquales circumferentias auferunt, quæ quarum prior maximo parallelorum remotiore maior erit.

SIt circulus ACRD, & maximum parallelorum exprimat diameter CD, cui ſint paralleli EIF, & FSG,& HKT abſcindentes ab obliquo circulo ZX partes æquales IS, & SK; & habentes polos in R, & A maximorum circulorum communi puncto. Dico eos à circulo, in quo polos habent, vel APR, vel ACRD arcus inæquales ſecare, eſſeque EF maiorem, quam FH, & PG, quam GT.



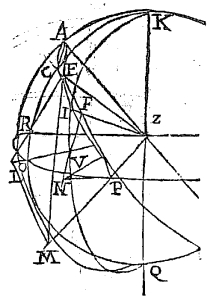
* Probatur ex prælibata propoſitione. Ductis enim parallelis ſectionibus FO, & SN, & KM, parallele enim ſunt ob plana parallelorum inter ſe æquidiſtantia, & diametro YX perpendiculares, quòd ſit ſectio circuli ACRD tranſeuntis per polos parallelorum, & conſequenter eorum planis perpendicularis ex Coroll.prop.8.p.r.h. Quare ON,& MN erunt portiones diametri interceptæ per quarum extrema puncta tranſibunt ſectiones OB, NV, & MQ eiuſdem circuli ACRD perpendiculariter cadentes ſuper AR axem per polos parallelorum R, & A ductum ex propoſ.8. Cor.1. par.r. h. Quare facient triangulum rectangulum YMQ, cuius baſis YM, in quo ſunt triangula æquiangula YBO, & YVN. Quia ergo YO eſt baſis portio diametri YO erit maior, quàm YB: quare aliæ portiones BV, & VQ viciniorem arcum diametro DC ſubtendent, vt pote quod ſint illi viciniores. Rurſus ob parallelas BO,& VN, & MQ: ita erit ON ad BV ſe minorem, vt MN ad VQ minorem ſe, quare ex præced. propoſ.& Coroll. arcus, quos ſubtendunt portiones BV, & VQ, ſi ne dum erunt minores arcubus LS, & SK obliqui circuli, ſed, & erunt inæquales, & maior erit FE, quam FH, vtpote diametro CD vicinior, & idem dicendum de arcubus PG, & GT; vicinior enim PG erit maior, quàm GT, quòd nimirum ſubtendantur à proportionibus diametri tranſlatis VB, & VQ, & in eadem proportione minoribus, quàm ON, & MN.

THEOR. VI. PROPOS. XXVII.

**Sectorum æqualium plana in circulo inclinante, quo circulo inclinationem menſuranti ſiunt propinquiores, & eo circulis intercipientibus minus obliqui, ſeu inclinati ſunt.*

*SInt ſectores AZC,& CZI in circulo maximo inclinante ACP, angulo AZR ad circulum ROP. Dico *ſectorem* AZC *eſſe minus obliquum circulo intercipienti* KCQ, *quam ſector* CZI *plano* KIQ *normalibus circulo* ROP.

Ducantur perpendiculares ſectioni ZC, ſectoris AZC, & ſectioni ZI ſectoris CZI, quæ ſectiones ſint AEM, & EFP, quæ producantur vſque ad ſectionem circulorum productam ZM, & incidant in eam in M, & P, agaturque plana per has ſectiones AM, & EP perpendicularia circulo ACP, eritq; ſectio EL perpendicularis plano ex prop.4. Coroll.1. & 2. tract.22. & ſectioni ZC rectangula, & angulus LEM erit angulus inclinationis planorũ idemq; dicendum de ſectione FV,& LZ,& de angulo NFP. quod ſit angulus inclinationis planorum. Quia itaque AEZ, eſt angulus rectus, ZEM triangulum erit rectangulum, ſicut, & ZFP, in quibus, quia angulus ad centrum EZM eſt maior,quàm angulus EZP; conſequenter erit reſiduum ZME minus reliquo ZPF,cum duo quilibet in vno quoque triangulo recto ſint æquales ex Coroll.9.prop.17. lib.1.el. Cum ergo ZME ſit minor angulus, linea EM obliquius incidet in ſectionem ZM, quàm linea FP in eandem. Quia autem fecimus angulum LEM eſſe inclinationis ob latera ſectioni EZ perpẽdicularia,planum ELM, ex Cor.2.cit. at LZM vt in plano ei normali POR, ſunt normalia KCQ plano, etiam ex16. tract.22. communis illorum ſectio ML erit rectangula plano, & ſectioni EL, & idem aſſeras de ſectione PN. Quia ergo in rectangulo ZLM eſt malor angulus apud Z, quàm in rectangulo PZN reſiduus angulus apud M erit malor reſiduo apud P in rectangulo ZNP; Cum ergo duę ſectiones EM,& LM cũ ſectione ZM faciãt ãgulum acutiorẽ,& magis obliquũ,quã duæ ſectiones



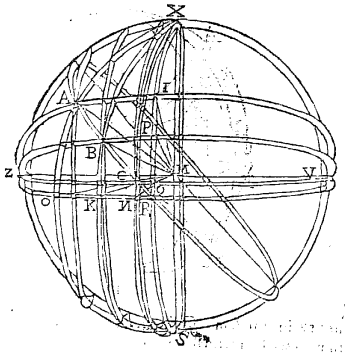
FP,

FP, & NP minor erit angulus apud M ex pr. 20. tr. 22 in rectángulo MFL, quàm FPN in rectangulo FPN; quare residuus angulus apud E in MEL rectangulo, erit maior, quàm NFP in rectangulo NFP; sed angulus apud E, & F est angulus inclinationis sectorum, ergo minus inclinabit AZC sector, vtpote cuius est maior angulus inclinationis ad KCQ, quàm sector CZI ad KIQ circulum. Sector autem AZC vicinior est circulo KARQ inclinationé mẽsuranti.

THEOR. VII. PROPOS. XXVIII.

Si in circumferentia circuli maximi sit polus parallelorum; huncque ad angulos rectos secent duo alij circuli maximi, quorum alter sit vnus parallelorum: alter verò obliquus ad parallelos, & per obliqui circuli æquales arcus, & polum describantur maximi circuli, hi circumferentias inæquales intercipient de maximo parallelorum; quarum propior maximo circulo primo posito remotiore maior erit.

SIt polus parallelorum Z in circumferentia maximi circuli XZSV; paralleli verò sint circuli ducti per circumferentias æquales circuli obliqui RCBA. Quorum maximus sit XRS; A polo verò Z per ea puncta terminantia æquales circumferentias CB. & AB circuli maximi educantur ZCQV, ZAIV, & ZBPV. Dico hos maximos circulos de maximo parallelorũ XRS æquales circumferentias non auferre: sed esse maiores: quæ proximiores sunt circulo primo posito XZSV; nempe esse maiorem IP, quam PQ.



* Probatur ex præced. propos. 27. Nam, quia arcus AB æquatur arcui CB ex Hypoſi, & MC, & MB, & tandem MA radij sunt; erunt triangula AMB, & BMC æquicrura. Et plana circulorum maximorum ZAIV, & ZBV claudunt angulum apud M trianguli AMB: ſic plana circulorum maximorum ZBPV, & ZCQV claudunt trianguli BMC angulum apud M. Incidunt que illi circuli in planum maximi parallelorum XQRS rectangulè, & quia proximior eſt maximo circulo XZS maximam planorum inclinationem mensuranti, ex, theſi, arcus AP, arcu CR eius plani AMB inclinatio erit minor, seu minus obliquum, quam planũ CAMB; quaderè angulus IMP in maximo parallelorum XQR intercepcus à planis maximorum circulorum rectangulè ei existentiũ ex propoſ. 22. Tract. 22. erit maior angulo PMQ. Quadere ex propoſ. 39. lib. 8. etiam arcus IP erit maior arcu PQ. Anguli autem LMP, & LMQ sunt anguli inclinationis planorum ex 6. definit. primæ partis huius.

THEOR. VIII. PROPOS. XXVIIII.

Iisdem positis, ſi in circulo polos continente parallelorum punctum medium inter eos eligatur, & ad circulũ maximũ per ſectionem obliqui, cum maximo parallelorum, & per eorum polos tranſeuntem ab illo puncto circuli maximi per arcus æquales in obliquo ſumptos ducantur, iſti de illo maximo per polos, & ſectionem tranſeunti arcus inæquales intercipient, & maior erit ille arcus, qui polos continenti maximo circulo proximior erit.

PVnctum medium X ſumatur inter polos ZV, à quo in circulum VRZ circuli maximi ducantur XCNS, & XBKS, & XAOS per partes æquales à parallelis abſciſas CB, & BA in obliquo circulo RBA. Dico *hos circulos maximos à puncto X deſcendentes intercipere arcus inæquales, eſſeq; maiorem* KO, *quam* KN, *vtpote vicinio rem circulo maximo* XZS.

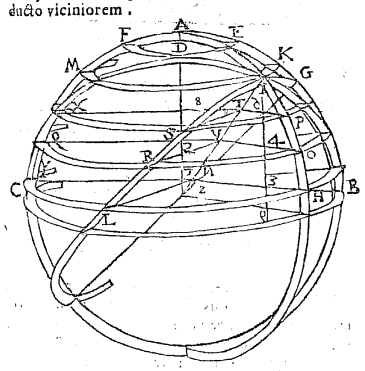
Probatur prorſùs eodem modo, ac præcedens propoſ. Plana enim maximorum circulorum deſcendentium à puncto X ſtringunt triangula æquicrura AMB, & BMC, quæ plano VRZ habeat diuerſam inclinationem ex 27. huius; ſiquidem ABM triangulum, vtpote vicinius circulo XZS maximam inclinationem mensuranti, & ſectioni VZ planorum intercipientium ZIV, ZPV, & ZQV minorem obliquitatem, ſeu minorem inclinationem habet, quam BMC triangulum, & ſubtenſa arcui BA, quam ſubtenſa arcui BC, quare plana maximorum circulorum cadentium ex vertice X perpendiculariter ex 22. tr. 22 intercipient triangula inæqualia in angulis, eritque triangulum OMK in angulo apud M maius, quam triangulum KMN, vtpote, quia illud OMK ſubiaceat triangulo AMB, quod habet minorem obliquitatem, & minorem inclinationem, quam BMC triangulum, cui ſubiacet triangulum conſequenter minus KMN, qui ſunt anguli inclinationis planorum CXS, & XKS, & XOS ex 5. propoſ. 1. par. h. Vnde ex prop. 39 lib. 6. etiam arcus OK erit maior arcu KN.

THEOR.

THEOR. IX. PROPOS. XXX.

Si in ſphæra maximus circulus tangat aliquem ſphæræ circulum; alius autem maximus circulus parallelis ipſorum contactorum circulorum obliquus tangat circulum maiorem eo, qui tangitur à primo maximo circulo eo in puncto, quo ſecatur primus ipſe: per partes æquales obliqui circuli maximi ducti paralleli auferent à circulo maximo per contactum hunc poſtremum, & per polum parallelorum ducto, & à primo poſito circumferentias inæquales, maiorque erit illa, quæ ad maximũ parallelorum propiùs accedit.

*SIt in ſphæra maximus circulus BDC, qui tangat parallelum EDF in D; ſitque alius obliquus maximus LIC: qui tangat parallelũ maiorem illo KIM in puncto I. Paralleli verò circuli XSP, QRO, & YLH ducantur per arcus æquales SR, & RL obliqui circuli LIG, & ſecent circulum maximum AIH per polos parallelorum A, & ſecundum contactum I ductum. Dico has ſectiones abſcindere ab hoc maximo per polos parallelorum ducto circumferentias inæquales HO, & OP; maioremque eſſe HO, vtpote maximo parallelorum BLC ducto viciniorem.



Ducantur ſinus, & ſectiones parallelorum ST, VR, & LN cum obliquo circulo maximo GIL vſque ad ſectionem, diametrumque IZ circuli maximi AIH perpendicularis planis parallelorum cum per eorum polum A tranſeat, & ipſi circulo obliquo GIL, cum per eius contactum tranſeat ex propoſ. 3. huius partis. Nam tria plana, nempe cuiuslibet paralleli, & duorum circulorum maximorum in punctis ſectionũ V, N, T ſe inuicem ſolùm communicant; ideoque ea puncta erunt communia ſectioni paralleli cum obliquo LIG, & cum perpendiculari AIH. Hæ verò ſectiones ST, VR, & NL erunt quoque parallelę ex propoſ. 14. tract. 22. eo, quia à planis parallelorum fiant, & occurrent ipſorum parallelorum ſectionibus cum maximo circulo BDC tranſeunte per pũctum contactus D, quę ſectiones ſunt TX; VQ; & NY, quæ, & erunt parallelę eadem ratione.

Quibus animaduerſis. Probatur propoſ. Nam ducto diametro DZ circuli primo tangentis BDC in triangulo rectangulo TBZ baſis eſt ZT, crus verò ZB. Ergo portio diametri ZT erit maior illâ ZB. Sic dicas de crure ZB. minus, quàm baſis ZV. ita de crure ZG minùs, quàm baſis ZN. Cum ergo portiones diametri TV ad BZ, & VN ad GZ ſint, vt NZ ad GZ. & NZ ſit maior quàm GZ. etiam TV portio erit maior, quàm BZ, & VN, quàm GZ, vnde iuxta propoſ. 25. huius partis arcus QX, & QY, circuli CDR, quos ſubtendunt dictæ portiones BZ. & GZ, erunt inæquales, maiorque YQ quàm QX.

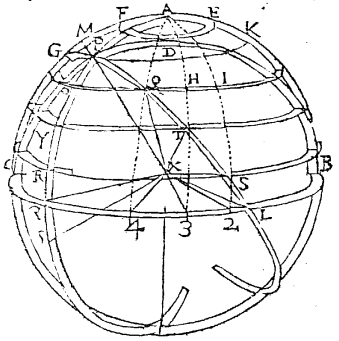
Dico ſecundò auferre quoque à maximo circulos AIH parallelos eoſdẽ, arcus inæquales, maioreque eſſe HO, quàm OP, vtpote parallelo maximo viciniorem. Ducatur parallela diametro AZ circuli AIH, & IG. & BZ. & GZ exprimant ſectiones, quas faciunt ſinus TP, & OV, & HN. Sunt autem TP, & OV, & HN parallelæ, quia ſectiones ſunt parallelorum, & circuli ad eos recti, vtpote per eorum polos tranſeuntis AIH. Sunt quoque perpendiculares ſectioni AZ, quia ipſi ſectioni AZ plana parallelorum perpendiculariter inſiſtunt, vtpote ducti polo A, qui eſt maximi parallelorum. Ergo erunt ſinus circuli AIH, quare, & erunt perpendiculares lineæ IZ parallelæ ipſi AZ pro radio AZ ad vitandam confuſionem ſubſtitutæ. Vnde angulus apud Z. erit rectus, & IN erit baſis. Quadere eodem argumento concludemus ZG portionem eſſe minorem, quàm NV, & BG, quàm VT. Propterea q; ſinus ZG, & BG eſſe magis propinquos maximo parallelorum BC, quàm TV, & VN, & ideo minores, & eſſe inæquales inuicem arcus, maioremque eſſe OH; quam OP.

THEOR X. PROP. XXXI.

Iisdem poſitis omnibus, ſi per partes æquales circuli obliqui, per quas paralleli ducuntur; à polo circuli maximi parallelorum ducantur circuli maximi; iſti ipſius paralleli maximi circumferentias inæquales intercipient, maiorque erit illa, quæ circulo per polum, & contactum tranſeunti propinquior erit.

*SIt circulus maximus in ſphæra BDC tangens parallelum EDF in D; Aliuſque circulus maximus LPG tangat aliam parallelum illo prædicto maiorem MPK in puncto P; paralleli quoque alij, vt OQ, & YT, RS diuidant circulum maximũ ſecundò tangentem LPG in partes æquales ST, & QT, perque polum omnium parallelorum A, & contactum P tranſeat aliquis circulus, vt APZ; àque polo A deſcendant circuli maximi per partes æquales circuli ſecundò tangentis, & per puncta S, T, Q, in quibus obliquum paralleli ſecant, qui maximi ſint AI 2, AH 3, & AQ 4. Dico, quod iſti circuli maximi abſcindent partes inæquales à circulo parallelorum maximo BLZC nempe 23, & 34; maior quæ erit pars 34, quæ circulo APZ per contactum tranſeunti propinquior eſt.

Probatur, vt præced. propoſ. 27. Quoniam plana circulorum maximorum punctis diſtinctorum à polo A perpendiculariter deſcendentia ſuper parallelum maximum BLZC lambunt latera triangulorum æquicrurum inuicem TXQ, & TXS ob radios QX, & TX, & SX æquales, & baſes ſubtenſas æquales ob arcus æquales QT, & TS deſcen-



dunque ſuper planum maximi paralleli perpendiculariter. Inſuper ipſa triangula habent diuerſam inclinationẽ ad plana A 4, A 3, A 2 à polo A cadẽtia. Et quia APZ circulus, vtpote per contactum P à polo A deſcendens ex propoſ. 3. h. p. tranſit, & per polum ϛ circuli obliqui ſecundò tangentis GPL; ideo ex prop. 14. Cor. h. par. 1. erit rectus ad ambos circulos maximi paralleli BLZ, & maximi obliqui LPG. Quare maximam inclinationem ipſorum menſurabit. Cum ergo triangulũ QXT magis approximet circulo maximam inclinationem ex oſtenſis menſuranti minus inclinabit, vel minus erit obliquus ex propoſ. 27. h. part. 3. ad planã à polo A cadentia; quam triangulum TXS, & magis accedet ad ſectionem X A, quare trianguli inclinationis planorũ ex prop. 22 Tract. 22. à planis perpendiculariter deſcendentibus, & latera eorum QX, & XT, & XS lambentibus effecta, nempe 2 X 3, & 3 X 4 erunt inæqualia in angulis apud X baſes 2 3, & 3 4 ſubtẽdẽtibus, & maior erit angulus 3 X 4 ſubiacens triangulo XT Q minoris inclinationis, quam angulus 2 X 3 ſubiacens triangulo S X T maioris inclinationis, & ideo maior erit angulus 3 X 4, & conſequenter arcus 3 4 ex prop. 39. lib 6. elem. qui APZ circulo menſuranti maximam inclinationem magis appropinquat, quàm angulus 2 X 3, & conſequenter arcu 2 3, qui ab eo circulo APZ maximam inclinationem menſuranti per polum A, & contactum P tranſeunti magis remotus.

COROLLARIVM.

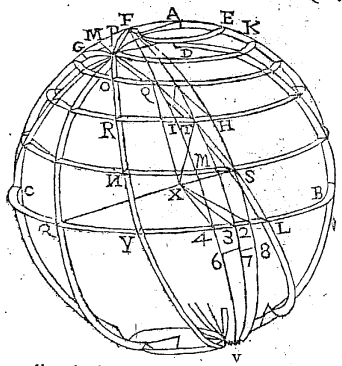
HInc ellicies arcus quoque cuiuſcumque paralleli eſſe inæquales; maioreſque eſſe eos, qui circulo APZ propinquiores ſunt, quia arcus parallelorum omnium à circulis maximis per eorum polos tranſeuntibus abſciſi ſunt ſimiles, ex propoſ. 12. huius, & ideo tot gradus comprehendet 3. & 4. quot HQ, & tot 2 3 quot IH, ſed plures gradus comprehendit 3 4, quam 2 3, ergo, & plures QH, quam H I gradus comprehender, & ſic dicas de alijs.

THEOR. X. PROPOS. XXXII.

Eodem poſito maximorum circulorum primo paralleli minoris, & ſecundo maioris contactu, quo maiorem hunc parallelum ſecat maximus tangens minorem parallelum. Si circuli maximi per æquales partes circuli ſecundò tangentis ducantur, qui tangant minorem parallelum: hi circumferentias inæquales auferent de maximo parallelorum; quarum, quæ propior erit circulo ad eaſdem partes parallelum tangente à quibus partibus ipſi maximi ducuntur, & per contactum deſcripto, remotiore erit maior.

SIt eadem prorſus conſtructio, quæ priùs, nempe circulus maximus BDC tangens parallelum minorem EDF, & alius circulus GPL obliquus ad parallelos tangat circulum parallelum maiorem MPK. parteſque à parallelis inſectæ eius maximi obliqui æquales ſint ST, & TQ. Dico, quod ſi ab E deſcendãt circuli maximi 2 SF, & 3 TF, & 4 QF per puncta has partes terminantia S, & T, & Q, qui tangant parallelum EDF; abſcindent à maximo parallelorum partes inæquales 2 3, & 3 4, maiorque erit pars 3 4, quæ circulo FRY vicinior eſt, qui ad eaſdem partes, nempe ad F tangit non ſicut circulus BDC, qui tangit in D, & occurit ipſis maximis FSL, & per contactum P tranſit inter F Q 4, & APZ. Aduerte BX 7, & 7 X 6, vt triangula debere cõcipi 1. crura ad X ducta nõ ſint.

Probatur; Nam triangula SXT, & XTQ ſunt



æqualium inuicem crurum, baſiumque æqualium ST, & TQ: Vicinius eſt autem triangulum TQX circulo maximo APZ per contactum P tranſeunti, ideo perpendiculari circulo obliquo LPG, & parallelorum maximo BLC; & ideo inclinationem maximam menſuranti. Quare circuli tangentes FQ 4, & FT 3, qui hoc triangulum efficiunt ſuis ſectionibus TX, & QX impriment in plano normali, & inclinationis triangulum 6 X 7; quod erit maioris anguli apud X, quam triangulí remotiotis 8 X 7 angulus apud X, quod triangulum ſubſterneretur triangulo SXT remotiori. Siquidé triangula, quæ inter dũo plana intercipiuntur quanto magis appropinquant ſuis baſibus planorum intercipientium ſectioni ex propoſ. 23. Tract. 22. eò maiorem angulum inclinat, cauſant, & ex eadem quanto minus obliqua ſunt; Quarę cum ex propoſ. 27. huius ſubtenſa arcui TQ ſit minùs obliqua quam ſubtenſa ST, quia vt dixi magis arcus ille TQ accedit ad circulum perpendicularem maximum APZ; & rurſus magis quoque ſectionibus maximorum circulorum intercipientium accedit, nempe circulorum tangentium parallelum

ſum EDF; quæ apud illum circa F exiſtunt. Quare ex 3. parte prædict. propoſ. 23. Tract. 22. angulus, qui fieret 6 X 7 eſſet maior, quam 7 X 8, vtpote ſubiectus angulo QXT minus obliquo, & ex dictis minorem inclinationem habenti. Interſectiones autem 2 X, 3 X, & 4 X incidunt inter circuli maximi planum, cui ſunt perpendiculares, & inter plana obliqua triangulorum SXT, & TXQ, ſiquidem polus circuli maximi, normalis vtrique eorum debet eſſe in communi eorum interſectione, quæ contingit prope, ſimulque extra parallelum EDF, & quia circuli perpendicularis interſectio diſtat quadrante ab eius polo, & BYC parallelorum maximus diſtat à D, & F minus quadrante, ideo circulus maximus perpendicularis ad tangentes duos, V. g. a FT 3, & FQ 4 infra ipſum BLY cadet, & arcus eius erunt V. g. 87, & 76. Facient autẽ circuli tangentes FQ 4, & FT 3, & alij cum maximo parallelorum LVZ æquales angulos 4, 3, 2. ob æqualem inclinationem ex 18. h. quia tãgunt ex hypotheſi eundem parallelũ EDF. Cumqi anguli 4, 3, 2 tangentiũ FQ 6, &c. ſint æquales, quod ſint æqualiter inclinati, anguli vero circuli duobus arcubus illis perpendiculariter incidenti ſint recti, patet verificari Coroll. cit. propoſ. 23. maioremque eſſe angulum 4 X 3, quam 3 X 2, vtpote angulo maiori 6 X 7 ſubiectum, quam, quod ſit angulus 7 X 8, non ſunt autem ducta crura 6 X, & 7 X, vel 8 X ad vitandam confuſionem, ſed mente ſupplenda. Quamobrem arcus 4 3 quoque ex 39. lib. 6. Elem. erit maior, quam 3 2, quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM I.

HInc patet idem dicendum de arcu TH, & arcu TI paralleli HBL, quòd nempe TH ſit minor, quam TI, qui remotior eſt à circulo FBZ, quia arcus 2 3 eſt ſimilis arcui TH, & arcus 3 4 arcui TI, & idem dicendum de omnibus alijs parallelis; qui inter maximum BL YC, & parallelum MPK deſcribi poſſunt.

THEOR. XI. PROPOS. XXXIII.

Si in ſphæra maximus circulus aliquem circulum tangat; alius autem maximus circulus obliquus ad parallelos tangat parallelum maiorem illo, quem tangebat maximus circulus primo poſitus: Inæquales intercipient circumferentias parallelorum circulorum; quorum propiores vtrouis polorum ad eandem partem maiores erunt, quam vt ſimiles ſint remotioribus.

SIt ſchema præcedens; in quo ſit maximus circulus FPY tangens parallelum minorem EDF; & alius circulus maximus GPL tangat parallelum maiorem MPK; ſecetque duos parallelos quoſcumque SN, & TR. Dico arcus TR, & SN inæquales eſſe; maioremque eſſe NS polo V propiorem, quã, quod ſit ſimilis arcui BT. Ad quòd oſtendendum deſcribantur maximi circuli apud F tangentes, vt FT 3 per ſectionem T, quo facto.

Prob. propoſ. Namprop. 16. huius oſtendimus partes parallelorum interceptas inter maximos circulos eundem parallelum tangentes, vt ſunt MN, & TR eſſe ſimiles. Ergo NS inter maximos circulos tangentes comprehenſus erit maior, quã quòd ſimilis eſſe poſſit; quia erit maior, quam NM, qui eſt ille arcus, qui ſimilis eſt arcui RT. Quod autem tangens FT 3 abſcindat arcum minorem NM, quam NS patet, quia iſti arcus ſe decuſſant in T. Vnde GPS arcus remanet vltra M apud S.

EXPENSIO IV.

De partibus, quæ ab interſectionibus maximorum circulorum ſiunt, nullam proportionem dicentibus, nec inuicem, nec cum diametris ipſorum circulorum.

VIdimus vſque adhuc aliquos circulos ab alijs poſſe ita ſecari, quòd eorum partes, aut ſimiles ſint, aut æquales, & de iſtis nullum dubium eſt, quod proportionem dicant cum ſimilem rationem habeant.

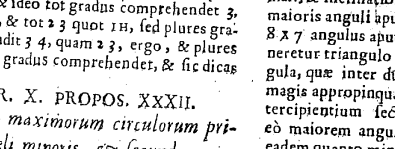
Deinde adeſſe alias interſectiones quibus in tales partes circuli diuidantur, vt inter eas nulla reperiatur, aut æqualitas, aut ſimilitudo, modo videndum an inter ipſas aliqua proportio, nempe rationum ſimilitudo inueniri poſſit, ſed priùs quædam pro fundamento ſubſternenda ſunt.

PROBL. LEMMATICVM I. PROP. XXXIV.

Propoſitis duabus magnitudinibus inæqualibus reperire aliam mediam, quæ datæ vtrique magnitudini commenſurabilis ſit.

SInt propoſitæ duæ magnitudines inæquales AB maior, & AC minor, & alia quæcumque DG, cui oporteat reperire commenſurabilẽ magnitudinem talem, quæ ſit media inter AB, & AC, nempe maior, quam AC, & minor quam AB.

Exceſſus, quã maior AB excedit minorem AC eſt BC, cui comparata data quæcumque DG, vel erit minor, vel maior; Si eſt maior bifariam diuidatur, & ſi neque ſic ſit minor, vna ex ipſis partibus bifariam diuidatur adhuc, & toties in dimidijs remanentibus id fiat; donec efficiatur minor, quàm exceſſus CB.



Hæc ergo magnitudo, vel data minor, quam exceſſus CB, vel diuidendo minor effecta toties replicetur; donec efficiatur proximè maior, quã AC, & ſit VT, ita vt ſi auferatur tantùm vna ex partibus replicatis iam ſit minor. Dico *hanc eſſe quæſitam*.

Probatur. Nam, quòd ſit commenſurabilis datæ DG patet, quia eius multiplex eſt, aut aliqua ex dimidijs ſuecceſſiuè factis, & ideo pars aliqua lineæ datæ DG.

Quod verò ſit media inter AB, & AC patet, quia eſt quidem maior, quam AC, ex hypotheſi neceſſariò verò minor, quam AB: Nam ſi eſſet æqualis,

si detraheretur vnica pars V. g. TI; quia detraheretur pars minor, quam excessus CB, remaneret VI maior, quam AC, & ideo non fuisset proximè maior, vt præsupponebatur.

THEOR. II. PROPOS. XXXV.

Si polus parallelorum sit in circumferentia maximi circuli, quem duo alij maximi circuli ad angulos rectos secent, nempe maximus parallelorum, & obliquus alius ad parallelos, quos duos ad easdem partes secent alij duo maximi per polum parallelorum ducti; non erit pars maximi paralleli ad partem obliqui interceptam inter circulum primo positum, & postremum per polos ductum, vt pars eiusdem maximi paralleli altera ad partem aliam obliqui, quæ vtroque maximo circulo per polos ducto intercipiantur.

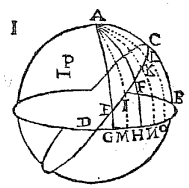
SIt circulus ACB, in quo sit polus A maximi paralleli EHD, & alius obliquus circuli CFD ei orthogonaliter insistat, quos duo maximi circuli à polo A descendentes secent, nempe AFH, qui secet maximum parallelorum in H obliquum in F, sicut, & AEG secet maximum parallelorum in G obliquum in E. Dico, quod sicut est EH ad CF non erit HG ad FE; sed ad aliquam circumferentiam minorem, quam FE, vt in fig. 1.

Probatur. Nam vel arcus obliqui circuli CF est commensurabilis arcui FE, vel incommensurabilis. Si commensurabilis inueniatur eorum cõmunis mensura P, & secundùm eam distribuãtur arcus CF, & FE. perque puncta diuisionum à polo A maximi circuli ducantur LO, & NK, & MI. Eruntque æquales partes inuicem CL, & LK, KF, FI, & IE. Quare partes in maximo parallelorum ex propos. 28. huius erunt inæquales, maiorque erit EO, quam ON, & ON, quàm NH, & cæt. Quare ex propos. 8. lib. 5. Elem. maior erit proportio partis EO ad CL, quam ON ad LK, & sic successiuè: quia cum BO sit maior, quam ON comprehendit plùs de arcu CL, vel æquali LK, quàm ON, & successiuè de cæteris vsque ad G quapropter, cùm sint tot partes in CF, quot in BH, & tot in FE, quot in HG, & quælibet pars in EH antecedens dicat maiorem proportionem, quam sequens ad suam correspondentem in CF, & idem dicas de HG ad FE, dicẽt quoque omnes simul antecedentes partes BH ad correspondentes partes sequentes CF numero eadem maiorem proportionem, quam arcus HG partes ad suas in eodem numero correspodentes FE: Quare vt dicant eandem proportionem arcus HG ad FE, quam BH, ad CF, deberet esse minor, sic quia dicit maiorem proportionem 8. ad 4. quam 3. ad 2. quia 8. comprehendit 4. gemina vice, non autem 3 comprehendit 2. numerus 2. debebit esse minor, & fieri $1\frac{1}{2}$, & sic ita est 8. ad 4. vt 3. ad $1\frac{1}{2}$.

Progressu 2. Quod si arcus CF, & FE sint incommensurabiles, tunc si non est, vt BH arcus ad arcum CF, ita HG ad arcum aliquem minorem, quam FE; saltem erit, vel ad arcum maiorem, quàm FE, vel ad eundem FE, vt in fig. 2.

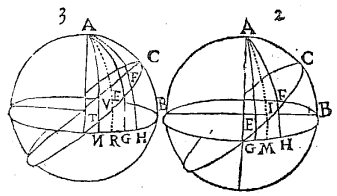
Sit primum HG ad aliquem arcum maiorem, quam FE V. g. HG ad FT. vt BH ad CF. Ex præc. pro. pos. inuenìatur arcus medius maior, quam FE minor, quam FT, & commensurabilis ipsi CF, & sit arcus FV. Ducaturque per polum A, & punctum V circulus maximus AVR, & quia FV ponitur maior, quam FE erit quoque HR maior, quàm HG, vt per se patet.

Ex præcedenti itaque argumento, ita erit BH ad CF, vt HR ad arcum aliquem arcu FV minorem: quia commensurabiles ponuntur FV, & CF. Ex aduersarijs verò ita quoque ponitur BH ad CF, vt HG ad TF. Ergo quoniam habẽt eandem proportionem, quam BH ad CF; habebunt etiam eandem proportionem inter se; & ita erit arcus HG ad arcum FT, vt HR ad arcum aliquem minorẽ, quam FV, quia sunt, vt BH, & CF ex aduersarijs, sic HG ad FT, ex probatis autem HR ad minorem, quam FV, vnde *permutando* erit HG ad HR antecedentes, vt FT ad arcum minorem, quam FV: Sed HG est minor, quã HR. Vnde, & arcus FT esset minor arcu minori, quàm FV, qui arcus FV ipso FT minor est, ex 12. lib. 5. elem. quę res est omnino absurda.



Progress. 3. Quòd si in fig. 3. ita sit BH ad CF, vt HG ad FE, & ponantur incommensurabiles CF arcus, & FE; tunc FE diuidetur per medium in I, & ducetur circulus maximus à polo A, qui sit AIM; Eritque maior HM arcus, quàm MG ex 26. huius, ideoque ex primi progr. probatione maior erit proportio HM ad FI; quàm dimidij totius HG ad FI dimidium arcus FE, sed vt dimidium ad dimidium, ita totum ad totum, quare erit maior proportio HM ad FI, quam totius HG ad totum FE: sed proportio HG ad FE, ex aduersarijs eadem est, quæ BH ad CF. Ergo est maior proportio HM ad FI, quam BH ad CF.

Itaque quia HM habet maiorem proportionem ad FI, quam HB ad CF debebit esse maior arcus ad quem dicit eandem proportionem, quam sit arcus



FI, quod tamen in secundo progressu ostensum est impossibile, nempe quod BH ad CF ita sit, vt arcus HM ad arcum arcu FI maiorem. Itaque cum nec BH sit ad CF, vt HG ad arcum arcu FE, maiorem, nec ad æqualem erit, vt ad minorem, & sic propositio remanet vndequaque probata.

CO-

COROLLARIVM.

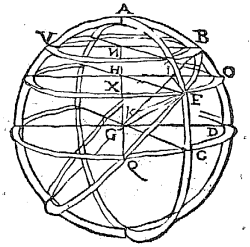
HInc fit maiorem esse rationem arcus BH ad arcum CF, quam arcus HG ad arcum FE. Cùm enim sit, vt BH ad CF, ita HG ad arcum arcu FE minorem: sit autem maior proportio ex 8. propos. quinti elem. arcus HG ad arcum arcu FE minorem; quàm ad FE arcum maiorem: erit quoque maior proportio BH ad CF, quam HG ad FE; ita quia est eadem proportio 8. ad 4. quam 6. ad 3. est autem maior proportio 6. ad 3. quam ad 5. erit quoque maior proportio 8. ad 4. quam 6. ad 5. cùm 8. comprehendat gemina vice 4. non autem 6. comprehendat numerum 5.

THEOR. III. PROPOS. XXXVI.

Si polus parallelorum sit in circumferentia maximi circuli; quem duo alij circuli ad angulos rectos secent, nempe maximus parallelorum, & obliquus aliquis ad eosdem, qui obliquus secetur à maximo circulo per polum ducto.

Semidiameter sphæræ ad semidiametrum eius paralleli, quẽ obliquus circulus tãgit habet maiorẽ rationẽ, quàm circumferentia maximi parallelorũ ad circumferẽtiã obliqui circuli, quæ inter circulos primò, & postremò assumptos per polum parallelorum transeuntes intercipiuntur.

SIt polus A in maximo circulo ABD, cui sint perpendiculares maximus parallelorum DCQ, & obliquus ad parallelos BEQ. & hũc BEQ maximum circulum circulus alter à polo A descendens AEC secet alicubi V. g. in E inter B, & Q. Dico, quòd diameter sphęrę BG habet maiorem proportionem ad diametrum BN paralleli, quem contingit obliquus in B, quàm circumferentia DC ad circumferentiam BE, quę intercipiuntur inter circulos ABD & AEC per polum A transeuntes, quod vt probetur.



Intelligendum est lineas EH, & EI esse sectionem paralleli OEX per intersectionẽ E maximorũ BEQ, & AEC transeuntis cum ijsdem; At EG, & CG esse sectiones maximi AEC, cum obliquo BEQ, & maximo parallelorum DCQ. Et tandem DG, & OH, & BN, esse sectiones circuli ABD, cum parallelis:

Et hinc ex pr. 16. tr. 22. sectionem EI esse perpendicularem ad OH, & ad BG, & angulos BNG, & IHG, & EIH esse rectos, & quia IHG angulus est rectus longior erit basis IG, quam crus IH: vnde triangulũ illud crus super basim IG terminabit in K, ducaturque EK: ex 22. primi triãgulum EIK erit æquale triangulo EIH ob angulum rectum ad I in vtrisq; & EI latus commune, & IK, & IH æquales crura.

Igitur ex Tr. 19. de angulis propos. 4. habebit maiorem rationem GI ad KI, vel ad æqualem IH crura, quam angulus EKI, vel ipsi equalis EHI ad angulũ EGI, sed angulus IHE est equalis angulo DGC. Ergo habebit maiorẽ proportionẽ GI ad IH, quã angulus DGC ad angulũ IGE, quare, & idẽ verificabitur de circũferentijs mẽsurãtibus ex 39. sexti el. nempe DC, & BE. Et obtinebit maiorem proportionem GI ad IH, quàm arcus DC relatus ad BE: Considerandum verò est, quod eadem proportio est GI basis ad crus IH, quam GB semidiametri sphæræ ad BN semidiametrum paralleli, quem tangit obliquus ex 4. sexti. Quare semidiameter quoque sphęrę ad semidiametrum paralleli DV maiorem rationem habebit, quam arcus DC ad arcum BE.

COROLLARIVM.

VNde cum iam cognoscamus quinam circuli ita se intersecent, vt similes sint, vel æquales, & ideo inuicem comparibiles, in proportione; quinam verò circuli non se intersecent in partes æquales, vel similes, nec inuicem, nec cum diametro comparabiles, sphęræ cognitionem talem nacti sumus; vt in comparandis portionibus circulorum inuicem error, non facilè suboriri possit. Cognoscimus quoque necessitatem recurrendi ad sinuum, secantium, & tangentium Tabulas, vt arcuum habeamus cognitionem, cum arcus non dicant inuicem proportionem illam, quam sinus arcubus subtensi.



TRA-

TRACTATVS XXIV.

De Sectionibus Conicis.

POst Sectiones sphæricas ingredimur cognatas sectiones conicas, nec minus illis scientiæ cælesti necessarias, nec minus ingenioſas, aut mirabiles; ſuntq; quinque diuerſæ omninò eſſentiæ, Triangulum, Circulus, Ellipſis, Hyperbola, & Parabola, ſed triangulo poſthabito, de quatuor ſequentibus agemus, & de tribus quidem poſtremis ex inſtituto; de circulo verò obiter, quatenus in ijſdem proprietatibus multoties cum prædictis tribus ſectionum generibus communicat. Huius verò mirabilis cognitionis promotor, & ampliator fuit Appollonius Pergeus, qu ob id Principis Geometræ nomen conſecutus eſt.

EXPENSIO I.

De principijs.

ANtequam ſectiones ipſas cognitione attingamus, cuius corporis ſint ſectiones oportet noſcere, ſicut, & lineas, quę in ipſis trahi poſſunt, eaſque vel terminare, vel diuidere, nomine tenùs agnoſcere, vt deinde earum quoque natura manifeſtior euadat, quæ ab harum appellationum intelligentia dependet.

DEFINITIO I.

COnus eſt corpus habens originem à circumductu lineæ à puncto in ſublimi poſito determinatæ longitudinis circa perimetrum circularem.

Conus propriè dicitur, vt Hyeronimus Vitalis de Mathematica optimè meritus in ſuo Lexico aſſerit. Nux pinea, quæ ex lato in acutum deſinit; ſed hæc appellatio à Mathematicis translata eſt ad ſignificandam pyramidem rotundam, cuius baſis circulus; Deſcribitur verò, quòd manente puncto D linea, quædam DC recta circa circulũ CGHF ferratur, donec à C per GFH in C iterũ redeat, vt fig. 1.

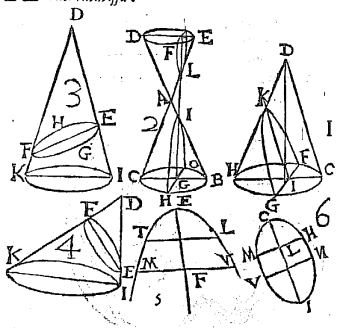
Vnde clarum eſt omnes lineas, quæ à peripheria circuli ducuntur ad verticem, vt CD, vel CH eſſe lineas rectas, quæ verò aliter curuas eſſe, aut certè ſi rectæ ſint, ſolùm tangere, vel ſi ſecant intùs penetrare. Conus quoque poſſet deſcribi ex ductu lineæ circa ellipſim. Verùm; quia ellipſis ex circulo ortum habet, & in quolibet cono etiam in baſi elliptica inixo poteſt circulus duci, qui, & conum ipſum relinquat, & baſim ei ſternat, inde eſt, quod circulum cono pro baſi ſubſternant, vt qui certior, & magis determinatus; quàm ellipſis, quæ ab eo originem, & natalia ducit.

DEFINITIO II.

VErtex coni dicitur manens punctum, à quo educta linea ſuperficiem conicam deſcripſit.

DEFIITNIO III.

AXis coni dicitur recta à vertice in centrum circuli immiſſa.



Vertex itaque coni eſt punctum D, & axis DI, & definitur; quòd cadat in centrum circuli non Ellypſeos licet, & ipſa cono pro baſi deſeruire poſſit; Tum quia eius accidentia nondum manifeſta ſunt, vnde nec propter id pro baſi vſurpatur; tum quia infinitæ diuerſitatis ſunt prorſùs ellipſes, quę eidem cono ſubſterni poſſunt, & quæ non idem centrum commune poſſident; vnde nullus axis determinatus aſſignari poſſet cum deberent multiplicari

plicari, prò vt infinitæ ellipſes in cono aſſignari poſſunt, ſicut, & earum contra.

DEFINITIO IV.

COnus rectus eſt, cuius linea circumducta efformatrix vbique æqualis eſt; Scalenus verò cuius ea linea inæqualis eſt.

Duplicem itaque conum diſtinguimus rectum, qui, & iſoſcellius, æquicruriſque appellatur, & Scalenum, qui obliquus quoque apellatur; hic imperfectior eſt, vtpote duplici axi obnoxius, ille perfectior, & vnius axis: Cæterum in vtroque omnes coni ſectiones exhiberi poſſunt, non vt antiquitas ante Apollonium Pergeum putauit, quæ diſtinxit tria conorum genera iuxta tres angulorum ſpecies, quas à vertice D rectæ ad baſim deductæ continere poterant, nempe Rectos ob angulum ad verticem rectum; Obtuſiangulos ob angulum obtuſum, Acutiangulos ob angulum acutum, in quibus ſingulis vnicam ſectionem ponebant. In recto parallelam, quam apellabant coni recti ſectionem in acutiangulo ellipſim, quam acutianguli, & in obtuſo hiperbolem, quam obtuſianguli ſectionem nominabant.

DEFINITIO V

COni oppoſiti ſunt ad verticem circa eundem axem exiſtentes.

Tales ſunt ABC, ADE in fig. 2. circa axem eundem poſitos.

DEFINITIO VI.

COni ſectio eſt figura à plano diuidente conum in ſuperficie coni effecta.

DEFINITIO VII.

SEctio coni per axem eſt cum planum ſecans per verticem, & per centrum circuli tranſit.

Sectio itaque per axem eſt DHC in fig. 1. quæ per centrum I, axem ID. & per D verticem tranſit, eſtque triangulum, vt ſuo loco oſtendemus.

DEFINITIO VIII.

COni ſectio Parabola eſt cum planum ſecans parallelum vni lateri ſectionis per axem adigitur.

Vt in 1. fig. FGK planum eſt parallelum lineæ CD, quæ eſt crus trianguli, vel ſectionis per axem CDH.

DEFINITIO IX.

COni ſectio Ellipſis eſt, cùm planum ſecans vtrunque crus, ſectionis per axem, ſecat, & angulos inæquales efficit illis, quas cum prædicta ſectione baſis circularis facit.

Sic ſectio EGHF, quia angulus DFE, eſt Inæqualis angulo DKI, vel alterno DIK; Sic, & angulus DEF eſt inæqualis angulo DIK, vel angulo DKI alterno, vt in fig. 3. vocatur ellipſis. Si autẽ angulus DEF angulo DKI, vel DFE angulo DIK alterno, vel ſub contrario, vt in 4 fig. æquaretur, ſectio eſſet circulus, ut ſuo loco oſtendemus Tract. ſeq.

DEFINITIO X.

HYperbola eſt, cum ſectionis planum alteri ſectionis per axem cruri ad verticem producto occurrit.

Sic in fig. 2. ſi GI productum occurrat CA cruri producto vltra verticem in L, dicetur ea ſectio Hyperbola qualis eſt OIN, & ſi planum ſecet vtrunque conum ad verticem erunt oppoſitę figuræ, ſeu Hyperbolæ.

DEFINITIO XI.

DIameter ſectionum eſt recta diuidens lineas parallelas quaslibet, quæ ducuntur intra ſectionem bifariam, & primarius quidem, ſeu axis, qui rectangulè diuidit, alij autem vocantur coniugati axes.

Sic CI in fig. 6. vocatur principalis, & ex generatione diameter primarius, ſeu axis, quia diuidit bifariam, & orthogonaliter rectas in ſectione ductas, quæ dicuntur ordinatæ ad diametrum, ſeu applicatæ HM, & NV, ſi verò non ad angulos rectos erit diameter ſecundarius, ſeu coniugatus vt in fig. 5. EF, qui LT, & VM licet bifariam diuidat, non tamen ad rectos angulos.

DEFINITIO XII.

TRanſuerſa diameter eſt illa, quæ inter duo crura triangvli per axem intercipitur.

Talis eſt in Hyperbola IHL, quæ inter crura ſectionis per axem BA, & AE interciditur, & in hac ſectione eſt diameter prolungata; At in ellipſi eſt ipſe diameter abſque vlla prolungatione, vt EF in fig. 3. qui ſi ſit primarius, ſeu axis dicetur tranſuerſus axis. At in parabola nullus eſt traſuerſus diameter, cum enim eius ſectio ſit parallela vni cruri ſectionis per axem, nunquam poteſt in aliud terminare, quare nec vlla linea in ea poterit in vtrumque crus ſectionis per axem incidere.

DEFINITIO XIII.

VErtex ſectionum eſt extremum diametri, cuiuſcumque: at vertex ſupremus extremum axis.

DEFINITO XIII.

CEntrum eſt, quod tranſuerſum diametrum bifariam diuidit.

Punctum, quod tranſuerſum diametrum bifariam diſcepſit; vocatur centrum, quia in Hyperpeibola, vel Ellipſi omnes diametri ad illud punctum concurrunt, at Parabola nullum habet centrum, quod diametri omnes ſint paralleli, vt oſtendetur.

Præter hęc eſſent Parametri, & Vmbelici definiendi: ſed melius ſuo loco cum de ijs agemus, natura ipſorum innoteſcet.

DEFINITIO XVI.

DVæ ſimiles figuræ ſunt, quæ cum ſint eiuſdem ſpeciei ſegmenta diametrorum ab applicatis factu eorum ad ſegmenta alterius ſunt, vt applicatæ ad applicatas ſub æquatibus angulis.

DE-

DEFINITIO XV

Quales sectiones sint, quæ superpositæ inuicem conſentiunt.

THEOR. I. PROP. I.

Omnis sectio Coni per axem facta triangulum est.

PRobatur. Nam triangulum eſt illud, quod rectis clauditur, & tribus angulis conſtat. In cono autem omnes lineæ terminantes ad verticem rectæ ſunt ex def. Cum verò baſis ſit plana ſuperficies circularis erunt rectæ lineæ per illam extenſæ, vnde AE, & BE, & BA tres rectæ erunt. Propterea que tres tantum angulos ſe tangendo poterunt efficere, ideoque AEB erit triangulum, in fig. propoſ. ſequentis.

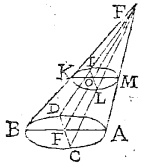
COROLLARIVM

HInc que eſt, quod ſi fiat alia ſectio per axem efficietur aliud triangulum æqualis baſis, vt primum. Nam altera ſectio per axem EF incidet in centrum F, & rectæ CF, & FD radij erunt in circulo ACBD, vt ſunt AF, & FB.

THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis sectio coni circularis parallela baſi circulus eſt.

PRobatur. Nam cum plana ſint equidiſtantia erit, vt FE ad OE, ſic CD ad LI, & AB ad MK; quare CD ad LI, & AB ad MK erunt in eadem proportione. Ideoque permutando AB ad CD erunt, vt MK ad LI; & ideo dimidiæ AF ad FC vt MO ad OL dimidia: ſed AF, & FC ſunt æquales ex præced. Coroll. ergo etiam MO, & OL,, & ita dicas de reliquis: quare cùm omnes MO, & OL, & cæt. à puncto O ducibiles ſint æquales; MIKL erit circulus.



EXPENSIO II.

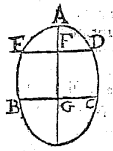
De Diametro, & Applicatis.

PRoprietates mirabiles ſectionum ab ipſo diametro, & applicatis incipiunt, vtpote ille, quę magis obuiam ſunt, & faciliores intellectui ſe produnt, maximè quia ferè omnia, quæ de ſectionibus dici poſſunt, in diametro, & applicatis fundantur.

PROBL. I. PROP. III.

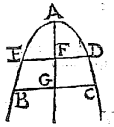
Data quacumque coni ſectione eiuſdem diametrum inuenire.

SIt data quæcumque coni ſectio BAC. Oportetque eiuſdem diametrum exquirere.



Ducantur, vtcumque in ſectione binæ rectæ parallelæ BC, & DE; quæ bifariam ſecentur in F, & G, ductaq; per puncta diuiſionum linea FG occurrat ſectioni in A. Dico *rectam* AFG *propoſitæ* BAC *ſectionis eſſe diametrum*.

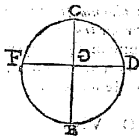
Ratio eſt. Quia æquidiſtant DF, & BC; eaſque bifariam diuidit in G, & F recta AGF. Vnde ex definitione II. erit diameter.



PROBL. II. PROPOS. IV.

Dato triangulo per verticem, & ſectionis diametro Applicatæ longitudinem inuenire.

SIt ABC triangulum per axem coni ductum in fig. prop. ſeq. in quo detur diameter EG. Interuallo dimidiatæ ML diametri baſeos, fiat circulus CF, BD. Accipieſq; LK, quam transferes in diametrum circuli GB à puncto G duces perpendicularē, quę ſit DGF, & FD erit applicatę magnitudo; quam deinde applicabis diametro ſectionis EG interuallo eodem KE in quacumque ſectione, vel Hyperbola, vel Parabola, vel Ellipſi, & erit applicata.



Probatur autem facilè. Quia applicata eſt illa, quæ diuiditur bifariam à diametro: ſed punctum G eſt punctum diametri, illudque bifariam diuidit linea DF in G ex 13. lib. 3. el. cum ducta ſit perpendicularis diametro GB circuli DCBF ex conſtructione. Quare erit applicata, cùm puncta F, D ſint communia circulo BD, & ſectionis DEF, & ſint I, & V in circulo MILV.

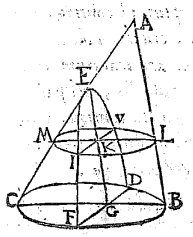
THEOR. I. PROPOS. V.

Si parabolæ cuiuſcumque ad diametrum binæ rectæ lineæ ſint ordinatim applicatæ, erunt quadrata ipſarum ad inuicem, vt interceptæ diametri portiones inter ipſas, & verticem.

SIt Conus ABC, in quo parabola DEF, cuius diameter parabolica EG; applicatæ verò GF, & IK ad diametrum EG, trahaturque LM. Dico, *ita eſt quadratum factum ex* GF *ad quadratum factum ex* KI, *vt* GE *ad* KE portiones diametri inter verticem E, & ordinatim applicatas interceptæ.

Reminiſcenda eſt 35. propoſ. Eucl. 3. hæc enim in illa fundatur.

Nam in circulis ex 2. h. LVIML, & CDBF parallelis ſe ſecent mutuò diametri LM, & CB cum chordis VI, & FD, & ad angulos rectos in K (angulus enim K rectus eſt, licet id fig. non exprimat) vt ex dictis propoſ. 4. huius. Quare, ex ſegmentis LK, & KM conſtituatur rectangulum, & ſegmentis æqualibus VK, & KI conſtituatur quadratum, erunt æqualia: Sic ſi ex ſegmentis BG, GC rectangulum, & æqualibus DG, & GF quadratum conſtituatur, & hęc erunt inter ſe equalia. Vnde ita erit rectangulum conſtitutum ex CG, & GB ſegmentis diametri maioris circuli ad rectangulū ex ſegmentis LK, & KM minoris, vt quadratum ex ſegmētis chordæ GD, & GF ad quadratum ex ſegmentis chordę LK, & KV. Sed iſtorum duorum



rectangulorum altitudines ſunt eædem: ſiquidem ſegmenta LK, & BG; quia ſunt parallela, & inter parallelas BA, GE ſunt æqualia ex prop. 33. primi. Ergo ſe habebunt inuicem, vt baſes GC, & KM ex propoſ. 1. lib. 6. Eucl. Quo ſuppoſito ſic probo propoſitionem ex propoſ. 4. Coroll. lib. 6 ſicut eſt GC ad KM, quæ ſunt parallelæ in triangulo EGC, ita eſt EG ad EK. Sed, vt eſt latus CG ad MK, ita eſt rectangulum ex ſegmentis BG, & GC ad rectangulum ex ſegmentis LK, & KM; & æqualem proportionem dicit hoc rectangulum ex ſegmentis diametri BG, & CG ad rectangulum ex ſegmentis LK, & KM, quam quadratum ex ſegmentis chordæ DG, & GF ad quadratum ex chordæ KV, & KI, vt diximus. Ergo ex 16. lib. 5. Elem. quam proportionem dicit quadratum hoc GF ex ſegmentis chordæ maioris circuli GF, & GD ad quadratum ex ſegmentis IK, KV chordæ minoris circuli, eandem dicit GE ad KE portiones diametri parabolici à vertice inter applicatas interceptæ; quòd erat probandum.

THEOR. II. PROPOS. VI.

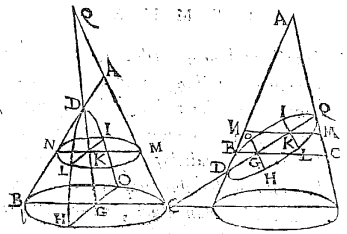
In omni Ellipſi, & Hyperbola quadrata duarum ordinatim applicatarum eam proportionem dicent ad inuicem, quam rectangula portionum diametri interceptarum inter ipſas, & vertices.

SIt conus ABC, ſiue obliquus, ſiue rectus. Hyperbola ODH, vel Ellipſis ODHLIQ, in quibus ſint ordinatim applicatæ HGO, & LKI: diametri autem intercepti portiones ſint in ellipſi GD, & GQ, vel QK, & KD intra ipſam. In Hyperbola autem extra eam, donec diameter occurrat lateri trianguli CA producto in Q, vt eſt GQ, ita quod GQ, & DC ſint portiones interceptæ, vel QK, & KD.

Dicit itaque propoſitio, *quòd ſi fiat rectangulum* ex QK, & DK *hoc erit ad rectangulum factum ex* QG, & GD *interceptis portionibus tamquam ex duobus lateribus, vt quadratum* KL *ad quadratum erectum ſuper* GH.

Aduertendum verò eſt primo progreſſ. id quòd prænotauimus in præced. expenſ. rectangulum factum ex portionibus MK, & KN eſſe æquale quadrato ex KL conſtituto. Sicut, & rectangulum ex lateribus CG, & GB quadrato ex GH confecto, vt probat Eucl. propoſ. 35. lib. 3. & ideo eſſe rectangulum ex MK, & KN lateribus ad rectangulum ex GC, & BG, vt quadratum KL ad quadratum ex GH.

Aduerte, quòd in cono Ellipſis non ſunt deſcripti circuli circa diametros NM, & EC ad vitandam confuſionem; ſed ſunt ſubintelligendi baſi coni paralleli per L, H, O, I tranſeuntes.



Progr. 2. Nota quoq; proportionem laterum MK ad CG in triangulo CQ eſſe eandem ex Cor. prop. 4. lib. 6. Eucl. quæ portionis diametri, cruriſque QK ad crus Q. Sicut ex eadem proportionem lateris KN ad GB latus eſſe eandem, quæ DK ad DG. Quare ſi componatur rectangulum ex QK, & KD lateribus, quæ dicunt eam proportionem, quam latera rectanguli MK, & KN; ſicut, & rectangulum ex QG, & GD lateribus, quæ habent eandē proportionem, quam latera CG, & GB erit compoſitā proportione ex tr. 17. pr. 13. rectangulū ex QK, & KD ad rectangulum QG, GD; ſicut rectangulum ex MK, & KN ad rectangulum ex CG, & GB.

Quo poſito, ecce patet propoſitio. Quadratum ex applicata KL refertur proportione ad quadratum applicatæ GH, vt rectangulum ex lateribus MK, & KN ad rectangulum ex CG, & GB ex primo progreſſ. Sed hęc proportio rectanguli MK, & KN minoris ad rectangulum maius, ex CG, & GB lateribus eſt eadem, quā refertur rectangulum ex diametri Hyperbolici, vel Elliptici portionibus QK, & KD ad rectangulum QG, & GD ſegmentis ex 2. progreſſ. Ergo proportio quadrati applicatæ KL, qua refertur ad quadratum applicatę GH eſt eadem quā rectangulum ex ſegmentis diametri Hyperbolici, vel Elliptici QK, & KD ad rectangulum ex eiuſdem QG, & GD. Quę de Ellipſi dicuntur etiam de circulo debent intelligi.

COROLLARIVM.

PRopoſitio vniuerſaliter intelligenda eſt de quocunq; cono, ſiue obliquo, ſiue recto, ſeu applicatę ſint ad angulos rectos diametro, vt in recto, ſeu ad angulos obliquos, vt in obliquo contingit: Vnde colliges duplex genus diametrorum dari vnum, in quo applicatæ ſunt ad angulos rectos, alterum ad angulos obliquos, ſeu in Parabola, ſeu Hyperbola, ſeu Ellipſi.

EXPENSIO III.

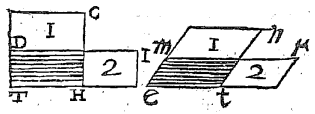
De Parametro.

PArameter est linea quædam assumpta extra sectionem: quæ est extrema proportionalis diametri interceptæ, & applicatę in parabola. At in Hyperbola, & Ellipsi est quoque tertia proportionalis inter diametrum interceptam, & applicatam: sed additâ ei, vel demptâ quædam portione lineæ, quam etiam ostendemus, cuius rationis sit.

LEMMA.

Si sit rectangulum quodlibet, & parallelogrammum rectangulo æquilaterum. Sintque duo alia rectangulum nimirum, & parallelogrammum ei æquilaterum, sed primo parallelogrammo æquiangulum; ita se habebit proportione rectangulum ad rectangulum, vt parallelogrammum ad parallelogrammum.

SIt primum rectangulum TC, & aliud secundum TI, quæ posita vnùm super aliud occupabunt spatium commune DH. Item sit parallelogrammum primum, quodcumque, vt E N, sed primo rectangulo TC æquilaterum, & secundum E R alio secundo TI rectangulo item æquilaterum; sed quæ sint inuicem æquiangula, ita quod vnum super aliud positum, qua parte conueniunt in angulis æqualibus occupent commune spatium T M dicit propositio, quod primum rectangulum TC primo parallelogrammo E N dicet eam proportionem; quam secundum rectangulum TI dicit secundo parallelogrammo E R.



Probatur. Nam TC rectangulum primum se habet proportione ad E N parallelogrammum primum, vt sua pars DH ad suam partem M t, quòd sint super æquales bases TH, & Et ex prop. 1. lib. 6. Eucl. Coroll.

Sed pars hæc DH rectanguli primi, quæ etiam est communis secundo eadem proportione refertur ad partem M t parallelogrammi item primi, quæ etiam est communis secundo parallelogrammo, vt rectangulum secundum TI ad rectangulum secundum E R propter eandem rationem æqualium basium DT, & E M.

Ergo arguendo ex 16 lib. 5. ita se habet proportione primum rectangulum TC ad primum parallelogrammum E N, vt secundum rectangulum TI ad secundum parallelogrammum E R, quod est propositum.

Hoc autem Lemma assumitur, vt quando loquimur de rectangulis, idem intelligatur de parallelogrammis illis æquilateribus, dummodo sicut illa omnia conueniant in rectitudine angulorum, sic hæc parallelogramma inuicem referantur similibus angulis; & æquiangula sint, quod in posterum semper erit obseruandum.

THEOR. I. PROPOS. VII.

Si in omni sectione parabolica, quadratum alicuius ordinatim applicatæ, se habeat ad quadratum diametri parabolici intercepti ab eâ, & à vertice, vt idem diameter interceptus ad contiguam aliquam verticis; erunt quadrata, vel rhombi omnium applicatarum ordinatim æqualia rectangulis, vel parallelogrammis factis à dicta contigua verticis, & intercepto parabolico diametro inter eas applicatas, & verticem.

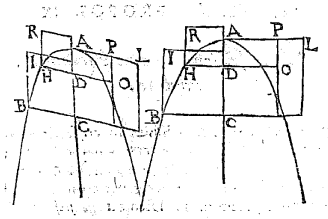
DEtur Parabola, in quâ diameter AC, applicata ordinatim CB, cuius quadratum sit CI dicit propositio. Quòd si se habeat hoc quadratũ CI in proportione ad quadratum CL, quod est factum super diametrum parabolicum interceptum inter CB ordinatim applicatam, & verticem parabolæ A. Si inquam CI quadratum, seu rhombus sit ad CL quadratum, seu rhombum in proportione, vt ipsa contigua verticis AP ad diametrum interceptum AC. Tunc cuiuslibet alius applicatæ, vt DH quadratum, seu rhombus, quale est DR. æquale erit rectangulo, seu parallelogrammo, quod comprehenditur ab ipsa contigua PA, & intercepta diametri portione inter verticem, & alteram applicatam AD, quale est rectangulum, seu parallelogrammum PD.

Progress. 1. Aduertendum est ex propos. 21 lib. 6. Eucl. & ex eius Coroll. figuras similes esse in duplicata ratione laterum homologorum, ita quòd quadratum V. g. CI, sit ad quadratum CL, non vt latus BC ad latus CA; sed proportio debet esse duplicata; nempe gemina vice repetita, quare debet reperiri tertia proportionalis ex 14 prop 6. Eucl. qualem hic ex ea propositione reperiumus PA; sic enim proportio est repetita: nam ita se habet PA ad CB, vt CB ad CA; quare PA ad CA habebit eandem proportionem, quam quadratum CI ad quadratum CL, nempe geminatam laterum.

Progress. 2. Reminiscendum est propos. 1. lib. 6. Eucl. nempe ita esse propter eandem basim CA rectãgulum CP ad quadratũ CL, vt altitudines PA, ad AL; & ideo, quòd quadratum CI sit æquale rectangulo PC; siquidem eidem quadrato LC eandem dicunt proportionem; nempe eam ipsam, quam dicit PA ad AC, quadratum quidem CB; quia talem inuenimus PA, rectãgulum verò PC propter basim eandem AC: Quare ex Eucl. prop. 7. lib. 5. erunt rectangulum PC, & quadratum CI æqualia, quòd, & de Rhombo CI, & parallelogrammo CP intelligendum est ob lemma antepositum, quo supposito.

Progress. 3. Rectangulum PC habet eandem proportionem ad rectangulum DP; quam altitudo eius AC ad altitudinem AD propter basim AP eandem 1. propos. Euclid. & è contrà.

Quare Probatur propos. Nam propos. 5. demonstratum est quadratum CI esse ad quadratum DR; vt altitudo CA ad altitudinem DA; sed etiam ex 3. progress. quam dicit proportionem AC ad AD altitudines eandem dicunt, & rectangula PC ad PD adiacẽtia eis, ergo ita erit in proportione CI ad DR quadrata, quam PC ad PD rectangula. Ergo, vti



poterimus *permutatione*, & comparare quadratum malus, rectangulo maiori, sicut minus quadratum, minori rectangulo, & ideo ita se habebit quadratum IC maius ad rectangulum PC maius, vt quadratum minus DR. ad rectangulum DP minus.

Sed in 2. progressu vidimus malus rectangulum PC, & maius quadratum CI esse æqualia, ergo erit etiam æquale quadratum DR minus rectangulo PD minori, quod cõprehenditur à contigua verticis PA, & diametri parabolici portione intercepta AD, & ita dicas de alijs.

COROLLARIVM.

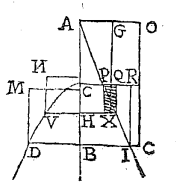
HInc colliges. Quod cum contigua PA habeat hanc specialem proprietatem, vt rectangula ab ea comprehensa, & diametri portione interceptâ sint æqualia quadratis effectis super ordinatim applicatas speciali nomine insignitur, & vocatur Parameter, quòd sit mensura omnium rectangulorum, quæ æquantur quadratis cuiuscumque applicatæ ordinatim, quæ in parabola trahatur.

THEOR. II. PROP. VIII.

In omni sectione Hyperbolica, vel Elliptica, si quadratum alicuius ordinatim applicatæ se habeat ad rectangulum, quod sub diametro transuersa, & intercepto comprehenditur, vt diameter transuersa ad contiguam lineam verticis; Alia quadrata aliarum applicatarum erunt rectangulo, quod sub hac contigua, & intercepta diametri portione inter applicatas, & verticem comprehenditur, æqualia, si tamen figuram similem similiterque positam in Hyperbola addas, in Ellipsi subducas.

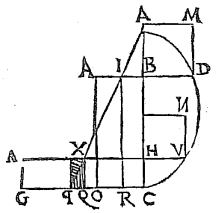
SIt Hyperbola, vel Ellipsis DVC, sitque ordinatim applicata DB, cuius quadratum BM, sit ad rectangulum BO, quod sub portionibus, nempe transuersa AB, & intercepta CB, vel portionibus interceptis. Si ergo quadratum BM sit ad rectangulum BO, vt diameter transuersa AC ad aliquam, quæ sit verticis C contiguam, nempe CP; ideſt sit duabus BC, & DB tertia proportionalis.

Dicit propositio, quod si sit aliud, cuiuslibet applicatæ VH quadratum HN hoc erit æquale rectangulo, quod fit ab intercepta CH inter applicatam, & verticem pro vno latere, & contigua verticis pro alio CP; sed cum hac cautella; quòd in Hyperbola insuper abundat figura XP similis, similiterq; posita, vt totum rect. AH, GX: in Ellipsi verò deficit.



Progr. 1. Rectangulum BO ad rectangulum BR dicit eadem proportionem, quam AC ad CP. Ratio est; quia sunt super eandem basim BC; ex constructione, vnde sunt inuicem; vt altitudines BA ad BI. Istę vnrò altitudines correspõdent proportione, & ita est BA ad BI, vt CA ad CP. Ratio est, ex Euclid. propos. 4. lib. 6. in Coroll. quia sunt in eodem triangulo parallelæ CP, & BI, Ideoq; rectangulũ BO ex BA erit ad BR. ex BI, vt CA ad PC; quòd istæ lineæ sint, vt BA ad BI altitudines.

Progr. 2. Prorsùs idem dicendum de parallelogrammis HG, & HQ. Sunt enim super eandem basim CH ex constructione: siquidem debet comprehendi rectangulum HG à lateribus AH, & HC, & rectangulum HQ à lateribus HC, & HX. Vnde erunt inuicem, vt altitudines XH, & HA. Altitudo verò HA ad altitudinem HX dicit eam proportionẽ, quam AC ad CP cum CP sit ei CX parallela in eodem triangulo ACP, & ideo AC erit ad CP, vt HG rectangulum ad HQ.



Progress. 3. Quadratum BM est æquale rectangulo BR. Ratio est; quia eidem proportionem eandem dicunt; quæ verò eidem proportionem eandem dicunt ex 7. lib. 5. Eucl. sunt æqualia. Dicunt autem eandẽ rationem eidem. Nam ita se habet quadratum BM applicatæ ad rectangulum comprehensum sub BC, & BA, quam AC diameter ad CP contingentem ex præsuppositione. At in progress. 1. probatum est, quod huic eidem CA ad CP dicit eandem proportionem rectangulum BO ad rectangulum BR. Quare, cùm quadratum applicatæ DB, & BR rectangulum eidem rectangulo BO eandem proportionem dicant, quam AC ad CP; necesse est DB, quadratum, & BR. rectangulum esse æqualia.

Progress. 4. Probatur Itaque ex præmissis principijs propos. Ita est AC diameter ad CP conti-

guam verticis, vt HA ad HX ob similitudinem triangulorum ACP, & AHX, & ex eadem ratione HA ad HX est in proportione, vt BA ad BI. Ergo etiam parallelogramma super eis constituta, & quæ cum eis eandem proportionem habent ex 1. & 2. progr. inter se proportionalia erunt, & ita erit BO ad BR, sicut HG ad HQ; quia lineę BI, & BA sicut, & HA, & HX sunt eorum altitudines. Cum ergo sit rectangulum BO ad BR, vt HG ad HQ, poterimus vti permutatione, & inferre, quòd etiam BO rectangulum ad HG rectangulum sit, vt BR rectangulum ad HQ rectangulum.

Sed ex propos. 2. Hæc rectangula BO, ad HG dicunt eandem proportionem, ac quadrata applicatarum nimirum BM ad HN. Ergo etiam eadem proportionem fruetur BR rectangulum relatum ad rectangulum HQ.

Progress. 5. Sed rectangulum BR ex 3. progr. est æquale quadrato BM; Ergo etiam rectangulum HQ erit æquale quadrato HN. Quod oportebat ostendere. Vides autem, quòd in Ellipsi rectangulum CX continetur sub CP contigua, & CH diametro intercepta, defficiente tamen figura PX, & in Hyperbole abundante.

COROLLARIVM.

REcta itaque CP contigua vertici vocabitur Parameter, seu latus rectum, seu coefficiens, eo quod iuxta eam mensurentur cæteræ applicatæ diametro, quòd eorum quadrata, vt HN, & BM sint æqualia parallelogrammo sub ipsa, & diametri portione intercepta inter applicatam, vt HQ, & BR, & verticem C; figura tamen PX, vel PI, in Ellipsi deficiente illi parallelogrammo, & abundante in Hyperbola. Et inde istæ figuræ nomen sortitæ sunt: quia .n. in parabola quadrata applicatarũ æquãtur rectangulo sub Parametro, & intercepta diametri portione, vocatur Parabola, idest æqualis. Quæ verò aliquid deficit in Ellipsi ad æqualitatem, eo nõmine, quod significat defectum, insignitur: at quia abundat in Hyperbola dicitur talis, quod nomen est idem ac excessus.

COROLLARIVM II.

HInc etiam colliges illam Hyperbolam, seu Ellipsim esse specie notam, cuius diametri transuersi proportio ad contiguam Parametrum sit, vt rectangulum sub AB, & BC comprehẽsum ad quadratum BM vel è contra, Siquidem AC est ad CP, vt AB ad BI, idest vt rectangulum eiusdem basis CA ad CI, idest vt CA ad quadratum BM applicatę, æquale ipsi CI. Vnde ex præc. & omnia alia rectangula à diametro transuersa, & intercepta simul pro vno latere, & intercepta tantùm pro alio dicent eam proportionem, ad quadratum applicatæ, quam diameter transuersa ad Parametrum; Quoniam enim quadratum BM ostensum est æquale in 3. progr. rectangulo BR, & hoc sit ad rectangulum BO ex AB, & BC diametro intercepta; vt PC ad CA ex 4. progress. *conuertendo* etiam quadratum ex DB erit ad BO ex BC, & BA; vt CP Parameter ad CA diametrum interceptam.

Sic dicas de quadrato HN, quòd est ostensum progress. 5. æquale rectangulo HQ, quod est ad HG rectangulum, vt HA ad HX altitudines, at CQ, idest HX est ad HA, vt CP ad CA, & sic de alijs.

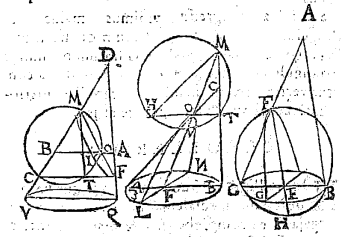
COROLLARIVM III.

HÆc verò, quæ dicta sunt de Ellipsi etiam de circuli circumferentia prorsùs militant, vt si pro Ellipsi substituas circulum, eadem ostensione intelligere poteris.

PROBL. I. PROPOS. IX.

Cuiusque sectionis in cono Parametrum exhibere.

SIt conus ABC, & exhibita in eo sectio parabola; cuius diameter EF, & BE perpendicularis ad eius applicatam EG. Per tria puncta B, C, F transeat circulus BGF, & prolungetur diameter FE ad circumferentiam in H. Dico EH *esse sectionis Parametrum*.



Progress. 1. Obseruandum est BGC esse circulum, vtpote basis coni; ideoque ex 35 lib. 3. quadratum EG esse æquale rectangulo ex BE, & EC: & quòd ex 3. huius quadratum lineę EG quoque æquale sit rectangulo ex diametro sectionis EF, & parametro.

Progress. 2. Vnde ostenditur propos. Rectangulo BEC, & ideo æquali quadrato est EG est æquale rectangulum ex FE diametro, & FH. Ergo EH erit Parameter, vtpote efficiens cum FE diametro æquale rectangulum quadrato ex EG ex 8. h. Cor.

Sit pro secundo casu exhibita Hyperbola in cono ACB; cuius diameter transuersa MF; ducanturque AB perpendicularis sectioni LN; & ideo, vt diameter basis circuli dirimet NL in duo segmenta æqualia ex prop. 27. l. 3. Cor. Vnde FL erit applicata. Deinde lateri trianguli conici CA per A transeuntis ducatur à vertice M diametri transuersæ parallela MH, & per O verticem sectionis TH parallela basi AB, perque tria puncta T, M, H transeat circulus, hic abscindet VO, quam dico *esse Parametrum*.

Progress. 3. Præmonstrandum est FL esse applicatam, cuius quadratum ex 35. lib. 3. æquatur rectangulo ex AF, & FB. Rursusque ex propos. 8. h. Coroll. 2. esse quadratum applicatæ FL ad rectangulum diametri transuersæ ex MF, & OF; vt Parameter ad transuersam diametrum MO, & ideo etiam rectangulum ex AF, & FB ad rectangulum ex FM, & FO, erit, vt Parameter ad OM diametrum. Ideoque ostendendum est rectangulum ex AF, & FB, & ideo FL quadratum esse ad rectangulum MF, & FO; vt VO, ad OM, vt sic ostendetur VO esse Parametrum.

Progr. 4. Sic verò ostenditur. Vt BF est ad MF; ita TO est ad MO ob parallelas TO, & BF ex propos. 4. lib. 6. & AF ad FO, vt HO ad OM ob similia triangula, & æquiangula MOH, & FOA: cùm sint parallelæ OH, & FA; nec non, MH, & OA ex constructione; Quare rectangulum ex AF, & FB, & ideo quadratum FL ei æquale erit ad rectangulum ex MF, & FO; vt rectangulum ex TO, & OH ad rectangulum OM, & OM cum ex ijsdem proportionibus componatur earum ratio BF ad FM eadem, quæ TO ad OM, & FA ad FO eadem, quæ OH ad OM, vt hic est videre.

BF,	vt	TO	&	FA,	vt OH
est	ad			ad	ad
FM		OM		OF	OM
Ergo Compositum,				vt Compositum	
ex BF, & FA				TO, & OH	
ad		erit		ad	
FM, & OF				OM, & OM	

At rectangulum TO, & OH est æquale rectangulo MO, & OV. Ergo rectangulum MO, OV erit ad quadratum æqualis altitudinis OM, & ideo, vt basis OV ad basim OM, vt Rectang AF, & FB, idest FL quadratum ad rectangulum ex FM, & OF. Quaderè; Cùm parameter ponatur ad OM ex Cor. propos 6. h. vt FL quadratum ad rectangulum ex FM, & FO, & OV talis sit rationis ad OM; erit OV Parameter.

Sit tandem data ellipsis, cuius diameter FM. & sectio plani acti per axem FD in ipso cono, cuius basis QV circulus, cuius diameter QV sit sectio quoq; plani DQV, cui agatur ab F extremo diametri parallela FC, & ab altero extremo diametro M parallela lateri DF, sit MT, perq; tria puncta MCT transeat circulus. Dico rectam FO esse parametro æqualem.

Præsumptum. Agatur itaque ostensionis gratia per O parallela basis AB; & à puncto O applicata OI, Igitur ex AQ, & OB rectangulum erit æquale quadrato applicatæ OI, ex 35. lib. 3. elem.

Sic etiam ex 6. Coroll. huius quadratum OI, & ideo rectangulum ex AO, & OB erit ad rectangulum ex diametri segmentis OM, & FO, vt parameter ad diametrum FM,

Probatur propos. ob parallelas FA, & TM, necnon, & AC, & FT triangulum FAO est æquiangulum triangulo FMT; ideoque vt AO ad FO; sic FT ad FM: Rursùsque eadem rationem ob parallelas CB, & FC in triangulo FMC erit OB ad OM, vt FC ad FM, vt hic vides.

AO	vt	FT	&	OB	vt FC
ad		ad		ad	ad
FO		FM		OM	FM
Ergo Compositum,				vt Compositum.	
AO,	&	OB		FT	& FC
ad		erit		ad	
FO	&	OM		MF	& MF

Quadere rectanguli AO, & OB ratio ad rectangulum FO; & OM erit composita ex ijsdem rationibus rectanguli ex FT, & FC ad quadratum MF; & ideo componendo rationes erit rectangulum ex AO, & OB ad rectangulum FO, & OM, vt FT, & FC rectangulum ad quadratum MF.

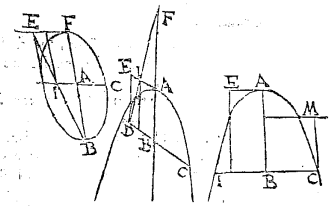
Vnde Quadratum ex OI; quod æquatur rectangulo ex AO, & OB, erit quoque ad rectangulum FO, & OM, vt rectangulum ex FT, & FC ad quadratũ FM. Sed rectangulum ex FT, & FC est æquale rectangulo FM, & FO, ex Coroll 1. propos 26 lib 3 elem. quod incidant in circulum CMO. Ergo ex OI quadrarum erit ad rectangulum FO, & MO, vt ex FM, & OF rectangulum ad quadratum FM. Rectangulum verò FM, & FO est æqualis altitudinis quadrati FM. Ergo erit basis FO ad diametrum transuersam FM, vt quadratum OI ad FO, & OM rectangulum, & ideo FO erit æqualis Parametro.

PROBL. II. PROP. X.

Datæ cuiuscumque sectionis contiguam Parametrum inuenire dato diametro, & applicata.

SIt primum Coni sectio Parabola CAI, ejusque diameter AB, cui applicata sit CB; factoque quadrato BM fiat rectangulum ex BA ei æquale, reperiendo applicatæ BA, & BC ex Euc. prop. 14 l. 6. tertiam proportionalem EA. Nam ex propos. 19. Eucl. 6. parallelogrammum ex BA, & AE constitutum erit æquale quadrato BM. Porrò ex propos. 7. vidimus quadratum CB esse æquale rectangulo sub diametro intercepta, & parametro contigua. Vnde AE Parameter erit,

Si verò daretur applicata, quæ BM Rhombum faceret, quod angulus B non esset rectus esset reperiendum parallelogrammum Rhombo æquiangulum, at æquilaterum ipsi BE.



Casus 2. At detur sectio Hyperbola CAD, cuius diameter FAB transuersa, & intercepta; applicata verò CB data. Portioni BA diametri intercepti, & CB applicatæ reperiatur tertia proportionalis BD, eritque ductæ AE æquali BD, & parallela, repertum rectangulum, vel parallelogrammum DABE: deinde ab extremo datę diametri F ducatur FD ad D, quę secabit AE in I. Dico AI *esse Parametrũ*.

Probatur. Quòd ex propos 8. rectangulum contentũ ab ipsa AI, sit æquale quadrato applicatæ abundans tamen figura ID simili, similiterque posita ac esset rectangulum ex BF, & FD.

Casus 3. Si postremò sit Ellipsis FCB, cuius diameter FAB, & applicata AC diametro interceptæ AF, & applicatæ AC inueniatur tertia proportionalis, prout supradictum est, quæ sit AI, & ex vertice B per I ducatur recta, & ab F vbi terminat diameter, agatur parallela applicatæ CA, quę sit BF. Dico rectum FE *esse parametrum*. Nam continet FI rectangulum æquale quadrato ex CA, si tamen deficiat figura IE similis, similiterque posita ex propos. 8. ac EF, & BF rectangulum,

EX-

EXPENSIO III.

De tangentibus.

SIcuti circulus suas tangentes habet, ex quibus mirabiles circuli passiones prodeũt, ita, & conicæ tangentes; nec minoris vtilitatis sunt, maximè ad descriptionem sectionum.

THEOR. I. PROP. XI.

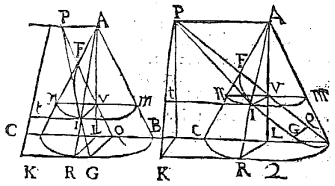
Si conus per axem plano aliquo, sectus sit, & alia sectione ex tribus coni ad angulos rectos ei sectioni, denuò secetur, & electo in sectionis posterioris circumferentia puncto à vertice coni per illud ad circulũ basim eiusdem coni, planum aliquod agatur.

Hoc planum conum secundum lineam rectam tanget.

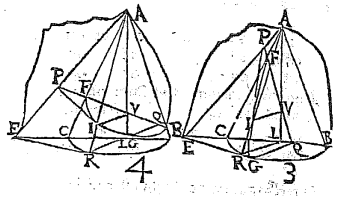
Et diametrum figurarum secabit, & à puncto, quo secat illum recta ducta ad punctum electum, hæc linea sectionem conicam non secabit, sed tantum tanget.

TRes partes habet hæc propositio, sed facilis est probatio; nęnèque à sola explicatione propositionis habetur.

SIt ergo medietas coni ABC, qui sit per axem à plano aliquo BAC sectus, cui sectioni, alia sectio, seu Elliptica, seu Hyperbolica, seu Parabolica fiat FIG, deinde electo in circumferentia sectionum posteriorum puncto I, per quod, & verticem coni A planum ARP adaptetur. Dico *primò hoc planum tangere totum conum à vertice A vsq; ad basim circularem* BRC *secundùm lineam rectam* AIR.



Probatur. Quia tangit secundùm altitudinem AR, quæ est linea recta, siquidem conus à rectâ efficitur. Ergo potest cum sit planum totam lineam AR continuo tactu tangere, sed conus ex definitione secundùm crassitudinem est circularis; planum verò in puncto circulum tangit, ergo ille tactus secundum latitudinem non erit amplior puncto, quæ est linea secundùm latitudinem accepta. Dico secundò. Quod si diameter sectionũ, quæ producatur in plano ABC, in quo est, quòd ab hoc posteriori plano PAR secabitur. Nam, vel planum, vt in primâ, vt secundâ figurâ equidistat; ita vt LR faciat cum RK & LC lineis angulos rectos, & totum planum PARK cum plano LAR. Quare ex 16 Tract. 21. sectio AP erit ad AL ad rectos ãgulos. Fiet autẽ hęc sectio, quià cum propter angulũ acutum R planum AP feratur versùs verticem coni A, & inclinet ad planum BAC, secabit in vertice A secundùm sectionem AP planum per verticem ductum BAC.



Quod, si non æquidistet, vt in 3. & 4. fig. sed faciat angulum acutum ERL, tunc clarum est, quod versùs E tandem occurret plano per verticem coni ducto EAB, & faciet in eo sectionem AE. Vnde clarum euadit, quod si versùs eam partem, versùs, quam inclinant inuicem plana, vt F producatur diameter FQ necessario impinget in hanc sectionem AE in P.

Dico tertio, quod si ab hoc puncto F ducatur in plano tangente RPA ad punctum electum I recta PI; quòd continget sectionem, & non secabit. Quod patet. Nam est in plano, quod sectionem in I tangit. Ergo & linea per punctum I ducta; etiam si prolungaretur, non secaret, sed cum ipso plano contingeret.

COROLLARIVM.

FLicies hinc in figura 1, & 2, cum plana secans ABC, & tangens AK parallelè se habeant applicatam VI esse semidiametrum, cum enim mn sit diameter, patet ex 2. probatione, quòd si contingens IT facit angulum rectum, cum VI, & VI facit angulum rectum cum mn, quod necessario V est centrum circuli m I n ex 21. propos. 3. lib. Elem.

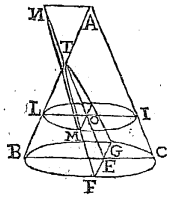
THEOR. II. PROPOS. XI.

Si parabolam recta contingat linea producta diametro occurrens, & à tactu ad diametrum recta sit ordinatim applicata, erunt interceptæ diametri portiones, vtrinquè partes æquales; nempe inter occurrentem, & verticem, & inter applicatam, & verticem,

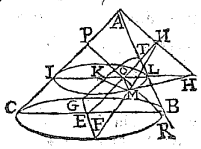
SIt parabola GTF in cono ACB, cuius diameter ET, cuius vertex T; recta verò contingat sectionem in M, vbi, & applicata OM terminat, & occurrat diametro productę in N, & pro primo Casu AN sit parallela diametro IL. Dico *primò, quod portio diametri inter verticem parabolicum* OT, *& portio* TN *diametri à vertice vsque ad punctum* N *tangentis sunt æquales.*

Probatur facilitèr in isto casu. Nam OI, & AN sunt

sun parallelæ, & æquales, quod sint inter parallelas CA crus, & EN diametrum; sed cum ex Coroll. propos. 11. h. o sit centrũ circuli, 10 erit æqualis lineæ OL; Ergo etiam AN erit æqualis OL. Quare, & OT erit æqualis TN: Cùm enim anguli inter parallelas in triangulis OTL, & ATN sint æquales, & bases æquales omnia latera singula singulis erunt æqualia, ex 27. propos. lib 1. elem.



At si linea AN non sit æquidistans; quòd planũ, super quod contingens deducta est non sit æquidistans, vt ex prop. 11. huius, & in altera fig. patet, tunc in circulo IML ex propos 21 lib 3. elem. contingens MH erit perpendicularis ad diametrum KM, & ad IL applicata OM, & MK ducta à contactu M ad centrum K. Quare ex propos. 23. progr. 3. Tract 15. erit HI ad OI, vt HL ad LO: ducta igitur parallela ad AH lineam sectionis planorum tangentis, & secantis per punctum O, quæ sit PR. ostendendum est, quod PO, & OR sunt æquales, & ideo etiam OT, & TN. Sic verò ostenditur. Crus HI est ad OI, vt AH ad OP in triangulo AH I, ex Coroll. prop. 4. l. 6. Eucl ob parallelas AH, & RP. Sed, quę est proportio HI ad IO, eadem est ex propos. 23, Tract. 15. HL ad LO.



Ergo in duobus triangulis ad verticem equiangulis ALH, & OLR ob parallelas basium, erit etiam eadem proportio AH basis ad OR basim ex 4. lib. 6. Elem. vt est HL ad LO, & ideo, vt HI ad IO, & HA ad OP. Quare cum eisdem PO, & OR. crus AH eandem dicant proportionem, quam HL ad LO, erunt æquales ex propos. 7. lib. 5.

Et quia ON est parallela lateri PA in triangulo PRA, erunt quoque æquales AT, & TR, sicut sunt RO, & OP; Quod si tales sunt, in triangulis æquiangulis ATN, & OTR ob bases parallelas ex prop. 30. & 17. lib. 1. elem. OR, & AN, erunt quoque equalia crura OT, & TN sicut sunt RT, & TA: quod est propositum. Nam sic TO est pars diametri interior, equalis exteriori TN.

COROLLARIVM.

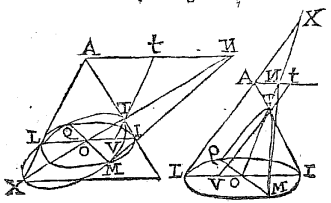
COllige itaque, quod cùm sit equalis TN ad NQ quadratum ex OM, quod propos. 7. expens. 2. Probatũ est æquale rectangulo ab OT portione diametri intercepta inter verticẽ, & applicatã, & parametro comprehẽso erit, etiam æquale rectangulo comprehenso ab eodem parametro, & æquali TN inter verticem, & contingentem.

THEOR. III. PROPOS. XIII.

Si in Hyperbola, vel Ellipsi contingens ducta sit, & à contactu ordinatim applicata. Diametri portio inter terminum transuersi diametri, & applicatam erit ad portionem eiusdem à vertice sectionis ad applicatam, vt portio à termino transuersi diametri vsque ad contingentem ad portionem, quæ est inter contingentem, & verticem sectionis.

DVos casus hæc propositio possidet, primus est, si planum contingens sit parallelum plano secanti per verticem, vt in prop. 12. est dictum, alter si non sit.

Sit ergo pro primo casu Hyperbola, vel Ellipsis QTM diameter transuersa TX, quæ transeat per centrum O, vt euenit cum plana tangens, & secans per axem sunt parallela, vt dictum est Coroll. 1. propos. 11. & AN æquidistans diametro coni LOI, à cuius puncto N originem ducit contingens MN, quæ tangat in M, à quo contactu applicata enascatur MO ad angulos rectos ipsi OI. Dico, *quod portio diametri transuersi* XO *inter terminum eius* X, & applicatam OM est in proportione ad portionem OT inter applicatum OM, & verticem sectionis T, quemadmodum XN inter terminum X, & punctum N, à quo oritur contingens, ad portionem NM. Ducatur cruri XL parallela TV à vertice T, & prolungetur in t.



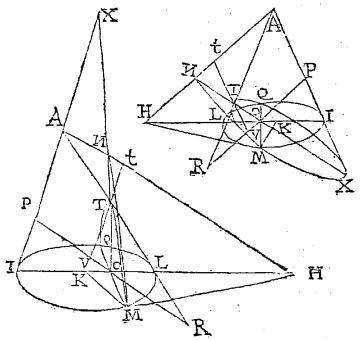
Prob. In triangulo Hyperbolæ LXO, & OTV, sicut est XO ad TO ita est ob parallelam VT Radius LO, vel OI ad suam portionem VO ex Coroll. prop. 4. l 6. Eucl. Sed vt est OI ad VO ita est AN ad NT ob bases parallelas in triangulis ad verticem ATF, & VTI, & æquiangulis ex propos. 4. lib. 6. Eucl.

Eademque ratione prorsùs XN ad NT, vt AN ad NT in triangulis ad verticem ANX, & TNL, quorum parallelæ sunt bases t T, & AX. Ergo ex prop. 16. lib. 5. Elem. vt est NX ad NT, ita est XO, ad TO.

In Ellipsi verò ferè idem argumentum. Nam in Ellipsi, quòd sint XL, & VT parallelæ in triangulis ad verticem OXL, & TOV; ita proportionabitur XO ad OT, vt LO ad OV, vel æqualis OI. Sed ob triangula ad verticẽ OTI, ATN inter bases parallelas AN, & OI; ita est OI ad OV, vt AN ad TN: sed in triangulo XAN ob parallelas XA, & TT, vt est AN ad TN, ita est XN ad TN: Ergo ita etiam erit XO ad OT ex prop. 16. lib. 5. argumentando, vt est XN ad TN, quòd sit eadem, ac proportio AN ad TN, & hæc eadem ac OI ad VO, & hæc eadem, vt XO ad OT.

gilis

Sed iam sit secundus casus, in quo planum contingens non sit parallelum plano secanti, & ideo, quòd AN non sit parallela IL diametro coni. Tùc animaduertendum est ex progr. 2 prop. 23. tract. 15. Quòd HI se habet ad OT, vt HL ad LO; ducaturque per O equidistans PR ad AH, & equidistans TV per T lateri IX trianguli per verticem IAL. In triangulo itaque POX Hyperbole, ita est ob parallelas VT, & PX portio XO ad TO, vt OP ad OV: Supponatur itaque æqualis PO ad OR, quod infra ostendetur, ita itaque erit OP, vel RO ad OV, vt AN ad NT ob triangula inter parallelas opposita ad verticem ATT, & VTR: Sed ob rationem triangulorum ad verticem inter parallelas ANX, & TNT erit quoq; vt AN proportione ad NT, sic correspondebit XN ad NT, ergo XN ad NT, ita erit, vt XO ad OT ob identitatem rationis, cum duabus AN, ad NT, & harum cum OR, vel OP ad OV, & harum cum XO ad OT.



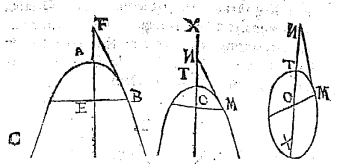
In Ellipsi verò XO est ad TO, vt OP ad OV ob triangula ad verticem TVO, & POX inter parallelas TV, & PX, & ob eandem rationem æqualis vt ostendam BO eidem OP erit ad VO, vt AN ad NT, in triangulo autem NAX ob parallelas TT, & AX, ita est XN ad NT, vt AN ad NT: Vnde ex 16. lib. 5. Elem. ita quoque XO ad OT, vt XN ad TN. Remanet solum probandum, quòd OR, & OP sint æquales. Probatur autem prorsus eadem ratione in Theor. anteced. in 2. Casu. Nam ex prop. 4. lib. 6. proportio PO ad AH est ea, quæ IO ad IH: sed hæc est eadem ex propos. 23. tract. 15, *conuertendo*, ac LO ad HL, & hæc, quę OR ad AH ob triangula equiangula OBL, & ALH, ex 21. lib. 6. Propterea que AH est illa, cui PO, & RO eandem dicunt proportionem. Ergo sunt equales ex 7. l. 5. elem.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Lineas tangentes in sectionibus conicis ducere.

Sit data parabola BAC, & in ea punctum B, & oporteat ducere contingentem illius puncti. Ducatur diameter AE ex 1. huius, & ei à puncto B ducatur applicata EB: equalis autem fiat AE ipsi AF productæ diametro, & à puncto B ad F ducatur recta FB, hęc enim erit contingens.

Probatur; quia ex pr. 12. h. tangens linea Parabolę intersecat diametrum EF productam in parte F à vertice distante interuallo AF equali interuallo AE applicatę, & vertici interposito.



Sit deinde data Hyperbola, seu Ellipsis MT, & eius applicata OM, & diameter trâsuersa XT prolũgata in Ellipsi quantùm oportet, si fiat ex prop. 9. tract. 15. de lineis secandis, vt XT tota ad segmentum OT, ita XN tota cum addita TN ad additam TN in Ellipsi erit punctum N, à quo ducta NM tanget Ellipsim.

At in Hyperbola fiat ex propos. 23. tract. 15. de lineis secand, vt segmentum OX ad segmentum OT ita segmentum aliquod NX in TX parte ad compartem TN, & erit punctum N, à quo ad M ducta MN tanget Hyperbolam.

Probatur ex præced. Quia iam ostensum est, quod in Ellipsi TN à vertice, & tangentem intercepta, sit quarta proportionalis trium XO, & OT segmentorum, & totius XN.

At in Hyperbola. Quod TN, sit quarta proportionalis trium totius diametri transuersę simul, & intercepte OX intercepte OT, & transuersę segmenti NX.

EXPENSIO IV.

De interceptis diametri portionibus inter contingentem, & alia puncta in ipso impressa.

Quę fiunt puncta in diametro ea efficiuntur ab eius mediate nimirum centro, à vertice sectionis, ab applicata, ab eius extremo, & à contingente, quę omnia puncta diuersas partes constituunt in diametro, quę potentia, seu longitudine inuicem comparantur, & cum contingentibus analogiam habent.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

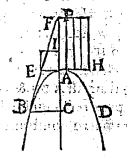
Si parabolem recta contingat linea productæ diametro occurrens, si ad ipsam recta ducatur æquidistans ordinatim applicatæ, quadratum eius erit æquale rectanguli quartæ parti contento à diametri portione producta ad tangentem, & parametro contigua.

Sit sectio parabolica BAD, quam contingat BF occurrens diametro in F, ad quam à vertice A ducatur linea EA equidistans applicatę BC. Dico *quod quadratum ex* EA *erit æquale quartæ parti rectanguli ex* AH *parametro, &* AF *diametro producta vsque ad contingentem comprehensi.*

Progr. 1. Obseruandum est quadratum ex ordinatim applicatis, vt BC ex dictis propos. 7. esse æquale rectangulo, quod fieret ex AH Parametro, & diametro intercepta AC, & quod diximus supra prop. 12. Rectam AE propter contingentem BF esse æqualem rectæ AC; quare, & rectangulum ex AF, & AH parametro, rectangulo, quod fieret ex AC æquali, & parametro AH eodem esset æquale, vnde, & æquale quadrato ex BC, quo suppositio.

Progress. 2. Probatur. Assumptum quadratum EAI est quarta pars quadrati ex BC. Ergo, & rectangulo FH ei equalis ex progr. 1. nimirum rectangulo AP equabitur.

Prob Antecedens in triangulo BFC crus FC est duplum luæ portionis FA ex progr. 1. Propterea, & BC linea est dupla lineæ EA. Ergo cum figuræ similes, similterque positæ sint in duplicata ratione laterum homologorum ex prop. 20. lib. 6. Elem. quadratum BC erit quadruplum quadrati EA; nam proportio sic gemina vice repetitur, sic est 1. ad 2. sicut 2. ad 4. & ideo si est latus 1. ad 2. quadrata debebunt esse, vt 1. ad 4. Quare quadratum EI quarta pars quadrati ex BC erit etiam quarta pars rectanguli HF nimirum equale rectangulo AP.



THEOR. II. PROPOS. XVII.

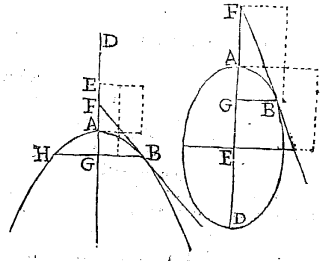
Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, cum diametro conueniens, & à tactu ad diametrum recta ordinatim sit applicata, erit quadrato dimidiæ transuersę diametri æquale rectangulum sub intercepta ab ordinatim ducta, & centro diametri portione, & sub alia portione inter centrum, & contingentem comprehensum.

Sit primum Hyperbola BAH, cuius vertex A transuersa diameter AD, & centrum E, quod habetur diuisio AD bifariam. Sectionem verò contingat in B recta BF, cum diametro producta in F conueniens, & ad diametrum ordinatim applicata ta BG. Dico *quadrato* AE *æquale esse rectangulum factum ex* EG, & EF.

Iam ex propos. 11. huius habemus esse eam proportionem GD ad GA; quæ est FD ad FA. Ergo componendo simul DG, & GA erit ad GA, vt DF, & FA simul ad FA, diuisis autem lineis DG, & GA, vt vna linea per medium in E erit medietas GE nempe ipsa medietas lineæ DA, quæ est EA, cum GA, siquidem ED cum ipsa AG denuo assumpta complent alteram medietatem.

Diuisis quoque lineis, DF, & FA medietas est ipsa EA: Quare cum ponatur totum GD cum AG ad GA, vt totum DA ad FA erit etiam ex 18. lib. 5. elem. medietas EG ad GA, vt medietas EA ad FA, & *dividendo* erit quoque medietas EG ad residuum EA, sublata consequenti GA, vt EA ad FE subducta consequente FA. Qua de rè AE est media proportionalis. Vnde si iuxta prop. 17. Elem. fiat ex hac AE quadratum: ex duabus verò extremis GE, & FE rectangulum, hæc duo erunt æqualia.

Probatur quoque de Ellipsi ferè eodem modo. Namcùm dictum sit prop. 11. quo proportio GD ad GA sit qualis est proportio FD ad FA. Erit quoque



componendo simul antecedens, & consequens DG, & GA ad solam consequentem GA, vt antecedens, & consequens FD, & FA ad solam consequentem FA, & si dimidiemus has compositas antecedentes, erit pariter proportio AE dimidiatæ ad AG eandem consequentem, vt EF dimidiata lineæ FD cum AF, ad FA eandem consequentem. Quare per conuersionem rationis sumendo excessus GE, & AE, quibus antecedentes EA, & FE superant consequentes suas GA, FA, respondebit proportione excessus GE antecedentis EA ad ipsam antecedentem EA, vt excessus AE antecedentis EF ad antecedentem EF. Quare ex Elem. prop. 17. lib. 6. ex AE poterit componi quadratum, tamquam ex media proportionali, quòd erit equale rectangulo ex duabus extremis constituto GE, & EF.

THEOR. III. PROPOS. XVIII.

Posito diametro transuersa, vt superiori propos. contingenti, centro, & applicata: Rectangulum ex portione à termino transuersæ diametri vsque ad applicatam, & portione ab applicata vsque ad verticem sectionis comprehensum est æqaale rectangulo comprehenso ex eiusdem diametri partibus interceptis inter centrum, & applicatam, & inter applicatam, & contingentem.

Sit eadem figura; quę superiùs. Dico *rectangulum ex* DG, & GA *esse æquale rectangulo ex* EG, & FG *lineis comprehensum.*

Probatur. Nam in Hyperbola ex anteced. prop. contextu medietas EG est ad AG, vt AE ad FA. Quare *Permutando* erit fundamentum EG ad fundamentum AE, vt terminus AG ad terminum FA. Quapropter cõponendo EG erit ad AE cũ EG, vt AG ad FA cum AG: Linea verò AE cum GE est diameter GD, & FA cum AG est FG. Vnde si fiat rectangulum ex extremis EG, & FG hoc erit æquale rectangulo facto ex medijs DG, & GA. Ex prop. 18. lib. 6. Elem.

Idem dicas de Ellipſi. Nam AE dimidia eſt ad AG, vt EF ad FA, ergo diuidendo GE compars erit ad GA compartem, vt AE pars ad AF compartem, & *permutando* antecedens GE ad antecedentem AE, vt ſequens GA ad ſequentem AF. Quare componendo GE erit ad AE, & EG, ideſt GD, vt GA eſt ad GA, & AF, ideſt GF. Quare rectangulum ex extremis GF, & GE æquale erit rectangulo ex medijs GD, & GA.

COROLLARIVM.

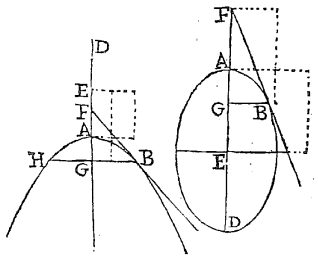
CVm rectangulum ex GD, & GA ſit illud idem propoſ. 8. contextu, & Coroll. 2. quod demonſtratum fuit eſſe ad quadratum applicatæ, vt tranſuerſa diameter ad Parametrum. Hinc eſt, quod etiam rectangulum GE, & GF in vtraque ſectione æquale rectangulo ex interceptis diametri portionibus GD, & GA erit ad quadratū applicatæ, vt tranſuerſa diameter ad parametrum.

THEOR. IV. PROPOS. XVIIII.

Iiſdem poſitis, erit rectangulum comprehenſum à portione inter applicatam, & contingentem, & inter contingentem, & centrum menſurata æquale rectangulo facto ex portione diametri inter contingentem, & terminum, & inter verticem ſectionis, & contingentem interceptа.

POſitis illis ipſis, quæ priùs. Dico *rectangulum* GF, & FE *eſſe æquale rectangulo ex portionibus* DF, & FA *confecto*.

Probatur ex propoſ. 17. (cum argumentati fuimus diuidendo) habemus; ita eſſe in proportione GE ad EA, vt AE ad EF. Quare ſi componamus eas erit GE ſimul cum AE, vel æquali ED, vt fiat tota GD ad EA, vel æquali ED tantùm, vt AE, vel æqualis ED ſimul cum EF, vt fiat tota DF ad EF tantum.



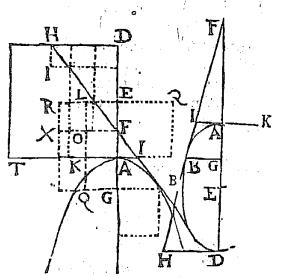
Quare vtendo *permutatione* erit antecedens DG compoſita, vt priùs ad antecedentem DF compoſitam. Veluti priùs conſequens ſimplex AE ad conſequentem ſimplicem EF.

Accipiamus itaque exceſſū FG ſuper DF ſequētē antecedētis DG, & exceſſum FA ſuper ſequentē EF antecedentis AE, vel è cōtrà. Et *diuidendo* erit compars FG ad compartem DF, vt compars FA ad compartem EF. Vnde ſi fiat rectangulum ex medijs DF, & FA hoc erit æquale rectangulo ex extremis FE, & FG in Hyperbola, ſed in Ellipſi idem ſequetur: ſed *conuertendo*.

THEOR. V. PROPOS. XIX.

Si Ellipſim, vel Hyperbolam recta contingat, rectangulum factum à linea, quæ à vertice ſectionis diſcedit, & alia, quæ à vertice diametri diſcedit, & ambæ in contingentem terminant eſt æquale quartæ parti rectanguli diametro tranſuerſa, & parametro contenti.

SIt Hyperbola, vel Ellipſis AB, cuius vertex A diameter tranſuerſa DA parameter AK tangens BF, diſcedatque à vertice ſectionis A linea, & terminet in contingentem, quæ ſit AI, aliaque DH ambæ rectangulę diametro diſcedāt à termino diametri D, & in contingentē productam terminēt in H, & I. Dico, quod rectangulum iſtis DH, & AI duabus conſtitutum eſt quarta pars rectanguli ſub tranſuerſa diametro DA, & parametro conſtituti.



Probatio ob multas comparationes eſt parùm laborioſa; ideo eam clariùs, quàm fieri poterit trademus.

Progr. 1. Primo itaque ex præced. propoſ. rectangulū ex DF, & FA eſt rectangulo GO ex GF, & FE æquale. Quare ſi ex GF fiat quadratum GX, cum ſit ſuper eandem baſim FG, ac rectangulum ex GF, & FE erit ipſum rectangulum DF, & FA ad hoc quadratum GX, vt ad ipſum hoc quadratum GX rectangulum OG ex GF, & FE, quæ eſt eadem, ac altitudinum FE ad FG. Ratio eſt, quia cum DF, & FA rectangulum, & GF, & FE rectangulum ſint æqualia habebunt ex 7. lib. 5. Eucl. eidem quadrato GX eandem rationem, quæ eſt altitudinum FE ad GF ob eandem baſim GF.

Progr. 2. Quo poſito obſeruandum eſt, quòd hæc proportio ad quadratum GX rectanguli DF, & FA; componitur ex proportione lateris FD rectanguli ad GF lateris quadrati, quę eſt eadem DH ad GB ob triangula BFG, & DFH ad verticem inter parallelasbaſes BG, & DH ex propoſ. 15. lib. 6 Eucl.

Componitur quoque ex proportione AF lateris rectanguli ad GF lateris quadrati, quę eſt eadem, ac AI ad GB ob parallelas BG, & IA in triangulo BGF ex Coroll. prop. 4. l. 6. Eucl.

Ergo ſi componantur, vt hic vides.

FD	vt	DH	&	AF	vt	AI	
ad		ad		ad		ad	
GF		GB		GF		GB	

Ergo compoſitum, vt compoſitum.

DF	&	AF		DH	&	AI	ideſt	HI
ad				ad				
GF	&	GF		GB	&	GB		

Vnde DF, & FA rectangulum erit ad quadratum GX, vt ex DH, & AI, ideſt DI rectangulum ad quadratum GB.

Progr. 3. At ex primo progr. rectangulum ex DF, & FA erat ad quadratum GX, vt EF ad BG ob æqualitatem, quam dicebat cum rectangulo OG illis lineis conſtituto. Quare ſi ſuper EG fiant duo rectangula, vnum ex EG, & EF, vt eſt rectangulum EQ erit ad alterum ex GE, & GF rectangulum GR cum ſint ſuper eandem baſim GE, vt altitudines EF ad GF ſupradictę lineę; Rectangulum verò GE, & EF eſt æquale quadrato AEZ ex AE ex 17. huius. Quare quadratum AEZ æquale ipſi EQ erit ad rectangulum GR, vt EF ad FG, quę eſt eadem, ac ex progr. 1 rectanguli GO ex GF, & FE ad quadratum GX, & ex prog. 2. rectāguli ID ex HD, AI ad quadratum applicatę GB; quare ex 16. lib. 5. quadratum AEZ erit ad rectangulum GR, vt rectangulum ID ad quadratum applicatę GB.

Progr. 5. Itaque *permutando* erit antecedens quadratum AEZ ad antecedens rectangulum ID, vt ſequens GR rectangulum ad ſequens applicatæ GB quadratum.

Progr. 6. Reminiſcendam verò eſt ex propoſ. 18. Coroll. quod rectangulum GR ex GE, & GF eſt ad quadratum BG, vt tranſuerſa diameter AD ad contiguam parametrum AK: Quare talis etiam proportio AEZ quadrati ad DI rectangulum cum 5. progr. ſit eadem, ac GR rectanguli ad quadratum BG.

Progr. 7. Si ergo ſuper DA conſtituamus quadratum DT, & ex DA, & AK conſtituamus rectangulum; Quadratum conſtitutum DAT, cùm ſit ſuper eandem baſim erit, vt altitudo DA, vel AT ad AK: Vnde dicet eandem proportionem ad ſuum rectangulum, quam DA ad AK, quæ ex 6. progreſſ. eſt eadem quadrati AEZ ad rectangulum DHI. Sed quadratum AEZ eſt quarta pars quadrati DAT, cùm ſit ſuper dimidiam AD, quę eſt diſtātia centri à vertice ex 6. lib. 2. Ergo, & etiam rectangulum DHI eſt quarta pars rectanguli DAK parametro, diametroq; tranſuerſa comprehenſi.

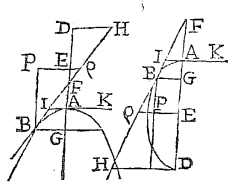


THEOR. VI. PROPOS. XXI.

Si Hyperbolem, vel Ellipſim recta contingat linea, occurratque lineæ æquidiſtanti alicui ex applicatis, & à contactu ad hanc lineam æquidiſtantem recta parallela diametro ducatur, quæ eam terminet, hæc linea inquam æquidiſtans à diametro erit ſecata in duas partes, ex quibus compoſitum rectangulum erit æquale quartæ parti rectanguli ſub tranſuerſa diametro, & parametro contenti.

SIt Hyperbola, vel Ellipſis, cuius vertex A tranſuerſa diameter AD, & centrum E, quam contingat linea BF productam in H, à centro verò E ducatur parallela alicui applicatæ BG in vtraſque partes, vt PQ vſque ad Q tangentem, quam parallela BF diametro AD educta à cōtactu B terminet ad aliam partem, dico PQ lineam eductam à centro in tales partes ſecari à diametro AD, vt *illę componant rectangulum quartæ parti rectanguli ſub tranſuerſa diametro* AD, *& parametro* AK *contenti*.

Probatur. Nam ex pr. 19. h. rectangulum ſub DF, & FA contentum eſt æquale rectangulo ſub EF, & FG cōtento: Quare erunt latera proportionalia reciprocè ex 14. l. 6 & ita DF ad FG, vt EF ad FA. Sed vt DF ad FG, ita aſſimilatur in proportione DH ad BG parallelæ in triangulis æquiangulis, & vt EF ad AF, ita EQ parallelę ad AI ob triangula æquiangula BFG & DFH, ideoq; ex 16. l. 5. erit DH ad BG, ſic EQ ad IA, ergo ſi cōponātur rectāgula vnū ex duobus DH, & AI, aliud ex BG, & EQ ſumēdo eas lineas reciprocè ſcilicet conſequentem cum antecedenti pro vno; ſicut conſequentē, & antecedentem pro alio iuxta propoſ. 22. Eucl. 6. erit rectangulum DH, & AI æquale rectangulo BG, ſeu æquali PE, & EQ. Sed ex præced. rectangulum DH, & AI eſt æquale quartę parti rectanguli DA intercepta, & parametro AK. Ergo, & rectangulum PE, & EQ.



COROLLARIVM.

PRæallegatę propoſitiones de Ellipſi; etiam de Circulo intelligūtur, & ſufficit loco Ellipſis circulum ſubſtituere, nam eædem rationes militabunt.

EXPENSIO V.

De Vmbelicis.

VMbelicus est quoddam punctum intra sectionem, quod insignes proprietates obtinet, maximè ad ipsarum sectionum descriptionem. Vocatur autem Focus, & Polus, qui in Hyperbola, & in Ellipsi gemini sunt, in Parabola verò vnicus.

PROBL. I. PROPOS. XXII.

Parabolæ Vmbelicum assignare.

INueniatur Parameter, & illius quarta pars assumatur, & mensuretur in ipso diametro à vertice sectionis, & illud punctum erit Focus, seu Vmbelicus.

Ostenditur ipsa definitione. Nam definitur, quod sit quarta pars parametri in ipso axe à vertice sectionis assumpta.

PROBL. II. PROPOS. XXII.

Hyperbolarum, & Ellipsium Vmbelicos inuenire, data Axe transuersa, & Parametro.

QVoniam Vmbelicus Hyperbolæ non est tantùm quarta pars Parametri à vertice mensurata. Sed latus rectãguli illius quartę parti æqualis, cuius alterum latus sit trãsuersa diameter addito ei latere ipso, quo clauditur V. g. rectangulo ex diametro trãsuersa MA addito ei MX æquali XP; In Ellipsi verò dẽpto V.g. rectãgulũ ex CD dẽpto CL.

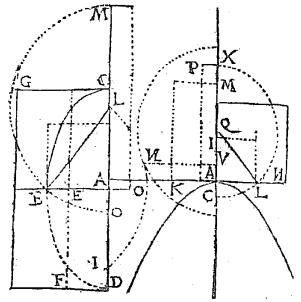
Reperto itaq; Parametro ex 10. propos. & 18. AK: sicut, & diametro transuersa AM; rectangulo ab illis comprehenso MK inueniatur quadratum æquale NA ex 16. lib. 2. Eucl. vt vides factum mediante media proportionali NV ex 16. lib. 6, cuius latus diuidatur bifariam in L, coniungaturque LQ, & centro Q medietate transuersę diametri, interuallo QL describatur circulus CLX: Dico puncta X, & C Vmbelicos esse Hyperbolę.

Id verò ostendetur, si demonstretur habere conditiones à definitione requisitas, 1. quod MX, vel æqualis CA sit latus rectanguli talis; cuius vnum latus sit, nedum transuersa diameter AM.

Sed insuper distantia XM, vel CA, & aliud ipsa distantia MX, vel CA, quod tamen sit æquale quartæ parti figuræ, & rectanguli contenti à diametro transuersâ, & parametro.

Probatur verò. Nam quadratum NAEX VN est ex constructione æquale rectangulo MK. Sed huius quadrati quarta pars ex 6. lib. 2. Elem. Cor. cum sit ex medietate laterum est quadratum LI. Ergo erit quarta pars rectanguli KM, sed huic quadrato paruo LI est æquale rectangulum AP, ex propos. 16. Eucl. lib. 2. Ergo rectangulum AP est æquale quartę parti rectanguli KM. Rursus comprehenditur diametro transuersa MA, & XM, & aliud latus est æquale MX, vt patet ex eadem 16. propos. lib. 2. Eucl. Ergo habet conditiones requisitas. Vnde distantiæ ab extremis A, & M diametri transuersę, nempe puncta X, & C erunt Vmbelici.

Si verò sit Ellipsis, cuius Vmbelici sint inueniendi.



Primo præsupponendum est quadratum ex AB applicata ad centrum esse æquale quartæ parti rectanguli sub diametro transuersa CD, & parametro AE; nimirum CF. Nam ex propos 8. Expens. 2. Coroll. 2. ita est diameter CD ad Parametrum AE, vt est ad quadratũ applicatæ AB ad rectangulũ cõprehensum sub portionibus diametri CA, & AD, quæ hic sunt æquales, quãobrẽ hoc rectangulũ erit quadratũ AG. Sed ita se habet quadratũ magnũ ex toto diametro CD, ad rectãgulũ ex eodẽ CD& AE Parametro, vt ipse diameter CD ad parametrum, quod sit super eandem basim CD. Vnde erit, vt altitudo CD ad AE. Ergo ex 16. lib. 5. elem. quadratum AG ad quadratum ex applicata AB dicit eam proportionem, quam dicit quadratum magnum ex diametro CD ad rectangulum CF; cum sit eadem ac proportio diametri ad parametrum. Sed quadratum AC est quarta pars, quadrati magni ex diametro DC ex 6. lib. 2. Ergo, & quadratum ex applicata AB erit quarta pars rectanguli CF.

Cum itaque sit quadratũ ex AB quarta pars rectãguli CF ex diametro DC, & parametro AE, reperiatur huic æquale rectangulum, comprehensum à diametro DC, defficiente tamen longitudine alterius lateris, vel ex 30. lib. 6. vel ex 36. lib. 10. & aliud latus erit vmbelicus,

Hęc enim est conditio, quæ expoſcitur ad Vmbelicos Ellipsis ex definitione, vel sic: Accipiatur distantia AC, & facto centro in B describatur portio circuli; quæ secabit diametrum in L, & I. Dico LI *puncta esse Vmbelicos*, quod, vt probetur.

Facto centro in L interuallo CA describatur circulus, qui secet axem, in M, & O, & latere AM, & alio AO fiat rectangulum OM; iam manifestum est ex 16. lib. 2. Eucl. hoc rectangulum esse æquale quadrato ex AB. Ideo quartæ parti rectanguli CF, ex prædictis, sed hoc rectangulum continetur à diametro OM æqualis CD minus latere OA. Ergo est rectangulum, quod requiritur, & AO distantia requisita ad vmbelicum. Sed LO est, æqualis LB, at LB est æqualis AC, ergo etiam ablata communi LA distantia OA est æqualis distantiæ LC. Vnde I erit Vmbelicus, & I alius Vmbelicus.

EX-

EXPENSIO VI.

De inclinatis rectis à contactibus ad focos.

PVncta contactuum, & foci lineis connectuntur, quæ inuicem quibusdam analogijs insignibus referuntur, & ad transuersum diametrum; de quibus quidem speculatio ardua; sed, & singulari vtilitate fęcunda.

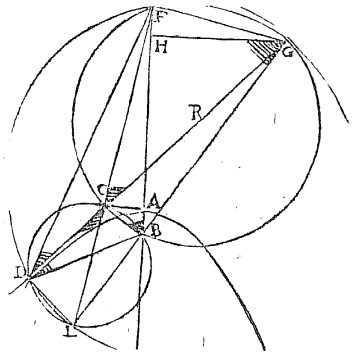
THEOR. I. PROPOS. XXIII.

Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, quæ à tactu ad vtrumque sectionis Vmbelicum rectæ ducentur lineæ æquales hinc, inde cum contingente angulos efficient.

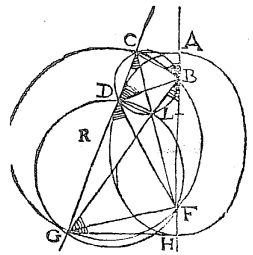
SIt Hyperbola, vel Ellipsis AD; in qua Diameter transuersa AH; repertique Vmbelici B, & F, tangat verò sectionem recta DG, à cuius tactu ad vtrumque vmbelicum ducantur rectæ BD, & & DF. Dico *angulos* BDC, *& GDF esse æquales*.

Probatur verò per tres præcipuos progressus. Primus intendit ostendere circulum GF BC super diametrum CG transire per puncta B, & F; quod sic demonstratur.

Rectangulum factum ex AC, & GH ex prop. 19. est æquale quartæ parti rectanguli comprehensi à Parametro, & Diametro transuersa, cui etiam quartæ parti fecimus æquale rectangulum ex BH, & BA comprehẽsum ex prop. 22. h. Quare cum sint æqualia habebunt latera proportionalia reciprocè ex 10. lib. 6. Eucl. Vnde HG erit ad HB, vt AB ad AC: Iunctis ergo B, & C linea BC, & G, & B linea GB, erunt triangula BAC, & GHB similia; siquidem secundùm propos 5. lib. 6. Eucl. habent latera proportionalia circa æquales angulos rectos H, & A, & ideo angulus niger G angulo B nigro æqualis; vnde, & reliquus GBH reliquo BCA; Cum ergo angulus B niger, & angulus ACB sint æquales vni recto ex 17. lib. 1. Eucl. fit, vt angulo B nigro additus GBH æqualis angulo ACB in Hyperbola fiat totus GBC rectus; at in Ellipsi ablatis CBA, & GBH nigris remaneat CBG angulus rectus. Deinde idem probabitur de angulo GFC, quòd sit rectus. Nam iunctis rectis G, & F, sicut F, & C triangulum GHF erit simile triangulo FAC. Nam *permutando* sicut se habet GH ad HF, æquali BA (cum F sit alter vmbelicus) ita FA æqualis HB ad AC, cum ergo latera sint proportionalia circa angulos rectos H, & A triangula erunt similia, & reliquos angulos reliquis æquales obtinebunt. Vnde angulus HGF angulo AFC erit æqualis, qui additus angulo GFH conficiet totum angulum GFC rectum ob dictam rationem, quòd CFA æquetur angulo HGF, qui cum HFG æquat rectum in hyperbola, at in Ellipsi relinquet GFC rectũ ablato CFH, & CFA: Quare ex 32. lib. 4. Eucl. facto super GC centro in R, circumferentia transibit per puncta F, & B; quod anguli recti probati sint, & ideo necessariò in semicirculo debeant esse.



Progressus 2. Intendit probare; quòd erecta in puncto contactus D perpendiculari LD vsque ad lineam FC prolungatam in L, si opus sit, & producta GB; tres lineæ LC, & DL, & GL in idem punctum conspirent in L. Considerandum est itaque GFC triangulum rectangulum triangulo LCD rectangulo esse ad verticem in Hiperbola, in Ellipsi vnum contineri in alio, & angulum C nigrum hìc esse eundem, ibi æqualem: quare, & reliquus angulus reliquo æqualis, & latera erunt proportionalia ex Coroll. 2. propos. 17. lib. 1. Elem.



Sunt autem triangula GBH, & GFC æquiangula. Ex eo, quod rectangula habeant angulum GCF angulo GBF æqualem, quòd sit super eandem circumferentiæ portionẽ circuli GFCB. Quare, & triangulum GFC erit triangulo BAC simile, cui simile in primo progr. probatum est triangulum GBH. Quare erit quoque simile ei BAC triangulo LCD; quod probatum est simile triangulo GFC, vnde & latera proportionalia erũt. Deinde producatur GB vsq; quò occurrat rectæ FL si opus sit, erit triangulum BLC triangulo GLF simile; siquidem in primo progress. anguli GFC, & CBG probati sunt æquales, & recti, & angulus L est communis in Hyperbola in Ellipsi ad verticem.

Cum itaque triangula sint similia BAC, & LCD, erit AC ad CB, vt CD ad CL, & *permutando*, vt AC ad CD; ita BC ad CL. Et propter triangula similia GIL, & BCL, vt BC ad CL, ita est GF ad GL; Quare erit commune latus CL triangulo CDL, & GLF, aut BCL; & latus GL conueniet cum CL, & DL in L.

Progress. 3. Cum ergo angulus GFL in progr. 1. probatus sit rectus. Angulus verò LDG talis factus sit; si diametro GL fiat circulus erunt anguli recti vertices F, & D ex propos. 28. lib. 3. Eucl. in circuli circumferentiâ.

Rursus. Cùm angulus CBL, vel quod idem CBG in

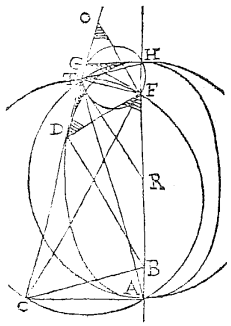
in 1. progr. probatus sit rectus, & CDL factus talis sit diametro CL circumferentia ducatur, hæc transibit per D, & B puncta, & vertices angulorum rectorum ex 28. lib. 3. Elem.

Cum itaque angulus BLC sit in eadem circuli circumferentia, ac angulus BDC, & angulus idem BLC, vel GLF (in Ellipsi ad verticem) sit in eadem circuli circumferentia, GF, ac angulus GDF, erunt anguli BDC, & GDF ad contactum D æquales, vtpote æquales vni tertio BLC.

THEOR. II. PROPOS. XXIV.

Si Hyperbolam vel Ellipsim recta linea contingat, & ab vtroque vmbelico ad tactum binæ inclinentur lineæ: Illa linea, quæ parallela alterutri à centro ducetur ad contingentem erit æqualis dimidio transuersi axis.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis AD, quam contingat OD in D, & ad contactum D ab vmbelicis B, & F binæ lineæ inclinentur BD, & FD, deinde à centro R ducatur TR parallela alterutri, aut FD, aut BD, vt est exemplum, donec contingentem secet in T. Dico RT *esse æqualem axis transuersæ dimidiæ* RA, vel RH.



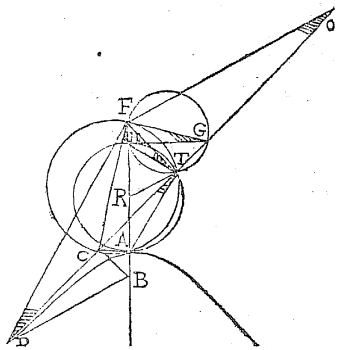
Iungatur punctum T cum punctis F, H, & A, & vt in antecedenti figura sit ducta GH perpendicularis ad axem, & coniunctum punctum G, vbi secat tangentem, cum vmbelico F, sitque ducta OF parallela TR vel BD.

Progress. 1. Probatur itaq; Angulus T (vt ostendam) in triangulo GTF rectus est, & ideo cum H angulus in triangulo GHF ex constructione sit rectus, poterit ex prop. 28. Cor. l. 3 El. diametro GF describi circulus, qui transeat per puncta, & vertices angulorum rectorum T, & H, & sic angulus apud G in triangulo FGH. & T in triangulo FTH, vtpote anguli ad circumferentiam, & super eandem peripheriam FH erunt æquales ex 27. lib. 3. elem.

Progress. 2. Itaque ostenditur angulus T in triangulo GTF rectus. Quoniam triangulum magnum OFD est æquicrurum, & OT medietas basis; Ergo FT est perpendicularis.

Est autem æquicrurum: Quia anguli O, & D nigri sunt æquales, angulus enim alternus niger O factus ab incidente CD in parallelas OF & BD alteri alterno BDC æqualis, qui BDC probatus est æqualis in antec. propos. angulo nigro D, vtpote ab inclinatis ad contactum effecti, ergo O, & D æquantur.

Quod autem OT sit medietas basis OD probatur. Nam BR incidens est æqualis RF ob æqualem distantiam vmbelicorum à verticibus H, & A, & centri R ab ijsdem. Ergo etiam OT est æqualis TD cum secetur in eadem partes ex 13. propos. lib. 6. Elem. à parallela TR ipsa OD, quæ parallelas ad extrema coniungit; Quare cum in triangulo OFD æquicrurio OT sit æqualis DT, angulus OTF erit rectus, & TF perpendicularis. Vnde verificabitur, quod per T, & H transeat circulus assumpto pro diametro GF.



Progress. 3. Ostendendum est deinde angulum ATC nigrum angulo FTH esse æqualem.

Angulus CTF est rectus, ex progr. 1. angulus quoque CAF est rectus ex constructione præcedentis figuræ; Ergo diametro CF circumferentia transibit per C, F, A, & T; Anguli ergo nigri CTA, & CFA, inixi super eandem peripheriam AC, & vertices T; & F in peripherijs erunt æquales; sed angulus niger CFA probatus est æqualis angulo nigro HGF in præced. propos. in fine progr. 1. & hic angulus G niger in progr. 1. & 2. huius propos. angulo T in triangulo FTH; Ergo hic angulus FTH est æqualis angulo T nigro trianguli ATC.

Progr. 4. Duo anguli nigri ad T sunt æquales, & angulus CTF rectus ex 2. progr. ergo, & angulus HTA erit rectus. Idem enim vtrique additur angulus HTC in Hyperbola, & in Ellipsi FTA. Si ergo fiat circulus diametro HA centro R transibit per T anguli recti verticem ex 28. lib. 3. Eucl. Vnde TR erit radius est semidiameter æqualis semiaxi transuersæ AR, seu æquali RH.

THEOR. III. PROPOS. XXV.

Si in Hyperbola, aut Ellipsi ab eodem sectionis puncto binæ inclinentur rectæ lineæ ad vmbelicos; in Hyperbola maior minorem quantitate transuersi axis superabit, & in Ellipsi erunt simul transuerso axi æquales.

SIt Hyperbola, vel Ellipsis AC in quibus à puncto circumferentiæ C binæ lineæ inclinentur ad vmbelicos vnam adhunc K altera ad illum B. Dicit, quod in Hyperbola linea maior KC superabit minorem BC portione æquali diametro transuersæ AH, in Ellipsi verò simul sumptæ KC, & BC diametro HA erunt æquales, ducatur GD parallela CF

GF per centrum F in vtraque sectione.

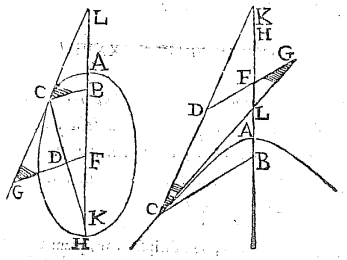
Progress. 1. Primo ostendendum GD in Hyperbola esse æqualē DC, quod demonstratur. Nā triāguli GDC anguli nigri ad basim G C sunt æquales, siquidem GC in parallelas incidens GD, & BC ex 30. lib. 1. Eucl. facit angulos alternos BCG, & G nigrum æquales; sed BCG est æqualis angulo nigro C ex prop. 23. h. Ergo G, & C niger sunt æquales, quare GD crus est æquale DC ex 17. lib. 1. Elem.

Progr. 2. Prob. quoq; CD esse æqualem portioni DK: In triāgulo enim BKC ob parallelam FD ad basim BC, quia KB est dupla KF etiā KC erit dupla portionis KD ex 2. lib. 6. quare KD, & DC erunt æquales, & tota CK erit dupla CD, quæ est æqualis suæ dimidiæ DC, necnon in eodem triangulo, & BC erit dupla FD ob eandem rationem.

Progr. 3. Cum ergo DG sit æqualis CD: ergo FD, FG eius medietates duplatæ æquabunt CK, sed BC est dupla FD, & AH est dupla GF præc. propos. Ergo BC, & AH æquabunt totam CK; quod erat probandum.

Idem ostenditur in Ellipsi cum LG in parallelas BC, & FG incidat angulus C niger est æqualis angulo nigro G internus, & ad eandem partes externo ex propos. 30. lib. 1. Elem. sed angulus C niger est æqualis, vtpote ad contactum ex propos. 23. huius angulo DCG. Ergo est æqualis angulo G, & triangulum GDC æquicrurum: Ergo CD, & DG crura æqualia.

Progr. 2. Probatur quoque in triangulo KBC ob parallelas FD, & BC crus KC esse duplum cruris KD, & BC crutis FD; sicut est KB duplum cruris FK.



Progr. 3. Igitur DG est æqualis BC. Ergo si DG dupletur erit æqualis CK; sic FD, si dupletur, erit æqualis BC. Vnde duplicata GF æquabit CB, & CK; sed FG simplex ex præced. propos. est æqualis dimidio diametro transuerso FH. Ergo duplicata erit æqualis toti AH. Vnde, & BC, & CK erunt æquales toti diametro AH.

THEOR. IV. PROPOS. XXVI.

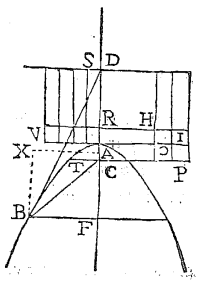
Si parabolem recta contingat linea, quæ à tactu ad sectionis vmbelicum recta linea ducetur, æqualis erit axis portioni, quæ intercipitur inter contingentem prædictam, & Vmbelicum.

SIt Parabola AB, in qua vertex apud A, contingensque DB Vmbilicus C signatus à vertice nempe quarta pars parametri, applicata ad tactum FB, iungaturque CB. Dico, quòd hæc linea CB erit æqualis axi CD, qui intercipitur inter Vmbelicum C, & punctum D, quo diametrum secat tangens BD in puncto D.

Progress. 1. Aduertendum ex propos. 12. huius diametri portiones inter applicatam, & verticem FA, & inter verticem, & contingentē DA esse æquales.

Secundò. Ex propos. 11. lib. 2. Elem. quadratum ex CB esse æquale quadratis ex CF, & FB, quòd angulus ad F rectus sit. Vnde erit æquale quadrato FX facto ex FB, & quadrato HD facto ex CF: quadratum verò FX est æquale rectangulo VD sub DA axis portione, & AV Parametro comprehenso ex Coroll. propos. 12. huius. Quare fit quadratum CB sit æquale quadrato DH facto ex CF, & rectangulo DV, quod comprehenditur à portione diametri DA, & Parametro AV quadruplo lineę CA ex hypothesi.

Progr. 2. Prob. propos. Quadratum CD quale est DP æquale est quadrato ex CF, quod fecimus DH, & quatuor rectangulis, quibus vnum latus est linea ipsa DR æqualis lineę CF, & aliud lineaAC, vel æqualis AR; siquidem ex æqualibus DA, & AF ablatis æqualibus DR, & CF residua sunt æqualia. Insuper est quoque æquale idē DP quatuor paruis quadratis ex CA qualia sūt P, I, O, H. Nam hæc omnia nempe quadratum maius DH, quatuor quadrata parua T, I, O, H, & rectangula quatuor, vt RO concludūntur in ipso DP.



Progress. 3. Sed hęc omnia quatuor rectangula, & quatuor quadrata complent, & æquantur rectangulo sub DA intercepta diametro, & AV parametro comprehensum: Nam parameter est quater CA, vnde sub AR æquali, & AV quadruplici rectangulum quatuor parua quadrata cōprehēdet, & rectangulum sub DR æquali CF, & quadruplici RV quatuor rectangula quale vnum ex illis est SR.

Progr. 4. Ergo quadratum magnum DCP est æquale quadrato ex CF, quale est DH, & rectangulo DV ex parametro, & axe AD.

Progr. 5. Sed hoc rectangulum DV ex parametro, & axe intercepta, vt ex 1. progr. est æquale quadrato ex BF; Ergo quadratum magnum DCP est æquale quadrato ex CF, quale est DH, & quadrato ex FB.

Sed quadratum ex linea CB à contactu B ad parametrum ducta ex progr. 1. est æquale duobus quadratis ex CF, & FB. Ergo etiam est æquale quale quadratō magno DCP. Cùm ergo hęc duo quadrata sint æqualia; etiam latera erunt æqualia, & CB erit æqualis lineę CD, quòd erat ostendendum.

COROLLARIVM.

HInc ellicies CB esse æqualem FA, & AC simul positis, quia probata est æqualis lineę DC, cuius vna pars AD est æqualis ipsi AF altera CA ipsa eadem. Quod si CB sit vna quoque ex applicatis, & & cadat in punctum T ad diametrum perpendiculariter, vt CT; tunc CT dupla erit CA; quia eodem

modo

modo erit æqualis CA inter se applicatam, & verticem intercepta, & eidem CA, vt quartæ parti Parametri.

Alia quoque ratio esset, quod tangens secabit in R, vtpote æquali CA: At CT à tactu ad Vmbilicum probata est equalis CR diametro inter vmbilicum, & punctum R intercepto.

EXPENSIO VII.

De Diametris secundis.

NOn vnus diameter sectionibus conicis inest: siquidem præter illum, qui oritur à generatione, & in ipsa sectione coni est, quę per verticem coni ducitur; aliæ etiam lineę, quę illi diametro æquidistantes in Parabola, vel in Ellipsi, & Hyperbola ad centrum ducuntur, diametri dignitatem obtinere possunt; siquidem, & omnes applicatas, quę intra sectionem ducuntur bifariam diuidere possunt; vt ergo id demonstretur.

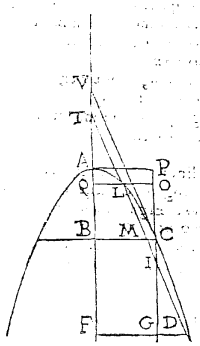
THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Si Parabolam recta contingat linea, quæ per tactum diametro parallela ducetur, omnes alias tangenti æquidistantes intra sectionem existentes bifariam secabit.

IN parabola ACD, sit tangens CV, diameter VF, & ipsi parallela PG per tactum C ducta; tangenti verò parallela DL intra sectionem, ita vt eius extrema terminentur in D, & L puncta sectionis.

Dico hanc DL bifariam à linea PG transeunte per tactum C secari in I.

Progr. 1. Priùs Triangulum TLQ ostendendum est æquale rectangulo QAP; sicut, & triangulum DTF parallelogrammo, seu rectangulo FP.



Quod vt ostendatur, reminiscendum est id, quod diximus propos. 11. huius portionem diametri BA esse equalem AV ob contingentem CV; quare ex Euc. lib. 1. propos. 39. rectangulum PB erit æquale triangulo BCV, ob eandem altitudinem CB, & basim duplicatam BV.

Progr. 2. Reminiscendum quoque quadratum CB, & LQ applicatarum esse ad inuicem, vt BA ad AQ ex prop. 5. huius Exp. 1. sed vt quadratum ex CB, ad quadratum ex LQ, ita est triangulum CVB ad triangulum LTQ, cum ob parallelas CV, & LT sint equiangula, & similia, ex prop. 22. lib. 6. Eucl. Ergo etiam erunt, vt BA ad AQ, quę est proportio quadratorum ex applicatis.

Progr. 3. Vt autem BA ad QA, ita est rectangulum BP ad rectangulum QB ob eandem altitudinem ex 1. lib. 6. Eucl. Ergo, & triangulum CVB ad triangulum LTQ erit; vt rectangulum BP ad rectangulum PQ; & *permutando*, Itaquoque est triangulum CBV ad rectangulum BP ex BA, quod ei probatum est æquale, vt triangulum LTQ rectangulo QP: Ergo quoque LQT triangulum erit æquale rectangulo QP ex prop. 12. lib. 5. Elem.

Progr. 4 Eadem prorsus est probatio de triangulo DTF; quòd sit æquale rectangulo FP. Vnde non desertit eam repetere, quibus positis.

Progr. 5. Auferendum est triangulum LQT, & æquale rectangulum QP, & remanebit ablatis æqualibus quadrilatera figura LQED rectangulo residuo FOGQ æquale, quæ prius erant æqualia, ex progr. præced. 4. & 3.

Progr. 6. Quod si auferatur quinquelaterum commune, & occupans idem spatium EGILQ remanebunt duo triangula æqualia, & similia DIG, & IOL; Quare basis IL erit æqualis basi ID; quod erat probandum. Similia autem sunt, quod anguli apud I sint æquales, vtpote ad verticem, & apud G, & O recti: vnde, & reliquus D reliquo L, equalis erit ideo ex def. 1. lib. 6. Elem. erunt similia.

COROLLARIVM.

COllligitur itaque omnes parallelas diametro principali, siue ex generatione in Parabola diametri quoque vices, & naturam obtinere. Nam diameter est ille ex definitione, qui per medium diuidit omnes rectas, quæ intra sectionem parallelę inuicem ducuntur.

THEOR. II. PROPOS. XXVIII.

Si Hyperbolem, vel Ellipsim recta contingat linea, quæ ei parallela ducitur intra sectionem, diuiditur per medium à lineâ, quæ à centro procedit, & per contactum deducitur.

SIt Hyperbola, seu Ellipsis ABD, quam tangat recta BC, cui parallela agatur DF, discedatq; à centro E recta ad contactum B. Dico, quòd hęc diuidit portionem parallelæ intra sectionem remanentis, scilicet LD in duas partes æquales. Ducantur ad punctum contactus B applicata BP, & ad extrema L, & D applicatæ LO & DI, & tandem à vertice sectionis AS, quæ terminet in S puncto lineę EB, à centro ad contactum ductæ.

Progr. 1. Iam ex propos. 17. Expens. 4. huius nosti rectangulum PBE, & CE esse equale quadrato EA ex AE, ideoq; proportionalia esse latera ex 17. lib. 6. & vt PE ad AE, ita esse AE ad EC, & ideo PE ad EC duplicata esse proportione. Ex hoc itaq; demonstrandum est in primis EBC triangulum esse æquale triangulo SEA cum eidem triągulo BEP eandem dicant proportionem, quam rectangulum CE, EP æquale, quadrato AE dicit.

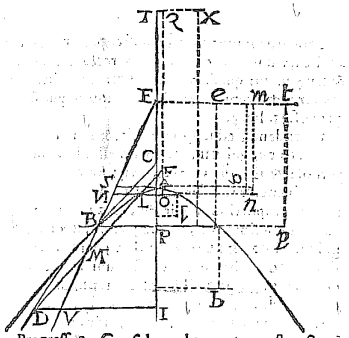
Prob. Dicit eandem proportionem triangulum SEA triangulo BEP, sicut quadratum EA ad quadratũ ex PE, cò, quòd SEA, & BEP triangula sint super eandem, basim, ac quadrata EA, & PE: Vnde, tum triangula, tum quadrata erunt in duplicata ratione laterum suorum, nempe eâ quam latus CE tertia

tia proportionalis, vt dixi habet ad EP.

Item rectangulum EP ex PE, & EC est ad quadratum PE, vt altitudo EC ad altitudinem PE ob eandem basim PE; Idest triangulum BEC ad triangulum BEP ob eandem altitudinem PB. Cum ergo triangulum AES sit ad triangulum BEP, vt EC ad EP. Rursùsque triangulum BEC sit ad triangulum idem BEP, vt eedem lineę EC ad EP triangula EBC, & ESA ex prop. 7. lib. 5. Elem. erunt æqualia, cum eidem eandem dicant proportionem.

Progr. 2. Quapropter ab eodem triangulo BEP in Hyperbola, si auferatur SEA, & BEC æqualia inuicem, residua remanebunt equalia quadrilaterum SBAP, & triangulum BCP.

Pariter si in Ellipsi auferatur à triangulo ASE, & CBE equalibus triangulum commune PBE remanebunt residua equalia triangulum PCB, & quadrilaterum APSB.



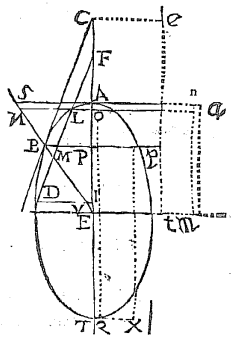
Progress. 3. Considerandum autem est rectanlum OZ esse equale gnomoni O a m, nam EZ equatur parti a m, & EO equali reliquo gnomonis AN. Et idem dicas de gnomone p a t eadem ratione, quod æquatur PX rectangulo. Rectangulum verò ZO esse ad rectangulum Px ex diametro transuersa, & intercepta pro vno latere, & intercepta solùm pro allo ex prop. 6. huius, vt quadratum LO ad quadratum BP.

Quoniam itaque 1. progr. diximus, ita esse quadratum ex EA ad quadratum ex EP, vt SEA triangulum ad EPB triangulum; erit etiam ex prop. 20. lib. 5. reliquus gnomon P a t, idest PX rectangulum ad quadratum ex EA, vt reliquum quadrilaterum SBAP ad triangulum SEA.

Progr. 4. Et ex eadem ratione erit ex EA quadratum ad quadratum ex EO, vt triangulum ESA ad triangulum ENO ob rationem duplicatam suorum laterum, quę sunt eadem in quadratis, & triangulis, vt dictum est progr. 1. Quare, & reliquus gnomon O a m, idest OZ rectangulum erit ad quadratum ex EA, vt reliquum quadrilaterum SANO ad triangulum SEA, *permutando* itaque OZ rectangulum erit ad ASNO Quadrilaterũ, vt quadratum ex EA ad triangulum SEA. Itemq; *permutando* progr. 3. proportiones, ita erit rectangulum PX ad quadrilaterum SAPB, vt quadratum ex EA ad triangulum SEA.

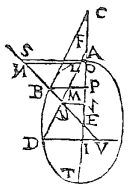
Quapropter erit eadem proportio quadrati EA ad triangulum SEA hoc est OZ rectangulũ ad AOSN quadrilaterum, quam PX rectangulũ ad SPBA quadrilaterum. Vnde *permutando* erit OZ rectangulum ad PX rectangulum, quam SANO quadrilateri ad SABP quarilaterum.

Progress. 5. Proportio verò OZ rectanguli ad PX rectangulum est eadem, quæ quadrati LO ad quadratũ BP, & ideo eadem, quæ trianguli LFO ad triangulũ BCP 26. 1. 6. ob parallelas & easdẽ bases, ob quę sunt similia triangula inuicem, & ideo in duplicata ratione suorum laterum communium quadratis. Ideo quadrilaterum SNAO erit ad quadrilaterum SABP, vt LFO triangulum ad BCP triangulum; Et *permutando* Quadrilaterum SNAO erit ad triangulum LFO, vt Quadrilaterum SABP ad triangulum BCP. Sed hæc sunt æqualia triangulum BCP, & quadrilaterum BSAO ex progr. 2. Ergo etiam illa SNAO quadrilaterũ, & LFO triangulũ pr. 6. Idem probabis de quadrilatero IVS A, quod sit æquale triangulo DFI. Nam supposita eadem consideratione, quæ progr. 3. Ita erit quadratum ex EA ad quadratum EI, vt triangulum ESA ad triangulum EVI ratione eadem: Quare, & reliquus gnomon, idest gnomoni æquale rectangulum ex ET, & IA erit ad quadratum EA, vt reliquum quadrilaterum SAVI, seu in altera ellipsi ASui ad triangulum SEA, & ideo erit rectanguli TI, & IA ad ASIV quadrilaterum quam PX rectanguli ad SPBA quadrilaterum; cum sit etiam horum eadem ratio, quæ EA quadrati ad triangulum SEA ex progr. 3.



Quare *permutando* erit rectangulum ex TI, & TA ad PX rectangulum, velut ASIV quadrilateri ad SPAB quadrilaterum. Proportio autem rectanguli ex TI, & TA ad rectangulum PX ex TP, & PA est eadem ex 6. huius, quæ quadrati DI ad quadratum BP, & ideo eadem, quæ triangulum DFI ad triangulum BCP æquiangulorum ex 26. lib. 6. elem. sunt enim figuræ similes super easdem quadratorum bases. Ideo quadrilaterum ASIV erit ad quadrilaterum SPBA; vt triangulum DFI ad triangulum BCP: ideo *permutando* quadrilaterum ASIV erit ad triangulum DFI, vt quadrilaterum SBPA ad triangulum BCP; sed quadrilaterum SBPA æquatur triangulo BCP, vt 1. progr. ostensum est. Ergo etiã quadrilaterũ ASVI æquabitur triãgulo DFI.

Progr. 7. Vnde, si ab æqualibus SAVI quadrilatero auferas NSAO quadrilaterum æquale triangulo LOF, quod auferatur à triangulo DFI quod est æquale ipsi ASVI, reliquum NOVI quadrilaterum restabit *æquale* reliquo LODI trapezio. Si verò ab vtroque auferas commune spatium quinquelaterum LMVIO, remanebunt duo triangula NML, & DMV æqualia; & ob parallelas, & angulos M æquales ad verticem similia, vnde basis LM erit æqualis basi MD.



Obseruandum verò est in Ellipsi aliquando FD cadere infra E centrum versus T. Sed tunc idem erit argumentum: nisi quòd à triangulo ASE auferendū est triangulum EUI. linea ul in serie probationis, prog. 6. quod sit æquale triangulo EVI; quod tunc sit infra centrum E versus T. Et tandem pro vltimo progr. cum sit æquale IDF triangulum quadrilatero ASIU, & triangulū OFL quadrilatero ASON ablatis istis restat ON iu quadrilaterum æquale quadrilatero OLID; adde vtrisq; EVI, & UIE efficiētur æqualia triangulum ONE, & figura irregularis OLUDVS, à quibus ablato cōmuni spatio MELO erūt æqualia MNL, & MVD triangula insuper, & similia ob æquales angulos alternos V, & N inter parallelas positos, & angulos ad M ad verticem.

COROLLARIVM I.

HInc deduces omnes protractas à centro in Ellipsi, vel Hyperbola posse habere proprietates diametri; Quod omnes in sectione cōprehensas æqualiter diuidant. Vnde præter diametrum ex generatione tot erunt diametri in sectionibus Hyperbolicis, vel Ellipticis, quot erunt lineæ intra sectionem à centro ductæ, & circumferentiam secantes.

COROLLARIVM II.

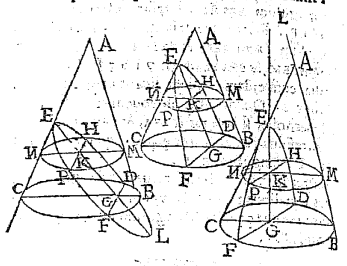
HInc cognosces, quod quę dicta sunt de ellipsi etiam de circuli circumferentia debeant cognosci, vt quilibet pro ellipsi substituto circulo intelliget.

THEOR. III. PROPOS. XXIX.

Quælibet sectio potest in alio cono collocari, cui aliqua ex diametris coniungatis sit axis.

*SIt diameter cōiungata CE, EL in sectione DEF, cui sint applicatę GF, & KP parallelę, & æquales ipsis EX præc. DG, & HK. Dico *hanc sectionem posse in cono collocari aliquo, cui diameter hæc coniungata sit axis.*

Applicatę FG duę extremę proportionales inueniantur CC, & GB EX propos. 16. tract. 15. quę ad punctum G perpendiculares applicatis FG, & GD constituantur, & per eas circulus actus intelligatur diametro CE, & transibit per F mediā proportionalē, & DCX eadem propos. 16. tract. 15. A puncto itaq; C per verticem E in plano per EGL transeunte ducatur CA, & à B in eodem ducatur ad verticem diametri transuersę BA, in L in parabola verò parallela GE diametro, in quo etiam per punctū K parallela ipsi CB ducatur NKM, & per PH, NM ducatur planum, quod ex propos. 13. tract. 22. erit parallelū plano BDCF, in quo diametro NM describatur circulus NPM. Dico, quod istę circulus transibit per P, & H puncta: Vnde superficies conica circumuestiens hos duos circulos sectionem quoque FEHD circumuestiet, eo quia sicut probabitur de punctis P, & H applicatarum, quòd per eas transeat circulus MHNP: sic par ratio militet de omni alio circulo, qui diametrum aliam aliquam parallelam diametro CB obtineat, nam transibit per extremum punctum applicatę diametro sectionum, eo puncto, quo diameter circuli transit.



Probatur itaque NPMH transire per puncta P, H applicatarum KP, & KH. Nam rectangulum NK, & KM equatur quadrato PK, vel KH, ergo diametro MN circumferentia transibit per NPMH puncta EX propos. 35. lib. 3.

Ostendendū est itaq; rect. NK, & KM esse equale quadrato PK, vel KH. Nam CG est ad NK in Hyperbola, & Ellipsi, vt GE ad KE; sic GB est ad KM, vt GL diameter transuersa ad KL. Ergo si componantur proportiones erit CG, & GB rectangulum ad rectangulum NK, & KM; vt GE, & GL rectangulum ad KE, & KL rectangulum; & ideo, vt quadratum FG applicatę ad quadratum applicatę PK, EX prop. 6. huius, & Thesi; quia GL, GE facimus diametrum. Ergo CG, & GB rectangulum erit ad rectangulum NK, & KM, vt FG quadratum ad quadratum PK: Ideoque *permutando* CG, & GB rectangulum erit ad FG quadratum, vt NK, & KM rectangulum ad PK quadratum. Sed CG, & GB rectangulum est equale ex effectione quadrato FG: Ergo etiam ex propos. 7. lib. 5. Elem. NK, & KM rectangulum quadrato PK; & KH. Vnde circumferentia NPKM transibit per P, & H, & ita dicas de alijs applicatis.

In Parabola quoque idem argumentū militabit. Nam rectangulū CG, & GB est ad rectangulū NK, & KM ob eandem altitudinē GB, vel KM, vt CG ad NK, scilicet, vt GE ad KE. Verū, vt GE ad KE, ita est quadratū FG ad quadratum PK ex 5. huius. Vnde vt rectāgulū CG, & GB ad rectangulum NK, & KM, ita quadratum FG ad quadratum PK, & *permutando* rectangulum CG, & GB erit ad quadratum FG, vt rectangulum NK, & KM ad quadratum PK: Se rectangulum CG, & GB æquatur ex effectione quadrato FG, ergo etiam ex propos. 7. lib. 5. NK, & KM rectangulum æquabitur quadrato PK.

COROLLARIVM I.

HInc est diametros secundarias esse propriè axes, qui licet non deseruiant conicis sectionibus, quatenùs in hoc assignato cono existunt; sunt tamen axes possibiles; quia hæc coni sectio, quæ assignato cono applicata est, aut in eo effecta potest, & in alio cono Scaleno reperiri, & in eo diameter coniugata axis erit, licet non præcipua, eo quod normalis non sit suis applicatis: Propterea etiam proprietates axis obtinebit.

COROLLARIVM II.

*HInc quoque sit euidens; quod si FG duæ proportionales extremæ inueniantur EX 16. prop. tr. 15. CG, & GB, & collocata Hyperbola, & Ellipsi sectione ad punctum G ad quęcumque angulum, ita tamen, vt FG sit perpendicularis ipsi tot CB; si deinde per E ducatur recta CE, & ducta NK parallela CB, duabus NK, & PK extrema proportionalis MK inueniatur, & ducatur BM vsque dum occurrat diametro in L: quod detruncabit EL tali modo; vt rectangulum GB, & GL sit ad rectangulum KE & KL, vt quadratum FG ad quadratū PK: Nā eodem argumento BG erit ad GL; vt KM ad KL, & CG erit ad GE, vt NK ad KE: vnde compositis proportionibus rectangulum CG, & GB erit ad rectangulum NK, & KM, ideſt æquale quadratum FG ad æquale PK, vt rectangulum GL, & GE ad KL, & KE rectangulum, ideoque, vt quadratum FG ad quadratum PK.

In parabola verò, si FG duæ extremæ inueniantur, & collocentur vt supra ad angulos rectos cum applicata; deinde duabus KM æquali GB, & PK extrema proportionalis inueniatur NK, & parallelæ ad CB constituantur linea CN occurret vertici parabolæ E. Nam ob eandem altitudinem rectangulum CG, & GB erit NK, & KM, vt CG ad NK, ideſt vt EG ad KG, ideoque, vt CE ad NE. Vnde EX prop. 9. lib. 6. compositа triangula GCE, NKE in vnam rectam cohibunt.

Quare linea diuidens bifariam rectas, & ideo ex pr. 28. transiens per centrū poterit esse diameter, si ei addatur in Hyperbola diameter transuersa, ideſt talis pars extra sectionem; donec occurrat alteri lateri BA trianguli per axem ducti; Talis verò diameter est duplus portionis, quę pertingit à vertice sectionis ad centrum ex definitione centri.

COROLLARIVM III.

PRaxi præced. Coroll. poteris quoque quamlibet sectionem cono alicui inserere in quo possibile est reperiri, vt per se patet.

PROBL. I. PROPOS. XXX.

Diametros coniungatas, centrumque in Hyperbola inuenire.

DVcantur FD, & GE parallelæ quomodocumque, & bifariam diuidantur; perque puncta illa medietatum ducatur KA. Nam erit diameter; rursus ductis alijs quomodocumque sibi parallelis HI, & BC diuidantur bifariam, & per puncta divisionum LA ducatur, & LA erit quoque diameter, quæ conueniet in centrum figuræ ex præc. Coroll. in A; Quare A erit centrum.

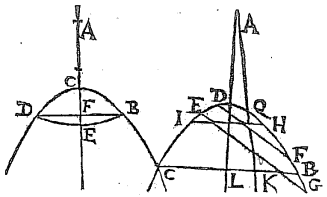
Prob. Diametri enim sunt, quòd bifariam parallelas in sectione diuidant, & A est centrum, quonlam rectæ in centrum procedentes sunt diametri coniugatę, vt propos. 28. huius.

Oportet tamen ex præced. 2. Coroli. eis LA, & KA addere portionem DA, & QA, scilicet diametrum transuersam complere, vt omnimodam diametrorum rationem dignitatemque obtineant, quam prop. 6. huius ostendimus.

PROBL. II. PROPOS. XXXI.

Dato Hyperbolæ centro Axem principalem inuenire.

EXhibeatur hyperbolę centrum A ex præc. & facto in eocentro ducatur intra sectionem ECD arcus BED, diuisaque peripheria bifariam à centro ducatur AE, *quam lineam affero esse diametrum principalem sectionis, & axem.*



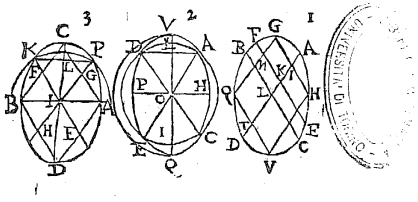
Probatur ducta BD illa à recta AE in F diuidendetur bifariam, & ad angulos rectos ex propos. 27. El. Cor. 6. Cùm ergo BFD secta sit bifariam, & normaliter à linea AE; quæ transeat per centrum A, hæc linea erit diameter principalis.

PROBL. III. PROPOS. XXXII.

In Ellipsi diametrorum quamlibet coniungationem inuenire.

*SIt Ellipsis ABCD fig. I. in qua ducatur aliqua HG, & alia illi parallela EF, quæ diuidantur bifariam in I, & K, ducaturque per illa puncta recta AD, & erit vna diameter. Deinde diuidatur bifariam AD in L, & ducatur parallela CB eisdem EF, vel GH, eritque CB altera diameter coniungata.

Ad quod ostendendum interuallo LI ducatur applicata à puncto T, & sit TQ, & TV; connectanturque GQ, & HV, & Dico NG, & NQ esse applicatas, & æquales, & ideo CB transiens per centrum, & bifariam diuidens applicatas esse quoque diametrum.



Probatur. Quoniam AD est diameter, erit, vt AID rectangulum ad ATD rectangulum, sic TQ quadratum ad IG quadratum, sed rectangula ex effectione sunt æqualia; quia fecimus LT æqualem LI; Vnde, & IA æquabitur TD: Ergo quadrata lateraqi IG, & TQ erunt æqualia; vnde QG erit parallela AXI AD; sed, & TQ, & IG sunt parallelæ ex

effectione. Ergo NG, & NQ erunt æquales lineis LT, & LI æqualibus; Ergo, & inter se: quare erunt applicatæ, & CB diameter coniugata.

COROLLARIVM I.

HInc data diametro quacumque ei inuenies coniugatam diametrum, & applicatas: Sit enim data diameter CB; duc ei parallelam HG, quas diuides bifariam in I, & L, & per ea ages rectã AD, quę erit diameter coniugata, huic verò duc parallelas quaſcumq; vt GQ, & erunt applicatæ diametro CB.

COROLLARIVM II.

HInc eruitur, quomodo data Ellipſi in eã centrum inueniatur, ducatur enim, vt cumque HG, & ei parallela FB, quas diuides bifariam, & ages per ea puncta lineam AD. Nam cum ſit diameter, in illa erit centrum; diuidatur itaque bifariam in L, & DL erit Ellipſis centrum.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIII.

Diametros principales coniugatas in Ellipſi exquirere.

*DEtur Ellipſis VPQH in fig. 2. & centro EX ſuperior. Cor. reperto O, ducatur circulus, qui eã ſecet in quatuor aliquibus pũctis, vt A, D, C, E. Diuidatur itaque AD circumferentia bifariam, & item CE, necnon, & ED, & AC; perque puncta diuiſionum ducantur rectę, PH, & VQ, & erunt axes.

Probatur. Nam habent duas conditiones, quæ ad axes requiruntur prima; quòd ſint ſibi inuicem perpendiculares, ſecundà, quod vna ſit maxima altera minima omnium diametrorum, quæ in Ellipſi duci poſſunt.

Quod autem ſint ſibi perpendiculares ducantur diametri AE, & CD, eritque ADE ſemicirculus, & DEC talis quoque, ablata itaque communi circumferentia DE, erunt æquales arcus AD, & CE, qui diuiſi bifariam erunt ſemiarcus EQ, & LD æquales arcui AD, quibus additis arcui ED erit LDEQ ſemicirculus, & ideo LQ tranſibit per centrum. Et quia DE peripheria ſecta eſt per medium ex effectione; additis æqualibus erit quoque LDEI ſecta per medium. Vnde OP erit perpendicularis, vtpote à medio arcus DE, & ideo LDEI ducta. Patet autem, quod etiam AD, & CE ſunt diuiſæ bifariam, & ad angulos rectos ex Coroll. 6. prop. 27. lib. 3. Elem. Vnde erunt applicatæ orthogonales.

Quod verò VQ ſit maxima patet. Nam CA, & DE puncta æqualiter diſtant à centro, vtpote puncta quoq; peripheriæ, ergo punctũ Q, & V mediũ inter iſta, & extimum circulo, erit maximè remotum, & de punctis H, & P contrarium dicas.

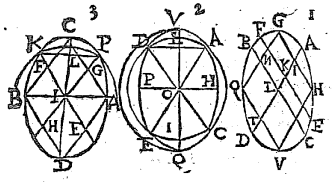
Quod autem punctũ medium V, & Q, ſit maximè remotum, patet. Nam circulus per eorum extrema ductus non ſecat Ellipſim, ſed comprehendit, & tangit in V, & Q; vnde omnes alij circuli eo minores ſecabunt, quare ad puncta ſectionum ductæ ſemper minores erunt radio VQ circuli tangentis, vt ſunt OD, & OA.

PROBL. V. PROPOS. XXXIV.

In Ellipſi diametros coniugatas æquales, inuenire.

REpertis axibus CD, & BA coniungantur eorum extrema rectis AC, & CB; ſicut, & AD, & DB in fig. 3. quæ diuidantur bifariam, & per ea puncta rectæ tranſeãt GH, EF. Dico *hãs lineas eſſe diametros coniugatas, & æquales.*

* Nam, quod ſint æquales patet; Quoniã in triãgulis CGI, & CIF ob cõmune latus CI, & æqualia crura CG, & CF, & angulos apud C æquales, vtpote rectangulorum quoque AIC, & CIB crus IB, & IA æquale, & IC commune habentium erunt ex 22. lib. 1. Elem. æquales anguli PIC, & KIC, quare cũ angulos æquales cõprehẽdãt IK, & IP diametri, æqualiter remouebũtur ab axe, & ideo erũt æquales. Nam ſi tales nõ ſunt, ſit minor IF, & producatur, vt ſit æqualis IK, ducatur arcus PK, & ſubtenſa PK, quia ergo angulus PIC æquatur angulo CIK erit ſinus PL æqualis ſinui LK; ſed PL eſt applicata, & ad eundem angulum rectum, cum P ſit in ambitu ellipſis, ergo etiam KL, quare K erit etiam punctum Ellipſis, non ergo terminabit IK in Ellipſim in F infra K; quare non erit minor, quam IK, & ideo, nec minor, quàm IP.



Quod verò ſint diametri coniugatę patet; Nam ob æqualia triangula CIA, & BID baſes AC, & DB æquantur, & ſunt parallelę: quare etiam medietates. Cum ergo BC, & AD, coniungant æquales, & parallelas, & ipſę parallelæ ſunt, ſunt autem AG, & GC æquales ex effectione ſicut CE, & FB; Ergo etiam BH, & HD, necnon ED, & EA. Vnde cum biſſecent GC, & GA & BH, HD, ſic BF, FC, & AE, FD parallelas, & æquales, KE, & PH erunt diametri.

THEOR. V. PROPOS. XXXV.

Applicatarum ad diametros coniugas æquales quadrata ſunt æqualia rectangulis ex diametri portionibus.

SIt diameter coniugata in fig. 1. BC æqualis alteri AD. Dico *quadratum applicatæ* GN eſſe æquale rectangulo BN, & NC.

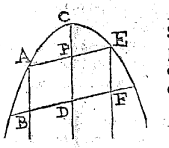
Probatur BL, & LC rectangulum, ſeu quadratum æquatur quadrato applicatæ LA, quę eſt dimidium alterius diametri, ſed vt rectangulum BL, & LC ad rectangulum BN, & NC ex 6. huius, ita eſt quadratum LA ad quadratum GN; & ideo *permutando*, vt rectangulum BL, & LC ad quadratum LA, ſic BN, & NC rectangulum ad quadratum GN, ſed rectangulum BL, LC, vt dixi æquatur quadrato LA. Ergo etiam rectangulum BN, & NC æquabitur quadrato GN ex 12. lib. 5. elem.

PROB. VI. PROPOS. XXXVI.

** Data diametro coniugata alteri in Parabola applicatas ponere, & à dato puncto in ea diametrum ducere.*

*SIt data diameter aliqua coniungata, vt DC, cui applicatas oporteat ponere: Ducatur ipſi CD parallela diameter AB, & altera æquidiſtãs BF, & in puncto E, quo ſecat Parabolam ab A ducatur AE dico eſſe applicatam diametro C.

Patet quia ob æquidiſtantiam diametrorũ AB, & EF à CD erunt æquales AP, & PE, vt patet. Sit deinde aſſignatum pũctũ A, à quo oporteat diametrum ducere; ducta ab eo puncto quauis AE, & ei parallela BF, diuidantur bifariam in D, & P, & ducatur diameter DC per P, D, cui ponatur æqu. diſtans AB, quę ex prop. 27. huius diameter erit.

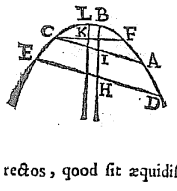


PROBL. VII. PROPOS. XXXVII.

Diametrum coniugatam in Parabola, & axem inuenire.

DEtur Parabola ABC, & duæ parallelæ quæcumque ducantur AC, & DE; diuidanturque per medium, & ducatur HIB, & hæc erit diameter quæcumque ex defin. 11. h.

Deinde huic BH perpendicularis ducatur FC à puncto C, diuidaturq; bifariam in K, & LK erit axis.



Nam quod ſit diameter patet, eo quòd ſit parallela diametro BI, quod autem ſit axis conſtat; quia applicatæ FC, vtpote bifariam diuiſæ incidit ad angulos rectos, quod ſit æquidiſtans ipſi BI.

EXPENSIO VIII.

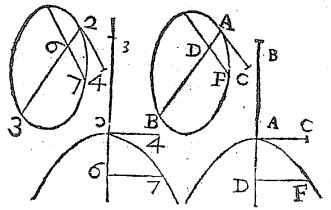
De ſectionum æqualitate.

ANteqnam perueniamus ad ſectionum deſcriptiones explicandas viſum eſt tractationem generalem, quæ omnibus ſectionibus conuenit expedire, & ſimul quoque eas comparare, vt ſciamus, quæ deſcriptio alteri deſeruire poſſit, & quæ non poſſit.

THEOR. I. PROPOS. XXXVIII.

Si binæ Hyperbolæ, ſeu Ellipſes, æqualet habeant Parametros axibus tranſuerſis æqualibus applicatas, æquales erunt inuicem.

SInt binæ Hyperbolæ, vel binæ Ellipſes FA, & 27, quarum æquales ſint diametri tranſuerſæ BA, & 23, & parametri eundem angulum cum diametro facientes, & æquales inuicem CA, & 24. Dico Hyperbolas, vel Ellipſes eſſe inuicem æquales.



Probatur. Nam ſumantur æquales diametrorum portiones ad libitum, vt DB, & 3, 6, ex quibus ducantur applicatæ FD, & 6, 7. demonſtrabitur enim has futuras æquales, & pari ratione ſi aliæ; & aliæ portiones ſumantur diametrorum, à quibus applicatę ducantur, ſemper oſtendetur eas eſſe tum in vna, tum in altera æquales, ergo ſectiones ipſæ æquales erunt, cum ſuperpoſitæ, quod vult definitio 15. h. vt conuenirent applicatæ applicatis, ita, & ſectiones ſectionibus.

Oſtenditur verò aſſumptum, nempe FD, & 6. 7. futuras æquales. Nam ex 8. h. Cor. 2. vt eſt BA tranſuerſa diameter ad AC parametrum, ita eſt DF quadratũ ad rectangulum AD, DB. Item in alia ſectione, vt eſt 2 3 trãſuerſa diameter ad 2 4 parametrũ, ita eſt quadratũ applicatæ 6 7 ad rectãgulũ ex 6 2, & 3 6 effectum; ſed vt eſt AB ad CA, ita eſt 2 3 ad 2 4 ob earũ æqualitatẽ ex Theſi. Ergo, vt eſt rectangulum AD, & DB ad rectangulum 2 6, & 6 3 ita eſt quadratum DF ad quadratum 6 7: ſed rectangula ſunt æqualia ob æqualia latera AD ad 6 2, & BD ad 6 3 ex Theſi ob æquales axes tranſuerſas. Ergo, & quadrata erunt æqualia ex FD, & 6 7: quare, & latera eorum DF, & 6 7 erunt æqualia.

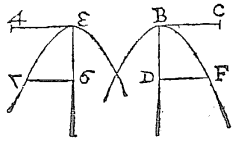
THEOR. II. PROPOS. XXXIX.

Si ſint binæ parabolæ, quæ parametros æquales habeant, & in æqualibus angulis ad diametros applicatas Parabolæ erunt inuicem æquales.

SInt Parabolę BF, & 3 7. Dico, quod ſi parametri BC, & 3 4 ſint æquales, & in æquali angulo applicatæ, Parabolas futuras æquales.

Sumantur æquales diametrorum portiones ad libitum BD, & 3 6, à quibus applicatę ducantur DF, & 6 7, probabitur de iſtis, ſicut, & de omnibus alijs, quod ſint inuicem æquales. Vnde neceſſe erit, quod linea parabolica per eadem puncta

cta in vtraque transeat. Ex Theor. 1. exp. 2. constat quadratum FD, esse æquale rectangulo diametro intercepta DB, & parametro contento.



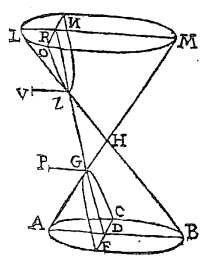
Rectangula autem, tum vnius, tum alterius parabolę sunt æqualia ob æqualem parametrum BC, & 3 4, & æqualem interceptam BD, & 3 6 ex constructione. Ergo, & quadrata æqualia; nempe quadratum ex FD quadrato ex 6 7; quare, & ipsorum latera erunt æqualia FD, & 6 7, & hinc Parabolę ipsę erunt æquales, cum super positę, vt patet. vt conuenirent applicatę applicatis, ita, & parabolę parabolis. quę per extrema applicatarum ducerentur, vt vult def. 15. h.

THEOR. III. PROPOS. XL.

Hyperbolicæ sectiones, quæ fiunt in duobus conis ad verticem, quorum baſes parallelæ, ab eodem plano, habent æqualem tranſuerſam diametrum, & æquidiſtantem, & eandem parametrum.

SIt conus LHM positus ad verticem alteri AHB, transeatque per vtrosque idem planum ONFC, quod faciat in eo sectiones Hyperbolicas OZN, & FGC, sintque conorum bases inuicem parallelę; nempe LNMO, & ACBF, dico has Hyperbolas habere eandem tranſuersam diametrum CZ, & æqualem parametrum, & æquidistantem alteri parametro, & inuicem sectiones esse æquales.

Probatur. Nam triangula AGD, & GMR sunt æquiangula; cum sint ad verticem, & inter parallela LM, & AB sicut, & triangula DZB, & LZR. Vnde obtinebunt latera proportionalia, & propter hoc eam proportionem, quam dicet BD ad DZ, eandem dicent LR ad RZ, & in alijs triangulis BMG, & AGD eam proportionem, quã dicit AD ad DG eãdem quoq; dicet MR. ad RG. Quare ex eis poteris componere rectangulum accipiendo duas antecedentes pro vno parallelogrammo, & duas sequentes pro alio, vt ex posit. 22. lib. 6. Eucl. colligitur: Igitur ex BD, & AD antecedẽtibus componatur rectangulum dicet eam proportionem ad rectangulum cõpositum ex DZ, & DG consequentibus, quam rectangulum compositum ex MR., & RL antecedentibus ad rectangulum ex consequentibus RZ, & RG quemadmodum hic vides.



Crus	BD	ad	DZ	est vt	AD	ad	DG
Sic	RL	ad	RZ	vt	RM	ad	GR
Ergo, vt compositum ad compositum.							
	BD	&	AD		DZ	&	DG
Sic	RL,	&	RM	erit ad	RZ,	&	GR

Progr. 2. Sed rectangulum ex AD, DB est æquale quadrato ex applicata FD, & rectangulum ex MR, & RL quadrato applicatę RO: Ergo quadratum RO habet eam proportionem ipsam ad rectangulum ex GR., & RZ, quam quadratum FD habet ad rectangulum ex DZ; & DG.

Progr. 3. Sed horum quadratorum ad hęc rectangula proportio est illa, quã habet ad diametrũ tranſuersam ZG parameter PG, ergo erit eadem proportio prorsus parametri VZ ad tranſuersam diametrum GZ, ac ad eandem diametrum GZ parametri PG, siquidem huius parametri PG est ex 8. h. Cor. 2. eadẽ quam habet quadratum FD ad rectãgulum ZD, & DG, quæ probata est eadem cum illa, quam possidet quadratum OR. ad rectangulum GR, & RZ, quę est rursus ex prop. 8. h. Cor. 2. eadem, quam habet parameter VZ ad diametrum tranſuersam ZG.

Cum itaq; eidẽ diametro trãſuersę ZG eandẽ dicant proportionem parameter, PG, & VZ ex 7. lib. 5. Eucl. erunt æquales parametri. Paralleli quoque sunt ob parallelas OR. & FD; cui parametri æquidistant; siquidem sunt parallelę; quia sunt in basibus parallelis LNMO, & ACBF; Et eis parametri æquidistant, quod sint contiguę diametri, vt habetur ex prop. 8. huius.

Probatur autem, quod vna sectio alteri sit eadem ex prec. quia habent parametros æquales in æqualibus angulis, vtpote perpendiculares diametro RD, & diametrum tranſuersam eandem.

COROLLARIVM.

COlligitur hinc oppositarum Hyperbolarum idem esse commune centrum, & communes omnes tranſuersas diametros, axem quoque communem, communesque vmbelicos, quia erit ad axem tranſuersam factum rectangulum, (vt docuimus prop. 22. h.) æquale quartę parti rectanguli sub axe tranſuersa, & parametro concluſi, tum vnius, tum alterius sectionis.

EXPENSIO IX.

De parallelis ad diametrum sectionis à vertice coni ductis.

PArabola diametro nulla potest esse parallela ducta à vertice coni, quia incidit in ipsam superficiem coni. Vnde cum non secet basim, nec rectangulum à segmentis diametri basis factum eius quadrato comparari potest.

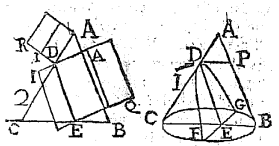
Quarè portione cruris trianguli per axem, & diametro parabolico rectangulum constitutum, rectangulo segmentorum, quę diameter parabolicus facit in diametro basis trianguli per axem, comparabimus.

THEOR. I. PROPOS. XLI.

Rectangulum ex basis portionibus est ad rectangulum ex diametro, et intercepta inter verticẽ coni, & verticẽ sectionis trianguli per axem, vt Parameter ad eã interceptam.

SIt Conus BAC idem in vtraque figura, in quo parabola GDF, cuius diameter ED, & applicata EF, intercepta portio cruris trianguli per axem AD, & parameter DI. Dico, *quòd rectangulum ex* EB, *& EC est ad rectangulum ex* ED, *& DA, vt* DI *ad* DA.

Quadrato ex FE applicatæ, ideo rectangulo BE, & EC ex 5. huius est æquale rectangulum ex ED, & DI, & ideo ex prop. 22. El. lib. 6. Cor. quadratum DQ ex ED prima erit ad quadratum ex EF secunda, vt ED prima ad tertiam proportionalem DI.



Sed rectangulum ex ED, & AD dicit eam proportionem ad rectangulum ex AD, & DI, quam ED ad DI ob eandem altitudinem AD. Ergo quadratum DQ ex DE dicit eam proportionẽ ad quadratum EF, vel rectangulum ei æquale BE, & EC; quam ADE rectangulum ad IDA rectangulum, quod sint, vt ED ad DI ex 16. lib. 5. Ergo *permutando* quadratum ex DE erit ad ADE rectangulum eiusdem basis DE, vt rectangulum BE, EC ad rectangulum ex DA, & DI.

Verùm, vt quadratum ex ED ad rectangulum ex AD, & DE, ita est idem rectangulum ex AD, & DE ad quadratum AR ex DA ob eandem altitudinem ED, & AD.

Rectangulum itaque ex BE, & EC erit ad rectangulum DA, & DI ex 16. lib. 5. vt AD DE rectangulum ad AR quadratũ ex AD, & *permutando* Rectãgulũ ex BE, & EC erit ad rectangulum AD, & DE, vt AD, & DI rectangulum ad DA quadratum, ideſt ob eandem altitudinem, vt ID ad AD.

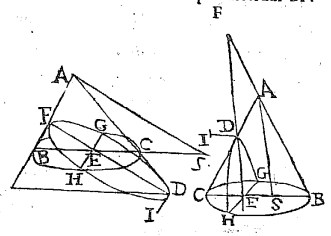
COROLLARIVM.

COlligitur esse quoque proportionem BC quadrati ad CA, & BA rectangulum, vt DI ad DA. Quoniam rectanguli BE, & EC proportio ad rectangulum DA, & DE est composita ex proportione BE, ideſt DB ad DA, eademque ob triangulorum similitudinem ex 4. lib. 6. CB ad CA, & ex proportione EC ad DE, ideſt CB ad BA; quare rursus componendo rectangulum CB, & CB; ideſt quadratum CB erit ad rectangulum CA, BA, vt ID ad DA.

THEOR. II. PROPOS. XLII.

Si Conus per axem sectus sit, & ei triangulari sectioni sit normalis Ellipſis, vel Hyperbola, quarum diametro acta sit parallela à vertice coni, quadratum huius parallelæ est ad rectangulũ ex interceptis baſis partibus factũ, vt trãſuersa diametri portio intercepta ad parametrũ contiguã.

SIt Conus ABC sectus triangulo ABC per axem, sitque sectio Hyperbolica, vel Elliptica GDH normalis ipsi plano triangulari, cuius diametro FD ducta sit parallela AS. Dico, quod si fiat quadratum ex ipsa AS habebit eam proportionem ad rectangulum ex diametri baseos portionibus interceptis SC, & SB in hyperbola BC, & SC in Ellipſi, vt FD diameter tranſuersa ad parametrum DI.



Præaſſumpt. Aduertendum est Quadratum applicatæ EG ex 35. lib. 5. Elem. esse æquale quadrangulo ex segmentis diametri conici BE, & EC; Et tranſuersam diametrum FD esse ad Parametrum DI sicut rectangulum FE, ED ad quadratũ EH applicatę ex prop. 8. h. Cor. 2. Tandem considerandę sunt lineæ in sectionibus, quæ proportionem dicunt. Nam vt FE ad EB ita AS ad SB ob parallelas AS, & FE in triangulo BFE, & BAS ex 4. lib. 6. Deinde vt ED ad EC, ita AS ad SC ob parallelas AS, & DE in triangulis ASC, & CED, in Ellipſi ad verticem.

Quare poterimus conficere duo rectangula ex iſtis proportionibus compoſita, vt vides.

FE	vt	AS	&	DE,	vt	AS
ad		ad		ad		ad
EB		SB		EC		CS
Ergo compoſitum erit, vt compoſitum.							
FE	&	DE		AS,	&	AS
ad				ad		
EB	&	EC		SB,	&	CS

Aſſumendo ſimul fundamenta, quæ non referuntur FE, & DE, & comparando ad ſuos terminos ſimul, quæ proportio erit eadem, quæ AS ad AS ſuos terminos collata quo ſuppoſito.

Probatur. Rectangulum ex EF, & ED est ad rectangulum EB, & EC, vt quadratum ex AS ad rectangulum ex BS, & SC. Sed rectangulum FE, & ED ad quadratum HE, hoc est ad rectangulum æquale ex prop. 35. lib. 3. Elem. CE, EB refertur, vt diameter tranſuersa ad parametrum FD ex Cor. prop. 8. huius. Ergo quadratum AS erit ad rectangulum BS, & SC, vt diameter tranſuersa FD ad parametrum ID.

EXPENSIO X.

De Asymptoto Hyperbolarum proprietate.

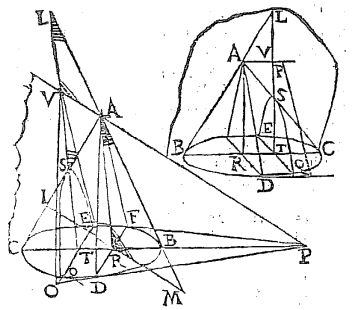
TRiangulum quoddam ambit Hyperbolam, cuius latera singularem ipsi analogiam possident, estque formatum à duorum planorum conum tangentium intersectione, quam cum Hyperbolæ plano extra conum extenso efficiunt, nec huius trianguli inutilis contemplatio, vt ea, quę descriptioni hyperbolarum optimè deseruit.

THEOR. I. PROP. XLIII.

Sint duo plana, alterum, quod conum tangat, alterum, quod illum secet in contactu, & per verticem etiam transeat, & huic secanti Hyperbola sit æquidistans diameter transuersa Hyperbolica à tangente plano in centro secabitur.

DVos casus hęc propositio habet, nam planum contingens conum potest secare planum per verticem secando rectanglè, vel non rectanglè.

Sit ergo primus casus, in quo planum tangens sit ADPQ, quod tangat conum BAC secundùm lineam AD; cui occurrat, secetque aliud planum ductum per verticem A, quod sit ADR, in ipsa linea contactus AD, huic plano FAD æquidistet Hyperbola EQS. Dico, *quod eius diameter transuersa* TL *secabitur ab hoc plano tangente* DAPQ *in centro* V.



Probatur. Nam primo, quòd secet clarum est. Siquidem, si planum BLC interminatum per vtrosque axes AR coni, & TVL Hyperbolæ rectangulum ad eorum plana ducatur. Hoc vtique secabitur à plano tangente DAPQ. Ergo etiam secabit diametrum TVL in illo plano descriptum: quòd autem à plano tangente DAPQ secetur planum ductum per axes BLC patet; quia planum contingens ADPQ occurret vertici coni in A, & eius axi, ergò necessariò secabit planum per eundem verticem ductum BLC; in quo est vertex etiam, & axis RA.

Quod verò punctum V, sit centrum in quo secat diametrum Hyperbolicum planum contingens ADQP.

Probatur. Nam cum planum ADQP sit rectangulè ad planum per verticem ductum BAD ex hypothesi, cui etiam est rectangulum planum interminatum ductum per verticem; propterea que plana hæc perpendicularia plano BAD, quarè, & eorum communis sectio AP, cui etiam plano BAD perpendiculare est planum coni basis BPCD. Ergo ex propos. 16. tract. 22. & eius communis sectio RC cum interminato BLC est perpẽdicularis; Quare ex prop. 7. tract. 22. AP, & RC, cum sint eidem plano perpendiculares erunt parallelæ. Cùm itaque AL crus incidat in parallelas AR, & LT angulus L internus angulo BAR externo erit æqualis ex 30. lib. 1. Eucl. Quarè, cum sint rectangula BRA, & AVL triangula erunt quoque similia. Nam reliquus angulus reliquo erit æqualis, ita dicendum de triangulo AVS, cuius angulus ASV alterno SAR est æqualis, & hinc est similis triãgulo RAC; Radius autem BR æquatur RC ex cor. pr. 11. h.

Probatur itaque assumptum ostendendo SV, & VL eidem AV eandem dicere proportionem, & ideo ex 7. lib. 5. Eucl. esse inuicem æquales.

Nam, vt BR ad RA, ita est ob similitudinem triangulorum AV ad VL. Item quam proportionẽ dicit BR, ideſt RC ad RA eandẽ dicit AV ad VS. Ergo LV, & SV ipsis AV eandem dicit proportionẽ, quam BR ad RA, & propter hoc erunt æquales; quaderè V erit centrum Hyperboles.

Sit iam secundus casus, In quo planum PADOV tangens conum secundùm lineam AD non se secat cum plano FAD rectanglè; dico *adhuc* V *centrum esse Hyperboles*.

Probatur. Nam tracta MI parallela PV, iam clarum est, quòd secabitur diameter Hyperbolicus à plano PVC, quod transit per AB coni, & axẽ TVL hyperboles, quod verò se secet cum plano PVC patet, quia in P, & A cum illo concurrit.

Quod verò V sit centrum demonstratur, quòd sint æquales SV, & VL, eo quia eidem AV eandem dicant proportionem.

Siquidem MR, & RI sunt æquales, vt probabitur: Sed ob parallelas AR, & LT in triangulo LMI ita se habet MR ad AR, vt AV ad VL ob similitudinem triangulorum LAV, & MRA, vt infra ostendam. Rursus eadem VA se habet ad VS, vt RI, ideſt æqualis MR, vt ostendam, ad RA ob similia triangula AVS, & AIR. Vnde cum eadem VA eisdem SV, & LV eandem dicat proportionem RM ad RA ipsę SV, & LV erunt inuicem æquales.

Sunt autem similia triangula ARI, & SAV, quòd angulus S internus niger sit æqualis angulo SAR externo inter parallelas RA, LT, & angulus SVA alterno VAL sit æqualis, ideſt angulo ARI, & hinc reliquus reliquo. Sic, & triangula LAV, & MRA sunt similia; quòd angulus niger L sit æqualis angulo nigro A ob parallelas RA, & LT, & angulus V, & R nigri sunt æquales ob parallelas MI, & PV.

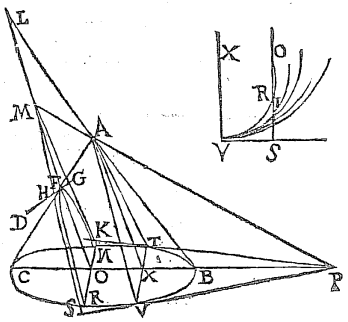
Probatur modo MR, & RI sint in linea MI æquales portiones. Nam ex propos. 23. Tract. 15. ita se habet CR ad BR, vt CP ad BP. Quamobrem etiam permutando, vt CR ad CP, ita erit BR ad BP; Sed in triangulo PAC, vt CR ad CP, ita RI ad PA ob parallelas PA, & RI, vt ex Coroll. propos. 4. lib. 6. Eucl. & vt BR: ad BP; ita RM ad PA, cõ quòd triangula sint ad verticem inter parallelas PA, & MR; Ergo eidem PA lineæ RI, & MR eandem dicunt proportionem, quam CR ad CB, vel quæ eadem BR ad PB: quare sunt æquales.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XLIV.

Si planum aliquod contingat conum, & illud duo plana secent, alterum triangulare ductum per verticem coni in ipso contactu secans planum contingens, aliud Hyperbolicum æquidistans à triangulo; sectio hæc contingentis, & Hyperbolici plani accedet semper ad Hyperbolem, sed nunquam eam continget.

SIt ABC conus, & planum contingens AVMS in in linea VA, siue normaliter ad XV, siue non, quod secetur à duobus planis; primum ductum sit per verticem, vt TAV secans contingens illud VAMS in linea contactus AV; aliud æquidistans KMS, in quo Hyperbola NFR. Dico, quòd sectio huius plani Hyperbolici cum plano contingente AVMS facit sectionem MS, cui Hyperboles crus FR semper accedet; sed numquam tanget, quantumlibet producantur.

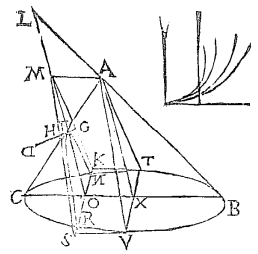


* Probatur primò, quòd nunquam tangat; sunt enim plana secantia triangulare TAV, & Hyperbolicum KMS æquidistantia: Ergo VA, & MS sectiones ipsorum in plano contingente AVMS æquidistabunt, quare nunquam conuenient: Sed planum contingens VAMS tangit in linea AV solummodo; ergo numquam tanget MS superficiem coni quantumlibet producantur, & planum contingens, & conus. Ergo neque tanget Hyperbolã RF, quæ in superficie coni reperitur, & idem dicendum de plano ad alteram partem contingente TAMK, vt patet.

* Quòd verò semper accedat ostenditur. Quia quælibet portio circuli inter duas parallelas intercepta, nempe VX ductam ad contactum V, & alteram parallelam OS in altera figura semper magis accedit ad contingentem VS, quò maior est circulus, & portiones SR parallelæ OS intercepte inter peripheriam, & tangentem sunt semper minores, vt est minor IS, quam RS.

Sed quò magis conus producitur, eò magis circulus basis fit maior, ergo minor erit distantia inter contingẽtem VS, & peripheriã VR illius inter plana parallela TAV, & KMS interdeptã, qualis est RS; distantia enim sectionum TV, & KR semper erit eadem productis planis TAV, & KMS parallelis sed circuli bases coni semper maiores; vnde, & distantia RS semper minor.

Dicentur verò sectio SM, & MK Asymptoti.



THEOR. III. PROPOS. XLV.

Quæ à vertice sectionis ad vnam, seu aliam Asymptotum recta ducetur linea parallela ordinatim applicatæ, hæc poterit describere quadratum æquale quartæ parti figuræ contentæ à diametro transuersa, & parametro.

SInt eadem fig. quę priùs, & ab F vertice Hyperboles ducatur FH, vsque ad Asymptotum MS, vel FG vsq; ad Asymptotum MK, parallela sectioni KS basis BKRC cum plano KMS. Sitque sectionis parameter, seu coefficiens latus FD.

Dico rectã FG, seu FH constituere quadratum æquale quartæ parti figuræ, quam constituit LF diameter transuersa, & parameter FD.

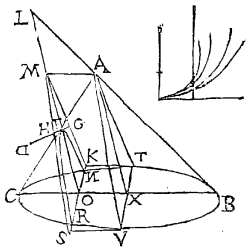
Progress. 1. Probatur. Quadratum constitutum ex MF est quarta pars quadrati constituti ex LF, cum sit latus eius FM, dimidium lateris LF. Ergo etiam quadratum ex FH quarta pars rectanguli ex LF diametro, transuersa, & FD Parametro.

Progr. 2. Probatur conseq. Nam sicut se habet quadratum ex LF ad rectangulum ex LF, & FD ita se gerit quadratum MF, vt probabitur in 3. progress. ad FH quadratum, & sic se debet gerere quarta pars quadrati EL ad quartam partem rectanguli ex LF, & FD ex 18. lib. 5. Elem. Sed Quadratum ex FM est quarta pars quadrati ex FL descripti, vt dictum est. Ergo etiam quadratum ex FH erit quarta pars rectanguli ex LF diametro transuersa, & parametro FD descripti.

Progress. 3. Remanet itaque probandum quadratum MF esse ad quadratum HF, vt quadratum ex LF ad rectangulum ex LF, & FD. Nam cum sint super eamdem basim FL, erunt vnum ad aliud, vt altitudines, nempe altitudo quadrati, quæ est LF ad altitudinem rectanguli, quæ est FD, nempe, vt diameter trãsuersa ad parametrum: Sed ex prop. 42. huius, vt est diameter transuersa ad parametrum, ita est quadratum ex AX ad rectangulum ex CX, & XB, vel quod ei æquale ex 35. lib. 3. Eucl. ad quadratum ex XV. Sed, vt quadratum AX ad quadratum XV, tale quoque ob similitudinem triangulorum XAV, & OMS, & aliud reperitur MO quadratum ad quadratum OS, & quadratum FM ad quadratũ FH. Ergo ex 16. l. 5. el. erit eadem proportio quadrati FL ad rectangulum LF, & FD diametri transuersæ, ad parametrum primo

propoſita, ac quadrati FM ad quadratum FH.

Quod verò triangula ſint æquiangula patet, quia ex parallelis conficiuntur. Nam AX, & MO exiſtentes in eodem plano ſunt parallelæ, ſic, & XV, & OR, ſicut, & VA, & SM; quia efficiuntur à planis parallelis ATV, & MKS ſecantibus planum BAC ſecans per axem, & planum BCTV baſim Coni, & planum AVMS contingens, vt patet pr.14. Tr.22.



COROLLARIVM.

FIllicitur quadratum MF dimidiæ tranſuerſæ diametri ad quadratum FH eſſe, vt diameter LF ad parametrum FD; quia ex prog.3. eſt, vt quadratum ex LF ad rectangulum ex LF diametro, & FD parametro. Hoc autem quadratum ex LF eſt ad rectangulum ex LF, & FD ob eandem altirudinem FL, vt diameter ad parametrum, vnde etiam talis erit proportio quadrati MF ad quadratum FH.

THEOR. VI. PROPOS. XLVI.

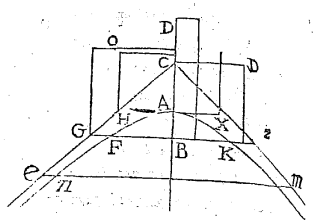
Si in Hyperbola applicata producatur vſq; ad Aſymptotum hinc, & inde, erit rectangulum factum ex vna portione inter figuram, & Aſymptotum intercepta, & ex tota reliqua vſque ad Aſymptotum æquale quartæ parti figuræ à tranſuerſa Diametro, & Parametro comprehenſæ.

SIt Hyperbola FAK, cuius aſymptoti CG, CZ, centrum C, cuius contingens verticem vſque ad Aſymptotum AH, ſitque applicata producta extra ſectionem vſque ad Aſymptotum in Z, & G. Dico, quòd ſi fiat rectangulum ex intercluſa inter ſectionem, & Aſymptotum FG pro vno latere, & ex reliqua ZF pro alio; hoc erit æquale quartæ parti figuræ, quæ ſub tranſuerſa diametro AD, & parametro comprehendatur.

Probatur autem. Quia quadratum ex AH, vt ex præcedenti, eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ ex parametro, & diametro tranſuerſa comprehenditur. Sed huic quadrato eſt æquale rectangulum ex ZF, & FG, ergo hoc rectangulum eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ à diametro tranſuerſa, & parametro concluditur.

Sunt autem quadratum AH, & rectangulum ZF, & FG æqualia, quod eidem AC quadrato eandem dicant proportionem.

Nam ex prop.6.Cor.2.h.vt diameter tranſuerſa ad parametrum proportione reſpondet, ſic rectangulum ex DB, & BA ad quadratum ex BF proportionem dicit, & eandem proportionem dicit quoque ex præced Coroll. quadratum CA ad quadratum AH, & ex eadem prop. eius progr.3. quadratum CB ad quadratum BG.



Debes autem antequam progrediamur aduertere, rectangulum DB, & BA eſſe æquale BXD gnomoni, & rectangulum ZF, & FG gnomoni, quid remaneret ablato quadrato FB à quadrato GB, vt ex ſe patet. Auſer ergo duo proportionalia in eadem proportione nimirũ rectãgulũ DB, & BA à quadrato BCD, aut gnomon BXD æquale illi rectangulo, & remanebit quadratum CX ex CA. Auſer quoque quadratum BF à quadrato BG, & remanebit gnomon æqualis rectangulo ex ZF, & FG, quæ etiam vtpote reſidua rerum dicentium eandem proportionem, ac ſua tota, in quibus erant; erunt ex 22. prop.lib.5.Elem. in eadem proportione. Eritque ex AC quadratum reſiduum in ea proportione ad rectangulum ZF, FG, quam totum BC quadratum ad totum quadratum BG, quę eſt illa ipſa, quam habebat quadratum AC ad AH quadratum. Quamobrem CA quadratũ ad quadratum AH eandem progulũportionẽ dicit, quã idẽ CA quadratũ ad rectãZF, & FG, itaque erunt æqualia rectangulum ZF, & FG, & quadratum AH ex 7.lib.5. Elem. Vnde hoc rectangulum ZF, & FG quartæ parti figuræ, ex diametro tranſuerſa, & Parametro æquabitur, ſicut ex præc.prop. æquatur ei quadratum AH. Et idem probabitur de rectangulo GK, & KZ, cum militet eadem ratio, cùm æquentur KZ, & FG.

COROLLARIVM.

QVare colligas velim omnia rectangula ex ZF, & FG, & alijs parallelis, vt m n, & n e eſſe æqualia tum inter ſe, tum quadrato AH, vt patet, cùm ſingula ſint æqualia quadrato AH.

PROBL. I. PROPOS. XLVII.

Datæ cuiuſcumque Hyperbolæ Aſymptotos inuenire dato centro, & Parametro contigua.

*REctangulo DV. Parametro, & DA tranſuerſa diametro reperiatur quadratum æquale ex propoſ.14.lib.2. Eucl. & huius quadrati dimidium latus à vertice figuræ A ſuper parametrum menſuratum dabit punctum AH, per quod à centro C tranſibit Aſymptotus CG, & ſic producta in aliam partem, quę ſit etiam æqualis ipſi AH dabit aliud punctum, per quod à centro C Aſymptotus tranſibit CZ.

Probatur autem ex prop.45. Quia AH lineæ per quam à centro tranſit Aſymptotus ſubtendit quadratum æquale parti quartę rectanguli à parametro, & diametro tranſuerſa comprehenſi. Sed hoc

hoc quadratum ex AH, vel ei æquali ad alteram partem, vtpote ex dimidio eius latere eſt quarta pars quadrati, quod fecimus, æquale dicto ex diametro tranſuerſa, & parametro rectangulo; Ergo etiam hulus rectanguli quarta pars erit, & conſequenter erit linea, per cuius extremum à vertice ſectionis à centro tranſibit Aſymptotus, quod facere oportebat.

EXPENSIO VII.

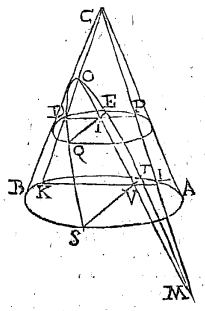
De lineis in ſectionibus, vtcumque ductis applicatas, ſeu parallelas ſecantibus.

NOs hanc doctrinam faciliter trademus, cùm alij, non niſi poſt multas præuias propoſitiones, à quibus dependet, tradant, & non de omnibus ſimul, ſed de ſingulis, vt videre eſt apud Ambroſium Vincentium virum in Mathematicis admirabilem, in quo quædam etiam deſumemus in ſequentibus.

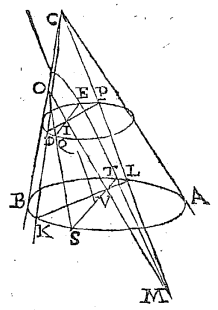
THEOR. I. PROP. XLVIII.

**Si in ſectione Conica qualibet, quæcumq; ducta ſecet duas parallelas in ipſa ſectione, rectangulum ex ſegmentis illius interceptis ab vna erit ad rectangulum ex interceptis ab alia ſegmentis, vt rectangulum ex ſegmentis vnius ad rectangulum ex ſegmentis alterius parallelarum.*

*SIt conus ABC, & triangulum LKC à vertice deſcendens; at non per axem, & in ſectione TOS faciat ſectionem MO, ſintque ſectiones effectę à circulis parallelis in illa parallelæ EQ, & TS. Dico rectangulum MV, VO lineę OM ſecantis conicam figuram in O, & M eſſe ad rectangulum MI, IO, vt rectangulum TV, VS ad rectangulum EI, IQ parallelarum.



Probatur. Rectangulum LV, & VK ex propoſ. 35. lib.3.Eucl. eſt æquale rectangulo TV, & VS ob eundem circulum, in quo ſe interſecãt; & eadem ratione PI, & ID æquatur rectangulo EI, & IQ: Sed vt PI ad LV; ſic eſt IM ad VM, ob paralleliſmum in triangulo eodem IMP, & vt ID ad VK, ſic OI ad VO ob parallelas in triangulo eodẽ KOV, ergo ſi cõponãtur proportiones, & fiant rectangula, ita erit rectangulum ex PI, & ID ad rectangulum LV, & VK, vt IM, & OI rectangulum ad rectangulum ex MV, & VO, vt hic vides.

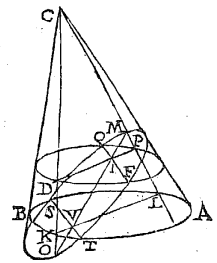


PI vt IM & ID vt OI
ad ad ad ad
LV MV VK VO

Ergo compoſitum, vt compoſitum.

PI & ID IM & OI
Exit ad compoſitum ad compoſitum.
LV & VK MV & VO

Quare etiam rectangulum EI, & IQ erit ad rectangulum TV, & VS, vt rectangulum MI, & OI ad rectangulum MV, & VO, quod erat probandum. Quod verò ſectio V.g. MTOS parabolę, & MO ſectio in ea, & latus trianguli MC conueniant in M patet. Nam cum ſit planum TOS parabolę, cruri AC parallelum non erit parallelum cruri CM. Vnde conueniet, cum eo crure CM; ſed illud eſt in ſuperficie coni. Ergo conueniet cum eo in ſuperficie coni. Sed puncta plani parabolici in ſuperficie coni ſunt ipſa linea flexa parabola. Ergo ipſa in M incidet; ſed ſectio MO eſt in plano parabolę, & in plano triãguli, cũ ſit eorũ communis ſectio. Ergo ibi debebit eſſe vbi planum parabolæ cruris trianguli coniungũtur in M ſcilicet in ipſa flexa SOTM.

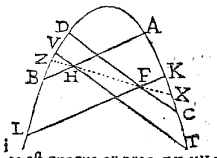


In Ellipſi patet; quia ſi ſecat latera trianguli CBA per axem; tantò magis, & reliquorum triangulorum minorum intra conum ductorum. In Hyperbola CM crus poteſt non conuenire cum ſectionis SOTM plano, ſed neque ſecabit Hyperbolam altero extremo M; quod requiritur in propoſ. Siquidem ſi ſectio OM conueniret cum Hyperbola etiam contra Theſim cum MC conueniret; quia totius trianguli KCL, cuius ſectio eſt, & plani Hyperbolici, tantùm crura, vtpote ſectiones ſuperficiei conicę in ſuperficie conica ſunt. Nota verò, quod ſectio OM poteſt etiam ſecare axem, vt dedimus exemplum in Hyperbola.

THEOR. II. PROPOS. XLIX.

Si duæ parallelæ duas alias parallelas in qualibet conica sectione intersecent erunt rectangula segmentorum proportionalia.

SIt Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipsis TADL parallelę in ea KL, & AB alias parallelas intersecantes TV, & CD, & per puncta intersectionum F, & H ducatur XZ. Dico quod rectangulum AH, & HB erit ad rectangulum EX KF, & FL, vt rectangulum TH, & VH ad rectangulum CF, & FD.



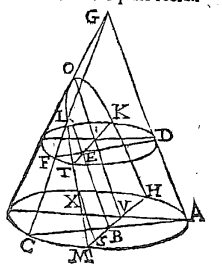
Probatur rectangulum AH, & HB ad rectangulum KF, & FL erit ex preced. vt rectangulum HZ, & HX ad rectangulũ ZF, & FX. Verùm vt ZH, & XH rectangulum ad ZF, & FX rectangulum ita est quoque EX prec. TH HV rectangulum ad CF, & FD rectãgulũ, ergo cum sint eædẽ vtri tertię proportioni istę proportiones rectanguli, nimirũ XH, & HZ ad XF, & FZ rectangulum, erit quoque AH, & BH rectangulum ad KF, & FL rectangulum, vt TH, & VH rectanguli ad CF, & FD rectangulum, quod erat probandum.

THEOR. III. PROPOS. L.

Si in parabolâ, quælibet parallelæ secent diametros, erit intercepta diameter ad interceptã diametrũ vt ex segmẽtis vnius parallelæ ad rectãgulũ ex aliùs segmentis.

*Exponatur conus. In quo parabola HOLM, & triangulum, sed non per axem AGC secet eam in BL, & circulos basi parallelos in DF, & AC qui etiam circuli secent parabolam in KT, & HM, quæ sectiones erunt parallelæ, sicut etiam sectio BL lateri AG ex Coroll. 3. propos. 4. tract. 22. eo, quia totum planum parabolicum ei AG sit parallelum, & ideo etiam erit parallela diametro principali VO, ex propos. 9. eiusdem tract. & ideo LB erit diameter. Dico itaque KE, & ET rectangulum esse ad HB, & BM rectangulũ, vt EL ad LB.

Probatur. Nam rectangulum DE, & EF ad rectangulum AB. & BC ob æquales, vtpote inter parallelas, sunt ad inuicem, vt altitudines EF ad BC; sed EF, & BC ita est EL ad LB. Ergo rectangulum DE, & EF ad rectangulum AB, & BC est, vt LE ad LB: & ideo vt rectangulum KE, ET ex 35. lib. 3. equale DE & EF rectangulo ad HB, & BM æquale rectangulo AB, & BC.



COROLLARIVM I.

HInc habes BL esse ad LE, vt VO ad eo, quòd sint, vt parallelę eędem AG ad DG ex 16. l. 5. El. & ideo ME, BH esse ad TE, EK, vt MV, VH ad TI, IK rectangula; quòd sint ex prec. vt LB ad LE, vel VO ad OI. Ideo vt LB, BE ad LE, BE, vel OV, VI ad OI, IV rectangula ob eandem altitudinem in eadem proportione, ac linearum. Vnde *permutando* MB, BH erit ad MV, HV, vt LB, BE ad OV, IV rectangula, s. vt LB ad OV, & sic alias proportiones potes permutare.

COROLLARIVM II.

HInc habere licet ea rectangula esse æqualia ex segmentis à diametro aliquo factis, quibus ipsi diametri insistunt æquales, quoniam HS, & SM rectangulum erit ad KE, & ET rectangulum ad SX ad EL, sed hæ lineæ SX, EL sunt æquales ex Thesi, ergo etiam rectangula KET, & HSM,

EXPENSIO VII.

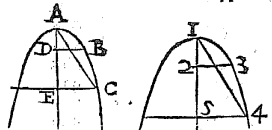
De similitudine Figurarum.

DEfinitio duarum figurarum similium ab Eutocio 3 æquiponderantium, & Apollonio Conici sexto allata est, quòd segmenta diametrorum inter verticem, & applicatas vnius ad applicatas suas, proportio sit, vt segmenta alterius ad suas applicatas, cui Mydorgius lib 4. con. eam conditionem addit, quam demonstrat omnino necessariam, quod applicatarum ad diametrum anguli sint æquales in vtraque figura.

THEOR. I. PROPOS. LI.

Omnes parabolæ in quocũq; cono similes sunt.

SInt datæ parabolæ CBA, & 431, quæcumque, & data diameter in prima AE, applicatæque CE, & BD, repertoque in secunda diametro 15. fiat angulus 415 æqualis angulo CAB apud 1, & A, & ducatur 45 à puncto, in quo 41 Orus trianguli secat figuram iuxta eundem angulum, ac CB applicata facit cum diametro AE; Deinde fiat, vt AE ad AD sic 15 ad 12, & ducatur altera applicata 32.



Progr. 1. Probatur ex prop. 5. h. vt 12 ad 15, & ideo ex effectione, vt AD ad AE, ita quadratum 32 ad quadratum ex 45, & ideo, vt BD quadratum ad CE quadratum, & ideo ex 26. l. 6. El. erit etiam latus 32 ad latus 45, vt latus BD ad latus applicatæ CE.

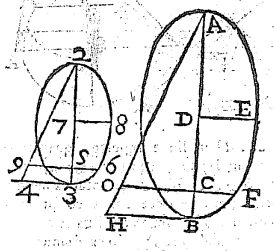
Progress. 2. Postea considerandum est ob duos angulos ex effectione æquales apud 1, & 5 ipsis B, & A triangula 145, & CAB esse equiangula ex Cor. prop. 17. lib. 1. Elem. Et ideo esse 45 ad 51, vt CE ad EA. Et vt 51 ad 21; Sic EA ad DA. Sed erat in 1. progr. 32 latus ad 45 latus, sic BD ad CE, & nunc vt 45 ad 51, sic CE ad EA, & vt 51 ad 21; sic EA ad DA. Ergo ex æquo, vt 32 ad 21; Sic BD ad DA; Et sic ostendetur de alijs, quæ possent trahi. Cum ergo sit 32 applicata ad segmentum diametri 12 in vna parabola interceptum, vt

in altera applicata BD ad diametri interceptum segmentum DA, & idem argumentum sit de alijs angulique applicatarum sint æquales; Parabolæ erunt similes ex definitione 16. h.

THEOR. II. PROPOS. LII.

Si binæ Ellipses, seu Hyperbolæ, sint quarum vna, habeat segmenta intercepta inter verticem, & applicatas ad alterius segmenta, vt applicatæ sibi ad applicatas alterius in angulis æqualibus; illæ erunt figuræ similes.

*Sit figura 368. in qua sit segmentum 35 ad segmentum BC alterius, vt 56 applicata ad CF applicatam, & idem sit de alijs omnibus segmentis in angulis æqualibus ACF, & 256. Dico figuras esse similes.

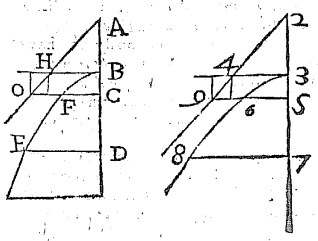


Probatur. Ita ponitur 35 ad CB, vt 56 ad CF. Ergo *permutando* erit quoque 35 ad 56, vt CB ad CF, vel, *conuertendo* 56 ad 35, vt CF ad CB. Ergo cùm sint in angulis æqualibus, figuræ erunt similes ex def. 16. huius.

THEOR. III. PROP. LIII.

Hyperbolæ duæ, seu Ellipses, quarum diameter transuersa vnius ad contiguam parametrum sit, vt alterius intercepta diameter ad suam contiguam parametrum in angulis æqualibus, illæ figuræ erunt similes.

*Sit Hyperbola, seu Ellipsis 368, & DFE, & sit intercepta diameter 32 ad parametrum 34, vt AB intercepta alterius ad BH parametrum. Dico eas figuras esse similes.



Probatur. Fiat, vt 23 ad 35. Sic AB ad BC, & ducatur CO, & 59. Sicut etiam 29, & AO, per extrema parametri; Triangula erunt equiangula ex 5. l. 6. cũ ponatur 23 ad 34, vt AB ad BH ex Thesi.

Quia itaque triangula sunt equiangula, erit 59 ad 34, vt CO ad BH, & vt 34 ad 32, sic BH ad BA, & vt 23 ad 35; sic ex effectione est BA ad BC Ergo ex æquo, vt 59 ad 35; sic est CO ad CB. Sed CO ad CB habet proportionem duplicatam CF ad CB, sicut etiam 59 ad 53 eius quę est 56 ad 53, quia ex propos. 8. huius BO rectangulum quadrato CF, & 39 rectangulum est æquale quadrato 56. Vnde ex 19. lib 6. sunt CO, & CF, & C BVeluti etiam 59, 56, & 53 in continua proportione: Ergo erit 56 ad 53, vt CF ad CB vt tract. 16. propos. 2 & idem poterit ostendi de segmentis 37, & BD sicut de applicatis 78 & DE, & quibuscumq; alijs. Cum ergo sit 56 applicata ad interceptam diametri portionem 53, vt CF ad CB in æqualibus angulis C, & 5 cum applicatæ parallelæ sint parametris figuræ; ex defin. 16. similes erunt.

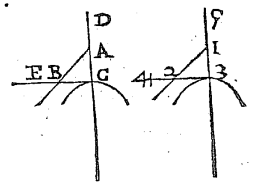
COROLLARIVM.

IDeò figuras eas esse similes iudicabis, cum rectangulum ex diametro intercepta, & segmento V.g. 25, & 53 est ad quadratum applicatæ 56 vnius, vt rectangulum AC, & CB ad quadratum CF alterius. Quia enim est 25, & 53 rectangulum ad quadratum 56, vt diameter transuersa 32 ad parametrum 34, & rectangulum AC, & CB ad quadratum CF, vt AB ad BH erit diametri transuersæ 23 ad parametrum vnius 34, vt AB diameter transuersa ad BH parametrum alterius. Vnde figuræ similes erunt ex prop. prec.

THEOR. IV. PROPOS. LIV.

Si duæ hyperbolæ sint, quarum vna obtineat transuersam diametrum ad ductam à vertice ad Asymptotum, vt alterius diameter transuersa ad ductam similiter, illæ Hyperbolæ erunt similes.

SIt CA semidiameter transuersa in Hyperbola AB Asymptotus, & CE ducta à vertice. Sicut alterius 13 semidiameter 12 Asymptotus 32 ducta à vertice ad Asymptotum: Dico, quòd si sit 13 ad 32, vt CD ad CB eas Hxperbolas esse similes.



Probatur. Quadratum ex 32 ex propos. 45. h. æquatur rectangulo ex semidiametro 31, & ex dimidio parametri 34. Ergo cum ex Thesi ponatur 31 ad 32, vt AC ad CB erit etiam 31 semidiameter ad semiparametrum CE s. in duplicata ratione AC ad CB, vel 13 ad 32 ex Coroll, prop. 21. lib. 1.

lib.6. Elem. Quare, & tota diameter 3 5 ad totam parametrum ſuam eam habebit rationem, quam CD tota diameter ad parametrum ſuam CE ex prop.18. lib.5. Elem. quare ex præced. figuræ erunt ſimiles.

COROLLARIVM I.

QVod ſi adſint duæ Hyperbolæ, quæ ſint in Aſymptotis æquiangulis, & etiam 2 3, & CB ſint applicatæ ad verticem in angulis æqualibus, tunc illæ Hyperbolæ erunt ſimiles, quod ob æquiangula triangula, ita ſit 3 1 ad 3 2, vt CA ad CB.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoque eas figuras eſſe ſimiles, quarum rectangula contenta ſub parametro, & diametro tranſuerſa ſunt ſimilia; quia etiam tunc erit diameter vnius ad ſuum parametrum, vt diameter tranſuerſa alterius ad ſuum quoque parametrum ob ſimilitudinem triangulorum ſub ijs contentorum.

EXPENSIO XIII.

De deſcriptione vniuerſali Sectionum.

FX principijs, proprietatibuſque explicatis iam conuenit fructum excerpere, & deſcriptionem Sectionum, tum ad Specula Vſtoria perpollienda, tum ad Parallelos Solis in Horologijs Solaribus deſcribendos, tum etiam in motibus planetarũ per Ellipſes explicandis deſeruleté explicare; Secundùm itaque diuerſa principia, quæ tradidimus, ſic ſunt diuerſi modi Sectionum deſcribendarum, & in hac Expenſione modos docebimus vniuerſales omnibus ſectionibus deſeruientes.

PROBL. I. PROPOS. LV.

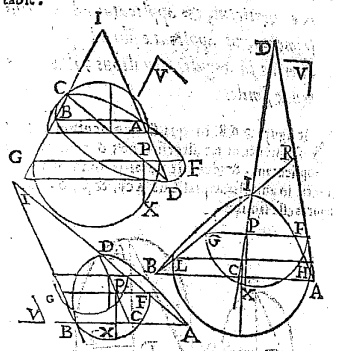
Data baſi ſectionis alicuius, & diametro, & angulo ab illis facto ſectionem deſcribere per puncta.

HOc prob. fundatur in ſecunda expenſione de diametro.

Sit itaque primò data ſectionis baſis AB, quę erit etiam coni, nimirum applicata il'a, quæ per centrum baſis coni tranſit; ideoque cum tranſeat per centrum erit ſemidiameter, quòd verò pertingat ad ſectionem erit applicata.

Hac AB itaque data, & diametro ſectionis CD, & angulo V, quem facit applicata cum diametro, ſic deſcribetur quælibet ſectio.

Applicabitur diameter totus DC ipſi applicatæ, & baſi EA ſecundùm angulum datum V, ad eius mẽdietatem C, ita vt CA, & CB ſint portiones æquales; ducaturque à puncto B, vel A, quæ pertingat ad verticẽ diametri D recta AD, & in parabola ab alio extremo B educetur diametro parallela BI. In hyperbola autem AB, quæ trãſeat per verticẽ diametri intercepti I, & occurrat AD in E; in Ellipſi verò coniunges aliud extremum diametri C, & baſis B, produceſque quantùm placuerit. Duc s deinde FG parallelis, & HL, & etiã pluribus ad exactiorẽ deſcriptionẽ inter FP, & PG reperies mediam proportionalem ex prop. 16. lib. 6. Eucl. qualis vna eſt PX; quas medias proportionales omnes applicabis diametro CP; intercepta à puncto P ſecundùm angulum datum menſurando eas in lineis GF, productis vbi eſt opus, & per extrema earum puncta duces manu æquabili flexam lineam; illa enim ſectionem requiſitam repreſentabit.



Probatur. Nam lineę reperte, quarum vna eſt PX ſunt applicatæ, ergo per extrema earum tranſibit ſectio. Conſequentia patet ex definitione applicatarum. Antecedens verò propoſitio probatur, quia quadratum ex applicatis prop. 5. & 6. huius, eſt æquale rectangulo ex diametris baſium coni confecto, quæ à diametro ſectionis intercipiuntur, quales ibi in fig. illarum prop. ſunt LK, & KM, aut MK, & KN. Sed HL, in iſta fig. FG, & cęt. ſunt parallelæ diametro baſis coni AB, conus verò eſt IAB, vel BRA, ergo, & etiam ipſæ diametri baſium coni ſunt; quare eorum rectangula ex ſegmentis FF) & PG, & cęt. facta erunt æqualia quadrato PX, & cęt. ex Probl.14. lib.2. Eucl. & ex prop.19. lib.6. Ergo erunt applicatæ.

PROBL. II. PROPOS. LVI.

Dato parametro, & diametro intercepta, Sectiones conicas per puncta delineare.

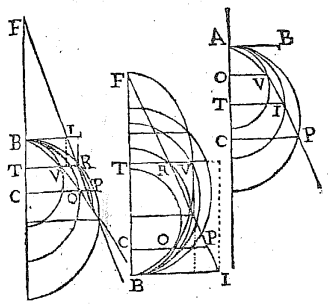
HÆc deſcriptio fundatur in 3. Expenſione.

Detur ergo Parameter applicata AB alicuius parabolæ, & diameter, cuiuſcumque longitudinis ad placitum AC. Eligantur in ipſo quælibet puncta V. g. punctum C, inter AB, & AC inueniatur media proportionalis CP hæc erit applicata, ſic ſi electo alio puncto T inter AT, & Parametrum AB inueniatur media proportionalis TI, hæc erit applicata, ſic facias in puncto O, & reperias OV. Nam hę omnes, & quaſcumque alias inueneris, erunt applicatæ: quare ſi per extrema puncta manu æquabili ducas lineam, hæc erit parabolica ſectio.

Quod vero CP, & TI, & cęt. ſint applicatæ patet. Nam in parabola ex prop.6. h. rectangulum ex Parametro, & intercepta portione diametri inter verticem, & applicatam eſt æquale quadrato ipſius

ipſius applicatę, ſed ſi ſuper CP, & quamlibet aliam, ita inuentam fiat quadratum hoc erit æquale rectangulo ex CA diametro intercepta, & AB Parametro: Quoniam eſt media proportionalis inter vtraſque lineas AB, & AC ex conſtructione, vnde fit ex Prop. 19. lib. 6. Euc. quòd quadratum mediæ ſit æquale rectangulo extremarum. Ergo CP, & aliæ ſimiles inuentę erunt applicatæ ex pr. 7. h.

Si verò deſcribenda ſit aliqua Hyperbola, vel Ellipſis, & detur diameter tranſuerſa FB. Parameter verò contigua in Hyperbola, & in Ellipſi BI. Ab extremo diametri BF per extremum Parametri I ducatur recta FI.



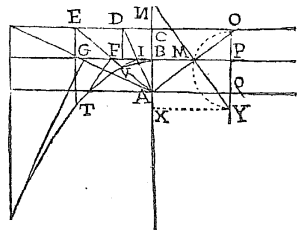
Deinde electis quibuſlibet punctis C, & T ducantur in PI productã, ſi opus fuerit parallelę TV, & CP ipſi IL, interq; TB, & TR inueniatur media proportionalis TV, nã TV erit applicata. Sic ſi inter CB lineam, & CP inueniatur media proportionalis CO hæc erit applicata. Quare ſi inueniantur plurimę aliæ, habebimus puncta, per quæ ſuaui manu ducta linea Hyperbolicam ſectionem, vel Ellipticam exprimet. Quod verò ſint applicatæ patet. Cum ſint medię proportionales V. g. TV inter TB, & & TR. erit ex TV quadratum æquale rectangulo ſub TR, & TB contento; Sed hoc rectangulum eſt æquale rectangulo TI, ſub TB, intercepta diametro, & BI parametro, ſi addatur figura IR. in Hyperbola auferatur in Ellipſi ſimilis, ſimiliterq; poſita, ergo TV erit applicata, quia continet quadratum iuxta propoſ.8. huius æquale rectangulo ſub Parametro BI, & intercepta diametro contento deficiente ei in Ellipſi fig. IR, vt ibi requiritur, vel abundante in Hyperbola, vt fiat rectangulum TI ſub parametro BI. & intercepta TP contentum, & ſic aſſeras de omnibus alijs ſimiliter inuentis. Quapropter ſi per extrema puncta earum, cùm plurimæ inuentæ fuerint ducatur flexa, hæc erit Ellipſis, vel Hyperbola.

PROBL. IV. PROPOS. LVII.

Datis Vmbelicis, & vertice, & poſitione ſectionum, eas in eodem plano deſcribere per puncta.

SIt datus vertex parabolæ B, & Vmbilicus A diſtantię BA fiat ę qualis BC, perq; puncta B, C ducantur in vtramque partem perpendiculares CE, & BG, & ab Vmbelico A ad D, & E puncta, vt placet in OB rectæ ducantur AD, & AE; & aliæ ad libitum, quæ ſecabunt lineam BG in I, & F, à quibus punctis excitentur perpendiculares IV, & FT; à punctis verò D, & E perpendiculares ad CE educantur DV, & ET; Nam hæ ſe interſecabunt, cum prioribus orthogonalibus IV, & FT in Punctis V, & T, per quę à vertice B neceſſariò parabola ducta tranſibit.

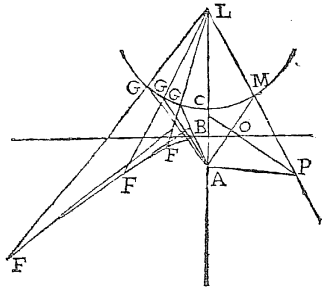
Hæc deſcriptio fundatur in propoſ.16. huius, pro cuius oſtenſione inſpice dextram partem fig.



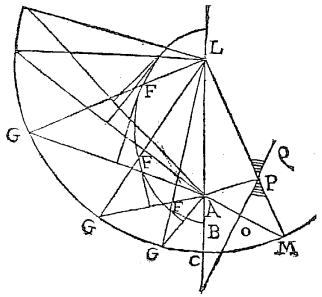
Ibi enim probatur, quod à vertice parabolæ ducta ad contingentem, quę eſt ibi EA, & hic BM ſit æqualis quartæ parti figuræ ſub diametro intercepto, & parametro cõtentæ, & in ipſius probationis progr. 1. quod quadratum applicatæ, quæ ibi eſt CB hic XY ſit æquale rectangulo, quod ſub intercepta diametro inter contingentem, & ſectionis verticem, vt ibi eſt AF hic BN, & Parametro continetur. Si ergo hic probetur, quod quadratum MB à vertice in MY perpendicularem ipſi AO ductæ ſit æquale quartæ parti quadrati, cuius latus XY, hęc erit applicata, & Y punctum, per quod parabola tranſit, & NY contingens. Id verò ita probatur MA eſt æqualis MO ob æquidiſtantes CO, & BP, & AQ. Vnde, & BM erit æqualis PM ob parallelas OY, & CA, & ſimilia triangula POM, & MBA. Quamobrẽ quadratum ex dimidia MB, vel PM erit quarta pars quadrati totius BP, quale quadratum ex YX; Sed hoc quadratum PM eſt æquale rectangulo ex PY, & PO, vel PQ æquali ob rectangulum triangulum OMY Ergo hoc rectãgulum erit quarta pars rectanguli contenti ſub PY, & ſub linea quadrupla ipſius PO, vel PQ æquali BA: verũ PY æquat BN; ſiquidẽ ex propoſ.12. BX, & BN æquantur. Vnde etiam PY, & BN, quod, & ab æquiangulis triangulis MBN, & MYP conſtat. Linea verò QP eſt æqualis ipſi BA, cuius quadrupla eſt parameter; Igitur quadratum ex XY erit rectangulo ex BN, & parametro, æquale: Vnde XY latus applicata erit, per cuius extremum Y tranſibit ſectio parabolica.

Si verò ſit Hyperbola, vel Ellipſis datis duobus Vmbelicis A, & L, ſumatur BC æqualis AB, & centro L interuallo LC portio circuli deſcribatur, quam eductæ à centro L, ſecent quæcumque rectę quomodocumque in punctis MCGGG; Et ad hæc puncta ab vmbelico A rectæ ducantur AM, & AG, & cęt. quibus bifariam ſectis V. g. in O, à punctis mediętatum perpendiculares excitentur, quæ lineas ab L vmbelico productas ſecent in FFFP. Dico puncta F, F, F, P eſſe in Hyperbolæ, vel Ellipſis ambitu.

Probatur. Nam LC eſt æqualis diametro tranſuerſę; Vmbelici enim æqualiter ſunt remoti ab extremis diametri tranſuerſæ extremi, in Ellipſi verò intra eam: quare diameter tranſuerſa in Hyperbola



perbola est minus linea AL distantia vmbelicorum gemina BA, qua distat vmbelici à vertice, in Ellipsi verò maior est. Sed in vtraque figura talis est LC, cum deficiat in Hyperbola AB, & BC æqualibus; in Ellipsi verò abundet. Ergo LC diameter transuersa est. Quo posito, si probetur angulos ad P esse æquales PO erit tangens ex propos. 23. huius, & propter hoc erit punctum P in Hyperbola, siquidem ibi ostenditur tangentem cum duabus emissis ab vmbelicis angulos efficere æquales.

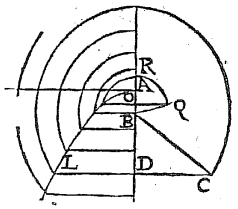


Sed id facilè ostenditur. Nam triangula MPO, & POA cum sint rectangula, & habeant PO latus commune, & MO, & OA crura æqualia, ex propos. 17. lib. 1. Eucl. habebunt etiam angulos apud P æquale APO, & OPM. Quare, & in Ellipsi QPL erit æqualis cum sit ad verticem angulo MPO, & consequenter angulo OPA. Et hinc cùm prouenientes ab vmbelicis LP, & PA faciant cum PO angulos æquales in Hyperbola MPO, & OPA in Ellipsi QPL, & APO, linea PO erit tangens, & punctum P punctum contactus. Vnde erit in ambitu Hyperbolæ, vel Ellipsis. Accedit, quod ob æqualitatem triangulorum PMO, & OPA, basis PM est æqualis basi PA: quare LP in Hyperbola superat diametrum transuersam LM, vel LC licea PA, In Ellipsi verò addita linea PA ipsi LP, vt fiat LM diametro transuersę æquatur LC iuxta id, quod exigit prop. 23. h.

PROBL. V. PROPOS. LVIII.

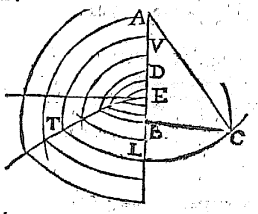
Datis Conicæ sectionis, Vmbelico, & vertice, eam per puncta promptius describere.

SIt primùm describenda Parabola, & datus sit Vmbelicus B, & vertex A. Extendatur diameter AB, quantum opus fuerit, & sumptis in eo RA æquali AB vltrà verticem, deinde plurima alia puncta, vt O, & P sumantur, & ab illis ducantur perpendiculares OQ, & DL, deinde interuallo DR, vel OR, nempe ea distantia, quà vnaqueque educta DL, & OQ distat ab R, centro verò Vmbelico ipso B ducantur arcus, & vbi secant eductas in Q, & L, vel C, ibi transibit ambitus Parabolicus.



Probatur ex illis, quę diximus propos. 26. huius. Nam omnis linea, vt ibi probatum est, quę ducitur ab vmbelico ad applicatas, qualis est BC, vel BQ, est æqualis distantiæ eius à vertice in diametro sumpta; nimirum distantiæ DA, vel OA, & insuper distantiæ, quam vmbelicus habet à vertice AB, vel AR; quare BC, quæ est æqualis distantię DR, & BQ distantiæ OR, cum applicata CD, vel OQ conueniet necessariò in puncto Q, vel C ex prop. 26. huius Coroll.

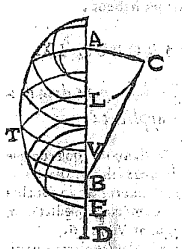
Si verò sit Hyperbola, vel Ellipsis, in qua dentur Vmbelici B, & A, vertex E. Lineæ ED accipiatur æqualis, quæ sit ED: deinde centro A ducantur plurimi gyri interuallo maiori, quam AE, in Hyperbola, quorum vnus sit LT. Et in Ellipsi non maiori, quam AE, sed maiori, quàm BE, quorum vnus TV. Rursusque interuallo D, & quolibet ex circulis ductis facto centro in vmbelico B alij circuli ducantur, quorum vnus sit TV in Hyperbola radio DL, in Ellipsi verò LT radio DV, vbi se intersecant in T, illud punctum T, & alia similia erunt in circúferentia sectionis conicę. Vnde linea per ea ducta Hyperbolam, vel Ellipsim imitabitur.



Probtur verò ex Ijs, quæ ostendimus prop. 25. huius. Nam in Hyperbola. Linea, quæ ab vmbelico ad contáctum ducitur, quæ ibi est, KC debet

debet esse maior, quàm alia, quæ ad eundem contactú ab alio vmbelico ducta est, vt ibi est BC quantitate diametri transuersę, talis autè est AC in hac figura. Nam comprehendit diametrum transuersam DA, quæ remanet subductis duobus vmbelicis DE, & EB, & insuper cõprehendit totam DL, quæ est mensura lineę EC; Ergo AC est æqualis lineę BC, & diametro transuersę AD.

Sed in Ellipsi ex eadem propos. duę lineæ ab vmbelicis ad ambitum eius inclinatę simul sumptę debent esse æquales diametro transuersę tales verò sunt BC, & CA. Nam BC est æqualis diametro transuersæ BA, & CA, lineę BD; Siquidem tota AD est diameter totus, & semper gyri accrescunt tali ratione, vt eâdem quantitate, quâ priùs ducti crescunt, eâdem posteriùs ducti decrescãt, quem modum etiam docuimus prop. 25. tract. 18. vnde patet, quod Ellipsis ibi descripta est, prior sectio coni Elliptica.



EXPENSIO XIV.

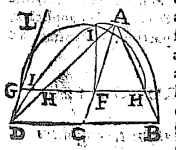
De circumscriptione figurarum conicarum.

SIcut agit Euclides de circumscriptione circuli circa figuras rectilineas, ita, & hic breuiter debemus agere de circumscriptione figurarum, saltem circa triangula; cùm illa sola omnibus figuris possint inscribi, quę à sectione coni deriuant.

PROBL. I. PROPOS. LIX.

Circa datum triangulum Parabolam circumscribere.

SIt datum triangulum BAD, cuius basis BD diuidatur per medium in C, & à vertice A ad diuisionem C recta ducatur, cui parallela DL excitetur à puncto D. Electis verò in AC, quibuslibet punctis, vt F; ducatur basi parallela HG, inter autem eius portiones GF, & HF inueniatur media proportionalis ex Eucl. prop. 16. lib. 6. FI, & transferatur super FG, & sit FE. Dico, quòd per punctum I transit parabola, cuius ambitus per BAID transeat. Vnde si plurimæ, aliæ ducantur, vt FG, ab alijsque punctis in AC ad libitum assumptis, & medię proportionales, vt FI inueniatur plurima puncta obtinebimus, per quę parabola ducatur.



Probatur. Nam quoniam FI est media proportionalis inter FH, & FG; quę est æqualis DC erunt tres proportionales; vnde ex Cor. prop. 22. lib. 6. Eucl. quadratum ex tertia CD, erit ad secundę quadratum FI, vt DC ad FH lineas.

Sed, quòd FH, & CD sint parallelę in triangulo CAD; ita erit CD, vel CB ad FH, velut respondet proportione AC, ad AF ex Cor. prop. 4. lib. 6. Euc. Ergo quadrata CD ad quadratum FI, ita, erit proportione, vt AC ad AF; quare latera horum quadratorum erunt applicatę ex prop. 5. huius, & sic per extrema earum I, & D transibit ambitus parabolę, cuius vertex A.

PROBL. II. PROP. LX.

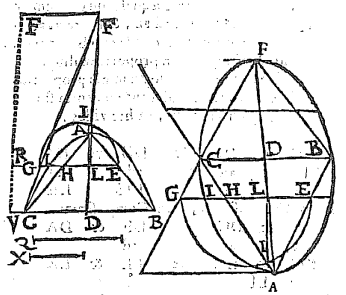
Circa datum triangulum describere Ellipsim, seu Hyperbolam etiam specie notam.

SIt triangulum quodcumque ABC, circa, quod describenda sit Hyperbola, vel Ellipsis, quę potest esse indeterminata, & quęcumque illa sit, & tunc ducta DA, quę diuidat basim BC per medium à puncto C ducenda erit ad DA productam in F, quod libuerit punctum, recta CF.

Quod sit proponatur sectio conica specie nota, cuius diameter sit ad parametrum, vt Z linea ad X lineam.

Primo lineis DC semibasi, & AD reperiatur tertia proportionalis RV, vt exhibemus in hyperbola exemplum, rectangulumque DR erit æquale quadrato ex media DC constituto, vtpote constitutum ab extremis, nempe DV equali DA, & VR.

Secundo fiat, vt X ad Z, ita RV ad DF reperiendo nimirum quartã proportionalem FD. Dico, quod exhibebitur specie nota Hyperbola, vel Ellipsis, cuius diameter transuersa sit ad contiguam parametrum, vt Z ad X: quia nimirum rectangulum FV sub FD, & DA contentum dicit eam proportionem ad rectangulum PR super eandem basim DV constitutum, quam altitudo DF ad altitudinem VR ex I. lib. 6. Eu. ergo etiam rectangulum FV ita est ad æquale quadratum ex DC; Sed VR ad DF se gerit ex constructione, vt X ad Z vel conuertendo DF ad VR, vt Z ad X. Ergo etiam rectangulum FV ad quadratum ex DC. Ergo etiam diameter transuersa FA talis erit ad Parametrum; qui semper est in quacumque figura conica, vt rectangulum sub FD, & DA ad quadratum ex DC, quę debet esse vna ex applicatis in Hyperbola, vel Ellipsi, quę circumscribatur circa tres vertices E, A, & C.

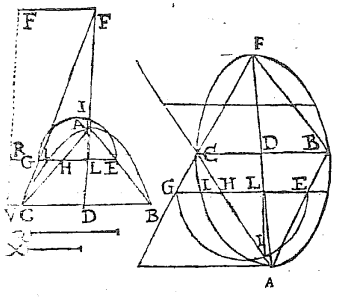


Sit ergo describenda Hyperbola, vel Ellipsis circa BAC, iam siue sit specie nota, siue non, siue CF ducta sit fortuitò ad DF, siue ad describendam specie notam sectionem, electa sit FD modo prędicto eodem pacto describetur.

A puncto quolibet V g. L ducatur basi BC parallela LH, quę pertingat vsque ad EC, vel CA in G,

interque LG, & LH inueniatur media proportionalis LI, que hinc inde transferatur ab L versus E, & t, & sit LI. Dico, quod Ellipsis, vel Hyperbola transiens per B, A, C vertices, transibit quoque per I in linea EG punctum signatum, & sic de quibuscumque alijs, quæ à punctis in DA electis trahantur, & inuentis eodem modo proportionalibus erit dicendum. Vnde plura puncta poterimus venari, per quę Hyperbola, vel Ellipsis ducatur. In Ellipsi verò etiam in FD idem efficiemus, & Ellipsim completam consequemur, quę transeat per BFCA vertices.

Probatur autem. Quia tres sunt proportionales ex constructione LG, & LI, & LH. Ergo quadratum ex media est æquale rectangulo ex extremis ex Eucl. prop. 19. lib. 6. quo posito, si probetur rectangulum ex FD, & DA lateribus esse ad rectangulum ex FL, & LA, vt quadratum ex DC ad quadratum ex LI ostendetur ex propos. 6. h. DC, & LI esse applicatas, hoc autem sic ostenditur.



Nam in triangulo FDC ob parallelam GL ad basim DC, ita est DC ad LG, vt DF ad FL, & eadem DC ob eandem rationem in triangulo DAC ita est ad LH sicut DA ad LA. Si ergo ex antecedentibus in prima combinatione componatur quadratum; nimirum DC, & DC, & ex antecedentibus in secunda rectangulum DF, & DA; quadratum DC, & CD erit ad rectangulum ex consequentibus in prima combinatione, & LG, LH, vel huic æquale quadratum ex LI, vt rectangulum DF, DA ad FL, & LA rectangulum ex consequentibus in secunda combinatione, vt est regula Rectangulorum proportionalium Tr. 17. propos. 13. vt in parallelogrammis proportionalibus latera proportionalia antecedentia sint in vno, & consequentia in alio, vt hic vides.

DC	vt	DF	&	DC	vt	DA	
ad		ad		ad		ad	
LG		FL		LH		LA	
Ergo Compositum,				vt Compositum.			
DC	&	DC		DF	&	DA	
erit		ad		ad			
LG	&	LH	vt	FL	&	LA	
ideſt		LI					

Vnde patet, quod ita est rectangulum FD, & DA ad rectangulum FL, & LA, vt quadratum ex DC ad quadratum IL, vnde DC, & LI erunt applicatæ, & consequenter à vertice A per eorum extrema B, & C transibit Hyperbola, vel Ellipsis.

EXPENSIO XV.

De Parabolis specialiter describendis.

VIsis Sectionum conicarum vniuersalibus regulis, quę scilicet in omnibus tum Hyperbolis, tum Ellipsibus, tum Parabolis adhiberi possunt, oportet etiam aliquas speciales descriptiones docere, quæ à singularibus vnius cuiusque speciei proprietatibus ortum habent.

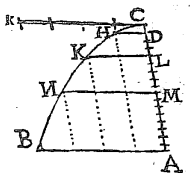
PROBL. I. PROPOS. LX.

Parabolam per puncta describere data diametro, & applicata.

SIt data applicata AB, & diameter quæcumque AC. Diuidatur AB, in quas libuerit partes æquales V. g. in quatuor, & diameter AC in tot alias æquales, quę quadratum numerum prędictarum applicatæ AC partium exequent V. g. 16.

Si ergo rectę ducantur æquales applicatæ partibus, & ei parallelę à diametri partibus, quæ quadrato partium in applicata assumptarum respondeant V. g. vnam si assumperis, quoniam quadratum vnius est vnum, duces à prima parte diametri D æqualem DH vnicę parti applicatæ: Si duas à quarta parte diametri educes LK, æqualem duabus partibus, quoniam quadratum duarum est quatuor; si tres à nona parte deduces MN, & cęt. Si ergo per puncta CHKNB ducas flexam, hęc erit Parabola.

Probatur. Nam ex propos. 2. huius, ita se habet AC intercepta ad CL interceptam, vt quadratum AB ad quadratum LK; sed quadratum AB est 16. & quadratum applicatę LK est 4. Linea verò CA est 16. & linea CL est 4. Ergo ita se habet AC ad CL, vt quadratum applicatę AB ad quadratum applicatę LK, & ita dicas de alijs.

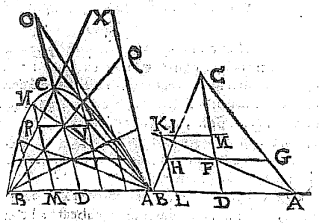


Possent etiam trahi à partibus applicatę AB, quę essent æquales AD, vt AL, aut AM succesſiuè semper diminuendo dempto quadrato à singulis partium, à quibus deducitur, vt vides factum in punctis H, K, & N: Nam à prima H ablatum est quadratum vnius; quòd à prima parte, & viciniori diametro deducatur, si à K quadratum duarum partium, quòd à gemina. Possent quoque trahi à CX contingente verticem, & parallelam applicatæ, quę secundum quadrata partium distantium à C crescerent.

PROBL. II. PROPOS. LXII.

Parabolam circa datum triangulum describere.

SIt triangulum ACB; circa quod oporteat Parabolam delineare. Diuisa per medium basi DA in D, ducatur CD, & in illa sumptis quibuslibet partibus V. g. 3; ducatur ab angulo A per F parallela ad basim AB, quæ sit GH, & vbi secat crus CB oppositum angulo A parallela ducatur ad CD, quę sit LK occurrens AF ab angulo A ductæ in K. Dico K punctum esse Parabolæ, quæ transit per A, C, B, vertices trianguli dati.



Probatur autem. Quia, si ducatur KN, hæc erit applicata. Quare punctum K, vtpote extremum applicatę erit in Parabola. Quod verò KN sit aplicata patet; quia est media proportionalis inter NI, & DB. Vnde iuxta doc. 59. huius erit applicata, quòd verò sit media proportionis ita patet. Nam in triangulis ADF, & FHK æquiangulis, quòd sint ad verticem inter parallelas DF, & HK, ita est AD, vel æqualis DB ad FH, quæ æquatur NK, & lineę DL, sicut DF, vel æqualis LH ad HK ideſt est DB ad DL, vt LH ad HK in triangulis quoque ad verticem, & inter parallelas IHK, & LHB, sicut est LH ad HK, ita LB ad IK, quamobrem, & reliqua DL, quę est æqualis lineæ NK; ad reliquam NI eodem pacto se habebit, vt LB ad IK, & LH ad HK, & DB ad FH, vel NK: Si ergo sicut se habet DB ad NK, ita se habet NK ad NI; patet. NK esse mediam proportionalem inter DB, & HI.

Nota idem sequi, seu parallelæ sint productę basi equidistanter, vt in fig. hac NK, seu ab equidistantibus ducantur diametro parallelę, vt HK ab HF, quę occurrant lineę AK, seu in in altera fig. RN ab RV ad AN, seu æquidistantes diametro, vt MN, seu LK, sic nec interet, si ab angulo A, siue ab angulo C, vel B emittantur. Ita nec interet an partes, per quas transeunt, sint in ipso diametro DC, vt BV, quæ transit per V, seu in eius parallela intra partes in diametro producto assumptas, vt per R ducitur BR, seu extra, vt AX, ad quam ducitur BX, seu in partes in diametro producto assumptas, & ducitur AO, quę tamen partes in CO producto debent esse æquales ijs, quę intra diametrum CD sunt assumptæ.

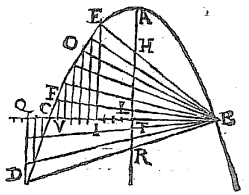
PROBL. III. PROPOS. LXIII.

Parabolam producere, seu resarcire.

SIt Parabola BAC, quam oporteat restaurare ab E vsque ad F, seu producere à C vsque in D.

Resarciatur ergo primo reperiendo diametrum quemcumque AL, & applicatam quamcumque BC, à puncto itaque B, vbi applicata sectionem tangit, è regione partis restaurandæ ducantur ad E, & ad F extremas oras abruptæ partis rectę BE, & BF, secabunt diametrum in H, & L: Pars ergo diametri intercepta in quot libuerit partes æquales diuidatur V. g. in 5. & à B per eas rectæ ducantur, vt BO. Deinde ab ijsdem oris E, & F ducantur diametro parallelæ EI, & FV, parsque intercepta IV in totidem partes diuidatur V. g. rursus in 5. & ab ijsdem parallelæ diametro ducantur; quæ primò ductis à B occurrant. Nam puncta in quibus occurrunt V. g. D erunt in eadem parabola. Vnde per eam ducta linea EOF partes in parabola abruptas conjunget.

Ostensio verò eadem, quæ antecedentis propos. vt patet ex ipsa constructione, sicut, & sequentis operationis.



Simliter, & partes extendentur. Diuisa enim TC in quasliberit partes, sicut, & diameter TA tot ex ijs partibus diametri V. g. 3 transferantur in productam diametrum TR; & tot ex partibus applicatę TC transferantur in ipsam productam CQ, à quibus diuisionibus parallelæ diametro educantur, vt QD, quę occurrant lineis, quę à puncto B per partes in diametro TR producta signatis transeant: Nã puncta mutui concursus, vt DI linearũ QD, & DB erunt ea, per quæ parabola producenda transibit.

EXPENSIO XVI.

De Hyperbolarum particulari descriptione.

HYperbola ex Asymptoto, quã sola habet inter figuras, particulares sibi vendicat descriptiones, quarum plurium modos diuersis problematibus exponemus.

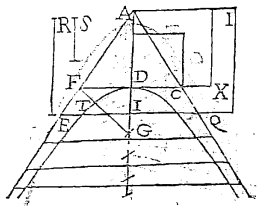
PROBL. I. PROPOS. LXIV.

Datis Hyperboles transuersa diametro, & eiusdem ratione ad contiguam parametrum in dato angulo Hyperbolem in plano per puncta describere.

SIt data AD dimidia transuersæ diametri, & proportio eius ad contiguam parametrum, quę sit vt E ad S. Angulus verò, si ita placet, detur rectus. Inter lineas R, & S reperiatur media proportionalis DC, & iam vt R ad S, ita erit ex Coroll. prop. 21. lib. 6 Eucl. quadratum ex AD ad quadratum ex CD; Talis autem etiam est ex prop. 44. h. progr. 3. & Coroll. portio diametri transuersæ ad parametrum, nempe quadrati AD ad quadr. CD; ideoque Coroll. prop. 8. huius hyperbola erit specie nota, & AC & AF erunt Asymptoti ex prop. 47. huius, quę sit describetur.

A punctis in diametro AD producta, quibuscumque placuerit, duces æquidistantes ad applicatam ad verticem DF, qualis est EI, Auferesque quadratum DF à quadrato IE; ita tamen, vt id, quod remanet quadrati latus existat, quod fiet ex prop. 32. l. 6 vel 11. l. 2, si ad id interuallũ IE ex puncto G, velæ ducas portionẽ circuli, quę secet diametrũ in

G. Nam recta DG erit latus quadrati tale, quod cum quadrato DF erit æquale quadrato IE. In triangulo enim rectangulo FGD quadrata crurum DF, & DG sunt æqualia quadrato basis FG æqualis IE. Quare GD est latus talis quadrati, cui deficit quadratum ex DF, ad hoc vt æquetur quadrato IE.



Si ergo DG transferatur in IE, vt sit IT, dico IT esse applicatam, per cuius extremum T à vertice D transeat Hyperbola in specie nota.

Probatur autem. Nam sicut est diameter transuersa ad Parametrum, ita est rectangulum ex AI, DA pro vno latere, & pro alio ID ad quadratum ex IT. ex 8. h.

Progress. 1. Quoniam, si auferatur quadratum AD à quadrato ex AI remanebit rectangulum sub tota diametro transuersa, cuius dimidia est AD, & ID pro vno latere, & ID seorsim pro alio, qui est gnomon IXI, vt patet, & à quadrato IE quadratum DF ablatum fuit in praxi, & remansit IT.

Progr. 2. In triangulo autem AQI ob parallelas CD, & QI; vt est AD, & DC, & ideo etiam eorum quadrata ex AD ad illud ex DC. Ita ex 26.l.6. simili proportione alludit quadratum ex AI ad quadratum ex QI. Auferitaque proportionalia antecedens AD quadratum primæ combinationis ab antecedenti quadrato AI secundæ combinationis; sicut, & consequens CD, vel DF quadratum à consequente QI, vel IE quadrato, vt fecimus prog. 1. & remanebunt residua adhuc proportionalia. Nempe gnomon IXI, vel quod æquale rectangulum ex AI, AD pro vno latere, & ID pro alio ad quadratum ex IT ex prop. 22. lib. 5. Elem.

Progr. 3. Sed quadratum AD ex constructione est ad quadratum ex DC, vt diameter transuersa ad parametrum: Ergo etiam rectangulum AI, & AD, nempe toto diametro pro vno latere, & DI tantùm pro alio refertur ad quadratum IT, vt diameter transuersa ad parametrum, & vt R ad S, ergo ex propos. 8. huius erit punctum T ad hyperbolam, quod erat ostendendum.

Si verò libeat Hyperbolem specie non notam describere; trahantur AD, & DC, cuius placet longitudinis nullo habito respectu ad datas S, & R, & cet. vt prius exequantur.

PROB. II. PROPOS. LXV.

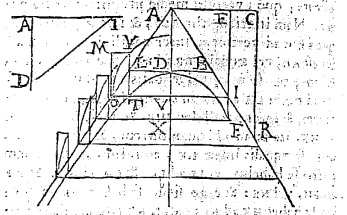
Dato Asymptoto, & dimidia transuersa diametro cum Angulo Hyperbolam per puncta delineare.

DVobus modis potest hoc in opus reduci, vel per lineas diametro transuersę parallelas, & iuxta proportionem datam. Vel per lineas ei perpendiculares.

Sit ergo primus modus. Et dentur Asymptoti AB, & AL, diametrique transuersę dimidium AD, sitque ad parametrum diametri transuersæ data proportio, vt quadratum CR ad quadratum CA.

Ducta AC parallela BD, & in ea electis quibuslibet punctis, vt E, ducantur parallelæ ad diametrum AD, vt EF; fiatque EF tantæ longitudinis, vt eius quadratum sit æquale duobus quadratis AI, & AD eas seorsim componendo rectangulè, & ducendo basim ID, quæ æquet FE; nam ex pr. 11 l. 2. Euc. Quadratum basis in rectangulo est æquale duobus quadratis crurum. Et EF dabit punctum F, quod erit in Hyperbola, cuius vertex D, & proportio diametri ad contiguam Parametrum, quam quadrati ex RC ad quadratum ex AC. Et sic erit, si eodem artificio alias producas.

Ostendendum est autem, quòd FX sit applicata ex eo, quòd eius quadratum se habeat ad rectangulum AX, & DA, vt vno crure, & DX pro alio, vt transuersa diameter ad parametrum. Nam tunc sic constabit ex prop. 8. huius FX esse applicatam, & ideo extremum F lineę EF esse in Hyperbola.



Id Probatur verò. Nam ex constructione quadratum EF est æquale quadrato IE, & AD: quadratum dratum verò idem EF est etiam equale quadrato eidē AD. & rectangulo AX, AD, & DX; quod sit equale hoc rectangulum residuo gnomoni quadrati ex AX, vel EF ablato quadrato AD. Ergo hoc rectangulum ex AX, AD pro vno crure, & DX pro alio erit equale quadrato ex linea IE.

Sed in triangulo CRA ob parallelas IE, & CR, vt est quadratum CR ad quadratum CA, ita est quadratum EI, & consequenter rectangulum AX, AD, & XD sibi equale ad quadratum ex EA linea, quę est equalis applicatę FX.

Vnde rectangulum ex AX, AD, & XD erit ad quadratum ex XF, vt diameter transuersa ad parametrum; cum tale sit quadratum CR ad quadratum CA ex præsupposito.

Secundus modus est, vt datis Asymptotis AB, & AL semidiametro transuersa AD, & angulo ADL ducantur ad diametrū transuersam perpendiculares, vt VO, & vbi occurrunt Asymptotis, vt in o erigantur perpendiculares æquales ipsi ID, qualis est OM, & vbi terminat in M ducatur rursus perpendicularis MY, quantùm sufficit. Deinde centro V radio VI portio circuli ducatur OY, & vbi secat MY in Y demittatur perpendicularis YT. Nam punctum T erit in Hyperbola.

Probatur facilè. Nam ex Eucl. prop. 16. lib. YT est media proportionalis inter TI, & TO. Quare eius quadratum, nempe ex YT erit æquale rectangulo IT, & TO ex prop. 19. lib. 6. Eucl.

Sed rectangulum per cuius latera in lineam extensa transit hyperbola, vt IT, & TO ex propos. 42. Coroll. est equale quadrato ex TY, vel æquali DL ex constructione. Ergo inter IT, & TO in

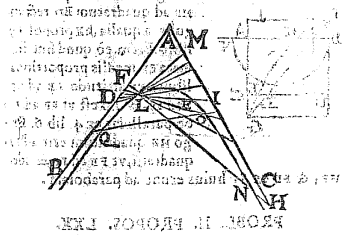
in puncto T transibit Hyperbola, cuius vertex D.

PRORL. III. PROPOS. LXVI.

Datam Hyperbolam resarcire, etiam sit eius, non nisi vnicum punctum constaret, vel vlterius producere. Datis eius Asymptotis, & vnico eius puncto.

SInt dati Asymptoti AB, & AC, & punctum L, Ex puncto L ducantur plurimę lineę ad vtrũque Asymptotum, vt PH, & DI, & distantiæ minores ad vnum asymptotum, quàm ad aliud puncti L transferatur super eandem lineam ad alterum extremum, quo tangit aliud asymptotum. V. g. DL transferatur in EI, eo quod sit minor DL, quàm LI, sic FL in HN; Nam puncta Q, O, L, E, N, & si quę alia inuenta fuerint, erunt in eadem Hyperbola.

Probatur verò ex eò, quòd in Hyperbola puncta ab vtroque Asymptoto equaliter remota, signata in eadem linea in Hyperbola reperiantur; Qualia sunt FL, & NH; sicuti EI, & DL, & cet.



Reperiuntur autem, quia quælibet ducta in sectione Hyperbolica, vt LN ex propos. 28. huius potest deseruire pro applicata, cum in duas partes æquales ab alio quo diametro secundario diuidi possit ex propos. verò 46. Coroll. habemus, quòd rectangulum ex ambobus applicatis, quas dividit diameter, vt tota LN cum intercepta inter sectionem, & vnum ex asymptotis, vt FL pro vno latere, nimirum tota NF, & intercepta inter sectionem, & alterum Asymptotum, vt NH est æquale rectangulo facto ex LH, & LF; quare habebunt latera proportionalia ex Eucl. propos. 10. & erit in eadem proportione NF ad NH, sicut LH ad FL. Ergo componendo ita erit NH, & NF simul, nempe HF ad NH; vt LH, & LF simul, quę est eadem FH ad LF, cum ergo LF, & NH eidem FH eandem dicant proportionem erunt inuicem æquales ex 7 propos. lib. 5. Eucl. Quare cum quælibet hyperbola transeat per puncta æqualiter ab asymptotis remota, vt N, & L alicuius quomodocumque lineæ ductę, ista puncta L, & N, vel E, & L, vel O, & Q taliter signata erunt in Hyperbola.

COROLLARIVM.

HInc ergo patet quaslibet interceptas, vt FL, & NH, quascumque inter sectionem, & Asymptotos esse equales inuicem, vt ex ostens. propos.

EXPENSIO XVII.

De Descriptione particulari Ellipsium.

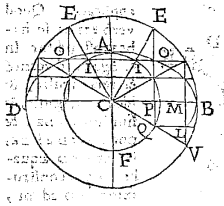
SIcut singulari descriptione Parabolas, & Hyperbolas prosecuti sumus, sic, & Ellipses, quę propter duos axes coniugatas, quos habent, diuersas descriptiones obtinere queunt.

PROBL. I. PROPOS. LXVII.

Datis Ellypsis extremis diametris, eandem in plano per puncta quotlibet describere.

CEntro C inter dato assumpto dimidio diametri maioris CD describatur circulus circa maiorem diametrum BD; rursusque eodem centro C circa minorem AF, & à communi centro C radij exeant, qui transeuntes per circumferentiam minoris in I fecent circulum maiorem in DE, vt sunt CE, à quibus punctis E perpendiculares EP ad diametrum BD descendant; quibus occurrant in O puncta I I rectę connectentes: Nam vbi secant perpendiculares EP ab ijsdem radijs dimissas, vt in O, ibi erit punctum Ellipsis, & per eam intersectionem O transibit.

Id verò ostendetur probando rectam OP, vel ML esse applicatam; eò quòd rectãgulum DM, MB ex interceptis diametri trãsuersę segmentis ex propos. 6. h. se habeat ad quadratum ML, vt quadratũ BC, quę est loco rectanguli ex interceptis diametri portionibus BC, & CD ad quadratum CF minoris diametri, quæ, & locum applicatę tenet. Vnde si per F transibit ambitus Ellipsis transibit quoque per L.



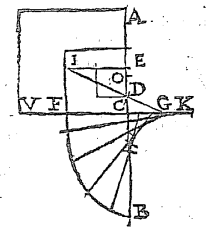
In triangulo rectangulo CMV ob parallelas MV, & PQ ex prop. 4. Coroll lib. 6. Eucl. ita est CV, seu CB equalis ad VM, vt CQ ad PQ, vel LM equalem. Ergo *permutando* ita erit CV, vel CB ad CQ, vel æqualem CF, vt VM ad ML. Si ergo ex CB fiat quadratũ hoc se habebit quadratũ CQ: Vt quadratũ ex VM ad quadratũ ML ex 26. l. 6. El: sed hoc quadratum VM, eò quòd VM sit media proportionalis inter segmenta BM, & MD, vt patet ex 13. lib. 6. Eucl est equale rectangulo ex segmentis diametri BM & MD. Ergo rectangulum ex segmentis diametri DM, & MD se habet ad quadratum ML, vt rectangulum, quadratumque ex BC ad quadratum CQ vel CF, quod erat ostendendum.

PROBL.

PROBL. II. PROPOS. LXVIII.

Datis Ellipseos extremis diametris Ellipsim per puncta describere.

SInt dati Ellipseos diametri extremi KF, & AB bifariam inuicem, & ad rectos angulos se secantes. Sumpta circino eorum semidifferentia CO, qua nimirum semidiameter CF minor est, quã semidiameter CA, accõmodetur à C puncto minoris diametri ad libitum electo versũs C, ducta arcus portione, qui secetur diameter maior in D, vt DG æquet CO. ductaq; GDI fiat DI æqualis semidiametro minori; Dico itaq; quod extremũ I erit in Ellipsi, cuius ambitus per extrema axiũ K, F, A, B, transeat. Vnde si plurimæ ex istis lineis, sic ducantur habebimus multa puncta, per quæ ambitum Ellipseos ducere poterimus, vt vides factum in ambitu FB.



Probatur autem ex eo, quòd ducta EI sit vna ex applicatis, quare I eius extremum erit in circumferentia Ellipsis.

Quòd autem sit applicata, ostenditur ex eo, quòd quadratum semidiametri minoris, simulque applicatæ CF se habeat ad rectangulum, simulque quadratum ex segmentis CB, CA diametri transuersæ AB, vt quadratum dictæ EI ad rectangulum ex segmentis BE, & EA diametri transuersę AB. Vnde ex doctrina pr. 6. h. erit applicata. Quod verò res ita se habeat ostenditur. In trlãgulis ad verticẽ & rectangulis, & ideo æquiãgulis, & similibus IDE, & CDG, vt CD ad DE, ita erit GD æqualis ex constructione CO ad DI, quæ æquatur lineæ OA. Igitur vtendo argumento compositionis ita erit CDE simul ad suam partem ED. Velut AEC simul ad suam partem AO: Et ita quoque erunt eorum quadrata, nimirùm quadratum EC ad quadratum DE respondebit proportione, vt quadratum AC ad quadratũ AO, vel æqualis CF, aut DI ex 26.1.6.

Considera verò, quòd, si auferatur quadratum ex EC à quadrato CA remanebit gnomõ VIA æquale rectangulo ex BE, & EA. Sicut si quadrato ex DE auferatur quadratum DE remanebit quadratum ex EI, (nam in triangulo rectangulo DEI duo quadrata crurum sunt æqualia quadrato basis ex EI, lib. 2. Elem.) Ablatis ergo proportionalibus quadratis EC ab AC, & DE à DI, quæ item proportionalia sunt in eadem proportione, remanent rectangulum BE, & EA, vel gnomon VIA, & quadratum ex EI ex pr. 22. l. 6. proportionalia, ac sua tota. Erit ergo vt quadratũ AC, quod stat loco rectãguli ex segmentis diametri ad applicatæ, & semidiametri minoris CF quadratum, sic rectangulum ex BE, & EA segmentis ad quadratum lineę EI, & *conuertendo*; Vnde EI erit applicata.

EXPENSIO XVIII.

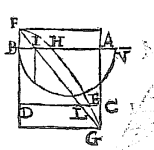
Sectiones omnes describere ope parallelogrammi.

OPortet etiam docere modum descriptionis sectionum, quæ ex datis figuris eruuntur, inter quos non infimæ sortis est ea descriptio, quę ex dato parallelogrammo in opus deducitur.

PROBL. I. PROPOS. LXIX.

Dato quocumque parallelogrammo ex illo Parabolam efformare.

DVcis parallelis AB, & CD vni laterum, & diametro FG inter AB, & IB ponatur BH, sicinter CD, & LD media proportionalis ED; puncta E, & H, G, F erunt ad parabolam.

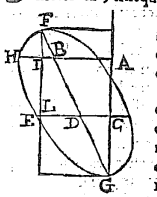


Probatur. Quoniam AB, & CD latera æqualia sunt, erit IB, & AB rectangulum ad CD, & ID rectangulum, idest quadratum HB ad quadratum ED rectangulis æqualia ex propos. 19. lib. 6. Elem. eò quod sint formata ex medijs proportionalibus, vt altitudo IB ad LD: Sed IB, & LD est vt FB ad FD ob parallelas ex 4. lib. 6. Ergo HB quadratum erit ad ED quadratũ, vt FB ad FD, & ideo HB, & ED ex 5. huius erunt ad parabolam.

PROBL. II. PROPOS. LXX.

Ex parallelogrammo quocumque Ellipsim delineare.

SIt datum FG parallelogrammum, & in eo diameter GF, sintque ductæ parallelæ alteri laterum AB, & CB, & inter AB, & BI media fiat BH, & inter CD, & DL media DE. Dico GH, & E, F esse ad Ellipsim.



Probatur. Ita est AB ad CD, vt BG ad DG; rursùs ita est BI ad DL, vt BF ad FD. Ergo rectangula composita ex isdem proportionibus AB, & BI ad rectangulum CD, & CL erit, vt BG, BF rectangulum ad GD, & DF rectangulum, vt hic vides.

AB	vt	BG	&	BI	vt	BF	
ad		ad		ad		ad	
CD		DG		DL		FD	

Ergo compositum vt compositum.

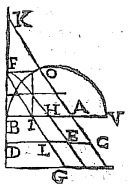
AB	&	BI	erit	BG	&	BF	
ad				ad			
CD	&	DL		DG	&	FD	

Quare rectangulum AE, & BI erit ad CD, DL, idest æqualia quadratum HB ad DE quadratum, vt rectangulum BG, & BF ad rectangulum DG, & FD: quare ex 6. h. puncta H, & E erunt ad Ellipsim.

PROBL. II. PROPOS. LXXI.

Dato Parallelogrammo quocumque Hyperbolam delineare.

SIt parallelogrammum OG, & producta CO in K ducatur per F linea KD, fiatq; triangulum CKD, & ductis AB, & CD parallelis lateri OF; inter lineas AB, & BI inueniatur media HB, & inter CD, & LD media ED, & puncta E, & H erunt ad hyperbolam.



Probatur ob similitudinem triangulorum KB est ad KD, vt AB ad CD, & vt BF ad DF sic IB ad LD. Componantur, Itaque ex istis proportionibus rectangula.

KB	vt	AB	&	BF	vt	IB	
ad		ad		ad		ad	
KD		CD		DF		DL	

Ideo compositum erit, vt compositum.

KB	&	BF		AB	&	IB	
	ad				ad		
KD	&	DF		CD	&	LD	

Quare, & quadratum MB æquale rectangulo AB, & IB erit ad quadratũ DE æquale rectangulo CD, & DL, vt rectangulum KB, & BF ad rectangulum KD, & DF: quare puncta H, & F ex 6. huius erunt ad Hyperbolam.

EXPENSIO XIX.

De transumptione figurarum conicarum ex circulo.

SIcut ex dato parallelogrammo sectiones deduximus, sic & ex dato circulo eas adipiscimur, & tantò potiori iure, quantò circulus sectionibus maiori accedit annalogia.

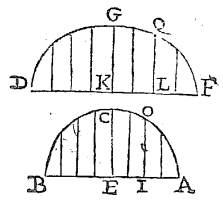
PROBL. I. PROPOS. LXXII.

Dato circulo quocumque Ellipsim quamcumque describere.

SIt datus circulus ABC, ex eo describemus quamcumque Ellipsim, si statuamus eius diametrum pro diametro Ellipseos minori, & ad libitum eligamus maiorem V. g. DF.

Diuidemus itaque AB, in quas placuerit æquales partes, & trahemus perpendiculares ad diametrum, vt est OI, & EC. Diuidemus quoque FD in totidem partes, & erectis ad ea puncta diuisionum perpendicularibus, quę æquales sint prioribus in circulo tractis quælibet nimirum suæ correspondenti V. g. KG erit æqualis EC, & LQ correspondenti OI, & per extrema earum ducemus æquabili manu lineam curuam, quæ erit ambitus Ellipseos.

Id verò ostenditur demonstrando LQ esse applicatam sicut KG, quòd ita se habeat rectangulum, & quadratum ex segmentis diametri FK, & & KD ad rectangulum ex segmentis DL, & LF, vt quadratum KG, se habet ad quadratum LQ. Nam ex prop. 6. hæc est proprietas essentialis applicatarum ellipticarum.



Probatur autem. Nam cum AB, & DF sint diuisæ in partes numero æquales erit tota ad medietatem suam, vt alia tota ad medietatẽ, sicut, & V. g. sex partes ad duas vnius nẽpe BI ad AI erunt quoq; vt partes sex ad duas alterius, vt DL ad LF. Igitur, & quadratum ex medietate EB, ita erit ad rectangulum ex BI, & IA, vt quadratum ex medietate KD, ad rectangulum ex DL, & LF, cum ex ijsdem proportionibus cõponãtur rectę BI, ad AI, & DL ad LF &c. Sed rectangulum BI, & AI est æquale quadrato IO, cum IO sit media proportionalis inter BI, & IA. Ergo, & quadrato LQ huic æquali, sicut, & quadratum EC, vel EB est æquale quadrato KG. Quare KD, DK, & KF rectangulum erit ad rectangulum ex LD & LF lineis, vt quadratum KG ad quadratum LQ.

COROLLARIVM.

HInc autem ellicies sufficere ad formandam ellipsim ex circulo, si lineam datam, vel maiorem, vel minorem ita feceis proportionaliter, vt ab applicatis, seu sinubus in circulo secatur, vel vt ipsę applicatę, sinusque crescunt.

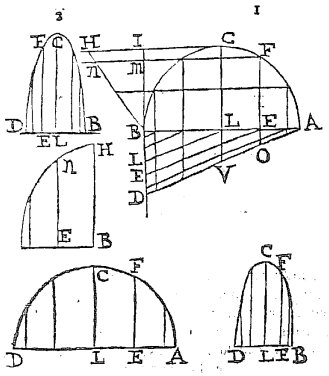
Sit semicirculus ABC, in quo diuiso in partes æquales ducti sint sinus CL, & EF, & cęt. secteturq; BI primùm in partes æquales, iuxtà quas sinus ipsi sunt, ita, quod BI sit æqualis LC, & BM sit æqualis EF, & cęt. deinde iuxtà partes lineę BI detruncetur BH in partes proportionales ex pròpos. 10. lib. 6. ita quòd sit BH, ad BI, BN ad BM, & cęt. Dico sinus BH, & BN, & alij similes sinubus prędictis LC, EF, & alijs dispositi per puncta E, L, & alia in quibus prius erant sujs extremis esse in ellipsi.

Probatur. Ita est BN ad BH, vt EF ad LC: Ergo etiam quadratum ex BN ad quadratũ ex HB erit, vt quadrtũ ex EF ad quadratũ ex LC ex 26.1.6. sed quadratũ EF est æquale rectangulo EB, & EA, itemq; quadratum LC est æquale rectangulo ex AL, & LB. Ergo rectangulum EB, & EA ad rectangulum AL, & LB habebit eandem proportionem, qurm quadratum ex EF ad quaaratum ex LC. Ergo etiam eandem, quam quadratum ex BN ad quadratum ex BI;

cum

cum sint in eadem proportione cum prædictis ex EF, & LC quadratis. Cùm ergo ex BD quadratum sit ex BH quadratum, vt rectangulum ex AE, & EB ad rectangulum AL, & LB; lineę BD, & BH erunt ad diametrum AB applicatæ in punctis E, & L. Vnde earum extrema puncta erunt in Ellipsi ex 6. h.

Idem dicendum. Si iuxta diuisiones diametri AB diuidatur proportionaliter aliqua alia linea, seu maior, vt AP, seu minor, vt ED. Nam si illi lineæ, vt factum est seorsum applicentur sinus LC, & EF quilibet ad suum punctum correspondens, horum sinuum extrema puncta erunt in Ellipsi.



* Probatur. Nam quia AE ablatum est ad OA ablatum, vt AB totum est ad AD totum, erit etiam reliquum EB ad reliquum OD, vt AE est ad AO. Quare rectangulum AO, & OD erit compositum ex ijsdem proportionibus; quibus AE, & EB componitur. Sic quoque AL ad AV erit, vt AB est ad AD. Quare, & residuum LB ad residuum VD erit, vt AL ad AV: quare, & rectangulum ex AV, & VD, quod est quadratum componetur ex ijsdem proportionibus, quibus quadratum ex AL, & LB. Cum ergo rectangulum ex OA & OD sit compositum ex ijsdem proportionibus, quibus rectangulum ex AB, & EB erit ad rectangulum, seu quadratum AV, & VD compositum ex ijsdem proportionibus, quibus rectangulum, seu quadratum AL, & LB, vt rectangulum AE, & EB ad idem quadratum ex AL, & LB: Sed rectangulum ex AE, & EB ad quadratum ex AL, & LB est, vt quadratum ex EF ad quadratum ex CL. Ergo etiam rectangulum ex AO, & OD est ad rectangulum ex AV, & VD, vt quadratum ex EF ad quadratum ex LC. Quare EF, & LC erunt applicatę ad diametrum AD, & earum extrema puncta in Ellipsi repericntur.

COROLLARIVM I.

POssunt etiam Ellipses è circulo desumi, etiam, si diameter circuli, seu ei proportionalis sumatur pro secunda diametro in Ellipsi, & ei ad angulos obliquos eosdem applicentur, seu sinus, seu sinubus proportionales parallelis; dabunt enim puncta, per quę ducta Ellipsis circundabit diametrum secundariam.

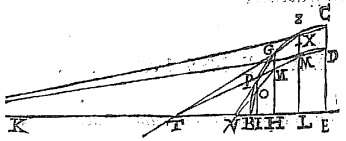
COROLLARIVM II.

QVin etiam describetur Ellipsis, si tùm Sinubus, tùm portionibus diametri proportionales sumantur, vt est videre in fig 2. Nam rectangulum BL, & LD est ad rectangulum BE, & ED in fig. 1. vt est AL, LB rectangulum ad BE, & EA rectangulum, quòd est vt quadratum ex LC ad quadratũ ex EF; Quadratũ verò LC ad quadratũ EF est, vt quadratũ BH, vel æqualis LC in fig. 2. ad quatum BN, vel æqualis EF. Quare ex æquo rectangulum BL, & LD erit ad rectangulum BE, & ED erit, vt quadratum LC ad quadratum EF. Quare LC, & EF erunt applicatæ in fig. 2. ad diametrum DB.

PROBL. II. PROPOS. LXXII.

* *Ellipsim dato circulo, & minori diametro per puncta describere.*

*SIt datus circulus, seu quadrans BC, & diameter minor Ellipsis ED; diuidaturque circulus in quasli buerit partes CZ, ZG, GP, & tandem PB ducanturque rectæ CZK, ZGT, GPV, & cęteræ si adsint ad diametrum productum EK; ab ijsdem quoque punctis perpendiculares ducantur ZL, GH, PI, & deinde à vertice D diametri minoris ED ducatur ad punctum diametri K, in quod cadit CZK recta DK, & à puncto M, in quo secat ZL ducatur recta ad T; quę sit MT, in quod cadit ZGT rursùsque à puncto N, vbi hæc postremo ducta secat perpendicularem GH ducatur recta NV ad punctum V, in quod cadit GPV, & sic agatur successiuè de alijs. Si ergo per puncta DMNOB flexa æquabili manu ducatur, hæc erit Ellipsis quarta pars, & puncta illa DMNOB erunt in Ellipsi.



Probatur Progr. 1. quia (vt ostendam) in Ellipsibus ita est EC ad ED, vt ZL ad ML, & è contra *conuertendo*. Ergo conuenient in vnicum punctum K. Alioquin si aliqua non transiret per punctum K, sed alibi V. g. per X, & peruenireț ad punctum D ex Coroll. propos. 4. Element. esset EC ad ED, vt LZ ad XL, quia enim DXK recta esset, vt dicunt aduersarij, & peruenireț ad punctum K per X linęe DE, & LX essent in eodem triangulo parallelæ, sed etiam CE esset ad DE, vt ZL ad LM, quia DE, LM sunt in Ellipsi, vt præsupponimus quapropter cum XL, & ML eisdem LZ eãdem proportionem diceret, quam CE ad ED, essent inuicem æquales ex propos. 9. lib. 5. Elem. quòd est absurdum. Ergo DK transibit per punctum M, per quod transit Ellipsis.

Progress. 2. Quod verò CE in Ellipsibus sit ad DE, vt ZL ad ML, patet. Nam in circulo ita est quadratum EC ad quadratum ZL, vt rectangulum ex BE & EB ad rectangulum ex segmentis diametri LB, & residuo segmento LEB, quod ex propos. 35 lib. 3. Elem. quadratum ex EC, & rectangulum ex segmentis diametri BE, & residuo EB sint æqualia sicut etiam

etiam ZL quadratum, & rectangulum ex LB, & reliquo LEB segmento eiusdẽ diametri, sed etiã quadratũ DB ad quad. ML, vt rectangulũ EB, EB ad rect. ex ijsdem BL, & LEB diametri portionibus circuli simulque Ellipsis ex prop. 6. h. cum ergo in eidem proportione rectangulorum referantur EC quadratum ad LZ quadratum, vt DE quadratum ad LM quadratum erunt ex propos. 16 Elem. 5. in eadem proportione. Quare, & latera erunt in eadem proportione ex 26. lib. 6. & erit EC ad LZ, vt ED ad ML; quare *permutando*, quoque erit EC ad ED, vt LZ ad ML.

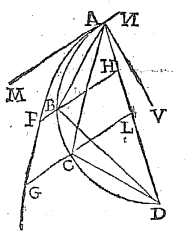
PROBL. III. PROPOS. LXXIV.

Dato circulo, seu circuli portione Parabolam describere.

FIant æquales lineis BA, & AC ductis à vertice A segmenti ABCD ad peripheriam ipsius applicatæ GL ad HF, quæ tamen debent esse æquidistantes tangenti circuli MA: Si deinde per puncta GF ducatur flexa, hęc erit *Parabola*.

Probatur. Nam vt est GL quadratum ad FH quadratum, sic intercepta LA est in proportione ad interceptam AH. Ergo ex 6. h. AFG est parabola.

Hoc autem ostenditur. Nam ex prop. 29. lib. 3. El. angulus NAH æquatur angulo ABD, & ob parallelas MN, & BH angulo AHB. Quaderè ABD angulus ãgulo BHA erit æqualis; angulus verò ad A est communis. Ergo triangula ABD, & BAH erũt equiãgula; ideoq; similia; ideoque AH erit ad AB, vt AB ad AD, quadere AB erit media proportionalis, & AH, & AD extremæ. Vnde rectangulum ex DA, & AH æquabitur ex progr. 19. lib. 6. quadrato BA, idest quadrato HF. Et idem concludes de quadrato CA idest LG, quòd sit æquale rectangulo ex DA, & AL. Ideoque quadratum CA erit ad quadratum BA, vt rectangulum ex AD, & AL ad rectangulum AD, & AH; sed hæc rectangula ob eandem altitudinem AD ex prop. 1. lib. 6. Elem. sunt vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum CA ad quadratum BA erit, vt AL ad AH. Ergo etiam quadratum GL ad quadratum FH, quæ lineis CA, & BA æquantur erunt, vt LA ad HA. Vnde GFA ex 5. huius erit Parabola, & AD Parameter.

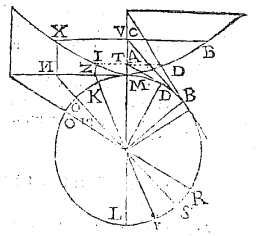


PROBL. IV. PROPOS. LXXV.

Dato Circulo Hyperbolam describere.

TAngentes, quæcumque AD, & CB pro applicatis cõstituantur à pũctis A, & C, quibus intersecant diametrum ML productum, quæ erunt AD, & CB, flexaque BDM per extrema applicatarum ducta erit Hyperbola.

Probatur. Quadratum CB tangentis est æquale rectangulo ex CL secantis, & CM ex propos. 36. lib. 3. Eucl. sicut, & quadratum AD tangentis est æquale rectangulo AL secantis, & AM. Ergo vt est BC quadratum ad quadratum DA; sic rectangulum ex CM, & CL ad rectangulum LA, & AM. Quare ex 6. huius BC, & AD erunt applicatæ Hyperbolæ, cuius diameter transuersa ML.



Idem efficies; si vtaris tangentibus MZ, MN pro applicatis VX, & IT, & pro interceptis diametri portionibus parte exteriori secantium KZ, & ON, quas transferas in TM, & VM. Itaque eadem ratione quadratum tangentis IT, vel ZM æquabitur rectangulo YZ secantis, & exterius assumptæ KZ, idest rectangulo ex FL, & TM; sic tangentis quadratũ MN, idest æqualis VX æquabitur rectãgulo ex NS, & NO, vel VL, & VM, & ideo quad. VX erit ad quadratum TI est, vt rectangulum ex VL, & VM ad rectangulum ex TL, & TM. Quapropter erunt ex 6. huius VX, & TI applicatæ hyperbolæ; cuius diameter transuersa ML.

EXPENSIO XX.

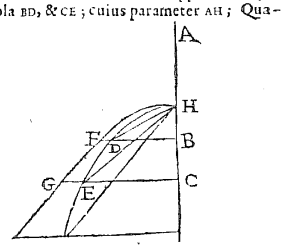
De mutua sectionum trasſumptione.

DEductioni sectionum à circulo, & rectangulo debet iure succedere mutua earum transformatio, atque transumptio, & modus docendus est, quo data vna sectione, altera ex illa extrahatur.

PROBL. I. PROPOS. LXXVI.

Data Parabola ex ea Hyperbolam transcribere, vel è contra.

SIt HC diameter, & ordinatim applicatæ in parabola BD, & CE; cuius parameter AH; Quadratis igitur DB, & BH fiat æquale quadratum ex FB; Iterum quadratis EC, & CH fiat æquale quadratum



tum GC ex 11. lib.2. & puncta G,F extrema erunt ad Hyperbolam.

Sit AH æquale Parametro Paraboiæ. Igitur BH, & HA rectangulum æquabitur quadrato DB,& ideo si addas quadratum BH ; erit rectangulum ex AB,& EH quadratis DB, & BH æquale, & ideo quadrato BF ex Thesi æquale. Sic dicendum de quadrato EC æquale rectangulo AH, & HC; addito, ei quadrato HC quadrata ex EC, & CH, ideſt quadratum GC ex Theſi eis æquale, erit etiam æquale rectangulo AC, & CH. Quapropter ita erit FB quadratum ad quadratum CG, vt AB, & BH rectangulum ad rectangulum AC, CH, ideoque BF, & GC erunt applicatæ Hyperbolæ ex prop.6.huius, cuius diameter intercepta HA.

PROBL. II. PROPOS. LXXVII.

Data Hyperbola, in qua quadrata applicatarum ſint æqualia rectangulis, ex interceptis diametri portionibus Parabolam deſcribere.

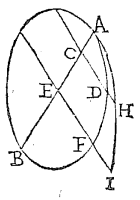
DEtrahatur in præced. fig. à quadratis applicatarum FB, & GC quadrata interceptarum diametri portionum EH,& CH ex 33.lib.6. & quadratorum reſiduorum latera erunt applicatæ Parabolicæ ad eaſdem diametri portiones BH, & HC.

Probatur. Nam quia ex Theſi GC quadratum æquatur rectangulo AC, & CH. Ergo ab eis vtriſque ablato quadrato CH erit quadratum CE æquale rectangulo AH,& HC. Rurſus ſi à BF quadrato, & ab AB, & HB rectangulo dematur quadratum BH erit quadratum DB æquale rectangulo AH, HB; at quia iſta rectangula conficiuntur ex eodem latere HA erunt inuicem, vt altitudines CH ad BH. Ergo etiam quadrata EC ad BD erunt vt CH ad HB: Ideoq; CE,& DE erunt applicatæ Parabolæ,cuius parameter HA.

PROBL. III. PROPOS. LXXVIII.

Data Ellipſi Parabolam deſcribere.

SIt Ellipſis AB, & in ea diameter coniugata æqualis alteri AB, & applicatæ DC, & EF: Fiatque quadratum HC æquale quadratis ex VC & AC, & quadratum IE æquale quadratis FB & EA. Et CH, atque IE horum quadratorum latera erunt applicatæ in Parabola.



Probatur ex prop.35.Tr.24. cum AB ſit diameter coniugata erit rectangulum AC, & CB æquale quadrato CD, & ita quoque AE, & EB æquale quadrato FE: Addito igitur quadrato AC rectãgulo AC, & CB fiet totum rectangulum ex AB, & AC æquale quadratis DC,& CA; ſic addito quadrato AE rect. ex EA,& EBfiet totum rectangulum ex AB,& AE æquale quadratis BE;& EA eiuſdem altitudinis AE; Ideo erũt inuicem, vt altitudines AC, & EB ; ſed quadratum HC rectangulo ex AB,& AC ex effectione æquatur; ſic etiam EI quadratũ rectangulo ex AB, & AE. Ergo ita erit quadratum ex CH ad quad. EI, vt AC ad AE. Quare CH,& IE erunt applicatæ parabolicę.

PROBL. IV. PROPOS. LXXIX.

Data Parabola Ellipſim deſcribere.

EX parabola deſcribetur Ellipſis adhibita fig. præc. ex propoſ.33.lib.6. Auferatur quadratum AC portionis diametri à quadrato CH,& latus DC reſidui quadrati ſtatuatur pro applicata diametri coniugatæ æqualis alteri.

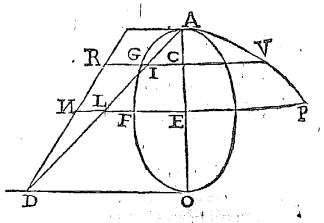
Probatur. Nam quia HC quadratum æquatur rectangulo AB parametri, & AC; ſi auferatur ab vtriſq; quadratum ex AC remanebunt æqualia quadratum DC, & CA, CB rectangulũ; ſic dicas de rectangulo AB, & AE, & quadrato EI à quibus ſi auferatur quadratum AE remanebunt EF reſiduum quadrati,& AE,& EB rectãguli æqualia. Quare erit vt quadratum DC ad quadratum FE; ita CA,& CB rectangulum ad rectangulum AE,& EB. Quare ex 6. huius DC,& FE erunt applicatę Ellipticæ.

Quod verò rectangula applicatarum quadratis æqualia ſint eiuſdem baſis patet, quia habent eundem Parametrum, & AB Parabolæ datæ erit Parameter, at in Ellipſi erit diameter coniugata æqualis alteri, eo quod BEA rectangulum remanet æquale quadrato FE,& ſic de alijs.

PROBL. V. PROPOS. LXXX.

Data Ellipſi Hyperbolam deſcribere.

FIat rectangulum iſoſcelles AOD, deinde ductis in Ellipſi CG, & EF applicatis ſecabunt AD in I, & L, fiat quadrato CG æquale rectangulum CI, & IR, & quadrato ex FE æquale rectangulum EL, & LN. Erit A D R. triangulum, & recta tranſibit



à puncto D per extrema N,& R. Nam cum ſit CI, & RI rectangulum ad EL,& LN rectangulum,vt CG quadratum ad EF quadratum, ideſt vt CA, & CO rectangulum ad AE; & EO rectangulum habebunt ea rectangula proportionem ex lateribus compoſitam, ſicque ſtabunt.

Compoſ.

Compoſ.			vt	Compoſ.		
CI	&	IR		CA	&	CO
ad				ad		
EL	&	LN		EA	&	EO
Ergo latera				latera		
CI	vt	CA		IR	vt	CO
ad		ad		ad		ad
EL		EA		LN		EO

Sed CO,& EO, vt ID ad LD,& ideo erit, vt RD ad ND, quare ID, RD latera ſtipantia parallelas IR, EN erunt rectæ, quòd triangula ſint ſimilia RID, & NDL ex 5. lib. 6. & ideo poſita vnum ſuper aliud in angulo D conuenient, & eadem crura efficient.

Si rectangulo igitur CI, & CR fiat quadratum æquale VC, & EL, & EN rectangulo quadratum EP æquale,erunt VC inter CI, & CR, & PE mediæ proportionales inter EN, & LE. Quare ex prop.59. erunt VC, & PE applicatæ Hyperbolicæ, & P, & V puncta ad Hyperbolam.

PROBL. V. PROPOS. LXXXI.

Datam Hyperbolam ad Ellipſim reuocare.

HOc fit auferendo quadratum CA ab VC in fig. præced. & EA ab EP, & cęt. & latera, quæ reſiduorum quadratorum contexunt latera erunt applicate in Ellipſi; cuius diameter tranſuerſa eſt eadem, ac diameter Hyperbolica,quę poteſt etiam eſſe diameter ſecundaria, licet figura ſit de ſolo axe.



TRACTATVS XXV.

De Sectionibus corporum sphæroicorum per planas superficies.

VIdimus Sectiones Sphęrę per planas superficies, relationes, proprietates, & dependentias; modo sectiones corporum, quæ aliquid sphærici possident per planas superficies contemplandæ, quæ deinde ad proiectiones, tum sphæræ, tum circulorum, seu orthographicè, seu stereometricè mirabiliter deseruiunt.

EXPENSIO I.

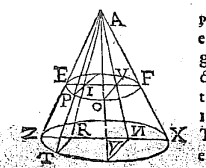
De sectione Coni, cuiuscumque per planas superficies.

SEctio coni post sphæram celebrior, vtpote, quę tres mirabiles sectiones exhibeat Ellipsim, Hyperbolam, Parabolam, & insuper triangulum, & circulum, & licet iam de coni sectionibus egerimus, non tamen pro vt etiam pro basi Ellipsim possidet, de ijs tractauimus; quemadmodum nunc agere oportunum iudicamus.

THEOR. I. PROP. I.

Omnis sectio coni Elliptici parallela basi Ellipsis est,

PRobatur, quod in cono AXZ, cuius basis XYZ sit Ellipsis, *quod, & sectio parallela* FOPE *sit Ellipsis*. Nam vt NA ad VA, sic XN ad FV, & sic NZ ad VE, & NY ad VO, & *permutando*, ob parallelas in triangulis XAN, & NAY, & ANZ, quorum commune latus est NA. Vnde etiam rectangulum XNZ ad rectangulum FVE erit ex 26. lib. 6. vt NY quadratum ad VO quadratum. Eodemque modo concludes, quod XR sit ad FI, vt RZ ad IE, & RT ad IP: sint in eadem proportione, & *permutando*, ac RA ad IA, eo quòd in triangulis ob parallelas similibus ex 4. l 6. existât. Quare pariter XR, & RZ rectangulũ erit ad rectangulum FI, IE, vt quadratum RT ad quadratum IP. Itaque XN, & NZ rectangulum est ad FV, & VE rectangulum, vt quadratum NY ad quadratum VO, & *conuertendo* FV, & VE rectangulum est ad XN, & NZ rectangulum, vt quadratum VO ad quadratum YN, & vt XN & NZ rectangulum ad XR, & RZ rectangulum, ita est quadratum YN ad quadratum RT cum XQZ ex Thesi sit Ellipsis, vt autem XR, & RZ rectangulum ad FI, & IE rectangulum, ita est quadratum RT ad quadratum



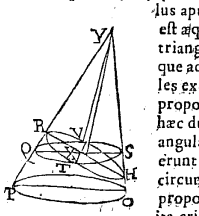
PI, ergo ex *æquo* erit FV, & VE rectangulum ad FI, & IE rectangulum, vt quadretum VO ad quadratum IP: quare ex propos. 6. Tract. 24. FOE Ellipsis erit.

THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis sectio coni circularis scaleni, quæ angulos alternos efficiat æquales basi, & ipsa quaque circulus est.

SIt conus OYP, cuius basis circularis OP, & circulus æquidistans, & parallelus QVTS. Iam notum est ex præc. tr. pr. 2. quod si OP basis sit circulus, fore etiam circulum QSVT. Quo supposito ducatur alius circulus, qui cum isto QVST angulos alternos æquales efficiat, ita quod angulus H concluſus latere conico OT, & diametro HR, sit equalis angulo Q clausus latere coni QR, & diametro QS. Et superficies RTH, QTS supponantur perpendiculares triangulo per axem OYP, quare TX, & XV sectio, OYP plano perpendiculariter incumbet ex 16. tract. 22.

Reitaque ita concepta Probatur propos. Angulus apud R in triangulo RQX est æqualis angulo apud H in triangulo XHS. Anguli quoque ad verticem X sunt æquales ex prop. 12. lib. 1. Ergo ex propos. 17. lib. 1. Coroll. 2. hæc duo triangula sunt æquiangula: Quamobrem latera erunt proportionalia, quæ circum æquales angulos ex propos. 4. lib. 6. Propterea; ita erit crus XQ ad crus XR alterum, sicut crus XH ad crus XS alterius trianguli.



Sed

Sed ex propos. 18. lib. 6. si quatuor rectæ proportionales fuerint illud rectangulum, quòd constituitur à medijs V. g. ex cruribus XH, & RX est æquale rectangulo ex extremis constituto, nempe vt QX, & XS.

At ex propos. 35. lib. 3. rectangulum QX, & XS constitutum æquatur quadrato, ex planorum semisectione XT, aut XV constituto, quia sunt lineę, quæ in circulo se intersecant. Ergo pari ratione Rectangulum ex XR, & XH erit eidem quadrato æquale ex semisectione cõstituto; Quare ex dictis pr. 35. l. 6 el. hęc duo puncta erũt in circuli circũferentia. Quadropter RTHV circuli circũferentia erit, cùm idem argumentũ valeat, etiã si sectio TV fiat aut superius, aut inferius, dummodo parallela sectioni iam factæ planorum RTVH, vel QTVS.

COROLLARIVM I.

*HInc est in Cono scaleno duos axes reperiri, Quia duo centra sunt circulorum, à quibus à vertice Y axis ad quemlibet duci potest, quæ non coincidunt in idem punctum, nempe basis rectæ, quæ fieret, qui, & esset axis coni propriè dictus, & basis obliquæ.

* Ponantur enim æquales RX, & XH: Dico XQ, & XS inequales esse, & ideo punctum X circuli QTSV centrum non esse. Quod si æquales dicantur, ostenditur sine absurdo id esse non posse.

Nam RXQ, & XHS sunt triangula ad verticem ex hypothesi, æqualia quoque crura ambientia æquales angulos ad verticem X, scilicet XS, & QX sicuti RX, & XH ex Thesi, ideo bases equales habebunt QR, & HS. Quare cum anguli apud Q, & H remaneant æquales etiam bases XS, & RX oppositę illis angulis septis à cruribus æqualibus erunt æquales ex 22. lib. 1. sed XS ex æqualis ex aduersarijs ipsi QX. Ergo QX, & XR erunt bases æquales. Quare ex 14. lib. 1. Elem. anguli R, & Q erunt æquales: Quadere R, & H, vtpote tertio Q æquales erunt æquales anguli alterni, & ideo ex 28. lib. 1. QR, & HS essent parallelæ: quod est absurdum.

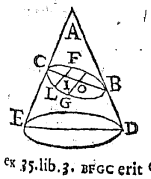
Cum igitur lineæ QX, & XS æquales esse nequeant axis basis QTVS nõ poterit esse basis RTVH etiamsi has bases ponas esse Ellipses. Ideoque nullæ Ellipses, vel circuli in conis habebunt communem axem, nisi paralleli.

THEOR. III. PROP. III.

* *Omnis sectio Coni Elliptici, quæ secet vtrumque latus, in qua possit esse maior axis æqualis alteri axi circulus est.*

SIt in cono ADE sectio BC, cuius semiaxis BO maior possit esse æqualis axi alteri OG. Dico BFCG *esse circulum*,

Probatur. Nam BO, & OC, rectangulum ex radijs est ad quadratum OG, æqualis, vt BI, & IC rectangulum ad IL quadratum, & *permutando*; sed BO, & OC quadratum æquatur quadrato OG; Ergo, & BI, & IC rectangulum æquabitur quadrato IL; cùmque BOC axeis asseratur, Ergo



ex 35. lib. 3. BFGC erit circulus.

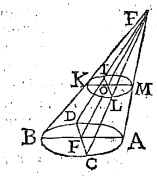
COROLLARIVM.

ILlum conum Ellipticum nullam basim posse habere, quæ sit circulus, si saltem BC axis qui deberet esse maior factus perpendicularis vni laterum trianguli per axem DAE sit maior adhuc, nã tunc axi minori FG etiam ęteræ omnes ex Cor. propos. 17. lib. 1. Elem. erunt maiores ipsa CB; Quod si accidat perpendicularem BC posse esse minorẽ, tunc aliqua alia longior erit æqualis. Vnde in eo cono poterit fieri aliqua sectio circulus.

THEOR. IV. PROPOS. IV.

In Cono quocumque Ellipses parallelæ similes sunt.

SInt duę Ellipses parallelę in quocumque cono, siue elliptico, seu circulari AEB, nempe MLIK, & ADBC. Dico *eas esse similes*,



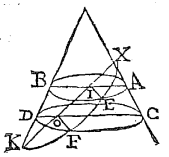
* Probatur. Quod sint similes, vtpe ad OE; sic AF ad MO, & ita CF ad LO ob parallelas MO & AF in triangulo MEF, & CF ad LO in triangulo CEF, sed CF, & LO sunt applicatæ, & MO, & AF portiones diametri, ergo ACDB, & MLIK erunt Ellipses similes ex def. 16. Tract. 24.

THEOR. V. PROPOS. V.

* *Omnis sectio coni Elliptici non parallela basi etiam Ellipsis, est si vtrumque latus secet trianguli per axem.*

SInt AEB, & CFD duæ Ellipses, & sit obliqua basi XEK. Dico eam esse Ellipsim.

* Probatur, Dictum est pr. 57. Cor. Tr. 24. AIB rectangulum esse ad COD rectangulum, vt quadratũ EI ad quadratũ OF ob ellipses parallelas, quę similes sũt ex præc. Sed vt AI ad CO; sic XI ad XO in triangulis æquiangulis ob parallelas AXI, & CXO. Pariter-que vt IB ad OD ita ob eandem rationem IK ad KO.



Componendo igitur proportiones

cum AI	vt	XI	& sit	IB	vt KI
ad		ad		ad	ad
CO		XO		OD	OK

Ergo compositum vt compositum.

AI	&	IB	erit	XI	& KI
ad				ad	
CO	&	OD		XO	& OK

Quare etiam vt rectangulum XI, & KI ad rectangulum XO, & OK sic erit quadratum EI ad quadratum OF ex propos. 16. lib. 5. cum sit eadem proportio quadratorum, ac rectangulorum AI, & IB ad CO, & OD. Vnde ex 6. tract. 24. XEFK erit ellipsis.

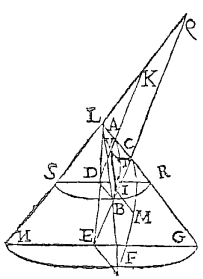
THEOR.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Hyperbolæ parallelæ in Cono similes sunt.

IN cono GLN secto triangulo per verticem ELF ab intersectionibus BD, & FE circulorum RES, & GEN duæ hyperbolæ parallelæ CMFE, & ATED discedant ei diametri transuersæ protendantur vsque ad Q, & K. Sint autem hæ omnia plana perpendicularia triangulo ex generatione GLN. Dico *has sectiones parallelas esse Hyperbolas*,

Intelligatur L non sit satis expressa ab L vertice in aliquod punctum I producta linea, & à puncto, quo secat diametrum vtrumque I, & V duę perpendiculares ad idem planum LNG erigantur IM, & VT; & exprop. 8. Tract. 22. erunt parallelæ quoque.



Quo posito probatur, cùm EQ, & DK sint parallelæ, & segmenta ipsarum erit rectangulum ex KV, & VA ad rectangulum ex DA, & KD, vt rectangulum ex QI, & IC ad rectangulum ex QE, & EC; quòd latera obtineant proportionalia. Vt autem rectangulum ex KV, & AV ad rectangulum ex KD, & DA, ita est TV quadratum ad ED quadratum ex 6. h.

Et vt rectangulum CI, & QI ad rectangulum ex QE, & EC, ita est quadratum MI ad quadratum FE. Ergo erit etiam TV quadratum ad quadratū ED velut MI quadratū ad quadratū FE ex 16. l. 5. Quare talia quoque erūt latera ex prop. 26. lib. 6. Elem. f. erit TV ad DB, vt IM ad EF; sed est etiā AV ad AD, vt IC ad CE ob parallelismū linearū AD, & CE: Ergo hyperbolæ erūt similes AED, & CMFE ex prop. 52. Tr. 24 de conicis,

De circulis, & Parabolis non est difficultas. Nam omnes parabolæ, & omnes circuli sunt similes, vt ostendimus.

Et omnes quoque in cono circulari sunt parallelæ figuræ, cùm circulus basi sit parallelus, at parabola lateri.

THEOR. VII. PROPOS. VII.

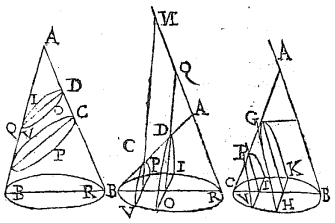
Æquidistantes in eodem cono sectiones, non possunt esse eædem.

SIt primùm sectio parabola in cono ABC per axem secto plano ABC, & parabolę KGH, & FIV æquidistantes.

Dico, quòd hæ sectiones non sunt vna alteri eadem.

Probatur. Quia obtinerent parametrum ex propos. 39. Tr. 24. æquale, si essent sibi eędem, sed nequeunt consequi æquale parametrum. Ergo eędem esse non possunt.

Probatur minor de Parabola. Quoniam ex pr. 41. Cor. Tract. 24. si componatur rectangulum ex cruribus BA, & AC, id habebit eam proportionem ad quadratum BC, quam AQ, vel AF portio eruris à verticibus sectionum, & coni intercepta ad parametrum contiguam; Sed portio AF est maior, quam AG; ergo etiam maior Parameter parabolæ IFV quā parab. KGH. Quare nō sunt eędē.



Sit deinde data sectio Hyperbola, vel Ellipsis in conis ARB æquidistantes. Dico non esse eadem inter se.

Probatur. Nam ex 38. Tract. 24. conic. diametri transuersæ essent inter se æquales; sed CN, & DQ tales non sunt. Ergo neque sectiones sunt eędem inter se; Assumptum verò ostenditur. Nam AC maior est, quam AD. Ergo etiam transuersa diameter CN maior est, quam DQ in ACN; ADQ triangulis equiangulis. Vnde Ellipses, aut Hyperbolę non erunt inuicem æquales; si sint parallelæ.

EXPENSIO II.

De Coni sectionibus in lineam definentis.

SPecies est coni, qui cum basim rotundam obtineat, non definit tamen in punctum, sed in lineam, vt conus representat ABCF, de hoc etiam aliqua dicere necessarium videtur.

THEOR. I. PROP. VIII.

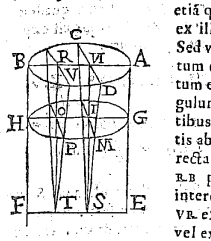
* *In Cono, qui definit in lineam rectam habente pro basi circulum, vel Ellipsim reliquæ omnes parallelæ sectiones, seu intra seu vltra basim, si producatur illius coni superficies, sunt Ellipses.*

SIt Conus, cuius basis circulus ACED, vel ellipsis definatq; in lineam EF. Dico, quod si in eo fiat aliqua sectio, vt GMPH parallela basi illa sectio exhibebit Ellipsim.

* Probatur ex ea proprietate Ellipsis, quòd consequatur diametros inæquales, & quòd omnia applicatarum quadrata inuicem, ita se in proportione gerant, vt rectangula sub interceptis diametri portionibus comprehensa. Sint ergo applicatæ IM, & OP. Dico, quòd ita est quadratum IM ad quadratum OP, vt rectangulum ex GI, & IH ad rectannulum ex GO, & OH.

Probatur. Nam ita est MI ad DN, vt est SI ad SN, & ita est PO ad VR, vt TO ad RT. Lineę verò TO, & SI sunt æquales, sicut, & SN, & TR: Vnde possunt computari pro eadem: Quamobrem etiam erit

erit MI ad DN, vt PO ad VR, eo quòd sint eædem proportiones vni tertiæ ex 16. lib. 5. nempe si ad SN, vel TO ad TR. Cum ergo sit MI ad DN, vt PO ad VR erit permutādo MI ad PO, vt DN ad VR. Quare



etiā quadrata ex 26. l. 6. ex illis lineis effecta. Sed vt se habet quadratum ex DN ad quadratum ex VR, ita est rectāgulum ex AN, & NB partibus diametri interceptis ab applicata DN, vt rectangulum ex AR, & RB partibus diametri interceptis ab applicata VR. ex 35. lib. 3. Elem. vel ex 6. Tr. 24. cum sit basis circulus, vel Ellipsis. Ergo etiam ita erit quadratum ex MI ad quadratum ex OP, vt rectangulum ex AN, & NB ad rectangulum ex AR, & RB: Sed rectangulum ex AN, & NB est æquale rectangulo ex GI, & IH ob parallelas EA, & FB, ob quas æqualia sunt segmenta diametrorum equalium GI, & AN, sicut, & IH, & NB. Et ita quoque rectangulum ex AR, & RB ex æquale rectangulo GO, & OH ob eandem rationem segmentorum æqualium.

Ergo quadratum ex MI ad quadratum PO, est vt rectangulum ex GI, & IH ad rectangulum ex GO, & OH. Quaderè erit Ellipsis figura GMPH, cum circulus esse nequeat ob diametros inæquales, quia equidē est maior DN semidiameter, quàm MI; sicut, & maior est SN, quam SI, cum quibus ij diametri eandem proportionem dicunt.

EXPENSIO III.

De sectione sphæroidis per planas superficies.

AD inuestigandum superficies corporis sphæroidis, & soliditatē, vtile est scire sectiones, quæ in ipso exhiberi possunt; ad quam expensionem ineundam operæ pretium est definitiones agnoscere.

DEFINITIO I.

Semiellipsis in orbē circa suum diametrum, voluta, donec redeat ad idem punctum, à quo discessit sphæroidem circumscribit.

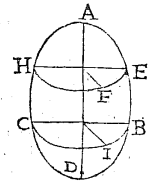
DEFINITIO II.

Axis eius est idem axis, circa quem Ellipsis efformatrix circumuoluta est, & punctum huius medium centrum ipsius est.

THEOR. I. PROP. IX.

Omnis sectio recta ad axem sphæroidis circulus est.

PRobatur id faciliter ab efformatione sphæroidis, cū enim Ellipsis ABCD se circūgyrando fecerit sphæroidem, omne punctum eius circulum effecit. Quare punctum E se gyrando per F in H



circulum delineauit, sed hic est parallelus basi BIC, actę normaliter ad axem AD sphæroidis eo, quòd se girando punctum E non mutet distātiam à puncto B: Ergo axi circulus EFH erit normalis, alterique circulo BIC parallelus.

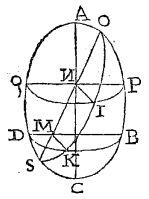
THEOR. II. PROPOS.

Omnis sectio sphæroidis axi obliqua Ellipsis est.

SIt secta spheroides ABCD piano obliquo OIKS ad axem. Dico *illam esse veram Ellipsim.*

Sectio ABCD primigenia sphæroidem constituens, sit plano OIKS recta, nempe transeat per aliquam illi plano perpendicularem; patet enim hoc fieri posse absque alia probatione; Et eidem plano primigenio ABDC perpendiculare quoque planum PIQ, & BKD secet obliquum OIKS in N puncto: quo obliquum secat axem, & in M aliquo alio puncto; Sintque hæc duo plana recta ad axem AC. Sectiones itaque IN, & KM erunt perpendiculares ex propos. 16. Tract. 22. plano primigenio BADC, & eius sectionibus linels PQ, & BD, & plana PIQ, & BKD erunt circuli, & parallela, vt axi orthogonalia; quibus positis, ita.

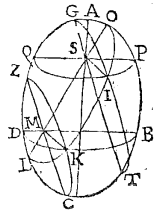
Probatur. Quod PIQ, & BKD plana circuli sint, & KM, & IN perpendiculares diametris PQ, & BD erit rectangulum PN, & NQ equale quadrato IN. Sicut etiam rectangulum BM, DM erit æquale quadrato MK: Ideo rectangulum erit ad rectangulum, vt quadratum ad quadratum: Sed vt rectangulum ex PN, & NQ ad rectangulum ex BM, & MD. Sic



est rectangulum ex ON, & NS ex prop. 43. Tr. 24. ad rectangulum OM, & MS, eo quod BADC sit Ellipsis. Ergo, vt quadratum IN ad quadratum MK, ita est rectangulum ex ON, & NS ad rectangulum ex OM, & MS. Ergo ex 6. Tr. 24. DIS est Ellipsis.

THEOR. III. PROPOS. XI.

Omnes Ellipses in sphæroide sunt similes, si sint parallelæ.



SIt constructio, vt præcedens. Sectioq; primigenia sphæroidis ABCD, & plana circulorum perpendicularia eidem sectioni primigenię sint PIQ, BKD, & eidem quoque duæ Ellipses parallelæ perpendiculares TIG, & CKZ erūt, & intersectiones IS, & KM perpendiculares ex prop.

16. Tract. 22. per quas agatur planum OIKL.

Prob. Sectiones GIT, & ZKC esse similes rectangulũ EX OS,SL ad rectãgulũ AX OM,& ML ex pr.68. præc. Tr. vt rectãgulũ GS,& ST ad rectãgulũ EX ZM, & MC: sed vt rectangulum EX OS, & SL ad rectangulum OM,& ML, ita est quadratum IS ad quadratũ MK ex præc. Ergo etiam rectangulũ ex TS, & SG ad rectangulum EX ZM, & MC, vt quadratum IS ad quadratum MK. Quare etiam ex 26. lib.6 SG, & ST lineæ erunt ad MZ, & MC, vt IS ad KM; quare ex def.16. Tr.24. sectionum similium, erunt similes sectiones GIT,& CKZ parallelæ.

EXPENSIO IV.

De sectionibus Conoidis parabolici.

QVoniam egimus de præcipuorum corporum sectionibus, parabolicum Conoides inter corpora mathematica non infimum locum obtinens præterire non licet. Tres autem sectiones in ipso fieri possunt præter primigeniam, ex qua generatur, Circulus, Parabola, & Ellipsis.

DEFINITIO.

COnoides Parabolicum Parabola circa suum axem voluta formatur, & axis eius est axis etiam parabolæ genitricis.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Sit sit Conoides parabolicum, cuius basis circularis, & sectum sit plano basi parallelo, sectio circulus erit.

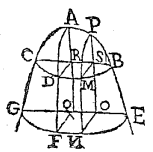
SIt EAG corpus Conoidale Paraboliclũ, in fig. pr. 5eq. & planũ BDC intelligatur æquidistans basi, quæ sit circulus EFG. Dico *hoc planum esse circulũ.*

Probatur. Nam eius ambitus formabitur à puncto C per motum parabolæ circa axem AQ. Et cum illud punctum semper æquidistanter basi moueatur, cumque perimetrum parabolæ maneat semper inuariatum punctum illud C per D, M, B séper in æquali distãtia, à cẽtro R, & circulo GFNE promouebitur, vt patet. Quare CDMB circulus erit.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

Omnis sectio Parabolici Conoidis æquidistans axi Parabola est.

SIt Conoides Parabolicum EAG Axis AQ; sintq; parallelæ sectiones OPMN,& altera QADF per axem AQ. Sintque circuli paralleli BMDC, & ENFG, & perpendiculares Parabolæ primigeniæ EACG. Dico OPMN *sectionem axi* QA *parallelam esse parabolam.*



Probatur OP est diameter coniugata in parabola primigenia EAG. Ideoque BS, & SC rectangulum est ad EO, & OG rectangulum, vt PS est ad OP ex propos. 50. Tract. 24. sed ex BS, & SC rectangulum est æquale quadrato SM, & rectangulum ex EO, & OG quadrato ON, Ergo quadratum SM ad quadratũ OM erit, vt SP ad OP, quę est ex prop. 5. Tract. 24. proprietas parabolæ.

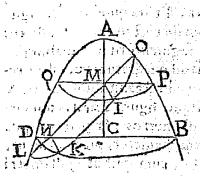
PROBL. III. PROPOS. XIV.

Omnis sectio Conoidis parabolici ad axem obliqua Ellipsim efformat.

DVcantur paralleli basi circuli BKD, & PIQ, qui secent OIKL planum sectioni primigeniæ BAD normale. Eruntq; MI, & KN intersectiones planorum perpendiculares intersectionibus BD, & PQ, & OL ex prop. 16. Tract. 22.

Dico *itaque* OIKL *obliquum planum axi* AC *esse Ellipsim.*

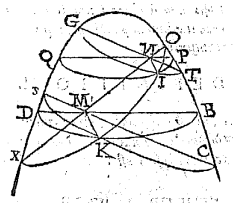
Probatur. Cum PM, & MQ rectangulum quadrato MI, & BN, & ND rectãgulum quadrato NK sit æquale eo, quòd sint circuli vt ex pr. 35. El. l. 3. erit rectangulũ PM, & MQ ad rectangulum BN, & ND vt quadratum IM ad quadratum NK; ex propos. 7. lib. 5. Vt autem rectangulum PMQ ad rectangulum BND, ita ex propos. 48. Tract. 24. est rectangulum OML ad rectangulum ONL. Quaderè rectangulum OML erit ad rectangulum ONL, vt quadratum MI ad quadratum NK, hæc autem ex propos. 6. Tract. 24. est proprietas Ellipsi prima, & essentialis.



THEOR. IV. PROPOS. XV.

Ellipses in Conoide Parabolico parallelæ sunt similes.

SInt duæ, GIT, & SMC parallelæ Ellipses. Dico *eas esse similes.*



Prob. Supposita eadẽ prorsus costructione, quę propos. 11. cum, & sit ijsdẽ verbis eadẽ demonstratio. Rectangulũ ON, & NX est ad rectãgulum OM, & MX ex prop. 48. Tract. 24. vt rectãgulũ GN, & NT ad rectangulum ex SM, & MC; Sed vt rectangulum ON, & NX ad rectangulum OM, & MX, ita est quadratũ IN ad quadratũ MK ex 14. h. Ergo etiã rectangulum ex TN, & NG ad rectangulum ex SM, & MC, vt quadratum IN ad quadratum MK. Quare etiam

etiam ex propos. 26. lib. 6. Elem. ita erit NG, & NT lineæ ita erunt ad SM, & MC, vt IN ad KM: quare ex def. Ellipses GIT, & SKD erunt similes.

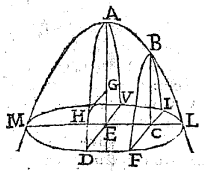
THEOR. IV. PROPOS. XVI.

In Conoide Parabolico Parabolæ axi æquidistantes similes, & æquales sunt.

PArabola IBF detur parallela axi AE, & parabolæ per axem VAD. Dico *eam esse similem, & æqualem ipsi* VAD.

Detruncetur AG ex axe æqualis BC diametro, & ducatur applicata GH, quæ erit parallela ED.

Probatur. Quia vt AG ad AE, ita est quadratum GH ad DE, & quia LAM parabola est; erit LCM rectangulum ex Cor. 1. prop. 50. Tr. 24. de Conicis ad LCM rectangulum, ideſt ex 35. lib. 3. illi CL, CM æquale EC quadratum ad quadratum DE æquale LE, EM rectangulo, vt CB ad AE: sed GH quadratum est ad quadratum ED, vt AG ad A, ideſt BC ad BA. Ergo cum CF quadratum ad ED quadratũ eãdem proportione alludat, vt GH quadratum ad idem ED quadratum erunt æqualia GH, & CF quadrata. Ergo, & lineæ GH, & CF. Quare cũ diametri sint æquales, æqualesque applicatæ, parametri quoque, vtpote æqualium applicatarum quadratis, rectangulorum cum diametro latera erunt æqualia. Vndæ parabolæ erunt similes, & æquales, vt ex definitione.



EXPENSIO V.

De sectione Conoidis Hyperbolici per planas superficies.

COnoides Hyperbolicum recipit omnes sectiones planis diuersimodè illud secantibus; nempè circulum, Ellipsim, Parabolam, & Hyperbolam; de Circulo nihil dicemus, cùm pateat ex antecedentibus ostensionibus Circulum exhibere si planum secet Conoidem, Hyperbolicum parallelũ basi, & eãdem prorsus demonstratio est, quam adhibuimus in Parabola. Vnde ad alias sectiones ostendendas accedimus.

DEFINITIO.

COnoides Hyperbolicum ab Hyperbola circa suum axem voluta formatur, & axis eius est idem, ac generantis Hyperbolæ.

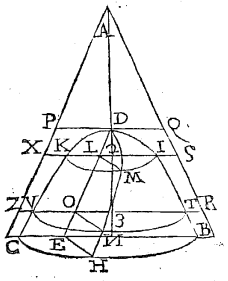
THEOR. I. PROPOS. XVII.

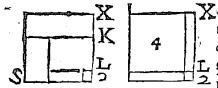
Si planum secet Conoidem Hyperbolicum parallelè ad asymptotum figuræ ex generatione; illa sectio est parabola.

SIt Conoides Hyperbolicum TDV. & figuræ ex generatione eidem TDV Asymptoti sint BA, & AC; sitque DE parallela Asymptoto AC; per quam agatur planũ DHE. Dico *figuram* DHE *esse Parabolã.*

Ad quod ostendendum constituantur ordinatim applicatæ parallelæ basi 2 K, & 3 V hinc inde, & extendantur vsque ad Asymptotos in X, & Z, R, S, & quia sunt parallelæ basi plana IMK, & TNV circuli erunt, sitque QP tangens sectionem parallela ipsi XS. Quibus perfectis erunt omnes æquales, Atpote inter parallelas lineæ DP, LX, OZ.

Probatur igitur. Quoniam 2 X est secta, vtcumq; in L ex propos. 6. lib. 2. El. erit quadratum totius 2 X æquale duobus rectangulis ex segmentis 2 L, & LX, & quadratis ex ijsdẽ 2 L, & LX, vt in quad. 4. vides. Quadratum verò maius ex LX; Q sit æquale DP æquatur rectangulo ex KX, & KS, ex pr. 46. Tr 24. Q facit gnomonem circa 2 K; siquidẽ 2S & KX integrat vnã portionẽ, & 2 K alteram sub altero latere KX, vt eodem modo rectangulũ ex LX, & LI faciet gnomonẽ conclusum prędicto gnomone ambiens quadratum ex IL, vt in quadrato XS est videre. Quare quadratum X2 æquabitur quoq; duobus rectãgulis vni ex SK, & KX, & alteri IL, & KL, vnã cum quadrato 2 L, siquidem hæc omnia ambit quadratũ, cuius latus 2 S, vel 2 X. Si ergo auferatur quadratum paruum 2 L, commune vtrisque, & gnomon, ideſt rectangulum XK, KS, & quadratum maius ex LX, quæ inuicem æquantur remanebit gnomon intermedius, nempe rectangulum ex LK, & LI æquale duobus rectangulis LX, & L2. Sed rectangulum IL, & LK æquat quadratum ML ex 35. lib. 3. Ergo etiam duo rectangula ex LX, & L2 æquabunt quadratum ML.





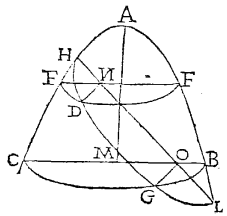
Idem dicas de rectãgulis duobus O 3, & OZ, quę æquabunt quadratũ ON. Et ideo erunt rectangula duo ex 2L, & LX ad rectangula duo ex 3 O, & OZ, vt LM quadratũ ad quadratũ NO. Ideoq; etiã erit medietas, nempe vnicum rectangulum ex 2 L, & LX ad medietatem rectangulum vnicum 3 O, & OZ, vt quadratum ML ad quadratum NO. Sed rectangulum ex 2 L, & LX ad aliud ex 3 O, & OZ est, vt basis 2 L ad 3 O basim ob eandem altitudinem cęqualium LX, & OZ: basis verò 2 L ad basim 3 O est, vt DL ad DO. Ergo quadratum ML erit ad quadratum NO, vt DL ad DO, quę ex prop. 5. Tract. 24. est proprietas parabolæ.

THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Omnis sectio conoidis Hyperbolici ad axem obliqua Ellipsim exhibet si secet vtrumq; latus sectionis per axem.

SIt sectum Conoides Hyperbolicum BAC duobus planis parallelis ad basim Hyperboleque primitiuæ BAC normalibus FDE, & BGC, quę secent planum aliud obliquum axi AM, & eidem sectioni primitiuæ normale HDGL. Dico hoc planum Ellipsim exhibere.

Probatur. Nam cum plana normalia sint ad hyperbolem primitiuam BAC sectiones DN, & GO erunt quoque normales propos. 16. Tr. 22. quare rectangulum ex FN, & NE erit æquale quadrato DN, & rectangulum ex BO, & OC quadrato OG: Sed rectangulum



ex FN, & NE est ad rectangulum BO, & OC, veluti rectangulum ex HN, & NL est ad rectangulum ex OH, & CL ex prop. 48. Tr. 14. Conic. Ergo rectangulum ex HN, & NL. est ad rectangulum ex HO, & OL, vt quadratum DN ad quadratum OG: quæ est proprietas Ellipsium ex 5. Tract. 24. Conic.

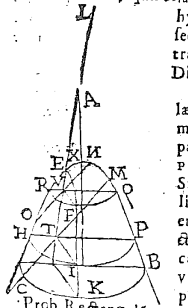
COROLLARIVM.

ELlipses parallelas in Conoide Hyperbolico, esse quoque similes eadem autem figura est, quæ in parabolico Conoide, & eadem ostensio.

THEOR. III. PROPOS. XIX.

Omnis sectio Conoideos, quæ transeat per centrum hyperbolæ primitiuæ Hyperbolam format.

SIt centrum hyperbolę primitiuæ A, & ipsa sectio EMNC, quæ etiam exprimat Conoidem hyperbolicum, sitque sectio TEFI, quę producta transeat per centrum A. Dico *hanc esse hyperbolã.*



Siat plano Hyperbolæ primitiuę BNC normalia, & basi circulari parallela plana QFR, & PIH, ipsaque sectio TEI. Sit quoq; ei BNC normalis, & FV, & TI sectiones erunt normales intersectionibus QR, & PH. Ducantur postea applicatę VN, & TM diametro TA ad puncta V, & T.

Prob. Rectangulũ ex VQ, & RV est æquale quadrato V: Sic rectangulũ ex PT, & TH est æquale quadrato TI. Ergo, vt quadratũ ad quadratũ, ita rectãgulum ad rectangulum. Sed rectangulum ex QV, & VR est ad rectangulum NV, & VO, Idest quadratum sunt enim æquales, vtpote applicatę, veluti rectangulum ex PT, & TH ad rectangulum ex MT, & TC, idest quadratũ ex 49. Tr. 24. Quadratũ verò NV ad quadratũ MT est, vt rectangulũ ex diametro transuersa LV, & VB ad rectangulũ ex TE, & LT ex pr. 6. Tract. 24. Ergo etiam ex 16. lib. 5. quadratum VF ad quadratum TI, vt rectangulum LV, & VB ad rectangulum ex LT & TE, quę est proprietas Hyperbolarum ex prop. 6. Tract. 24. Conic.

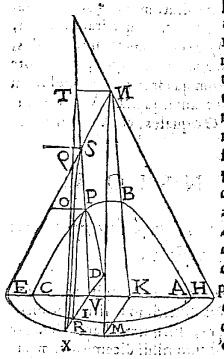
THEOR. IV. PROPOS. XX.

Asymptoti hyperbolæ in hyperbolico Conoide sunt ijdem; ac hyperbolæ in eodem plano existentis, & coni asymptotici sectione effectæ.

SIt Conoides hyperbolicum, atqueadeo eius sectio per axem, & ex generatione ABC, cuius Asymptoti NE, NH; qui, & conũ Asymptoticũ forment NERH, sitque sectus tum conus HNE, tum conoides AEC plano VSR, in quo formentur duę ellipses, altera quidem SR sectione coni HNER effecta, altera DPI sectione Conoidis hyperbolici ABC producta. Asymptotus verò Hyperbolę conicę SR, sit TX.

Dico itaque TX asymptotum hyperbolę conicæ SR *esse quoque asymptotum hyperbolæ conoidalis* DPI.

Probatur. Nam superficies conoidis ABC semper quidem accedet ad superficiem coni HNE, numquam tamen illam assequetur, eò quòd formetur à circumgiratione trianguli ex HNE asymptotis cõstituti, quibus hyperbola semper accedit, licet numquã assequatur ex prop. 44. tract. 24. Quamobrem Hyperbola conoidalis DPI, vtpote in superficie conoidis existens cum ipsa superficie conoidis sęper quidem accedet, numquam tamen assequetur Hyperbolam SR conicam, & à superficie coni effectam, sed & SR semper accedit ad asymptotum suum TX, & numquam assequitur; Ergo etiam Hyperbola DPI accedet ad TX asymptotum, sed illum non assequetur. Quare etiam XT hyperbolæ conoidalis DPI erit Asymptotus, quod accedendo quidem ad SR accedentem ad TX accedat quoque ad TX, quam consequi non potest, cùm nec hyperbolam SR, quæ nec ipsa, acquirere potest XT numquam obtinere queat.



COROLLARIVM.

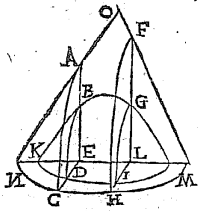
HInc est Hyperbolas SR coni, & DPVI conoidis esse similes; quia cum habeant eosdem asymptotos ductis SQ, & PO erunt diametri rectę applicatę sub angulo recto ipsi axi VT; quare erit VT ad QS, sic TP ad PO. Vnde sectiones ex prop. 54 tract. 24. similes erunt DPI conoidis, & SR coni asymptotici.

THEOR.

THEOR. V. PROPOS. XXI.

In Conoide omnes Hyperbolæ parallelæ sunt similes.

SIt conus asymptoticus MON hyperbolę primigeniæ KBG conoidis, & hyperbolæ in conoide LGI, & BDE, in cono autem FHL, & CAE. Dico DEB, & IGL *esse similes Hyperbolas.*



Probatur. Nam ex Coroll. prop. 20 huius DBE Hyperbola Conoidis est similis Hyperbolę CEA coni ex prop. autem 6. h. CAE est similis HFL hyperbolæ, & hæc ex Coroll. citato hyperbolæ LGI: Ergo Hyperbolę ILG, & DBE sunt similes.

EXPENSIO VI.

De sectionibus Cylindrorum per planas superficies.

CYlindri quoque sectiones considerandę sunt, & quidem si Cylindrus basim circulum possideat, patet, sectiones basi parallelas esse circulos basi æquales, sic si sit Ellipsis, patet quoque, omnes sectiones basi parallelas æquales esse Ellipses, quod ne in apertis immoremur per se manifestum præsupponimus, sicut, & omnem sectionem axi parallelã esse Quadratũ, vel Rectãgulũ, vel Rhombum, vel Rhomboidem in manifestis est. Igitur ea solummodo de Cylindri sectione afferemus, quæ minùs clara sunt.

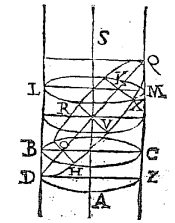
THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si sectio fiat in Cylindro, cuius bases sint circuli ab aliquo plano obliquo axi, sectio hæc Ellipsim representabit.

PRobatur. Nam illam proprietatem Ellipsium consequitur, quod habeat diametros inæquales, quos circulus non obtinet, & tamen, quod quadrata applicatarum ad diametrum sint inuicem in proportione illa, qua rectangula sub contiguis diametri portionibus comprehensa.

Nam quod sint duo inæquales diametri, patet: Quod VR sit diameter idem, qui basis Cylindri DZ, qui est circulus: at verò diameter QD longior erit, vtpote basis in rectangulo QDZ diametro circuli ZD.

Quod autem quadrata applicatarum ad diametrum QD quales sunt XK, & OH, se habeant ad inuicem, vt interceptarum diametri QD portionũ rectangula, nempe ex QK, & KD ad rectangulumex QO, & OD. Prob. Nam ex prop. 35. lib. 3. quadratum XK est æquale rectangulo ex MK, & KL; cùm in circulo sint ductæ; & idem dicas de quadrato OH, quod erit æquale rectangulo ex CO, & OB eò quòd sint quoque in circulo. At rectangula habent inuicem eam proportionem, quę ex lateribus componitur ex prop. 22. lib. 6. quare proportio rectanguli ex CO, & OB ad rectangulum MK, & KL componetur ex proportione CO ad MK, & OB ad KL. At proportio CO ad MK est eadem, quę QO ad QK ob parallelas MK, & CO in triangulo CQO: Et proportio OB ad KL est eadem, ac proportio OD ad KD. Eadem ergo erit proportio ex CO, & OB rectangulum ad MK, & KL rectangulum: quæ est rectanguli OD, & OQ ad rectangulum KQ, & KD, vtpote, quia hæc rectangula ex lineis dicentibus inuicem eandem proportionem sint composita: Sed illa rectangula, nempe ex CO, & OB ad rectangulum MK, & KL dicunt eam proportionem, quam quadratum HO ad quadratum XK, cùm istis rectangulis ostensa sint æqualia. Ergo etiam rectangulum ex OD, & OQ ad rectangulum ex QK, & KD, erit vt quadratum OH ad quadratum XK: quæ est proprietas Ellipsium ex propos. 6. tract. 24.



COROLLARIVM.

OMnes Ellipses parallelas in Cylindro esse æquales patet; quoniam habent æquales axes ob earum parallelismum.

Vnde etiam patet, quòd, & si bases cylindri sint ellipses, esse quoque sectionem obliquam axi Ellipsim, eò, quòd ex 6. Tract. 24. sit Ellipsium æqualiũ, vtpote: quod prò eadem computari possint BO, & OC rectangulum ad KM, & KL rectangulum, vt quadratum HO ad quadratum KX; quare etiam rectangulum ex OD, & OQ prædicta ratione erit ad rectangulum DK, & KQ, vt quadratum OH ad quadratum KX. Vnde ex 6. Tract. 24. DHXQ Ellipsis erit.



TRACTATVS XXVI.

DE PROIECTVRIS PARS PRIMA.

De Orthographia.

PRoiectionum vſus ampliſſimus ; tum horologijs , tum iſtrumentis mathematicis, V.g. Aſtrolabio, & Quadrantibus: tum Coſmographiæ in planum ad circulos longitudinis , & latitudinis proiciendos , & tandem , & maximè Architecturæ ad proicienda corporum , ſingularumque planicierum delineamenta perutilis . Et hinc proſpectiuæ, cùm priùs illud, quòd iuxta diminutionem ocularis proſpectus repreſentatur in planum extendere oporteat,& ipſa quoque corpora, ſuperficieſque in planum proicere.

EXPENSIO I.

Quid, & quotuplex ſit proiectio?

PRoiectionis nomen diuerſo ſenſu vſurpatur. Nã apud Vitruuiũ,quidquid extra ſoliditatẽ, vel columnarum , vel parietum profertur; vt cornices Cymacia Coronides, baſiumque crepidines proiectura appellatur,quòd extra ſoliditatem promineat, & quaſi proiectum fuerit . At hic proiectionem dicimus figuram quandam in plano deſcriptam, quę rem, ſiue planam, ſiue ſolidam imitatur à plano, vel omnino,vel ſui aliqua parte eleuatam . Aliqui verò , vt Aguilon lib.6. Optices exiſtimãt proiectionem pertinere ad Opticam, & eſſe Opticę partem: quod minimè concedimus: quare hęc quæſtio inſtituta eſt , vtpote huius per neceſſarię operationis naturam perſpectam habeamus.

DEFINITIO.

PRoiectio eſt ſuperficiei aliam ambientis in planum impreſſio.

Solet definiri proiectio, quod ſit *rei ſolidæ in planum tranſcriptio*. Verùm ſi hæc definitio, pro vt verba ſonant, intelligatur, omnino impoſſibilitatem inuoluit: ſiquidem res ſolida nunquam poteſt in planum tranſcribi ; ſed ſolùm illius ſingulæ ſuperficies: quibus ſuper planum deſcriptis; deinde res ipſa ſolida repreſentatur ; & licet hoc ſenſu intellecta, vera euadat; aptiùs tamen videtur definienda. *Impreſſio , aut veſtigium alicuius ſuperficiei in plano impreſſum,quæ aliam ſuperficiem ambiat, & ita illam aliquo modo repreſentet* ; Nam quòd propriè tranſcriptio non ſit patet,quia circulus à plano eleuatus in planũ proiectus per perpendiculares fit Ellipſis. Non poteſt autẽ dici per deſcriptionẽ Ellipſis trãſcriptus circulus; ea alterius ſpecici figura eſt, quis enim affirmabit tranſcriptum hominem in figura, aut in effigię alicuius bruti?

CONCLVSIO I. PROPOS. I.

Duplex eſt proiectio, alia vocatur Orthographia. Alia Stereographia.

PRobat. auctoritate Mathematicorum , qui ita ſufficienter diuiſiſſe proiectionem arbitrati ſunt,tum quia ſuperficies,quę aliam ambit duplex ſolùm eſſe poteſt, nempe ſibi, ſuiſque partibus parallela, vt priſma, & Cylindrus . Aut non parallela, ſed in vnum punctum contendens ad inſtar coni, aut Pyramidis ; Si ſuperficies illa ſit parallela ſibi, ſuiſque partibus , dicitur eius impreſſio facta in plano orthographia : ſi verò ſit ad modum pyramidis,vel coni in punctũque conueniat,dicitur Stereographia, Et hinc vtraque definietur.

DEFINITIO.

* ORthographia eſt ſuperficiei in aliam incidentis in planum orthogonalis impreſſio.

Per hoc enim dicitur orthographia, à verbo græco ὀρθός ; quod eſt recta , quod ſcilicet illa ſuperficies directè in planum incidat, & in eam imprimatur.

CONCLVSIO II. PROPOS. II.

* *Orthographia non naſcitur à diſtantia oculi infinita, quæ lineas viſuales rem viſam lambentes orthogonaliter in planum imprimat: Eſt con Franciſcũ Aguilon lib.6. opticor. in præfat.ad prop.16.*

PRobatur. Nam lineæ viſuales numquam ſunt parallelæ, ſed in oculum tandem coniunguntur. Dices . Quod data infinita diſtantia fierent parallelæ . Reſpond. negando . nam primò non eſt hæc diſtantia poſſibilis,& ideo fruſtratoria eſt ſuppoſitio, & abſurda; ſecundò etiam ſi daretur nulla fieret viſio , quę determinatos limites habet ; quia ſi infinitè diſtaret oculus, etiam infinita rei viſæ fieret diminutio ; ſed infinita diminutio in nihil terminat ; Ergo nihil videretur . Tandem neque ea diſtantia data lineæ eſſent parallelę; quia ſemper eſſent lineę viſuales ; quę eſſentialiter in oculo conueniunt. Neque dicas eſſe parallelas putatiuè,& iuxta eſtimationem ; Quia licet id eſſet verum quoad praxim, non tamen abſtractè, & ſpecata linearum viſualium naturã : Mathematici verò de abſtractis loquuntur , vt dictum eſt tract. 3. expenſ. 2.

DEFIITNIO III.

* *Stereographia eſt ſuperficiei in punctum terminantis, & aliquam aliam ſuperficiem ambientis impreſſio in plano.*

CONCLVSIO III. PROPOS. III.

Stereographia non naſcitur ab intuitu oculi, cuius lineæ viſuales tranſeuntes pèr corpus aliquod in ſubiecto aliquid deſcribant. Eſt contra Aguil. lib. 6. Optic. paſſim Stereographiam oculo tribuentem.

PRobatur primò . Quia, vt oſtendemus,ſi Deus dederit, cùm de proſpectiua agemus , Oculus debet eſſe remotus à rebus, quas videt, cum ex Ariſt. ſenſus ſuper ſenſibile non faciat ſenſũ. At verò Centrum Stereographum admittitur ſuper ipſam ſperam : vnde illud punctum non poteſt preſupponi pro pupilla , cum pupilla ſuper ſphęram nihil omnino videret.

Probatur ſecundò . Quia alio modo planum ſtereographum ſe habet, ac planum ; quo res viſę deſcribuntur , nam hoc interponitur inter centrum concurſus linearum coni, & rem deſcribendam : illud verò in planum collocatur poſt rem deſcribendam, vt ſit priùs centrum, deinde res deſcribenda, & tandem planum, in quo deſcribenda eſt .

Probatur tertiò . Manente re viſa, & oculo in eadem diſtantia,ſi planum mutetur res eodem modo oculis apparet,& tamen in ipſo plano lineæ à puncto, in quo eſt oculus, ductę aliam deſcriptionem faciunt priori, quæ cum res erat immota, imprimebatur diſſimilem . Ergo deſcriptio hæc non pendet ab oculo; ſed à ſubiecto,& à puncto, quod,ſiue ſit oculi, ſeu ſit quodcumque aliud punctum , à quo proiectrices proueniant , & pertingentes corpus deſcribendum in ſubiectum, in quo facienda eſt deſcriptio, ſe conferant .

Probatur quartò . Quia Stereographia repreſentat omnes ſuperficies corporis,tum ſuperiores, tum inferiores , & quaſcumque alias ; quod non facit oculus . Nam ſolum extrinſecum ambitum rei,quem lineę viſuales lambunt in ſubiecto retrò rem viſam manente intuetur deſcriptum .

CONCLVSIO IV. PROPOS. IV.

Tria Proiectionem immutant, ſitus rei , ſitus plani , & eorum diſtantia.

PRobatur de ſitu, tum rei, tum plani . Quia,vt patebit, diuerſimodè res ſituata, vel planum collocatum,deſcriptionem variat ſuperficierum,ita vt tranſferat, etiam, & in alteram ſpeciem lineas ſuperficies , angulosque commutet . Diſtantia quoq totius ſubiecti, licet in Orthographia nihil immutet; in Stereographia tamen valdè figuras alterat, & in diuerſam magnitudinem diducit.

DEFINITIO IV.

Linea, vel planum primigenium eſt illud: quòd repreſentandum proponitur .

DEFINITIO V.

Lineæ proiectrices, vel ſuperficies ſunt à terminis linea, vel plani primigenij diſcedentes,& in ſubiectum planum, in quod proiectura cadit; terminantes.

DEFINITIO VI.

Planum proiectorium,& illud: quod proiectionem recipit .

EXPENSIO II.

De Orthographia Partium ſuperficiei?

PRiùs agemus de orthographia , quam de ſtereographia,cùm ſit facilior, & vt eius ſternamus fundamenta,in primis de partibus ſuperficiei agemus; nempe de puncto, lineis, & angulis .

Præaſſumptum . Licet orthographia , etiam lineis plano non perpendicularibus : ſed cum eo certum, & ſemper æqualem angulum facientibus V.g. 30. Grad. poſſet operi demandari . Sic enim omnes lineę ſub eodem angulo incidentes in planum eſſent parallelę poſſet colligi ex Tr.22.de ſectionibus planorum .

Veruntamen hoc ſenſu orthographia non ſumitur : niſi aliquando neceſſitas poſtulet . Sed sẽper intelligitur fieri p perpendiculares ipſi plano ; tum quia certiores ſunt, tùm quia finis orthographię eſt loca corporum, ſituationeſque reperire,quę videntur eſſe illę,ad quæ corpora ſuo ipſo pondere feruntur ; pondus verò orthogonaliter in ſubiectum planum incidit .

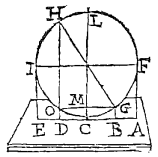
THEOR. I. PROP. V.

Linea parallela plano ſubiecto in lineam æqualem proicitur, non parallela, ſeu curua in lineam breuiorem ; perpendicularis in punctum.

PArs 1. Probatur. Lineę proiectorię EI, & AF proicientes lineam AF incidunt in planum AE

AE ex hypotheſi orthogonaliter; Ergo etiam ipſi lineæ AE, & conſequenter lineę plano parallelæ proiciendę FI; cùm linea proicienda parallela in prima parte propoſ. ponatur plano, & ideo lineę AE. Ideoq; angulos rectos efficiet ad F, & I. Vnde AI FE erit parallelogrammũ ex def. 25. tr. 3. ſiquidẽ in eodem plano lineę erunt ex propoſ. 2. tract. 22. Ergo ex propoſ. 33. lib. 1. Elem. lineę FI, & AE erunt æquales.

Probatur ſecunda pars. Et ſit linea proicienda GH obliqua plano EA. Cum GH, & GO, & OH, & BD ſe ſecent ex propoſ. 2. cit. erunt in eodem plano. Itaque ponatur; quòd GO faciat angulum rectum cùm Orthographicis V.g. OH; erit itaque GHO triangulum, cuius angulus O rectus, & ideo maior alijs; ideoque baſis ſubtenſa maiori angulo recto maior cruribus ex propoſ. 19. lib. 1. Elem. Perinde GH proicienda linea obliqua erit maior crure GO, quod eſt æquale lineę proiectæ BD.

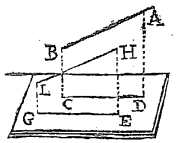


Tertia pars quoque patet. Quod proiciatur linea plano perpendicularis in punctum. Quia LM orthogonalis, ſed etiam orthographica LC tranſiens per ipſam orthogonalis eſt. Ergo cum ipſa eadem eſt: ſed omnis linea in planum incidens imprimit punctum: Ergo etiam LM in planum proiecta imprimet punctum C.

THEOR. II. PROPOS. VI.

Lineæ parallelæ, aut in eodem, aut in diuerſo plano, licet obliquæ ſint plano orthographo, in lineas parallelas proiectæ tranſeunt.

SInt lineæ AB, & HL, aut in eodem, aut diuerſo plano. Dico eas in parallelas, proiectas profundi CD, & EG. Nam proiectrices AD, & HE, ſicut, & CB & LG ex prop. 7. Tract. 22. ſunt parallelę, & AB, & HL ex hypotheſi. Ideoque ex propoſ. 13. eiuſdem Tract. etiam ſuperficies per eas ductæ AC, & HG erunt parallelæ: Ideoque ex propoſ. 14. eiuſdem Tract. ſectiones CD, & EG, vt à ſuperficiebus æquidiſtantibus factæ erunt parallelæ.

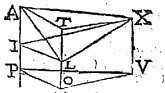


THEOR. III. PROP. VII.

* *Omnis angulus in triangulo omnibus cruribus parallelis plano orthographo proicitur in angulum æqualem: At cruribus non parallelis, & baſi parallela obtuſior proiectus erit.*

Ac cruribus non parallelis angulus proiectus erit acutior, qui lateri magis obliquo opponitur.

SIt AXT angulus proiciendus, & ſint crura omnia AX, & TX, & TA parallela plano POV. Dico angulum OVP proiectũ eſſe æqualem angulo AXT. Patet, quia cum ſint ſuperficies proiectrices VOXT, & XVAP ex Theſi perpendiculares plano orthographo POV, ideoq; etiã erunt plano parallelo AXT proiectẽdi anguli, ideoque angulus AXT, & PVO ex propoſ. 4. Cor. 2. tract. 22. erunt anguli inclinationis, qui ex 18. Tr. 22. vbique ſunt æquales quocumque loco inter plana inclinata accipiantur.



Probatur 2. pars, quia triangulum IXL habens baſim IL parallelã plano VOP magis accedet ad ſectionem XV ſuperficierum proiectricum, ergo maiorẽ angulũ cauſabit, quam ſi non accederet, ſed rectangulè ſe haberet, vt AXT ex prop. 22. tract. 22. ſed rectangulè ſe habens cum ſectione VX ex parte prima propoſ. h. angulum proiectum eundem effecit. Ergo IXL angulus baſi parallela, & cruribus obliquis maiorem angulum OVP efficiet.

Probatur 3. pars. Quia quò minus obliquè incidit angulus AXL eo maiorem angulum inclinationis cauſat ex prop. 22. tract. 22. Ergo quò magis obliquè intercipietur, ideſt quantò magis inclinabit ad proiectrices ſuperficies, eò erit angulus inclinationis planorum PVO acutior; ſed angulus inclinationis planorum eſt angulus proiectus, vt p. 1. h. pr. Ergo quò magis inclinabit eò faciet angulum proiectum acutiorem.

COROLLARIVM.

ELlicies tamen, quod ſi alterum crus anguli recti ſit parallelum plano etiam ſi obliquo altero crure; ſemper in angulum rectum proiet. Eo quia ſi XAT parallelo plano exiſtens ponatur angulus rectus linea XA incidet, ne dum in lineam TA normaliter. Verùm defin. 2. Tract. 22. in omnes ab A procedentes in ſuperficie TAOP exiſtentes, vt in AL: quare XAL angulus rectus ſicut XAT, ſed XAT facit angulũ rectũ proiectũ ex pr. 7. h. vtpote in plano parallelo ipſi plano orthographi CO, ergo, & XAL obliquuo crure proiectus fiet angulus rectus.

EXPENSIO III.

De proiectione ſuperficierum in genere.

VIſis partibus ſuperficierum, nempe lateribus, & lineis; modo ipſarum figurarum proiectiones ſunt inſpiciendæ.

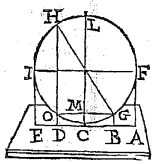
THEOR.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Omnis ſuperficies plano perpendicularis in planum proiecta transformatur in lineam æqualem lineæ parallelæ plano, quæ inter lineas protectorias intercipiatur.

SIt V. g. ſuperficies circulus LFMI, lineęque extremæ proiectrices, quę lambant extremos margines ſuperficiei ſint, FA, & IE, interque eas intercipiatur linea FI. Dico, quod AE æqualis ipſi FI eſt proiectio circuli.

Probatur primò, quod proiectio ſuperficiei perpendicularis, ſit linea; Omnis ſuperficiei ſectio linea eſt, propoſ. 3. tract. 22. Quamobrem ſuperficies proiectrix in plano Orthographico lineã imprimet. Sed cũ ſuperficie perpendiculari proicienda LFMI eſt eadem ſuperficies proiectrix. Ergo lineã tantùm imprimet. Quòd verò ſit eadem cum ſuperficie proicienda proiectrix ſuperficies, patet; quia cum ambæ ſint perpendiculares, & per eius extrema FI tranſeat neceſſariò vna ſuperficies ſit; quòd ſi non eſſet vna ſuperficies; ſuper ſuperficiem poſita ſuperficies faceret graſſitudinem, quod contrà conceptum ſuperficiei eſt.



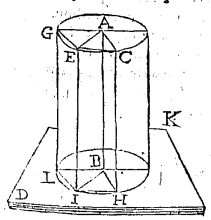
Probatur ſecunda pars. Nam illa erit longitudo lineę proiectæ AE, quæ latitudo ſuperficiei rectangula. Neque enim poteſt eſſe longior, quia excederet ſuperficiem proicientem; Ergo erit æqualis lineæ FI, quę inter proiectrices lineas AF, & EI orthogonaliter intercipitur.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Superficies parallela plano in æqualem, & eandem ſpecie ſuperficiem proicitur.

PRobatur, & exemplum ſit circulus, ex quo licebit argumentari ad quamcumque aliam figuram.

Sit itaque circulus CEG, cuius centrum A, perque eius circumferentiam CEG tranſeat ſuperficies proiectrix, quæ circa illum curuabitur, vt ſuperficies cylindrica, eique erit orthogonalis, cùm ſit perpendicularis plano KD, cui circulus ponitur parallelus, & ideò EI, CL, CH, & axis BA plano KD ex hypotheſi perpẽdiculares, erũt parallelæ ex 7. Tr. 22. & æquales. Ergo lineæ coniungẽtes AE, & BI ex poſ. 33. lib. 1. æquales erunt; ſic CA, & BH, ſic AG, BL, & ſic quælibet aliæ: ſed AG, AE, & AC ſuis extremis ſunt in circumferentia circuli; ergo etiam BH, BI, & BL.



Et idem erit de qualibet alia figura, v.g. ſi in circulo deſcriptũ ſit octangulum, aut triangulũ, aut etiam ſine circulo; vt patet in figura ACEG, & ei æquali BHIL, proiectæ in planum KD.

THEOR. III. PROPOS. X.

Partes cuiuſcumque ſuperficiei, vel laterum eius, quæ in lineam proiecta fuerint, in ipſa linea proiectionis diſtinguere.

SIt proicienda pars FG V g. circuli FLMI fig. pr. 5. vel 8. in planum; ducantur, à punctis terminantibus perpendiculares FA, & GB, eritque factum, quod deſideratur.

Patet, quia omnis linea, ſeu curua, ſeu recta orthogonalibus plano in lineam proicitur. Ergo etiam pars FG in lineam AB proiecta erit, cum FA, & GB proicientes ſint perpendiculares.

De partibus verò lineæ orthographo plano parallelę non eſt difficultas vlla, cùm ex propoſ 9. demonſtrauerimus OM, & CD eſſe æquales, vnde figura proiecta diuidenda erit iuxta æqualitatem partium figuræ primigeniæ.

EXPENSIO IV.

De ſuperficiebus rectilineis proijciendis.

VSque huc facilia tradidimus, & quaſi principia exhibuimus; nunc autem ipſam artem tractamus; & de proiectione ſuperficierum rectilinearum agimus; non quidem cum omnium earum latera ſunt parallela plano, neque; cum ipſa ſuperficies eſt ei perpendicularis; ſatis enim de hoc vniuerſaliter egimus antecedenti expenſ. ſed modo, aut cum tantùm vnicum, aut alterum latus ſuperficiei eſt plano parallelum, aut nullum, ſed omninò à paralleliſmo diſcrepat.

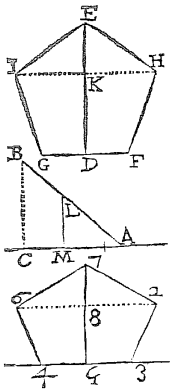
THEOR. I. PROPOS. XI.

* *Superficiem rectilineam, cuius vnum, vel alterum latus ſit parallelum plano orthographo, in planum proijcere dato angulo inclinationis.*

IAm notum eſt, quinam ſit hic angulus inclinationis ex def. 4. tract. 22. nempe linearũ, quæ cùm ſectione, quam imprimit in plano ſuperficies ei inclinans, angulos rectos faciũt, & licet multoties planum proiciendum planum orthographum non ſecet; adhuc tamen ſi extenderetur, cum ad illud inclinet, tandem ſecaret, eique ſectioni latus plano parallelum, parallelè ſe haberet ex Cor. 3. propoſ. 4. Tract. 22. Vel planum orthographicum accedere poſſet ad figuram proiciendam, & tangere ſecundùm latus parallelum. Huic ergo contactui, quem faceret, lineę perpendiculares

altera

altera in vno, alla verò in altero plano existentes, angulum inclinationis constituunt, quem angulum notum præsupponimus; Et sit angulus A, cuius latus AB insistat perpendiculariter lateri GF figuræ proiicienḍ FHGI nimirum lateri plano orthographo, ex hypothesi parallelo, & propterea sectioni, vt ex Cor. 3. prop. 4. tr 22. de intersect. diximus. Ideoque perpendicularis DE in fig erit eadem, ac AB in angulo inclinationis. Transferantur itaque anguli pentagoni proiiciendi I, & H, in lineam DE anguli inclinationis ope HK, & KI.



Deinde interualla DK, & ED transferantur in latus AB inclinationis; nimirum DK, in AL, & DE in AB, & à punctis L, & B deducantur perpendiculares ad AC existenti in plano orthographo, quæ incident in M, & C. Quia itaque FG ponitur parallela plano ex prop. 5. huius in plano delineata, & proiecta erit eiusdem mensuræ, nempe linea 34. & quia est quoq; 34. parallela lateri FG, ipsi linea AC anguli inclinationis erit perpendicularis, & omni lineę, quę sit parallela ipsi sectioni ex Coroll. 3. prop. 4. tract. 22. Linea verò 34. talis est, cùm sit, vt dixi parallela FG lateri proiiciendo sectioni parallelo, & prop. 9. Ideoque linea 57. erit eadem, ac AC. Puncta itaque M, & C in eam transferantur eodem interuallo ab A, & sint 8. & 7. & per 8. parallela agatur lateri 34. & sit 2.6. Et quia HK, & KI cùm sit paralla lateri FG, est etiã parallela plano ideo in figura proiecta, & genita erit ei æqualis 28, & 86. Coniungantur itaque puncta 2. 7. 6. 3. 4. rectis, & iam erit pentagonum proiectum.

Quod patet ex ipsa operatione, simul enim operando ipsam operationem ostendimus. Nam puncta H, & I à media DE non sunt immutata, quo ad distantiam, quia distantia eorum mensuratur per parallelam KI sectioni DB, & plano, ideoque ex propos. 5. huius manet eadem. At verò distantia à sectione FG, cum per DE mensuretur, quæ non est parallela plano, decurtata est iuxta prop. 5. eo decremento, quod à perpendicularibus LM, & BC exhibitum est in linea AC plano orthographo ducta & pũcta 134, & 6 sunt illa ipsa, quę lineę orthographicè LM, & BC imprimerent, cùm tum quoad latitudinem, tumquoad longitudinem, ac puncta M, & C distent à lineis, & 34. & 75.

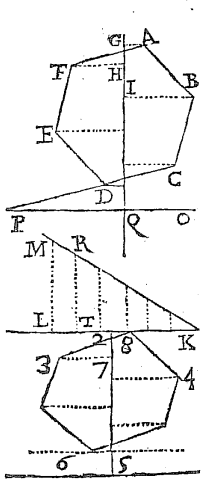
THEOR. II. PROPOS. XII.

* *Superficiem rectilineam, cuius nullum latus sit parallelum plano orthographo; dato angulo lateris figuræ cum sectione, & inclinationis plani proicere.*

SIt Sexagonum ABCD, & cęt. & angulus inclinationis datus K, & sectionis PO cum latere DC angulus, quòd enim nullum latus sexagoni sit plano parallelum, neque erit ipsi sectioni. Quoniam, si esset aliquod latus sectioni, esset etiam parallelum plano, vt ex Coroll. 2. prop. 4. de intersect.

Ducatur GQ perpendicularis sectioni, eique à singulis angulis ducantur perpendiculares AG, & FH, & BI, & cęt. quę cum sint perpendiculares GQ, erunt parallelæ sectioni, quæ quoque illi orthogonalis est; ideoque eorum longitudines erunt æquales longitudinibus linearum proiectarum ipsas exprimentium ex prop. 5. h.

Distantiæ verò angulorum normales in linea QG à sectione PO notentur punctis G, H, I, & cęt. Quia igitur QG, vtpote perpendicularis, sect est linea anguli inclinationis ex def. 4. tr 22. Ideo stabit loco lineæ KM, & ideo in linea KM à K transferenda sunt omnia interualla QG & QH, & QI, & cęt, quæ erunt KM, & KR, & cęt. Ductis itaque perpendicularibus ML. & RT, & cęt. habebimus omnes prędictas distantias angulorum à sectione; sed in linea KL, quę est in plano orthographo, nimirum KL, & KT, & reliquas perpendicularibus translatas. Ideoque ducta rursùs sectione 56 perpẽdicularem ei faciemus lineam 52, quæ exprimet alterum latus anguli sectionis KL, transferemusq; decurtatas angulorum distantias KL in 52, KT in 57, &c.



perque puncta 2, 7, & alia ducemus puncta 28, & 73, & similes: quæ expriment in figura transferenda lineas AG, & HF, & reliquas, quæ vt diximus sunt eiusdem longitudinis, cum sit parallelę plano orthographo, ac ipsę in plano proiectæ ipsarum vicarię; ideoque linea vicaria 28 erit æqualis lineę AG, & linea 73 lineę HF, & sic de reliquis: Igitur per omnia puncta terminantia ducantur rectæ, & illæ latera sexagoni proiecti efficient.

Probatumque id est in ipsa serie proiectionis; dum singularum operationum ratio reddita est.

COROLLARIVM.

IN omnibus figuris proiectis plano non parallelis angulos, lateraque variari, obliquioraque latera magis decurtari, vt ex propos. 5. huius potest colligi. Et angulos, quorum latera opposita magis obliqua sunt minores fieri; Quorum verò aliquod latus parallelum plano orthographico fieri maiores iuxta ostensa propos. 7.

EX-

EXPENSIO V.

De proiectione superficierum circularium.

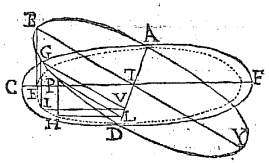
NVnc de curuilinearum superficierum proiectione sermo est, quæ immensos vsus habet, tum in Gnomonica, tum in Architectura, tum in Prospectiua. Ideoque sicut digna studio, sic non difficilis euadet, illis, qui precedentia legerint de sectionibus corporum, & maximè conorum.

THEOR. I. PROPOS. XIII.

Proiectus circulus obliquus plano orthographo Ellipsis est.

SIt circulus ABD inclinatus ad alium, seu circulum, seu quodcumque aliud planum ACD orthographum, & superficies proiectrix perpendicularis plano, quæ rectis BE, & GI, & PH exprimatur *hæc signabit in plano* ACD *Ellipsim* AED.

Trahantur ex punctis G, P perpendiculares diametro GV, & PL. Rursusque VI, & HL coniungentes puncta incidentię, tum proicientium, tum perpendicularium sectioni AD.



Probatur itaque propos.. Linearum VI, ad LH applicatarum quadrata dicunt ad inuicem eam proportionem, quam ex AV, & VD rectangulum ad rectangulum ex AL, & LD.

Quoniam VG est applicata ad diametrum. Vnde ex propos. 35. Elem. lib. 3. erit eius quadratum æquale rectangulo ex AV, & VD; Et tale erit ob eandem rationem quadratum LP æquale rectangulo ex LA, & LD ex eadem propos. 35. lib. 3. Elem. Sed cum triangula VGI, & LHP sint æquiangula ob latera parallela, quibus ambiuntur ex propos. 15. Tract. 22. & propos. 18. ita erit VG ad LP, vt VI ad LH, & ita quadratum ex VG ad quadratum ex PL, vt quadratũ ex VI ad quadratũ ex LH ex 26. l. 6. Ergo quadratum ex VI ad quadratũ LH habebit eam proportionem, quam rectangulum ex AV, & VD ad AL, & LD rectang. quæ est proprietas, tum Ellipsium, tum circulorum ex pr. 6. Tr. 34. sed circulus esse nequit, cum semidiam. ET sit minor, quam semidiameter circuli TD; Ergo erit Ellipsis circumferentia, quæ per puncta H, & T transit, & sic dicas de quibuscumque alijs punctis.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

* *Proiectura Ellipsis, aut circulus est, aut Ellipsis, si sit obliqua plano orthographo.*

SIt ABD Ellipsis in fig. prec. & supficies plectrix ab ipsius ambitu decidat in planũ subiectum; quæ exprimatur rectis GI, & PH, & quibuscumque similibus plano ACD perpendicularibus, ab eiusque incidentia formetur circumferentia AEID. Dico *hanc aut esse circulum, aut esse Ellipsim.*

* Probatur. Ductis, vt supra rectis VG, & LP, & perpendicularibus ad sectionem AD, quæ erunt parallelę, & VI, & LH coniungentes puncta incidentiæ V, I, & L, H simul, ob parallelismum triangulorum VGI, & LHP, quod in anteced. prop. ostensum est, VG est ad LP, vt VI ad LH. Sed quadratum ex VG ad quadratum ex LP, est vt rectangulum ex interceptis diametri portionibus AV, & VD ad rectangulum AL, & LD. Ergo etiam erit quadratum ex VI ad quadratum ex LH, vt rectangulum ex AV, & VD ad rectangulum ex AL, & LD: Ergo *permutando*, quoque erit quadratum ex VI ad rectangulum AV, & VD, vt quadratum LH ad rectangulum AL, & LD. Vel igitur quadratum ex VI dicit proportionem æqualitatis ad rectangulum ex AV, & VD, vel non. Si dicit proportionẽ æqualitatis. Ergo etiã quadratũ LH dicet proportionẽ æqualitatis ad rectãgulũ ex AL, & LD ex 12. l. 5. Quare AED erit circulus ex propos. 35. lib. 3. Elem. Vel non dicunt, & sic erit Ellipsis, cùm vt Ellipsis in se se redeat, & cõsequantur eius diametro AD applicatarũ quadrata eã proportionem, vt rectangula ex interceptis diametri portionibus, quam requirit propos. 6. Tract. 24. Si enim est VI quadratum ad rectangulum AV, & VD, vt quadratum LH ad rectangulum ex AL, & LD: Ergo *permutando* erit VI quadratum ad LH quadratum, vt rectangulum AV, & VD ad rectangulum AL, & LD: quæ est conditio ad Ellipses requisita.

Intellige verò propos. etiam si sectio, quam facit cum plano non sit diameter, nec maximus, nec minimus, sed aliquis intermedius.

THEOR. III. PROPOS. XV.

* *Situs, seu proiectio parabolæ parabola est.*

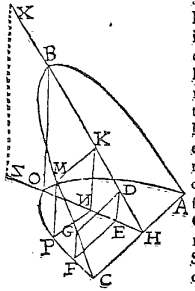
DEtur ABC parabola, & eius proiectio AOC. Dico *hanc proiectã figurã esse quoq; parabolã.*

Ducatur diameter BH orthogonalis sectioni AB, eiusq; proiectio OH facta à plectrice superficie BOH, & ab eo applicatę DG, KM, & à punctis D, & G, & K, & M earum extremis proiectrices descendant DE, & GF, sicut, & KN, & MP, connectanturque puncta incidentiæ E, F, sicut P, N proicientium, rectis, quę sint FE, & PN, & rursus per puncta E, & O recta EO.

Probatur progr. 1. Nam applicatę EF, & DG, vtpote quod DO sit parallela plano æquales sunt ex propos. 5. huius. Sic etiam applicatæ KM, & PN ob eandem rationem: Sed vt est DB ad KB diametri portiones, ita ex 5. pr. tr. 24. est quadratũ applicatarum DG ad quadratum KM, ergo etiam erit portio DB ad portionem KB, vt quadratum EF ad

quadratum NP. Quo supposito.

Progr. 2. vt est HB ad HO, ita est HD ad HE, quare etiam erit residuum DB ad EO, vt totum HB ad totum HO ad 22. l.5. Et pariter, vt HB ad HO, ita est HK ad HN, vnde erit etiam ex prop. 22. lib. 5. Elem. residuum KB ad residuum NO, vt totum HB ad totũ HO. Ergo ex 16. lib. 5 ita erit DB ad EO, vt KB ad NO, cùm eidem rationi, quę est inter HB, & HO sint eędem rationes. Quare *permutando* erit DB ad KB, vt EO ad NO: Sed vt DB ad KB, ita est quadratum ex DG ad quadratum ad KM, & quadratum ex EF ad quadratum ex NP ex progr. 1. Ergo vt EO ad NO interceptæ portiones, ita est quadratum EF ad quadratum NP, quæ est proprietas Parabolæ ex prop. 5. Tract. 24.



THEOR. IV. PROPOS. XVI.

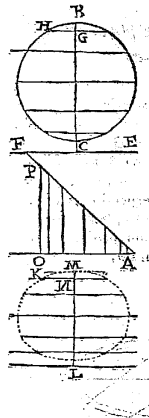
* *Proiectio Hyperbolæ Hyperbola est.*

SIt Hyperbola ABC in fig. superiori, cuius proiectura AOC. Diameter HB perpendicularis sectioni AC, transuersaq; XB. Applicatę verò DG, & KM. Deducaturque DE, & KN, & BO, nec non & MP, & GF proiectrices, & item XZ quæ extremum transuersæ diametri x proiciat in Z, ducaturque ZH, quę transibit per puncta O, N, E, vt ex propos. 10 huius constare poteſt, cum diameter tota, sit proiecta in HZ, eiusque partes sint in E, N, & O, cõnectantur tandem puncta FE, & PN. Cùm itaq; lineæ GD, & KM applicatæ sint parallelæ sectioni, erunt etiam parallelæ plano orthographo ex Coroll. prop. 4. Tract. 22. Ideoque ex propos. 5. h. EF, & NP erunt eis æquales.

Probatur. vt est rectangulum ex XD, & DB ad rectangulum ex XK, & KB, ita est quadratum DG ad quadratum KM: Sed superiori propos. argumentati sumus, vt est XH, ad HZ, ita est DH, ad HE, & HB ad HO, ablatis ergo proportionalibus HD, & HE; residua remanebunt proportionalia, ex prop. 22. lib. 5. Elem. ideoque erit DX ad EZ, ita DB ad EO, nempe in ea proportione, ac tota tota XH ad HZ, ideoque *permutando* erit DX ad DB, vt EZ ad EO, & eadem ratione, vt XK ad KB, sic ZN ad ON. Ergo etiam rectangula ex lateribus proportionalibus istis composita ex propos. 36. lib. 6. erunt proportionalia. Ideoque erit rectangulum XD, & DB ad rectangulum ZE, & OE, vt rectangulum XK, & KB ad rectangulum ZN, & NO: Quare *permutando*, vt rectangulum XD, & DB ad rectangulum XK, & KB. Ita rectangulum ZE, & OB ad rectangulum ZN, & NO. Sed, vt est rectangulum XD, & DB ad rectangulum XK, & KB, ita quadratum in Hyperbola ex applicatis DG ad quadratum KM, & ideo, vt quadratum ex EF æqualis, vt suprà dictum est ipsi DG ad quadratum ex NP æquali ipsi KM. Igitur ex 16. lib. 5. erit, vt rectangulum ZE, & EO ad rectangulum ex ZN, & NO, tale quadratum EF ad quadratum PN, quæ est proprietas Hyperbolarum, vt ex propos. 6. Tract. 24.

COROLLARIVM I.

HInc ellicies modum proiciendi omnes figuras flexas regulares: nempe Circulos, Ellipses, Parabolas, Hyperbolas. Sufficit enim proiicere diametrum sectioni perpendicularem, & bifim parallelam sectioni, seu ipsam sectionem V.g. in fig. pr. 13. h. AD, & TB, vel in fig. pr. 14. si sit parabola AC, & HB: Si sit hyperbola AC, & HB, & BX. Data enim basi, & angulo, & diametro iam pr. 55. Tract. 24. docuimus describere, quamlibet ex illis figuris. Sicut etiam propos. 57 data gemina diametro intercepta in Ellipsi sectionis describemus proiecturam, & poterimus quoque vti aliis modis prædictis, tum ex Tractat. 24. tum ijs, quibus functi sumus in describendo figuras rectilineas dummodò plura puncta inueniatur, & per extrema flexa æquali manu ducatur; vt potes videre in figura hic appositâ, in quâ dato angulo inclinationis OAP, & diametro CB perpendiculari sectioni FE ductis à partibus circumferentiæ, vtlibet V.g. 5. parallelis sectioni, & ideo plano orthographo, & eorum distantijs in AP translatis, & deinde proijcietibus lineis in AO ductis, quæ est in plano orthographo, & distantis OA, & cet. in ML, & LN translatis ductisque perpendicularibus ipsi LN, vt NK, & cęt. & tandè longitudinibus GH in NK, & aliarũ applicatarum translatis in alias parallelas ipsi NK dabunt puncta, perque æquabili manu flexa linea deducta exhibebit Ellipsim, in quam transfunditur circulus, eo situ, quam exhibet angulus A, & planũ AP, in quo est circulus super planum OA pendulus; plura verò de iis agemus, cum de superficiebus corporum proiciendis, & in planitiem redigendis sermo erit.



COROLLARIVM II.

ELlicere hinc potes Cylindros parabolicos, & Hyperbolicos, qui superficie plana constant, & altera parabolica, seu Hyperbolica, vt figura ABC pr. 15. h. satis representat sectiones esse hyperbolas, seu parabolas: quod cuidens est ex præced. nam superficies proiectrix est eadem, quæ Cylindri Parabolici, seu Hyperbolici.

COROLLARIVM III.

HInc deducitur, quod quocumque situ planum Horthographum secet parabolicum, seu Hyperbolicum primigenium, semper figura eiusdem speciei describetur; quia illa sectio planorum poterit esse applicata in aliquo diametro secundaria: vnde semper omnes aliæ applicatæ ei erunt parallelæ, & eædem demonstrationes valebunt:

EXPEN-

EXPENSIO VI.

De speciali proiectura circuli in ordine ad sphæram proiciendam.

IN proiectione circulorum sphærę scimus principalem aliquando diametrum proiicendi circuli, & punctum contactus alicuius paralleli cum illo, & Ellipsim illius circuli representatiuam volumus exarare. Quapropter hanc Expens. specialiter ordinamus ad id rectè peragendum.

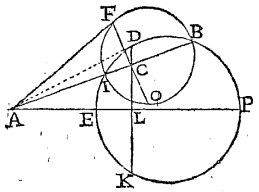
LEMMA PROPOS. XVII.

Si aliqua in circulo sit secta, vt pars maior sit ad minorem, vt tota cum adiecta aliqua ad adiectam extra circulum, etiam alia ab eius extremo in circulum cadens talis erit, si à puncto sectionis illius perpendicularis in hanc demittatur. Nam ita segmentum maius ab hac perpendiculari factum erit ad minus, vt tota cum adiuncta est ad adiunctam extra circulum remanentem.

SIt secans AB ita diuisa in C, vt BC ad CI pars maior ad minorem intra circulum existentes; sic tota BA ad partem exteriorem IA. Quod fiet ex tract. 15. propos. 23 si super BI fiat circulus, & ducatur AF tangens, & à contactu ducatur perpendicularis CF. Nam vt ibi demonstratur BC erit ad CI, vt BA ad IA. Si itaque secans BA talis sit, & ducatur AP per centrum, & à puncto C perpendicularis cadat in L. Dico, quod erit quoque PL maior ad LE minorem internæ partes, vt tota PA ad segmentum exterius EA.

Progreſſ. 1. Probatur. Nam producta LC in D, & à D ducta punctata DA, hæc erit, vt ostẽdam contingens. Vnde ex cit. Lemmate ita erit PL ad LE, vt PA ad EA.

Quod verò DA tangens sit ita probatur.



Quadratum ex CF, & CO æquale est rectangulo ex BC. & CI: Ideoque rectangulo sibi æquali ex 35. lib. 3. Eucl. DC, & CK. Huic ergo rectangulo ex CD, & CK comite ei quadrato CL æquatur CF, & CO quadratum cum eodem quadratò CL.

Progreſſ. 2. Rectangulo verò ex CD, & CK addito quadrato CL æquatur quadratum LD ex 7. lib. 2. Elem. Ideoque CF, & CO quadratum cum quadrato CL erit æquale quadrato LD.

Progreſſ. 3. Quadrata LA cum CL sunt æqualia quadrato CA ex 11. lib. 2. Elem. & hoc CA cum CF quadrato sunt æqualia quadrato AF. Ergo quadratum CF, & CO cum quadrato CL, & quadrato LA sunt æqualia quadrato FA.

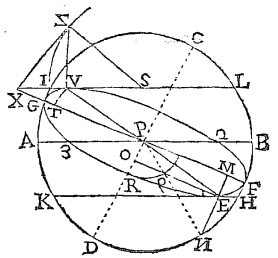
Progreſſ. 4. Pone loco duorum quadrati LC, & quadrati CF, & CO qua ſratũ LD ex prog. 2. eis æquale, eritq; quadratum FA æquale quadratis LD, & LA.

Sed ex 11. lib 2. Elem. istis eisdem est æquale quadratum DA. Ergo hæc duo quadrata inuicem erunt æqualia: Sed quadratum FA est æquale ex 36. lib. 3. Elem. rectangulo ex BA, & IA. Ergo erit etiam æqualequadratum DA: Quare ex prop. 37. lib. 7. DA tangens erit.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Dato situ diametri, & puncto circumferentiæ proiecto in aliqua proiectione sphæræ proiectionem circuli, qui per illud incedit inuenire.

DEtur proiectio alicuius sphæræ, vel circulorum in ea V.g. BCAD paralleli plano orthographo, BA perpendiculari maximo, LI, & FK perpendicularibus parallelis, & cęt. In hac autem proiectione sit notus diameter circuli maximi FG, & punctum E, in quo tangit parallelum HK, & huius circuli proiecturam inuenire oporteat.



Ab E dato puncto descendat ad diametrum FG perpendicularis EM, & prolungetur in N circuli punctum, & à puncto N linea NP ad centrum rendat; Rursusque à puncto E parallela diametro FG ducatur EO, egabitque primo ductam in Q. Itaq; linea PQ erit æqualis semidiametro minori Ellipsis representantis circulum per punctum E incedentem.

Probatur. Nam Tr. 24 Conic Probl. 2. Prog. 2. propos. 71. Ita est in Ellipsi alicuius circuli diameter maior DP ad minorem RP, vt applicata circulo NM ad applicatam Ellipsis EM, sed vt NM ad NE: Ita ex 2. lib. 6. Eucl. NP ad QP, ideoque ablatis NE, & NQ ex 19. lib. 5. Eu vel ex 2. lib 6. erit NM ad EM, vt NP, vel æqualis DP ad QP, vel æqualem RD. Cum itaque obtineamus DP diametrum maiorem, & RP minorem, Ellipsim poterimus describere, trãseuntem per E applicatę ME extremum ex dictis de Ellipsibus Exp. 19. Tract. 24. Conic. quæ per G, E, F quoque transeat.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Datis duobus diametris Ellipſim in plano circuli repreſentatiuam exhibere.

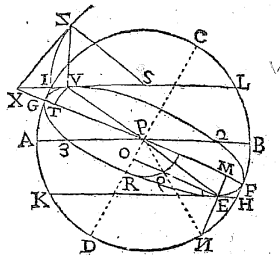
SInt dati duo diametri proiecti FG, & 23. Dico per illos duos diametros decurtatos Ellipſim nos poſſe deſcribere, & hoc docuimus propoſ. 55. Tract. 24. Nam hic datur baſis 23 diameter GF, & angulus ab iſtis factus 2 PM. Vnde Ellipſim iuxta doctrinam illius Problem. delineabimus.

PROBL. III. PROPOS. XX.

Dato puncto tantùm in aliqua ſphæræ proiectura, per quod alicuius circuli tranſeat circumferentia, ipſam Ellipſim circuli expreſſiuam in plano conſignare.

SIt datum punctum V in parallelo proiecto LI, oporteatque reperire diametri maioris ſitum, ex quò deinde cætera conficiantur, vt priùs.

Fiat, vt LV ad VI ita tota LX ad IX adiunctam, quod fiet ex tract 15. prop. 22. ſi erigatur perpendicularis VZ; quæ ſecet ſemicirculũ LZI, & ductâ ZS à Z, tangens ZX ei rectãgula ducatur, & LI producatur in X: Nam ex prop. 22. citati tractatus 15. Ita erit LX ad IX, vt LV ad VI. A puncto deinde X ducatur per centrum P recta FX. Nam FG erit axis maior Ellipſis.



Probatur ex prop. 13. Tract. 24. Nam ducta VT applicata habebit eam conditionem, quę requiritur ad diametrum, & ad tangentem VX, erit enim FX ad GX, vt FT ad TG. Vnde FG erit diameter VX tangens; & VT applicata: Quod autem tota XF ſit ad partem exteriorem GX, vt pars interna maior FT eſt ad minorem TG interiorem.

Patet ex Lemmate 1. huius. Quod ſi LV ad VI, ſic vt LX tota ad adiunctam IX; quod etiam talis erit FT intercepta ad TG, vt FX tota diameter cum adiuncta ad GX adiunctam, quod TV cadat ab V vbi perpẽdicularis ZV cadit, & FX ab extremo X ducta, quod eſt lineæ diuiſæ, vt LV ſit ad VI, vt LX ad XI,

TRACTATVS XXVI.

PARS SECVNDA.

De Stereographia.

QVamuis Stereographia poſſit in opus redigi puncto concurſus lineãrum proicientium à re proiecta diſtante, ſicut, & ſupra Orthographia per lineas plano non rectangulas exerceri, nihilominùs, quia Stereographia ſpecialiter ſphæræ circulis proiiciendis inſtituta eſt, & in hunc ſcopum præcipuum ante omnia collimat; ideo concurſus linearum proicientium in ſuperficie ipſius ſphæræ in primis ſumitur. Quamuis etiam remotum ab ipſa re proiecta ſumatur, cum de alijs rebus proiiciendis, & etiam de ipſa ſphæra, non tamen in ordine ad cęleſtes motus, agitur.

EXPENSIO I.

De proiectura lineæ.

HIc itaque lineas in circulo præcipuè conſiderabimus, vtpote, quod Stereographia ſit ad proiectionem corporis ſphærici in ordine ad cęleſtem ſphæram deſtinata, & quia corpus cęleſte luminoſum circa ſphærã ſe voluens, eiuſq; circulos radijs incurrens tali modo vmbras eorũ in planum, profunderet; hinc Stereographia inuenta, & ad id deſtinata; vt cæleſtes corporum opacorum proiectiones à luce effectas imitetur, cuius hic prima principia iactamus.

PRIN-

PRINCIPIVM.

IBi vniuſcuiuſque rei proiectio eſt, vbi lineæ proiectrices à puncto proiectionis obuenientes, & margines rei lambentes in planum incidunt.

Sic CD eſt proiectio lineę AB, quia lineę CI, & DI proiectrices extrema B, & A lambentes in planum CD incidunt, & ibi eius ſitum determinant reſpectu puncti A, & B in fig. pr. 1. ſeq.

DEFINITIO I.

PVnctum proiectionis dicitur, ad quod omnes lineæ extrema rei proiiciendæ lambentes concurrunt.

DEFINITIO II.

LIneæ verò proiectrices dicuntur illæ, quæ ab hoc puncto diſcedentes, extremaque rei proiiciendæ lambentes in planum cadunt.

Taleſque ſunt IC, & ID.

DEFINITIO III.

PLanum Stereographum eſt illud, quod diuidens ſphæram bifariam omnes lineas proiectrices terminat.

Poterat quidem planum Stereographum ſupponi ſphæræ, ſed cum ſtereographia inſtituta ſit ad nobis exhibendas cęleſtium circulorum vmbras, & nos ſimus in centro, planaque, quæ apud nos ſunt, aut per centrum tranſeunt, aut ei proxima ſunt inſenſibiliter reſpectu immenſitatis ſphęrarum, hinc eſt, quòd planum ſtereographum per centrum agatur, & in eo circulus maximus ſphæræ reperiatur.

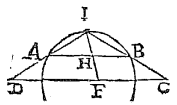
THEOR. I. PROP. I.

Linea plano Stereographo parallela in lineam maiorem proicitur, ſed partibus proportionalibus correſpondentem.

SIt linea in ſphæra AB, & à puncto I deſcendant lineæ proiectrices CI, & ID, quæ intercipiant lineam proiectam CFD in plano Stereographo exiſtentem.

Dico I hanc eſſe maiorem primigenia AB.

Patet. Quia eſt AB ad CD ob paralleliſmum linearum, vt BI ad CI. Sed CI eſt longior quam BI: Ergo etiam CD erit maior, quàm AB ex propoſ. 12. lib. 5. Elem.

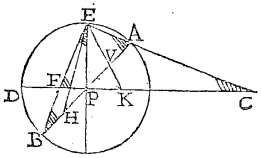


Probatur ſecunda pars. Nam ducta IF. Dico, quòd vt partes lineæ primigeniæ AH ad HB, ita ſe habebit, DF ad FC, quod probauimus propoſ. 4. Elem. in Coroll. 2.

THEOR. II. PROP. II.

Linea obliquata planò Stereographo in lineam proicitur maiorem.

*PRobatur. Nam Triangula CEF, & AEB ſunt æangula: ſiquidem in triangulis FPE, & EBA nigri apud E, & B anguli æquantur ob radios ſubtenſos æquales, angulus totus AEB apud E, & FPE apud P recti, & ideo æquales, quamobrem etiam reliqui A, & F. In triangulo ergo FEC habemus angulum F nigrum æqualem angulo A nigro trianguli BEA, angulus verò AEB rectus cũmunis, reliquus ergo C æquatur angulo B ex 17. l. 1. El. Cùm ergo triãgula ſint æquiangula erunt ſimilia, & latus EF trianguli FEC ſit maius latere EA trianguli BEA erit etiam baſis FC linea proiecta maior quam primigenia BA.



COROLLARIVM.

HInc dignoſcitur, quo pacto, ne dum diameter, ſed etiam ſingulæ eius partes in planum ſtereographum proiiciantur: ſufficit enim dato angulo inclinationis APC deducere lineas proiectrices à centro E radioſo per partes A, V, P, Hipſius in ipſum planum. Nam ipſę ſuis extremitatibus notabunt partes C, K, P, in CF plano proiectas.

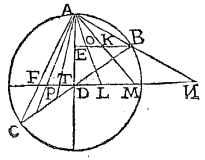
Sic, ſi dentur proiectæ partes ad partes primitiuas reuocare poteris lineas proiectrices deducendo ad centrum ipſarum.

THEOR. III. PROPOS. III.

** Omnes Stereographicæ lineæ cuiuſcumque partes augentur muſicâ proportione.*

LOquimur de lineis. Ne dum ab aliquo puncto circuli per æquales partes diametri ductis: ſed quibuſcumque in qualibet diſtantia, & qualibet lineâ ductis; dummodo per illius partes æquales à puncto dato trahantur.

* Sit A punctum datum, & in lineâ BC partes æquales quæcunque, & per eas ductæ AP. & AT, & cæt. Dico eas eſſe in proportione muſicâ, & DF eſſe ad DT, vt differentia PF ad differentiam TP.



* Probatur ex prop. 11. tract. 16. de progr. Nam DF incidit in triangula baſium æqualium quæ, ſunt partes in linea CD. Ergo incidentes FD partes FD, PD, & TD decreſcent in proportione muſicâ. Sic dicas de partibus ND, & DM, & LD. Nem BE parallela

ND

ND incidit in triangula basium æqualium lineę DB. Ergo in proportione Harmonicâ BE erit ad GE, vt differentia BK ad KO differentiam. Sed ob parallelas EB & DN ex 4 lib.6. vt est ND ad LD, sic ED ad FO, & vt EF ad FO, sic est BK ad KO, vt autem BK ad KO, sic MN ad ML: Ergo ex 16. lib 5. Elem. vt ND ad ED; sic differentia NM ad differentiam ML.

EXPENSIO II.

De proiectura circuli.

POtest duobus modis proici circulus, vel in ordine ad sphæram proiciendam, de qua re multa apud Aguilonium reperies, vel in ordine ad quemcumque circulum proiciendum; de proiectione prima hic agemus de alia expens. sequenti.

THEOR. I. PROPOS. IV.

Circulus perpendicularis in rectam proicitur lineam indefinitam.

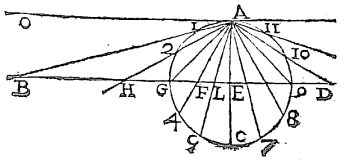
PRobatur. Nam, quòd sit linea, iam id demonstrauimus de omni proiectura perpendiculari. Sed quod sit linea nullis concluſa terminis ita ostenditur vtendo schemate prop. seq.

Sit centrum proiectionis A, & debeat deduci à puncto A linea proiectrix, & tangat extremum marginem circuli AGC 9. ad hoc, vt totum circulũ exprimat, aut cum proiectrice AC faciet angulum rectum. aut minus recto. Si faciet minus recto, vt AB ex prop. 18. lib. 3. secabit ipsum circulum, & pars circuli AI, vel AII extra remanebit: Debebit itaque ipsi AC esse perpendicularem, & contingere circulum in A, vt AO; Ergo erit parallela plano orthographo. Quare numquam illud secabit. Ergo linea expressiua circuli in plano otthographo numquam a linea proiectrice terminabitur, cum ei parallela sit. Erit ergo indefinita.

PROBL. I. PROPOS. V.

Perpendicularem proiecturam circuli, & partium eius in plano transcribere.

DVcto plano DO transeũte per cẽtrum E circuli proiciendi AGC 9, & situato puncto proiectionis A, vtlibet: sed consuetè ad extremum lineæ CA plano orthographo DB perpendicularis, diuidatur in 12. partes V. g. transeantque per singulas lineę proiectrices à puncto A. V.g. AB per partis primæ extremum 1; sic AH per extremam partis 2. & sic de cæteris. Partes namque HB, & GH, & GF, & cæt. erunt in plano partes circuli perpendicularis ipsi plano proiectæ.



Probatur. Nam quoad ipsius circuli proiecturam iam ex præced. propos. visum est esse lineam indefinitam EB.

Quod verò partes proiectas ostenditur. Quoniam lineis rem proiciendam extrema stringentibus decernitur: Tales autem sunt partes proiectæ HB, & HG, & cæt. Siquidem lineæ proiectrices eas determinantes transeunt per extrema partium circuli 1.2. AI, & 2.G, & cęt. in quas dispescitur,

THEOR. II. PROPOS. VI.

Circuli partes æquales in partes inæquales proiiciuntur, quarum illæ maiores, quæ ad perpendicularem magis accedant.

DIco in partibus proiectis EL, & LF esse maiorem LF; quàm EL; quia magis à perpendiculari EA abscedat.

Probatur; Quia anguli, vtpote æqualibus peripherijs insistentes CA 5. & 5 A 4. sunt equales, erit angulus CA 4 diuisus in duas partes; Quaerè ex propos. 3. Eucl. vt est AF ad EA, ita erit LF ad LE: Sed AF est maior, quam AE, vtpote basis anguli recto subtensa: Ergo etiam FL maior erit, quàm LE, & ita de cæteris.

THEOR. III. PROP. VII.

* *Tres partes proiectæ circuli in lineam, quæ æquali numero partium interpositarum distant à quadrante proiecto dicum proportionem Geometricam continuam, & diameter semper est media proportionalis.*

SIt quadrans proiectum in EB linea. Dico AO EE ad EG, ita esse vt EG ad EH.

* Probatur ex prop.7. de angulis Tr.19. Nam EG æquatur EA; anguli verò FAG, & GAH sunt equales cum æqualibus peripherijs initantur. Ergo ita erit EF ad EG, vt EG ad EH, & eadem ratione EL erit ed EG, vt EG ad EB, Quare diameter EG erit semper media proportionalis.

COROLLARIVM.

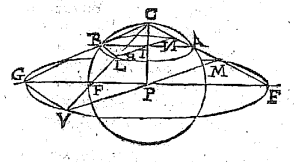
*HInc patet omnia rectangula EL, & EB, sicut, & EF, & EH, & sic de alijs esse æqualia; quoniam æquantur quadrato EG, quod EG sit ex propos. 19. lib.6. Elem. intereas semper eadem media proportionalis.

THEOR. IV. PROPOS. VIII.

Circulus parallelus plano Stereographo proiectus est circulus maior: centrumq; in eadem proiectrice linea, cùm vero centro est; Partes quoque maiores quidem; sed proportionales.

SIt in sphęra ACB, circulus ALB parallelus Stereographo plano EG. Dico hunc circulum in circulum maiorem FVG profundi.

Quod patet ex dictis in Conicis, cum enim omnes lineæ à puncto proiectionis lambentes circuli circumferẽtiam conum constituant ex ijsdem, clarum est, quòd, si productæ alio plano parallelo, vt est Stereographum secentur in eo circulum descripturas. Coni enim, cuius basis circulus ex propos.2. Tract.24. omnis sectio parallela basi circulus est.



Dico 2. Centrum circuli proiecti P cum centro circuli proiciendi I in eandem lineam PC proiectricem incidere. Quot patet ex prop.2.tract.25. Cor. Nã solus conus scalenus habet duos axes hic verò conus rectus est, vnde habebit vnicum axem: axis autem ex def. per centra transit basium.

Probatur tertia pars, quod partes circuli proiecti sint quoque proportionales primitiuo.

Cum planum stereographum ponatur parallelum, plano circuli primitiui, si GCV planum illa secet sectiones BL, & GV erunt parallelæ ex prop.16. tract.22. Quare erit, vt CL ad LB; ita CV ad VG in triangulo CVG. Propterea que *permutando* erit, vt CL ad CV, sic LB ad VG. Sed CL ad CV, sic est IL ad PV; Ergo vt diameter IL ad diametrum PV, sic LB subtensa ad VG subtensam: quare etiam arcus eas subtendes toti circumferentiæ erunt proportionales ex propos.39.lib.6. Elem.

Patet verò esse maiores, quia CL est ad BL, vt CV ad VG, sed maior est CV, quam VG: ergo ex 12.lib.5. etiam GV subtensa, quàm BL: Quare etiam maior erit ex propos.6.lib.36 peripheria GV, quam BL.

COROLLARIVM.

HInc facilè patebit modus, quò circulus parallelus plano stereographo imprimatur.

Nam ex prædictis Theor. 1. expens.6. sufficiet inueniſse diametri ipsius longitudinem, & inde centrum patebit, si diuidatur bifariam.

Partes quoque singulæ proicientur, si circulus proiectus in tot partes æquales diuidatur, in quot primigenius diuisus est. Aut eodem centro descripto circulo primitiuo, per singulas eius partes ad ambitum proiectl radij transeant; qui in circulo proiecto notent primigenij singulas partes.

THEOR. V. PROPOS. IX.

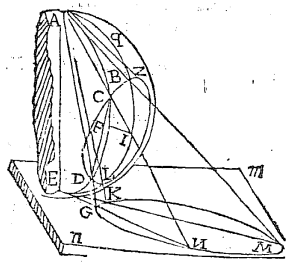
Circulus plano Stereographo obliquus proicitur in circulum maiorem; sed cuius centrum cum centro primitiui in eadem linea proiectrice non sit.

IAm supra dictum est Tract. præc. propos.2, quòd si planum secet subcontrariè conum; cuius basis circulus sit; etiam sectio ipsa circulus erit.

Sit itaque circulus in sphęra quicumque ZBDL & lineę proiectrices eius peripheriam vndique lambentes, vt est BA, & CA, & LA, & DA, & cęt. conueniant in A centro proiectionis. Dico, quòd si continuentur vsque ad planum Stereographum m n, cui EA perpendicularis est: quod planum secabit superficiem conicam, quam integrant, subcontrariè, & ideò quod peripheria MNGK erit circuli ex propos.2. tract.25.

Probatur. Illa enim est sectio subcontraria, cum planum secans cum superficie coni facit angulos æquales angulis, quos facit cùm eadem superficie, basis primitiua coni: sed planum MN facit cum superficie protensa coni eosdem angulos, quos facit circulus planus ZBDL basis, cuius vertex A; ergo secat subcontrariè.

Ad id autem probandum elligantur duo puncta quæcumque. Erit enim par ratio de istis, & de omnibus alijs V. g. C, & D in circulo sphæræ, & à vertice A per D agatur linea vsque ad planum in G, & sit AG descripta super planum circuli ACDE, ideoque fiat de puncto C ab A vertice agendo lineam AC descriptam super semicirculum ACDE, & productum vsque dum tangat planum m n in N. Ita quod concipiatur superficies plana semicirculi ACDE prolungata, & peruenire vsque ad N, & imprimere suæ sectionis vestigium in plano lineam NE. Transibitque per G, cum sit ADG recta in eodem semicirculi extensi ACDE plano. Ducesque in eodem plano CD rectam communis sectio plani circuli ZCL minoris basis coni, & semicirculi ACDE.



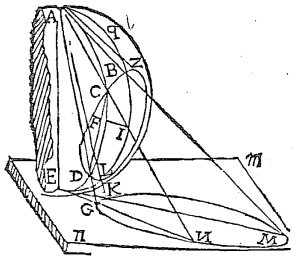
Probandum est itaque DC plano basis extensam eosdem angulos facere cum lineis coni NCA, & ADG, ac cum ijsdem facit NG linea plani stereographi.

Angulus itaque CAE apud A cum sit angulus ad circumferentiam insistit arcui CFDE: sic angulus apud D nimirum CDA pariter ad circumferentiam in D substernitur reliquo arcui CA. Quapropter erit anguli apud A complementum vsque ad semicirculum ECA, cumque anguli ad circumferentiam sint subdupli angulorum ad centrum, ideo semicirculus ECA. vt eorum mensura centralis quadrans erit: nam dimidium arcus EDC esset mensura anguli equalis ad centrum, & dimidium arcus CA esset anguli ad centrum mensura æqualis reliquo angulo apud D. Ideoque simul angulus CAE, & CDA æquant angulum quadrantis. Nempe rectum, & CDA est complementum alterius CAE.

Sed huius quoque anguli CAE est complementum angulus N rectilineus. Quoniam angulus NEA rectus est ex hypothesi in triangulo NAE.

Ergo

Ergo reliqui anguli erunt æquales vni recto, cùm omnes trianguli anguli ex propoſ.17. lib.1. Elem. tantùm duobus rectis æquales ſint: Quare eiuſdem anguli CAE erit angulus N complementum, vt CDA. Ergo erit æqualis angulo CDA. Quoniã verò angulus CAD in triangulo CAD deſeruit etiam triangulo NAG, & angulus N oſtenſus eſt æqualis angulo CDA; reliquus quoque ACD erit æqualis reliquo NGA ex 17. lib.1. Cor.2.



Idem autem argumentum contexes de quibuſcumque alijs angulis. Quare ſectio plani ſtereographi erit ſubcontraria: vnde MNGK circulus erit.

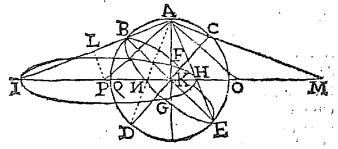
Probatur ſecunda pars. Quoniam ſubcontraria ſectione circuli non ſe interſecant per centra ex Coroll. propoſ.2. Tract.25. nempe eorum ſectio per centra vtriuſque non tranſit. Vnde linea ab A tranſiens per centrum I non tranſibit per centrum circuli proiecti NMGK.

PROBL. II. PROPOS. X.

Circulum obliquum in planum ſtereographicè proijcere, poloſque eius, & centrum aſſignare.

INuenienda priùs eſt pars circuli centro A remotiſſima, parſque propinquiſſima, ſi non ſit cognita. Id verò fiet ducendo per puncta C, & D polos circuli dati circulum maximum CABDE. Namq; ex prop.22. 3. partis ſphæricis circulus arcum BA habebit, qui inter omnes, qui ad circumferentiam obliqui circuli FBGD duci poſſunt breuiſſimus erit, & ACE, qui erit maximus, & deſignabit diſtantiam maximam in E, & minimam in B à centro proiectionis A.

Tranſeant itaque per inuenta puncta E, & B lineæ proiectrices AE, & AB, & dabunt H, & I puncta, per quæ circulus proiectus debet incedere, & eius diametrum HI.



Secundo. Bifariam diuidatur HI, & centrum in P circuli proiecti obtinebimus.

Tertio. Tranſeant proiectrices per polos C, & D, & polos in plano proiectos cõſequemur M, & N. Itaq; ſeorſim circulus OQ ipſius ſphæræ deſcribatur; ſæpe enim in omni proiectione hic circulus præſupponitur; cùm ſit ſectio ipſius ſphæræ, cùm plano ſtereographo, eo quia planum ſtereographum ex definitione ſecet ſphæram bifariam. Sitque I n 2 m; aſſumaturq; diſtãtia O H; & ſit 13. deinde diſtantia PH, & ſit 3 2, centro itaque 2 interuallo 2 3 deſcribatur circulus 3 5; eritque circulus proiectus. Deinde OM ab I in 7, & diſtantia NH, & transferatur ab 3 in 6. eruntque poli 7. & 6. circuli proiecti 3 2. vt vides in fig.pr.12.h.

* Poteſt etiam reperiri centrum circuli independenter à lineis AH, & AI circuli proiectricibus ſi fiat angulus trianguli EAK ad A alteri angulo trianguli LAP ducendo AP ad A, æqualis. Nam P erit centrum circuli; Quia enim angulus E trianguli AEK æqualis eſt angulo ad A eiuſdem trianguli ob æqualitatem laterum EK, & KA, & eſt etiam æqualis angulo I, quòd ſit ſectio ſubalterna, vt pr. 2. & 9. h ſi fiat alius angulus IAP ad A, erunt duo anguli quoque æquales I, & A in triangulo API: Quare etiam latera ſubtenſa erunt æqualia AP, & PI.

Sed ob ſimilitudinem triangulorum ſubcontrariorum etiam triangulum AKB eſt ſimile triangulo AHP. Siquidem angulus apud B, trianguli EAB eſt æqualis angulo apud H trianguli ſubalterni HAI, ex 2. vel 9.h. angulus verò KAB addito communi PAK vtriſque æqualibus HAK. & PAI angulis eſt æqualis angulo HAP: ſed triangulum AKB eſt Iſoſcellum ob radios æquales; ergo etiam tale erit triangulum APH. Vnde crus AP erit æquale cruri PH, & cruri PI, vt ſupra oſtenſum eſt, hæ itaque portiones erunt, æquales HP, & IP, ideoque P centrum erit.

* Idem quoque conſequi poteris, ſi diuiſa bifariam AI in L ducas perpendicularem LP, quę ſecet planum ſtereographum in P, vt patet ob API æquicrurum triangulum.

PROBL. III. PROPOS. XI.

Partes circuli obliqui in planum Stereographum proijcere.

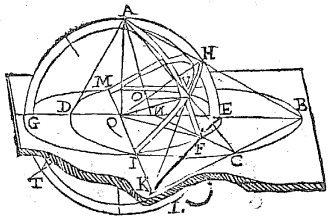
MVltis modis hoc Problema poteſt in opus deduci nos quatuor ſceligemus, ad quos alij ferè reducuntur: Primus ope poloꝝm; Secundus ope ſecantium: Tertius ope chordarum: Quartus ope ſinuum.

THEOR. VI. PROPOS. XII.

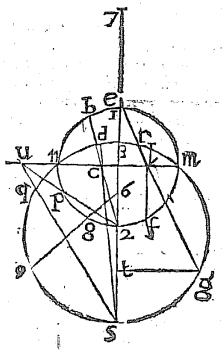
Quæ à centro poli circuli proiecti diſcedit, & per partem aliquam circuli ſectionis ſphæræ tranſit, ea in partem proiectam circuli proiecti incidit.

SIt ſectio ſphęrę EIGM, & circulus proiectus BCID. Poluſque in eo proiectus N. Dico quod CN tranſiens per EF partem circuli ſectionis ſphęrę æqualẽ parti HV circuli obliqui HVI proiciendi cadit in idem punctum C; ac linea proiectrix AC.

Iam oſtẽſum eſt tr.23.pr.16.p.3. circulũ minorem



rem AVF tranſeuntem per polum ſuperum circuli ſectionis ſphęrę A, & alium polũ L circuli obliqui, HVI, & ſectione AL proicientem polum A in N, detruncare ab vtroque circumferẽtias ęquales HV, & EF: ſi ergo ſuperficies huius circuli extendantur vſque ad C, & ſit ANC ſuperq; eã à puncto A centro proiectionis ſimul, poluſque circuli ſectionis EIG extendatur linea proiectrix recta tranſiens per V perueniet in C, & ſecabit NC, quæ eſt ſectio eiuſdem ſuperficiei extenſę circuli AVL cũ plano BD proiecto; pars ergo BC, quę à linea proiectrice tranſeunte per V decernitur, illa etiam determinatur per CN, quæ tranſit per F, & truncat partem EF, à circulo ſectionis æqualem parti HV circuli obliqui proiciendi.



Dato itaque circulo ſectionis 21, & circulo proiecto 35, & cognita parte circuli, quæ V. g. ſit duodecima circuli proiciendi, dato quoque polo 6. Ducatur à polo 6. per 8. ſextam partem recta 6. 8. Et hæc terminabit 59 partem duodecimam circuli primitiui exprimentem.

THEOR VII. PROP. XIII.

Linea in circulo ſectionis à diametri extremo perpendiculari ſectionis ducta ad ſectionem per datam partem dat in ſectione punctum, per quod, & extremum diametri eiuſdem proiecti alia ducta partem à prima abſciſam exprimit.

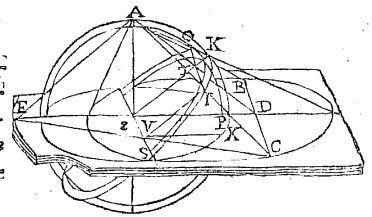
SEcundi modi fundamentum hoc eſt in eadem fig. quę ſuperiori modo. Sit ſuperficies BAC, quæ ſecet circulum obliquum in HV, & extendatur in BC; hęc imprimet ſectionem BC, quæ erit chorda ſubtendens arcum exprimẽtem arcum HV, vtpote, quòd proiectricibus BA, & AC per extrema arcus primitiui H, & V tranſeuntibus determinetur, itaque planum circuli obliqui HVI, & HV ſectio eius extendatur; done occurrat cũ plano ABC plano orthographo. Sectioque MK eius cum plano primitiui circuli MVI occurret tandem, cum angulus OHV nõ ſit rectus ſectioni HK ſicubi V.g. in K. Et etiam ſectio CB ob angulum acutum HBC cõcurret cum HK; cùm ergo concurſus iſte ſit plani BAC, & etiã plani primitiui HVI; atq; inſuper plani orthographi BKG, ergo erit aliquod punctum ſectionis KM; quæ erat plani orthographi, & primitiui. Sed etiam eſt plani proiectoris BAK; erit igitur punctum K in quod orthographum, & primitiuum B, & proiectorium concurrent. Verùm etiam EF ſubtenſa arcui EF æquali arcui HV concurret in K. Ergo æquo pacto, ac linea ſecans HV monſtrabit punctum K. Quod autẽ EF in punctum K concurrat; patet; quia angulus ad Q tum trianguli HQK, tum trianguli EQK recti ſunt: anguli autem ad E, & H ſunt æquales; quia inſunt peripherijs circulorum æqualibus FIG, & VIT. Ergo triangula æqualia, & crus KQ eiuſdem longitudinis, & ideo EF baſis concurret ad punctum K. Vnde, cùm EF ſecans circulum ſphæræ, & abſcindens arcum æqualem arcui HV obliqui HVI, indicet idem punctum K, in quo debet concurrere BC ſubtendens eiuſdem HV proiecturam, poterimus eius vice vti ad inueniendum punctum K.

Sit itaque circulus ſphæræ 1, 2, & pars in eò 2 P comprehendens ex 24. partibus, in quibus diuiſus eſt earum 5. Ducatur 2 P per P vſque ad Interſectionem m n productam in u. Si igitur 5 u ducatur; hęc ſubtendet arcum 5 9 q; qui repreſentat arcum 2 P equalem circuli inclinati ex prec. arcui fundamento. Sic ducta 2 b ſignabit punctum c, per quod 5 d ducta determinabit arcum 3 d proiectũ.

THEOR. VIII. PROPOS. XIV.

A puncto, in quod parallela plano proijciendo à puncto proiectionis cadit recta per ſinus extremum circuli ſectionis ducta, dat in proiecto circulo partes proiectas.

FVndamentum tertij modi eſt, ſi in obliquo circulo ducto ſinu IV, & proiectrice AC, quæ tranſeat per I, per has duas lineas agatur pla-



num CIVEA, quod ſecet planum orthographum

B linea CVB, nam quę hoc planum incidet in planum AE linea expreſſum, parallelum plano circuli proiiendi KIS, & conſequenter incidet in punctum E. Siquidem ſi planum AE ponatur parallelum plano circuli primitiui KIS, etiam ſectiones plani CAE erunt parallelæ ex prop. 15. Tract. 22. de interſect. cumque IV ſit parallela KZ etiam eidem erit parallela AE.

Si autem ſit arcus PX æqualis arcui KI, etiam ſinus XV, & TV æqualiũ reſiduorũ IS, XS erunt æquales, & ideo idem ſinus verſus VS erit: quare ſinus verſus SV circuli ſectionis PXS exhibebit punctum idem V, per quod tranſit EG.

Sit ergo, vt priùs, circulus ſectionis T 2, & proiectus 3 5, & e punctum O, quod parallela plano proiiciendo OA, vt in fig. prop. 10. h. à centro proiectionis A deducta in planũ imprimit, & ducatur à parte f; circuli ſectionis ad diametrũ m n normalis, quę cadet in l. Ab e itaq; puncto per l ducatur e g, & hæc determinabit arcũ 5 g, & repreſentantę arcũ f 2, & arcũ 3 r repreſẽtãt eũdẽ f 2 ad eã partem, qua partes ſunt minores in circulo proiecto.

THEOR. IX. PROPOS. XV.

Si per puncta proiecta primigenij circuli, quibus chordæ diametrum ſecant perpendiculares ducantur, hæ à circulo proiecto partes abſcindent proiectas, eruntque chordæ proiectæ.

QVarti modi fundamentum eſt: In figura pr. 14. Ducatur in circulo proiiciendo chorda IO perpendicularis diametro; hæc ſecabit diametrum in T. Tranſeat ergo ſuperficies, ſeu lineæ BA, & CA, & eam proiciant in CB: Sectio CB terminabit in puncta C, & B, in qua lineæ proiectrices arcuũ KI, & KO terminant, ideo CB eoſdem arcus in circulo proiecto deſſignabit, tranſibitque per punctum D, quod cum ſuperficies BAC tranſeat per T erit punctum T proiectũ, eritque orthogonalis diametro DZ, ſicut IO orthogonalis eſt ipſi diametro KZ circuli primitiui, cùm tota ſuperficies CBA ſit ei diametro, & plano circuli PKA orthogonalis.

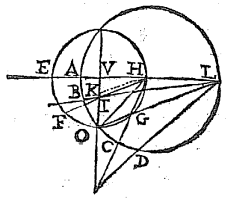
Si itaque ex propoſ. 2. h. puncta quibus chordæ diametrum primitiui circuli ſecant, proiiciantur, cum ipſo circulo, & ſit illorum aliquod punctum t, ducaturque t g; hęc ſignabit arcum 5 g circuli proiecti exprimentem arcũ circuli primitiui.

THEOR. X. PROPOS. XVI.

Partes proiecti circuli, quo propinquiores perpendiculari à centro proiectionis prouenienti, eò minores ſunt.

SInt iuxta ſecundum modum partes in circulo proiectæ ABOD, quæ in circulo originario, ſeu etiam ſectionis, cum in vtroque, vt oſtenſum eſt, æqualitate conſentiant, ſint EF, FO, GO, HG omnes inuicem æquales. Dico, quod iſtæ partes inuicem æquales proiectæ, efficiuntur inuicem inæquales, & quod minor eſt illa, quæ puncto V, quod imprimit perpendicularis V propiùs accedit.

Probatur, Ducta punctata HK parallela ipſi LO, maior eſt proportio OH ad HV, quam KH ad HV (vt dicam) quare etiam eſt maior, quàm OL ad LV, cum punctata ſit parallela, ipſi LO, & ideo eadem ſit proportio HK ad HV, quę LO ad LV: ſed proportio OH ad HV eſt eadem, quæ OI, ad IV ob angulos æquales ad H ex prop. 3. lib. 6. Elem. Ergo maior erit proportio OI ad IV; quàm OL ad LV. Vnde, & ex propoſ. 6. Tract. 19, maior erit angulus OLI, quàm ILV, & ſic oſtendes de alijs.



Quod autem HO habeat maiorem rationem ad HV, quàm HK ad HV ipſam patet ex 8. lib. 5. Nam eſt maior HO ob angulum maiorem externum HIO, quem ſubtendit, quàm HK, quæ ſubtendit angulum internum minorem HVK minor eſt autem angulus internus externo ex pr. 17. Cor. 1. l. 1. Elem.

COROLLARIVM I.

HInc eſt manifeſtum partes circuli, quæ in maxima medietate ſunt LDC eſſe maiores partibus primitiui circuli: ſicut totus arcus eſt maior, at verò, quæ ſunt in altera medietate minores illis, quæ in circulo primitiuo ſunt; quia etiam totus ille arcus eſt minor, & cum tot ſint partes in medietate proiecta, quæ minor eſt medietate primitiua, quot ſunt in ipſa, hac medietate neceſſariò erunt omnes minores, & hoc ſufficiat ad rem per ſe claram confirmandam, licet alioquin non prorſùs ratio conuincat.

COROLLARIVM II.

ELicies quoque, illum eſſe maiorem radium in circulo proiecto, qui per vtraque centra tranſit, tum circuli primitiui, tum circuli proiecti, reliquos verò eſſe maiores, qui propinquiores ſunt centro circuli proiecti. Ratio eſt, quia radij ducuntur à centro proiecto, qui non coincidit cum centro circuli proiecti, vt docuimus. Vnde cum hoc punctum ſit extra centrum, euenit, vt docet Euc. lib. 3. Elem. propoſ. 15. maximum eſſe, qui per centrum tranſit, reliquos verò eò eſſe maiores, quò centro propinquiores.

EXPENSIO III.

De proiectura ſuperficiei cuiuslibet independenter à ſphæra.

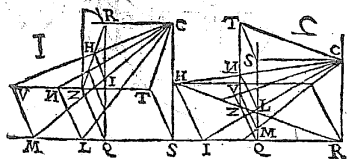
PArtes aliculus lineæ proiectæ eam proportionem muſicam dicunt, quam oſtendimus propoſ. 3. & ita proiiciuntur, vt prop. 2. Coroll. h. Poſſunt autem lineæ proiectæ eſſe maiores primigenijs, ſeu minores prout intercipitur planum, in quo ſunt inter punctum proiectionis, & planum, proiectionem recipiens V. g. in fig. prop. 3. TF eſt minor, quam PC, quia linea TF proiecta inter primigeniam TF, & punctum A interponitur, at ND proiecta maior, quam DE primigenia, quia hæc interponitur inter ND, & A, & quæ dicuntur de lineis eadem intelligenda ſunt quoque de ſuperficiebus, vnde duplex genus proiectionis poteſt deduci, alterum dicetur rectum, cùm interponitur planũ; in quod fit proiectio inter planum originarium, & proiectionis centrum, alterum inuerſum, cum planum originarium interponitur inter centrum proiectionis, & planum proiectionem recipiens.

THEOR. I. PROP. XVI.

Omnes lineæ, quæ ſunt perpendiculares plano Stereographo, ſeu in proiectione recta, ſeu inuerſa proiectæ in punctum collimant à plano originario æquè remotum, ac centrum proiectionis; lineæ verò parallelæ plano Stereographo in parallelas originario tranſeunt.

PRæſupponendum eſt planum Stereographum, ideſt proiectionem recipiens eſſe plano originario ex inſtituto hominum rectangulum, ideoque etiam id præſupponimus.

Itaque ſit punctum, ſeu centrum proiectionis C ſit planum originarium STVM, in quo ſcilicet eſt figura proiienda LMNV. Planum recipiens proiectionem ſit QHR, cui perpendicularis linea proiienda VN. Dico primò, quòd iſta linea NV proiecta imprimit lineam ZH, quæ in punctum R producta terminat, quod punctum æquè remotum eſt à ſtereographo plano HRQ, in quod fit proiectio eadem diſtantia perpendicularj, qua remouetur punctum C centrum proiectionis.



Probatur. Nam quia NV ex theſi eſt normalis plano ſtereographo HRQ; erit etiam normalis eius ſectioni QZ: & ſi plano ſtereographo HRQ ducatur planum CST parallelum per centrum C; erit quoque NV perpendicularis eius ſectioni TS. Quare ſi intelligatur ſuperficies proiiciens NVC extenſa vſque ad T; ita vt ſint eius ſectiones CT, & RZ, erit quoque prędicta TNV ſectio ſuperficiei proiectricis perpendicularis ſectionibus RZ, & CT, vtpote in planis CTS, & RZQ ijſdem exiſtentibus ex def. 2. tract. 22. Quare CTS, & ZRQ erunt anguli inclinationis planorum ex prop. 4. Cor. 2. tract. 22. & ideo anguli æquales ex prop. 18. tract. 22.

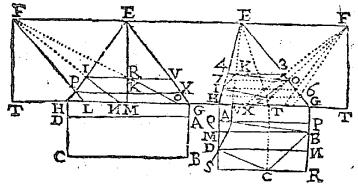
Tranſeat ergo per C planũ CSM normale vtriq; plano CTS, & STVM; Sectiones itaque CS, & ST rectum angulũ continebunt. Quoniã ex 16. tract. 22. ſectio STduorum planorum CTS, & TVMS erit ad rectos ãgulos, plano CSM, & ideo ſectioni CS, & SQ ex def 2. tr. 22. in plano CSM exiſtenti. Sed QZ eſt parallela lineę ST ex effect. ergo etiam perpendicularis plano CSM ex 8. tract. 22. & ideo ſectioni SQ, & RQ ex def. 2. tract. 22. Sunt ergo æquiangula triangula CTS, & QRZ, vtpote, quòd ſint rectangula, & angulos CTS & RZQ æquales obtineant. Sed etiam crura TS, & ZQ ſunt æqualia: Siquidem lineæ TZ, & SQ parallelæ ſunt, vtpote oſtenſæ normales ſectioni QZ, ideoque ex 33. lib. 1. Elem. æquabuntur inuicem crura parallela QZ, & ST. Cum ergo in triangulis æquiangulis ex 4. lib. 6. ſit ST ad SC, vt QZ ad QR, & TS & QZ ſint æquales, SC, & QR æquabuntur ex 12 l. 5. Quamobrem ſectio RZ plani proicientis CNV terminabit in R, quod habet eandem eleuationem à plano primigenio SV, ac punctum C menſuratam per rectas CS, & RQ æquales, & normales: hoc autem punctum R vocabitur centrum proiectum.

Probatur ſecunda pars, quæ eſt, quòd lineæ parallelæ plano ſtereographo, vt eſt LN in parallelas plano primigenio STVM tranſeant. Quoniã enim linea proiienda LN, vel MV eſt parallela plano HRQ erit etiam parallela cõmuni planorũ ſectioni ex 4. tract. 22. Coroll. 3. quæ eſt QZ, cùmque QZ ſit perpendicularis plano SCQR perpendiculari planis CTS, & QRH, etiam ipſa eidem plano normalis erit: ideo planũ HIC per illam ductũ ex 15. tract. 22. plano CSRQ erit ad rectos angulos; quare, & eorum communis ſectio IH eidem plano ex 16. tr. 22. ad rectos angulos erit: Propereaque HI, & QZ ex 7. tract. 22. erunt parallelæ; ideoque, & plano STVM parallela erit.

PROBL. I. PROPOS. XVII.

Superficiem rectangulam proijcere.

POteſt hæc ſuperficies proicienda obtinere aliquod latus parallelum plano, in quo facienda eſt proiectio; vel nullum parallelum.



Sit ergo primus caſus, in quo ſit parallelogrammo ABCD proiiciendum. Determinetur centrum proiectionis F, & centrum proiectum E, & ad E centrum proiectum ab H, & G extremis lineæ GH, quæ intercipitur inter latera proiienda AB, & CD ducantur rectæ. Aſſumpta autem diſtantia HD transferatur ab H in L, & ducatur FL, quæ ſecabit EH in P. Duceturque parallela PX ſectioni HG. Rurſùs aſſumpta diſtantia HC transferatur ab H in N, & ducatur FN, quæ ſecabit HE in I. Itaque ſi per I ducatur parallela IV ſectioni HG, illa claudet rectangulum PIVX iam proiectum.

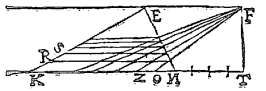
Id autem oſtenditur, nam poſito, quo HC ſit ſectio plaorũ primigenij, & orthographi, qualis in fig. 1 præced. eſt ZQ. Ducentur perpendiculares FT, & EM, & MT erit diſtantia duorũ planorũ, quę in fig. præced. propoſ. ſunt QR. Z, & SCT V. g erunt lineæ CS, & RQ à centris primigenio C, & proiecto R deſcendentes. Igitur MO erit interuallum diſtantiæ, quã linea proicienda diſtat à linea ſectionis V. g. in præced. fig. 1. interuallum QM. Vnde ſicuti ibi I eſt punctum M proiectum, ſic hic

R erit punctũ proiectum. Sed I punctũ ex pr.10. par.2.tract.16. distat eodem interuallo, ac R à linea HG: quia triangula HIN, & MRO ob bases æquales HN, MO eandem altitudinem possident. Ergo ducta parallela per I habebit eandem distantiam, ac per R ab HG, linea sectionis planorum primigenij, & orthographi. Ergo IV erit CB linea proiecta, cum vt ostendimus debeat esse parallela lineæ sectionis HG. Sic dicas de linea PX, q erit linea DA proiecta. Latera verò DC, & AB exprimentur per lineas PI, & XV: quia tendunt ad centrum E proiectum, vt ostensum est præcedenti propos. part.I.

Si verò sit data superficies ABCD irregularis; vel nullum latus habens sectioni GH parallelum per A ducatur latus parallelum PQ, & per A latus AV, & normale TC per C. Item sectioni perpendicularia latera PR, per B, & SQ per D, & parallelas MB, & DN ab vno quoque angulo, quas omnes parallelas & normales proicies; normales, quidem in GE, & TE, & cæt. tendentes ad centrũ; parallelas verò in 3 4, & 7 0 & 1 6, & cæt. & puncta K, Z, & I, O, & cæt, representabunt intersectiones D, A, B, C, in quibus etiam anguli figuræ BACD terminant in suis descussationibus. Igitur per puncta KOZI rectæ ductæ facient KOIZ planum proiectum, cuius primigenium est ABCD.

COROLLARIVM.

EX supradictis adisces propos.I. tract.L6 p.3, quod si NO, & OZ sint æquales, & sic successiuè, etiam distantiæ, & interualla proiecta futura esse harmonicè proportionalia; nempe EK esse ad ES, vt KR ad RS differentiæ, & ex propos 3. eiusdem si NO erit pars aliqua V.g. $\frac{1}{4}$ lineę NT linea KE erit $\frac{1}{4}$ RE $\frac{1}{4}$ ES $\frac{4}{6}$, & cæt. in infinitum. Vnde altitudines superficierũ erunt EK ad ES, vt $1\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ sibi inuicem, & sic consequenter. Et quidem si institutum meum non esset me continere in principijs rerum, & doctrinarum; hanc quidem mirabilem progressionem prospectiuæ praxibus subigerem, & quàm benè scenicis deseruiat ostenderem: sed id est alius voluminis, si Deus dederit.



THEOR. II. PROPOS. XVIII.

Omnis circulus, seu Ellipsis proiecta in planum, nec parallelum, nec basi subcontrarium in Ellipsim transformatur.

PRobatur. Est sectio coni à stereographo plano ad angulos rectos basi coni insistenti, seu etiam ad quemcumque angulum. Sed omnis sectio coni Ellipsis est, si planum non sit parallelum basi, vel subcontrarium, vt supra ostendimus, ergo etiam hæc sectio stereographa Ellipsis erit; Quod autem circulus proiectus, vel Ellipsis sit sectio coni, idest fiat in plano conum secante. Patet ex definitione stereographiæ factæ à superficie conica planum primigenium ambiente.

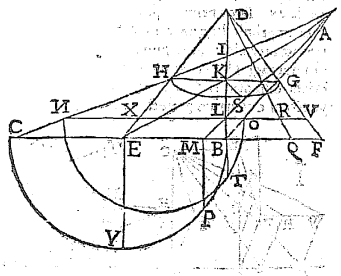
COROLLARIVM.

HInc patet centrum Ellipsis proiectæ non habere idem centrum cum centro circuli, vel Ellipsis primigeniæ: nisi accidat, quod sit parallelum planum stereographum plano proiciendo, vt constat ex Coroll.1. propos.2. tract. præced. Nec vnquam circulum representare, etiam si circulus sit primigenius, nisi sit, aut planum proiectionis parallelum ipsi, aut subcontrarium.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Quemcumque seu Circulum, seu Ellipsim plano Stereographo transcribere, eorumq; partes representare.

CVm circulus, seu Ellipsis proiecta, Ellipsis sit, potest eodem modo describi quò supra diximus Ellipses describi posse in tract.24.Conic. Expens.13. & propos.8. & 9. & 10. huius, quæ verò reposcuntur ad descriptionem ex cognitione coni stereographi, & conus ipse à distantia data à plano, in qua fig. primigenia reperitur, facilè obtinetur, & à dato, aut axe, aut diametro aliquo ipsius primigeniæ figuræ. Sed libet hic modum ordinarium ostendere, quo vtuntur artifices.



a Sit conus ABC, & sectio eius quæcumque DI, quæ producatur vsque ad eandem altitudinem coni ABC in D: Sit verò semibasis coni semicirculus BYC, in quo applicata EY, & MP, quarum puncta extrema sunt exprimenda in Ellipsi, cuius axis BI. Ducatur ab E, & M applicationum punctis ad verticem A lineę AE, & AM, & per L, & K, quibus puncta diametrum BI secant, ducantur parallelæ ON, & GH vsque ad crura trianguli conici per axem AC, & AB: mensuretur verò BE semidiameter in F, & per F, & D ducatur FD, quæ transibit per G, & ED, quæ transibit per H ob triangula EBG, & DKE, & EHC æqualis altitudinis ex propos. 10. tractat. 16. part 2. Nam conuenient in H, & G, per quæ transit GH. Postea mensurata QB æquali PM alteri applicatæ, ducatur ad D linea QD, quæ in R faciet ON productam in Y. Et dico RL, & GK esse applicatas in Ellipsi, cuius diameter, seu axis IB.

Probatur in triangulo GKB, ita est GK ad LO, vt KB ad LB. In triangulo autem ICB ita est KH ad NL, vt KI ad LI: quare poterimus componere proportiones, & rectangula constituere proportionalia, vt vides in hoc specimine.

HK vt KI & KG vt KB
ad ad ad ad
LN IL LO LB
Ergo compositum, vt compositum.
HK & KG KI & BK
ad ad ad ad
LN & LO IL & BL

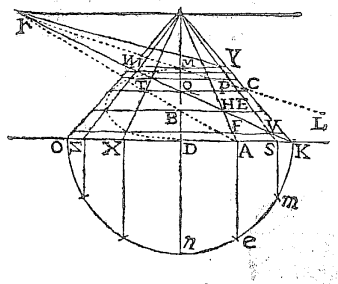
Sed GK, & XH rectangulum est æquale quadrato applicatæ diametro à puncto K scilicet KS sicut OL, & LN rectangulũ applicatę diametro NO ad angulos rectos, quæ est LT; ergo, vt BK, & IK rectangulum ad rectangulum IL, & LB. Sic quadratum XS ad quadratum LT: Sed XG æquatur rectæ KS, & LR rectæ LT. Ergo KG, & LR erunt applicatæ, vtpote quod sit GK quadratum ad quadratum EK RL, vt IK, & KB rectangulum ad IL, & LB rectangulum ex 6. tr. 24. Quare remanet ostendendum, quod OH sit æqualis XS, & LR æquetur ipsi TL.

Id verò ostenditur. Nam, vt ON diameter ad BC diametrum, ex prop.44. lib.6. Elem. ita est sinus LT ad sinum similis arcus MP. Est enim ex Coroll 2. prop. 4. lib.6. OL ad LN, vt BM ad MC, ideo OL erit quoque ad medium proportionalem LT, vt BM ad suam mediam proportionalem MP. Ideoque etiam *permutando* OL erit ad BM, vt LT ad MP: quare etiam ON erit ad BC, vt TL ad MP, sed etiam RL se habet ex 2. Coroll. prop. 4. lib.6. ad QB æqualem ipsi MP, vt VX æqualis ON ad æqualem FE ipsi BC ex constructione. Ergo LT, & LR æquales erant ex 7.l.5. quàl æqualibus QB, & MP eandem dicunt proportionem ON, ad BC.

Eodem modo probabis de linea SK, quod sit æqualis lineæ KG; quadere KG, & LR erunt applicatæ.

COROLLARIVM I.

HInc elucet quomodo alia; & alia puncta poterimus reperire, donec tot sint, quæ sufficiant ad rectè trahendam Ellipsim vt vides ib fig. hic apposita.



Imo ex prop.10. Tract.16 de progr. armonicis part.2. cum omnia triangula sint eiusdem altitudinis V.g. KHA, & ABD loco trianguli ABD deseruiet triangulum KHA, & loco trianguli LMD poterit deseruire triangulum KNO: Vnde vnica diagonalis KN sufficiet ad omnium triangulorum altitudinem exhibendam; quę sit eadem, ac ea, quæ in DM succedit inueniretur, itaq; puncta D, F, E, C, P, & cæt. vsque ad M erunt in Ellipsi præbentibus succedentis altitudinibus triangulis KVS, HHA, & KQD. KTK, KIZ. & tandem KNO, quæ altitudines deberent reperiri in perpendiculari DM. Et idem fiat super VN, ducta YY; si placeat aliam Ellipsim delineare.

COROLLARIVM II.

HInc etiam facilè aliquis quamlibet figuram circulo inscriptam delineabit, vt patet si puncta e, applicatarum AE V.g. intelligantur pro angulis alicuius figuræ circulo inscriptæ, siquidem etiam applicata EB suo extremo E in Ellipsi angulum figuræ rectilineæ exprimet, & sic de alijs.

COROLLARIVM III.

HInc etiam patet: quomodo quelibet figura, etiam si non possit circulo inscribi, proiciatur, quia saltem poterunt pluribus circulis illius anguli circumscribi, quorum puncta extrema si proiciantur, erunt quidem in plurium Ellipsium ambitu; sed tamen coniuncta figuram irregularem proiectam referent.

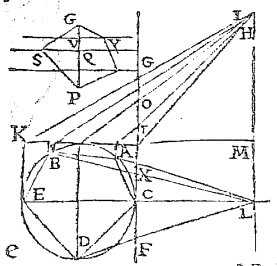
COROLLARIVM IV.

HInc quoque patet quomodo partes alicuius circuli proiciantur. Nam in fig Coroll ED, & FE, & EC, & cæt. exprimunt partes circuli a e, & e m, & mk, & patet etiam quomodo partes circuli primigenij æquales; in Ellipsi tamen proiectæ eius vicaria non sint æquales.

PROBL. III. PROPOS. XX.

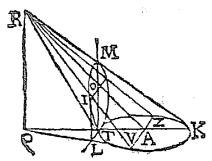
Circulum, seu figuram rectilineam in Ellipsim proiectam transfundere Stereographicè.

SItque iste circulus, seu figura proicienda orthographicè. Detur verò altitudo centri proiectionis MH, & sectio plani stereographi sit FG; & distantia à perpendiculari HM, quæ sit CL, & L sit punctum H proiectum, idest in quod ab H demissa perpendicularis caderet: A singulis punctis in peripheria signatis C, A, B, E, D perpendiculares ducantur, ad EA ab ipsaque rectæ in centrum H conueniant, rursusque à punctis C; A, B, E, D, rectæ in L conspirent, deinde ducta secatrice PC in C à puncto P singula interualla ex linea IG desumpta trasferantur, vt IO translatum est in PQ, & OC in QC, perque singula puncta perpendiculares ad PG, ducantur, vt QS, & VY; quarum longitudines à C sumantur in vtramque partem ex FA sectione, quę scilicet correspondent in ijsdem punctis V. g. CS applicabitur QS, quia à puncto D, tum DL, tum OH tandem deriuant, & postremò per extrema puncta GYS, & cæt. ducemus flexam, & erit Ellipsis, vel rectas, & erit figura rectilinea proiecta in Ellipsi inscripta.



a Ratio

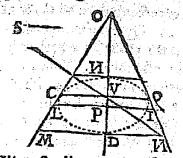
* Ratio huius operationis est, quia PG est diameter, at VY, & SQ sunt applicatæ. Ergo per extrema earum puncta transibit Ellipsis. Quod vt capias inspice fig. hic appositam, in quâ circulus basis coni stereographi KTR est KZTV, trianguli autem per axem KRT ducatur planum normale stereographum MILT: item triangulo per axem KRT ducatur planum normale ZVR, itaque TK erit diameter circuli, sicut TM erit Ellipsis; quia cùm planâ MZTV, & ZRV sint normalia triangulo per axem KRT; etiã cõmunes illorũ sectiones AV, & OI ad rectos angulos erunt ex prop.16. tract.22. & ideo ex def.2. tr.22. sectionibus TK, & MT; vnde istæ sectiones diametri erunt, & OI, AV applicatæ, hæc quidem applicata primigenia, & OI applicata proiecta & punctum O erit illud, cui applicatio facienda est. Itaque sectio AR plani ZVR, & trianguli per axem KRT erit illa, quæ decernet altitudinem TO, ideſt in præc. fig. OI. Hoc itaque triangulum AVR proiiciatur orthographicè, planumque VRQ normale plano KTV imprimet sectionẽ VQ discedentẽ ab V puncto, & terminantẽ in punctum Q quod imprimit EQ sectio planorũ plano KTV normaliũ proiectoris VRQ, & triãguli per axem KTR producti in Q: Quare si IO applicata proiiciatur quoq; ipsa proiicietur in sibi parallelam LT. Siquidem superficies proiectrix eadem ex prop.8. h.p.I. ac superficies MILT, quod sit normalis plano KVLQ recipiens proiectionem, faciet sectionem TL ex 16. Tract.22. plano KTR normalem, vtpote à planis normalibus effectã KVQ, & MILT plano RKQ. Vnde ex 7. tr.22. parallelæ erunt, & ideo ex pr.8. h. par.I. æquales. Itaque cum in triangulo per axem KTR in sectione TM obtineamus punctum O applicationum ad axem TM, vt in orthographia AVQ longitudines applicatarum, nempe TL, vel in præc fig. IO, & CF poterimus Ellipsim proiectam delineare.



PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Dato diametro Ellipsis proiectæ, & diametro proiecto circuli, vel Ellipsis primigeniæ reperire diametrum alterum coniugatum.

Sit ductus diameter Ellipsis proiectæ ND, & diameter proiectus QC, & oporteat reperire diametrũ ellipsis alterũ cõiugatũ IL. Rectangulo NVD fiat æquale quadratum S ex 14. lib.2. Deinde fiat, vt latus quadrati S ad latus PN dimidij diameteri; ita applicata VC ad aliud, & prodibit PL ex propos.15 lib.6. & dico IPL duplam LP alteram esse diametrum ellipsis coniugatam.



Probatur. Illa est diameter coniugata, quæ cum possit deseruire pro applicata per centrũ quoque transit, vt colligitur ex propos.32. tract.24. Sed PL talis conditionis est. Ergo erit diameter coniugata.

Probatur. Nam vt latus quadrati S ad latus quadrati NP semidiametri, ita fecimus VC ad PL, & ideo ex 16. lib.6. vt quadratũ S, ideſt rectangulum æquale NV, & VD ad quadratum, seu rectangulum NP, & PD, ita quadratum VC ad quadratum PL. Erit PL applicata, sicut PI equalis. Sed etiam transit per centrum P, cum sit ND datus diameter diuisus bifariam. Ergo erit diameter Ellipsis, quo habito poterimus duobus diametris datis omnibus modis tract.24 assignatis Ellipses proiectas describere: Vnde si habeas tantùm vnicum diametrum ellipsis proiectæ, seu parallelum, vt hic plano stereographo, seu obliquum, quæ ex dictis prop.17. huius venari poteris ellipsim proiectam circuli expressiuam delineabis faciliter aliis datis.

TRACTATVS XXVII.

TRIGONOMETRIÆ PARS PRIMA.

De Trianguli plani cruribus dimetiendis.

TRigonometria pars est Mathematicæ adeo necessaria, vt sine illa vix alterum pedem in huius scientiæ progressu mouere quis possit. Duplex est autem; altera, quæ in mensuratione triangulorum planorum rectilineorum occupatur: altera, quæ sphærica triangula etiam mensuris subigere conatur; in hac I. parte de triangulis rectilineis agemus.

EXPENSIO I.

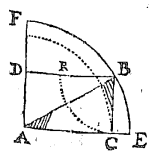
De triangulorum rectorum mensuratione per sinus, vel tangentes.

IN eo consistit trigonometria, vt exhibitis duobus angulis, vel lateribus, vel angulo, & latere, cæterorum, tum angulorum, tum laterum cognoscamus mensuras; & quidem si agitur de lateribus tantùm; id independenter à Tabulis potest operi demandari ex ijs, quæ secundo libr. Elem. dicta sunt prop.II. at cum latus datur, & angulus ex quibus, vel angulus, vel latus aliquod perquiritur; vsus tabularum est necessarius. Hic autem omnimodam solutionem triangulorum docere animus fert, illã verò, quę solummodò laterum est, planimetriæ reseruabimus.

THEOR. I. PROPOS. I.

In omni triangulo rectangulo, si basis est radius; etiam duo crura sunt sinus arcus, & sinus complementi illius arcus.

SIt triangulum rectangulum ABC. Statuamusque basim AB esse radium alicuius circuli. Dico, quòd duo crura AC, & CB sint, vel sinus CB, vel complementum DB.



Probatur. Quoniam basis AB ponitur radius alicuius circuli, ille circulus, vt FBE circumscribatur cẽtro A, & ab A parallela AF ducatur cruri CB. Etenim quia CB est parallela radio AF, sinus erit: Quapropter DB erit sinus complementi: Sed AC, vtpote, quòd sit inter parallelas est ei æqualis; Ergo AC crus est quoque complementum. Quòd autem FBE arcus sit quadrans patet; quia angulus ACB ponitur rectus: Ergo & angulus CAD rectus erit ob parallelissimum linearum CB, & AD ex propos.30. lib.I. Elem.

Potest etiã ostendi pr.17.l.II.Cor. ex eo, quod in rectãgulo triangulo anguli reliqui nigri sint equales vni recto, vnde alter alterius complementum erit, & ideo crura subtendentia sinus arcuum inuicem erunt arcus, & complementum.

THEOR. II. PROPOS. II.

In omni triangulo, rectangulo si crus quodcumque, vt radius sumatur; crus quidem alterum erit tangens; basis verò secans.

PRobatur. Nam ducto arcu punctato altero crurum pro radio deseruiente V. g. AC, crus CB tangens erit circuli puncti, & AB secans ex prop.20. lib 3. Sic sumpto arcu CB pro radio ducto quadrante punctato CR. crus AC tangens erit, & AB secans. Ergo si crus pro radio assumatur alterum crurum vices tangentis obit, & basis pro secante deseruiet.

COROLLARIVM.

HInc colligas, quo I vt radius diuisus in 100-00000. est ad sinum in partes æquales illis diuisum in tabulis repertũ in proportione, sic basis in qualibet alias partes diuisa erit ad crus in eadem partes distributum, quia partes sinuum explicant proportionem sinus totius ad quemlibet sinum: Quare possumus datis duobus tabularum numeris, & altero numero, cui quæratur

eiusdem rationis quartus, id per regulam proportionum excerpere, & sic dicas de tangentibus respectu sinus totius. Vnde sequentia problemata prodeunt ad solutionem rectangulorum deseruientia.

PROBL. I. PROPOS. III.

Data basi, & angulo adiacente, latus oppositum angulo dato reperire.

SIt data basis AB 30. pedum, angulus verò adiacens niger A sit notus Gr. 15. & eius sinus primis tantùm notis ad sinistram expressus (id enim in istis sufficit) sit 258. & sinus totus 1000. Quia ergo habemus proportionē expressā basis ad sinum CB anguli; ideo dices si 1000. basis partes dant 30. partes in ipsa, quid 258. partes cruris dabunt ex ijs 30. basis. Multiplicatus itaque vltimus cum medio, & genitus per primum diuisus exhibebit pedes 7. $\frac{9}{10}\frac{4}{10}\frac{0}{10}$ pro latere quæsito BC. Et aduerte, quòd non assumimus totum sinum, tūm quia in Trigonometria practica id non est necessarium, tum ob maiorem perspicuitatem exempli, cum minor numerus à Tyronibus facilius capi possit. Relinqui autem semper possunt quatuor figuræ ad dextram.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Data basi, & angulo adiacente quærere latus adiacens angulo dato.

SIt data basis AB 30. pedum, & angulus A G.15. niger, & quæratur latus adiacens AC. Accipiatur eius complementum Arcus G.75. cuius sinus 965. Postea veteris regula dicendo. Si 1000. basis partes dant 30. quid 965? & exhibebunt pedes 28 $\frac{9}{10}\frac{1}{10}\frac{5}{10}$, ideſt $\frac{1}{2}\frac{7}{10}$.

PROBL. III. PROPOS. V.

Dato angulo adiacente basi, vel oppositi cruri alicui reperire angulum dato oppositum.

OFferatur angulus A 25. Grad. Quia duo anguli in rectangulo æquiualent vni recto ex Coroll 9. prop.17. lib 1. si subducatur angulus A ab angulo recto basi opposito 90. G remanet angulus B niger 65. G.

PROBL IV. PROPOS. VI.

Data basi, & cruce: quærere angulum, cui crus opponitur.

SIt data basis pedum 30. AB, & latus alterum BC pedum 25. volo agnoscere angulum A. Dices itaque.

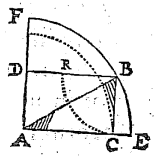
Si 30. dant 10000000. vtendo toto sinu si placeet, quid $\frac{25}{2}$?

Dabuntque partes 8333333. Quære itaque in tabulis sinum hunc, quem non inuenies quidem. Sed proximè minorem 8332431. Gr.56. m. 26, qui assumetur pro angulo quæsito, in mensuris rerum materialium tractandis.

PROBL. V. PROPOS. VII.

Data basi, ac crure inuenire angulum, cui illud crus adhæret.

SIt data basis AB 42. pedum, & crus adiacens AC 39. & volo agnoscere angulum adiacentem nigrum A. Hoc itaque efficiam, quærendo prius sinum anguli B, vt in præced. dicendo.



Si 42. dant 10000000. quid 30? Et dabit sinum 9285714. quem requires in tabulis, & proximè minorem sinum consequeris 9284859. qui est sinus Gr.68. m.12. Cum ergo angulus B sit G.68. m.12. ex probl.5. inuenies alterum adiacentem expetitum subtrahendo Gr.68. m.12. à Gr.90. vt efficiatur angulus adiacens requisitus A Gr.21. m. 48.

PROBL. VI. PROPOS. VIII.

Data basi, & cruce reperire crus alterum.

SIt data basis AB 53. pedum, crus CB 43. & requiratur quis crus AC.

Primo inuestigabis sinum anguli A cruri dato oppositi ex prop.3. h. dicendo.

Si basis 53. dat sinum totum 10000000. quid crus pedum 43. & reperies proximum sinum 8113207. nempe Gr.54. m.13. & sinus eius complementi Gr.36. m.47. erit 5987907.

Dices itaque rursus si 8113207. sinus dat pedes 43. quid sinus complementi 5987907? Et regula proportionum offert pedes 31. & $\frac{7}{8}$ ferè pro crure quæsito.

PROBL. VII. PROPOS. IX.

Dato crure, & angulo adiacente, quærere basim.

SIt datum crus 59. AC, & angulus ei adiacens A niger 27. Gr. exquiratur que basis AB.

Primo inueniendus est angulus oppositus B ex 6. prop. huius, qui est 63. Gr. & eius complementum; assumendusque est sinus ipsius p. 8910065.

Itaque regula proportionis exquires; si 8910065. dant pedes 59; quid 10000000. sinus totus? & exhibebit pedes 66 $\frac{1}{4}$ ferè, quę erit basis.

PROBL.

PROBL. VIII. PROPOS. X.

Dato crure, & angulo cruri opposito reperire basim.

SIt angulus datus A Gr.30. & crus oppositum BC pedum 15. & sit inuenienda basis AB.

Sinus Gr.30. est 5000000. Dices itaque adhibendo proportionis regulam. Si 5000000. dant pedes 15. quid sinus totus 10000000? & prouenient pedes 30. pro basi.

PROBL. IX. PROPOS. XI.

Dato crure, & angulo cruri opposito quærere latus alterum.

SIt datus angulus A G.32. cuius sinus 5299142. & cuius complementum est BG 58. & sinus 8480481. Crus verò oppositum angulo dato sit pedum 20. Dices itaque adhibendo regulam auream. Si sinus 5299142. dat pedes 20. quid 8480481? exhibebitque operatio pedes 32. & aliquid amplius pro crure altero.

At per tangentes id efficies faciliùs ob sinum totum, qui primo loco venit, & ita erit regula proportionum ordinanda, si sinus totus 10000000. dat pedes 20. quid tangens complementi Gr.58. dati, quæ est 16003247? & exerent pedes 32. & $\frac{4}{10}\frac{6}{10}\frac{4}{10}\frac{7}{10}$. Quòd si detur angulus adiacens, potes tamen accipere angulum oppositum, cum alter alterius sit complementum ex Cor.9. propos.28. lib.1.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Datis cruribus duobus angulos reperire oppositos.

SIt datum crus AC 32. pedum, quod statues loco sinus totius, & aliud CB erit tangens oppositi anguli A, quod sit pedum 25. Dices ergo regula aurea, si crus pedum 32. dat 10000000. quid 25? & dabit tangentem 7812500. quæ proximè est tangens Gr.38. Subduces itaque hunc angulum inuentum à Gr.90. & residuum erit alter angulus B Gr.52. oppositus cruri AC; nam ex Corollario propos.17. lib.1. Elem. alter angulus est complementum alterius.

PROBL. XI. PROP. XIII.

Datis duobus cruribus quærere basim.

HÆc propositio executioni demandatur dependenter ab antecedenti, nam datis cruribus priùs inueniemus angulum ex quo iuxta prop.9. & 10. reperiemus basim dato crure, & angulo acquisito, vel oppositi cruri, vel adiacente.

Hæc autem omnia problemata à duobus propositionibus primis euidentiam desumunt. Omne enim crus in triangulo rectangulo potest esse, aut tangens, sinus, aut secans, hinc est quod possit diuidi, aut cogitari, vt diuisum in eas partes, in quas quilibet sinus diuisus est, seu tangens, seu secans, quæ sunt æquales illis, in quas sinus totus diuisus animaduertitur. Quare si habeam diuisum crus aliquod in alias partes V. g. in pedes possum deuenire in cognitionem alterius cruris, in pedes diuisi.

Cum enim partes sinus AB sint æquales partibus sinus BC, & pedes item cruris AB sint æquales pedibus cruris BC; fit, vt partes sinus AB ad partes sinus BD sint in eadē proportione, ac partes cruris eiusdē AB ad partes cruris BC. Quapropter permutando ita erunt partes sinus AB ad pedes cruris eiusdem AB, vt partes sinus BC ad pedes eiusdem cruris BC, vnde datis tribus partibus AB, & eiusdem pedibus, & partibus BC deueniemus incognitionem pedum BC eiusdem.

PROBL. XII. PROPOS. XIV.

Sinus in tabulis non repertos emendare.

QVoniam aliquando, imo ferè semper sinus, qui ex calculo exeunt, non sunt ijdem præcisè, qui in tabulis reperiuntur; hinc oportet regulam assignare, ob quam, quis in cognitionem proximioris sinus, quàm fieri possit, deueniat.

Sit datus sinus 8333333. qui non reperitur in tabulis; sed proximè minor 8332431. Gr.56. m.26. & maior proximè 8334039. Gr.56. m.27. Subducatur minor à dato 8333333. & residuum erit 902. Item idem minor subducatur à maiori reperto 8334039. residuum erit 1608. Dices itaque regula proportionum, si 1608. dant 60. quot secunda dabunt partes 902? & exeret numerus secundorum 33. Itaque sinus ille datus 8333333. erit Gr.56. m.26. sec. 33.

Ratio petitur ex Cor.1. pr.15 tr. 20. de sin. Vbi sinum vnius Grad. vix à linea recta differre ostendimus, & tanto minùs arcus vnius minuti: vnde assumimus vnicum minutum, vt lineam rectam, & ideo datum arcum, vt lineā rectam vnius secundi, nempe pro ipsa portione sinus subtensa vsurpamus, tanquam notam in partibus arcuum, & in partibus sinus totius ex ratione propos. 13. huius & minorem subtēsam perquirimus, vt innotescat in partibus arcus, à quo sensibiliter non differt.

PROBL. XIII. PROPOS. XV.

Arcuum in tabulis non repertorum sinus cognitos proximè exhibere.

QVia sinus in tabulis, vt plurimum vsq; ad minuta tantū calculata sunt, & aliquādo diligetior calculus exposcit, vt etiam secundorum sinus obtineātur. Inde est, quòd ex antec. prop. ratione possimus etiam sinum reperire: Nam sit datus arcus Gr.56. m.26. sec.33; Et differentia inter sinum Gr.56. m.27. sit 1608. Dices itaque regula proportionū; si sec.60 quibus differt arcus minor à maiore dant par. 1608. quid m.33.? & exhibebit operatio partes 884. quæ additæ sinui minori 8332431. ficient sinum 8333315. parùm differentem à superiori.

EXPENSIO II.

De triangulorum rectangulorum mensuratione adhibitis logarithmis.

OPortet priùs noscere, quomodo ipsi logarithmi cuiuslibet dati numeri ex tabulis logarithmicis eruantur, antequam ipsorum logarithmorum sinubus annexorum calculum doceamus.

Si quis commodè vult vti logarithmis oportet numeros exibitos esse maiores, vel tribus saltem, vel quatuor notis expressos. Alioquin, si duabus tantùm notis exprimantur, superfluum erit ad logarithmos recurrere, cùm facilis se se efferat calculus sine ipsis, & minùs præcisè inuenti logarithmi, minùs quoque calculum præcisum dabunt.

Si verò numerus sit maior 7. figuris sc. quàm quòd ij, qui in tabulis, sinus exarati sunt illi per 10. aut 100. Sunt diuidendi abiectis duabus figuris ad dextram, vel tribus; vt ad eundem numerum redigantur, & tandem illo numero quærendus est sinus in tabulis, vel tangens, qui illi prorsùs conueniat, vel saltem ab eo parum differat, & illius sinus logarithmus erit, etiam logarithmus numeri dati.

Sit datus numerus 394. augeatur quatuor zifris & sit 3940000. & reperiemus similimum sinum 3942093. cuius logarithmus est 9308731. qui quæritur. Item sit datus numerus 4397652(94. maior, quàm, qui in tabulis reperiri solet, abijciatur duæ figuræ extremæ 94. & quæratur reliquo 4397052 sinus similimus 4396789, cuius logarithmus est, qui quæritur 8217134.

Regulæ quidem traduntur à Nepero, & alijs, quibus logarithmi non præcisi ad præcisos redigantur: sed istæ, iam ob additiones plures laboriosæ esse incipiunt; Vnde iam logarithmi instituti ad leuamen laboris, effecti grauioris operis, vsu suo non minuere laborem, sed augere videntur, & propterea à nobis prætermittuntur, maximè, quia ad Geodesias ordinarias præcisio adeo exquisita, scrupulosaque superflua sit.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

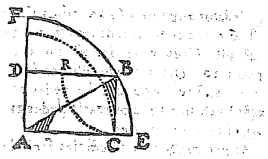
In rectangulo logarithmus cruris æquatur logarithmo anguli oppositi, & logarithmo Hypotenusæ.

PRobatur. Nam basis AB rectanguli ABC deseruit pro radio, & crus BC pro sinu anguli oppositi, ex prop.1. huius. Vnde radius 1000000. partes sc. habebunt ad quascumque mensuras basis V. g. pedes, vt BC sinus anguli oppositi in ijsdem partibus sinus totius expressus ad pedes BC cruris ex prop.13. ostensione: Sed in quatuor proportionalibus logarithmus mediorum æquatur logarithmo extremorum. Quadere logarith. sinus totius erit logarith. primi proportionalis, secundi erit logarith. sinus totius, vt pedibus constantis tertij verò logarith. sinus B anguli oppositi, quartus ignotus; itaque aggregatum mediorum logarithmorum secundi, & tertij proportionalis æquabitur logarithmo quarti, & primi s. sinus totius, sed primi logarithmus ponitur in tabulis 0. Ergo proportionalis quarti logarithmus. Cum additio zifræ illum non augeat, æquabitur logarithmorum mediorum proportionalium sc. sinus anguli, & pedum datorum basis, seu sinus totius, vt in pedibus cogniti: vnde ille logarith. erit logarith. cruris BC in pedibus noti.

THEOR. II. PROPOS. XVII.

In rectangulo logarithmus cruris est æqualis aggregato ex logarithmo tangentis oppositæ, & logarithmo reliqui cruris.

QVonIam si crus BC statuatur pro radio alterum crus AC est tangens, ideo crus, vt radius ad se, vt notum in alijs partibus, quæ sint V.g. pedes est, vt crus velut tangens ad se, vt notum quoad eadem partes s. pedes ex ostens. propos.13.



Cumque in quatuor proportionalibus aggregatum mediorum æquetur aggregato extremorum logaritmus tangentis AC, & logarithmus pedum cruris alterius CB aggregati erunt æquales aggregato logarithmico sinus totius CB, & pedum cruris AC. Sed logarithmus sinus totius est 0. Ergo logarithmus pedum cruris AC erit aggregatum logarithmorum cruris AC, vt tangentis, & CB, vt pedibus mensurati cruris.

PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Hypothenusa cruris, & angulo, quem crus subtendit, duobus quibuslibet datis tertium reperire.

DEtur basis AB pedum 30. ideſt vnciarum 360. & additis quatuor zifris 3600000. & angulus A Gr.15. & quæratur crus. Sinus 25881904. cuius logarithmus est 13516255. Sinus verò similimus basi 3600000. est 3602682. logarithmusque 10209063. Vniantur simul isti duo logarithmi, vt vides.

13516255
10209063

23725318

Quæraturque hic logarithmus 23725318. & ei similimus 23725832 inuenietur, qui dabit sinum 932395. auser itaque quatuor figuras iuxta quatuor zifras, quas basi addidisti ab ipso sinu, & erunt vnciæ 93. ideſt pedes 7. & $\frac{1}{4}$, vel $\frac{1}{3}$, vt proximè inuenimus propos.3. Pro crure quæsito.

Aliud quoque exemplum erit. Si detur basis AB vnciarum 360. Angulus verò A Gr.15. & quæratur crus adiacens AC. Accipe sinus complementi logarithmum, nempe Gr.75. cuius logarithmus est 3015 44. Addeque logarithmo sinus basis quatuor zifris adauctæ supra inuentæ 10209063. & fiet logarithmus 10510607. qui quæsitus in tabulis non inuenitur quidem; sed ei similimus 10515669, qui dat sinum 3493899. abiectis itaque quatuor figuris, quia quatuor zifras addidimus basis sinui, prodibunt 34. & 9. vnciæ, ideſt 29. pedes $\frac{1}{4}$, vt proximè inuenimus propos.4. pro crure.

Tertio pro casu, quo sinus totus venit tertio loco. Sit data basis 360 vnciarum, crus 300. vnciarum sc. 25. pedum. Auge vtrumque 4. zifris, vt sint basis quidem 3600000. at cruris 3000000. & deinde reperi ei similimos sinus basis quidem, vt supra, cuius logarithmus est 10209063. at verò cruris sinus 3001510. cuius logarit. est 12034696. Auferatur itaque ab hoc logarithmo logarithmus basis, & remanebit 1825633, qui quæsitus in tabulis inuenietur ei similimus 1824299 qui est Gr. 56. m. 26. vt reperimus pr.6. pro angulo quæsito.

Patet autem ex prob. præced. Nam sinus totus, crus sinus anguli oppositi, & basis sunt quatuor proportionalia, quorum quodlibet 4. loco potest venire, sed de sinu toto numquam quæritur, tria ergo reliqua duo dantur, & tertium semper quæritur: Si ergo sinus totus veniat primo loco tunc aggregandi logarithmi sunt, vt fiat logarit. exoptatus, vt primo, & secundo exemplo; si verò secundo loco veniat; tunc logarithmus minor subducendus est à maiore, & residuum est logarithmus, qui desiderabatur, vt tertio exemplo. Quoniam tunc cùm alter mediorum proportionalium sit logarith. 0. nempe sinus totus, alter erit æqualis se solum extremorum logarithmo, quare si ab eo auferatur logarithmus primus relinquetur logarithmus quartus quæsiti proportionalis.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Datis crure quocumque, & angulo alteri eorum opposito duobus quibuscumque tertium reperire.

DEtur crus BC pedum 25. ideſt vnciarum 300. & crus aliud AC pedum 32. ideſt vnciarum 384. & quæratur angulus A oppositus primo cruri BC. Itaque sinui 3000000. quatuor zifris aucto, reperiatur sinus propinquissimus in tabulis 3001510. & assumatur eius logarithmus 1203 696. deinde sinus aucti quatuor zifris 3840000. sinus propinquissimus inuentus sit 3840267 cuius logarithmus 9570427. & quia in regula proportionum sinus totus caderet secundo loco, subducatur minor à maiore, & residuabitur logarithmus 2632269 tangentis. Quære ergo in tabulis hunc tangentis logorithmum, & inuenies 24682434. tangentis Gr.38. esse ei similimum. Quare arcum Gr.38. assumes pro mensura anguli quæsiti, vt prop.12.

Alterum exemplum erit. Detur crus BC oppositum pedum 20. & angulus A ei oppositus A G.32. & quæratur crus adiacens, cuius complementum est Gr.58. Reijcies itaque 20. pedes in vncias 240. & additis quatuor zifris, vt sit 2400000. inuenies sinum ei similimum 2402280. cuius logarithmus est 14261662. Deinde inuenies tangentis differentialem anguli 58. deffectiuam 4708126. eo quod sit complementi ex Cor. prop.26. Tract.21. quâ subduces à sinus illius logarithmo 14261662. & residuum erit logarithmus 9559536. cui logarithmus similimus quæsitus in tabulis est 9556451. cuius sinus est 3845538. abiectis itaque quatuor figuris iuxta 4. zifras à iectas erit crus alterum vnciarum 384. nimirum pedum 32. vt supra propos. 11. Vbi debes notare, quod tangentis logorithmus licet iuxta regulam esset addendus iuxta tam Coroll. prop. 26. Tract. 21. subducendus est, eò quòd consideratus, vt complementi maioris, quam Gr.45. sit defectiuus.

At si queratur crus oppositum, & detur BC pedum 32. ideſt vnciarum 384. & B angulus Gr.58. oppositus, cuius complementum est angulus 32. cuius sinus 2599192. differentialisque 4708126. at verò cruris BC vnciarum cum additis zifris 3840000. est similimus sinus 3840267. cuius logarithmus 9570417. Addantur itaque simul hic logarithmus, & differentialis ex Coroll. prop. 26. tract. 21. de logarith. eritque summa 14272553. qui quæsitus in tabulis non inuenietur: sed ei omninò similis 14261662. qui dat sinum 2402280. cruris quæsiti, ideſt vncias 240 reiectis quatuor figuris ob quatuor zifras additas; quæ sunt pedes 20. vt propos. 11. h.

EXPENSIO III.

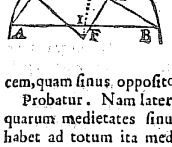
De triangulorum obliquangulorum resolutione.

OBliquangulorum resolutio, & mẽsuratio parum difficilior; Vocamus autem crura duo latera angulum maiorem stipantia, & illum angulum verticalem, sicut latus, quod ei opponitur à nobis dicitur basis.

THEOR. I. PROPOS. XX.

In omni triangulo crura inter se eam rationem possident, quam sinus oppositorum angulorum.

SIt triangulum quodcumque, sed vt nobis videtur obliquangulum ACB, circùm quod ex doc. prop 5 lib. 4. Elem. circumscribatur circulus ACGB: Ducanturque rectæ à centro F ad medietates crurum I, E, D, & Dico, quod crura eam proportionem possident ad inuicem, quam sinus oppositorum angulorum.



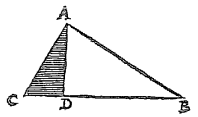
Probatur. Nam latera, vt vides sunt Chordæ, quarum medietates sinus sunt; sed vt totum se habet ad totum ita medietas ad medietatem ex prop. 18. lib. 5. Ergo si crus est, respectu alterius vt chorda AC ad chordam CB, erit etiam, vt sinus CI ad sinum CE.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

In omni triangulo ſicut medietas ſummæ ſinuum duorum laterum ad differentiæ eorum medietatem; ſic & tangens medietatis ſummæ angulorum oppoſitorum ad medietatis eorum differentiæ tangentem.

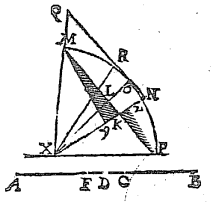
SIt triangulum ACB, cuius duo anguli A, & B ſcilicet arcus eos menſurantes ſuper arcum PNM in altera figura menſurentur, ita quod arcus OP ſit menſura anguli A, & arcus OM ſit menſura anguli B, & arcus O 2 ſit ſemidifferentia eorum, cuius tangens eſt ON, ſicut medietatis ſummæ tangens eſt QO.

Rurſus latera AC, & AB in vnã ſummã redigãtur menſurando ea ſuper rectam AB, cuius medietas AD maiuſque crus ſit AC, & minus CB ſemidifferentiaq; inter ea ſit DC cum tota ſit FC. Dico itaque, quòd ſicut eſt dimidia ſumma AD crurum ad dimidiam differentiam eorum DC, vel FD; Sic eſt tangens OQ dimidiatæ ſummæ angulorum ad dimidiatę eorum differentię tangentem ON.



Primò itaque ſciendum ducta ad baſim in quocumque triangulo perpendiculari ſegmenta eſſe tangentes ex prop 20. lib.3. Elem. vt patet in triangulo XQN, in quo centrum X diameter XO, cuius 2 O, & O M arcus N tangentes ſunt, vtpote ei orthogonales ON, & OQ.

Secundò ex anteced. latera triangulorum eſſe, vt ſinus ad ſinum, & ideo AC crus in linea AB eſſe ad crus CB, vt ſinus MK anguli MXK, cui ex hypotheſi opponitur crus AC ad ſinum P 2 anguli PXK, cui opponitur crus CB ducta itaque MP.



Probatur propoſ. Triangula nigra ſunt equiangula ex prop.17. lib.1. Coroll. cum anguli apud Y, & apud 2. ex def. ſinus ſint recti, & anguli apud K ad verticem æquales: Vnde MK eſt ad KP baſes, vt crura YM ad 2 P, & ideo ex dictis; vt AC ad CB: Ergo *componendo* MK cum KP erit ad KP, vt AC cum CB ad CB, & ex prop.18. lib.5. Elem. medietas ML priorũ erit ad KP, vt medietas AD poſteriorem ad CB: Quare *dividendo* ML erit ad reſiduum LK ex KP, vt AD ad reſiduum DF, vel DC ex CB. Quamobrem medietas AD erit ad ſemidifferentiam DC, ſeu DF, vt LM ad KL; ſed ML ad KL eſt vt QO ad ON, ob parallelíſmum linearum QN, & MK in triangulo QXN. Ergo, vt AD ſemiaggregatum crurum ad eorum ſemidifferentiam FD, Sic tangens OQ ſemiaggregati angulorum ad tangentem ON ſemidifferentiæ eorum.

COROLLARIVM.

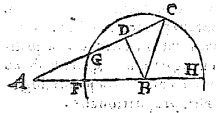
HInc eſt, quod etiam vt totum aggregatum ad totam differentiam crurum, ſic ex prop.18. tangens ſemiaggregati crurum ad tangentem ſemidifferentiæ eorum.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Im omnibus triangulis inæqualium laterum; ſi facto centro in angulo verticali ducatur circulus ad interiallum minimi cruris. Segmentum cruris ad ſegmentum baſis extra circulum remanentis eſt, vt baſis ipſa ad aggregatum crurum.

SIt triangulum ſcalenum ACB, cuius baſis AC angulúſque verticalis B, & in B fiat centrum, interualloque BC minimo crure circulus deſcribatur FCH. Dico, quod AF ſegmentum cruris erit ad AG ſegmentum baſis; vt AC ad aggregatum AB, & & BC, ſcilicet AH.

Probatur. Nam prop 36. lib.3. Elem. rectangula, quę ſiunt ex ſegmentis extra circulum remanẽtibus, & totis ſecantibus ab vno puncto demiſſis omnia ſunt æqualia, & ideo AC, & AG rectangulum æquabitur rectangulo AF, & AH. At ex propoſ. 10. lib.6. rectangula æqualia habent latera reciprocè proportionalia. Ergo ita erit latus AF rectanguli ex AF, & AH ad latus AG rectanguli ex AG, & AC, vt latus AC ipſius rectanguli ad latus AH rectãguli prioris, quod eſt aggregatum cruris AB, & BC, cum BH, vtpote radius ſit ei BC æqualis.



PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Datis angulis, & crure inuenire aliud, aut baſim.

IStud prob. fundatur in 20. propoſ. Quoniam enim ſunt latera innicem, vt ſinus oppoſitorum angulorum, ſi primo loco ponatur ſinus anguli oppoſiti, ſecundo crus cognitum, tertiò ſinus anguli oppoſiti lateri quæſito, inueniemus crus, vel baſim quæſitam.

Pro exemplo detur angulus A in fig.p.20. cognitus 25. G. cuius ſinus eſt 42226183. & crũs oppoſitũ CB 35. pedũ, angulus quoq; alter acutus B cognitus ſit 20. Gr. cuius ſinus eſt 34202o1. Dicesitaq; ſi ſinus CE anguli A 42226183. dat pedes 35. quid dabit 34202o1. ſinus DC anguli B, & adhibita regula proportionum exhibebit 28. & $\frac{1}{7}$ ferè.

Quod ſi velis reperire baſim, idem prorſus efficies, ſed ſi ſit angulus obtuſus, cùm ſit maior quadrante habebit pro arcu arcum ipſum reliquo rum angulorum ſimul aggregatorum ſc. arcuum ACB, & eorum ſinus AI, vel IB pro ſinu cruris ſumendus eſt.

PROBL.

PRORL. II. PROPOS. XXIV.

Duobus lateribus, & angulo datis vni eorum oppoſito inuenire angulum cruri cognito oppoſitum, & etiam angulum reliquum.

HÆc propoſitio ab eadem propoſ.20 naſcitur, vnde exemplo ſolo patebit. In fig.prop.20. Sint data duo latera BC 40. pedum, & AC 25. & angulus huic oppoſitus B Gr.18. Sicut itaque crus 25. pedum ſe habet ad ſinum DC anguli B, par. 3090170. ita pedes 40. ad ſinum CE anguli A & dabit 4944278. quam non reperies, ſed propinquiſſimum 4944476. Gr 29. m.22. quem vel pro vero recipies angulo A, vel rectificabis ex dictis prop. 14. huius.

PROB. III. PROPOS. XXV.

Duobus lateribus, & angulo verticali contento datis angulos alios reperire.

ISta propoſ. fundatur in prop.21. Detur itaque angulus Gr.27. cruſque 40. AB, & aliud 34. pedum, quæ illum claudant; quorum ſumma eſt 74. medietas 37. differentia verò 6. Cumque habeamus angulum Gr.27. & omnes cuiuſcumque trianguli anguli duobus rectis ſint æquales ex Coroll prop.17. lib.1. nempe Gr.180. hinc ablatis Gr.27. à 180. habebimus aggregatum cæterorum Gr.53. quæritur itaque differentia.

Medietas ſummæ angulorum eſt Gr 76. m.30. cuius tangens eſt par.41652974 medietas laterum 37. medietas differentię eorum eſt 3. Dices itaque regula proportionali ſi 37. pedes medietas crurum exhibet ſemidifferentiam eorum 3. quid medietatis angulorum tangens 41652974? & offeret tangentem 3377268. reperieſque tangentem proximam 3378331. Gr.18. m.40. qui arcus deducendus eſt à ſemiſumma angulorum Gr.76. m.30. & habebimus angulum minorem Gr.57. m.50. Addenduſque iterum, & obtinebimus angulum maiorem Gr 95. m.10.

Poteris etiam accipere differentiam totam laterum, & totã ſummã ipſorũ ex Cor. pr.21. quia ita eſt totum ad totum, vt dimidium ad dimidium.

PROBL. IV. PROPOS. XXVI.

Triangulum ſcalenum ad duo triangula rectangula reducere datis cruribus, & baſi.

SIt reducendum triangulum ACB ad duos rectos ADB, & DCB datis cruribus, hoc fit ope prop. 22. huius adhibita eius prop. fig.

Primo reperienda eſt portio CG per regulam auream, quæ diuiſa bifariam, vtpote chorda dabit ſinum CD, cui incidit perpendicularis tor DB ex def. ſin. & ex prop.13. lib.3. Elem. ſic autem fit, detur baſis AC 9. Aggregatur priùs DC 4. & AB 7. & erit 11. pedum, linea AH. Auferatur, deinde 4. à 7. nempe BC; vel BF ab AB, & erit reſiduum AF pedum 3 Dices itaque ſi 9. dant 11. quid 3? & enaſcetur ſegmentum baſis AG pedum $3\frac{2}{3}$, ideſt 3. & $\frac{2}{3}$. Quærè reliquũ erit GC $5\frac{1}{3}$, cuius medietas DG, vel DC erit $2\frac{2}{3}$, & addito DG ipſi AG prodibit crus AD $6\frac{2}{3}$, erunt que duo triangula rectangula in cruribus duobus nota ABD, & DBC.

PROBL. V. PROP. XXVII.

Trianguli ſcaleni datis cruribus angulos reperire.

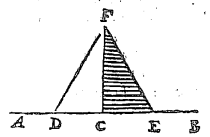
QVoniam iam nouimus ex antec. in duo triangula rectangula ſcalenum commutare, de quibus cognoſcimus crus AD, & $6\frac{2}{3}$, & DC pedum $2\frac{2}{3}$; ſicut baſim BA 7. pedum, & BC 4. & agentes de rectangulis diximus, ita eſſe baſim ad crus, vt ſinus totus ad ſinum anguli oppoſiti.

Si fiat per auream regulam, vt 7. ad $6\frac{2}{3}$, vel vt 21 ad 19. ita radius 10000000. ad aliud? dabit 9042857. ſinum, cui proximus eſt ſinus 90410o8. Gr.64. & m.43. proximè anguli ABD, quem ſubtrahes à 90. & habebis angulum DAB Gr.25. m.17. Ita ages in triangulo DBC, conſequeris enim baſim BC pedum 3. & DC pedum à $\frac{2}{3}$, ideſt obtines proportionem, quæ eſt 18. ad 16. Dices itaque ſi 18. dant 16. quid 10000000? & ab operatione reſultabit 8888880. cui reperies proximũ ſinum 8888839. Gr.62. m.44. anguli DBC, quem ſubduces à 90. & reſiduus angulus erit DCB Gr. 64. m.43. ſi verò vnias angulos ad B repertos Gr.64 m.43. & 62. m.44. obtinebis angulum totum Gr.127. m.27.

PROBL. VI. PROPOS. XXVIII.

Data baſi, & crure in iſoſcelibus triangulis angulos reperire.

QVoniam ex propoſ.19 lib.1. Elem perpendicularis CF in triangulo iſoſcele DFE facit angulos ad C rectos, & æquales, & totum triangulum album toti nigro æquatur; ſi detur crus, & dimidiata baſis, poterimus ex precedenti quærere angulum oppoſitum nigrum F, & ideo lucrabimur



quoque angulum E nigrum, qui æquantur angulis albo F, & albo D. Quare, ſi coniungantur anguli albus, & niger ad F habebimus totum angulum ſeminigrum F. Vnde omnes anguli trianguli æquicruris in palàm prodentur.

EXPENSIO IV.

De obliquangulorum dimenſione per logarithmos.

NOn minus euadit facilis logarithmica operatio in obliquangulis triangulis, quàm in rectangulis, inititurque tota in precedentibus tribus obliquangulorum Theorematibus.

THEOR.

THEOR. I. PROPOS. XXIX.

In omni triangulo aggregatum ex logarithmis anguli cuiuſuis, & cruris eum ambientis æquatur aggregato crurum, & angulorum eis oppoſitorum.

QVoniam ex 20. propoſ. omnium crurum ad ſinus oppoſitorum angulorum eadem eſt ratio, & hinc genitus ex crure oppoſito, & ſinu ambiente æquatur producto per multiplicationem alterius ſinus oppoſiti, & cruris ambientis, & ideo productum diuiſum per ſinum alterum, vel per crus dat alterum crus, ſeu angulum ignotum; Ita etiam ex pr. 5. tract. 21. aggregatum logarithmorũ cruris, & ſinus aggregato alterius ſinus, & cruris logarithmico æquatur. Vnde ſubducto alterum ab altero, logarithmus eius, quod quæritur prodire neceſſe eſt; ſic in triãgulo ACB in fig. p. 20 logarit. AC cruris oppoſiti, & logarithmus CE ſinus ambientis æquatur logarithmico aggregato ſinus DC, & cruris CB. Vnde ſi ab aggregato logarithmico AC, & CE auferatur logarithmus, vel DC ſinus prodibit crus CB logarithmicum, vel CB cruris logarithmus, & proferetur logarithmus ſinus DC.

THEOR. II. PROPOS. XXX.

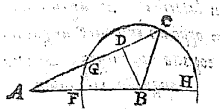
In obliquangulis logarithmus aggregati crurum ſubductus à ſumma logarithmi differentiæ crurum, & differentialis ſemiaggregati ſuorum oppoſitorum angulorum relinquit differentialem ſemidifferentiæ eorumdem angulorum.

HÆc propoſ. fundatur in propoſ. 21. Coroll. Nam quia ita eſt ſumma crurum ad differentiam eorum, vt tangens ſemiaggregati angulorum ad tangentem ſemidifferentiæ eorum. Etiam logarithmus tangentis ſemiaggregati angulorum, & logarithmus differentiæ crurum, nempe mediorum terminorum æquabuntur logarithmo tangentis ſemidifferentiæ angulorum, & aggregato logarithmi crurum nempe terminorum extremorum iuxta propoſ. 5. Tract. 21.

THEOR. III. PROP. XXXI.

In obliquangulis ſumma logarithmorum aggregati crurum, & differentiæ eorum eſt æqualis ſummæ logarithmorum baſium veræ, & alternæ.

HÆc propoſ. initur propoſ. 22. huius, appellamus autem baſim alternam ſegmentum baſis veræ, quod extra circulum remanet, vt AG: Quoniam verò eſt AF differentia crurum ad AG baſim alternam, vt AC baſis vera ad AH aggregatum crurum, ideo logarithmi quoque mediorum AG baſis alternæ, & AC baſis veræ æquabuntur logarithmo differentiæ AF, & aggregati AH ex 5. prop.



tract. 21. Vnde ſi ab aggregato AF, & AH logarithmico auferatur logarithmus baſis AC, eueniet logarithmus alternæ baſis AG.

PROBL. I. PROPOS. XXXII.

Ex duobus angulis, quibuſcumque datæ ſpeciei, & ſuis cruribus, ſi tria dantur quartum quodcumque reperimus.

DEtur angulus A Gr. 25. & logarithmus eius 8612856. & crus oppoſitum CB 35. pedum, ideſt vnciarũ 420. additis 4. zifris erunt 4200000. cuius proximus logarithmus eſt 8667191. Angulus autem alter B Gr. 20. cuius logarithmus 10728852. Qui iunctus logarithmo cruris CB dabit aggregatum 19398044. à quo deductus logarithmus alterius anguli A Gr. 25. remanebit logarithmus 10785188. cui in tabulis valdè ſimilis eſt 10784974. cuius ſinus eſt 3401060. nempe abiectis 4. figuris dextris vnciarum 340. vel pedum 28 $\frac{4}{12}$.

Quod ſi datis duobus cruribus, & angulo velis alium angulum reperire eodem modo rem perficies.

Patet autem operatio ex prop. 28.

PROBL. II. PROPOS. XXXIII.

Datis cruribus, & angulo comprehenſo alios angulos patefacere.

DEtur angulus comprehenſus Gr. 27. crus AB pedum 40. ideſt vnciarum 480. & aliud pedum 34. ideſt vnciarum 408. Summa crurum erit 888. differentia 72. vnciæ, medietas verò ſummæ 153. reliquorum angulorum eſt 76. m. 30.

Aggregati crurum 888. additis quatuor zifris, vt ſit ſinus 8880000. logarithmus proximus eſt 11884406. ideſt ſinus proximi minoris 8979491. Differentiæ eorumdem 720000. quatuor item zifris auctæ, ideſt ſinus ſimilis 720777. logarithmus proximus eſt 26300094. At differentialis, ſeu logarithmus tangentis ſemiaggregati angulorum Gr. 76. m. 30. logarithmus eſt 14267876. Deme itaque hunc logarithmum à logarithmo differentiæ crurum; quia differentialis eſt deffectiua, cùm eius arcus excedat Gr. 45. vnde vice additionis ſubductione vtendum eſt ex propoſ. 26. tract. 21. & remanebit 10843812. ideſt differentialis, & logarithmus tangentis Gr. 18. m. 40. quaſi m. 41. Itaque ſi addas Gr. 18. m. 40. ſemiaggregato crurum erit maior angulus 95. m. 10. Si demas conſequeris angulum minorem Gr. 57. m. 50.

Patet propoſ. ex propoſ. 29. ibi enim probatur aggregatum logarithmorum differentiæ crurum, &

& tangentis ſemiaggregati angulorum æquari ſummæ logarithmi aggregati crurum, & logarithmi tangentis ſemidifferentiæ angulorum.

PROBL. IV. PROPOS. XXXIV.

Obliquangulum datorum crurum ad duo rectangula reducere.

SIt baſis 49. pedum, & latus 4. & aliud latus 7. Addatur logarithmus aggregati crurum pedum 11. vel vnciarum 132. differentiæ eorumdem pedum 3. vel vnciarum 36. additis quatuor zifris vt ſit 1320000. Itaque huius num. in tabulis ſinus proximus eſt 1319681. cuius logarithmus eſt 2023080. & ideo ſubſtituendus pro ipſo ſummæ crurũ logarith. Itẽ differentiæ 360000. ſinus proximus eſt in tabulis 360623. & ideo etiã logarithmi eiuſdem differentiæ 33225056. Cõiunges igitur iſtos duos logarithmos ſimul, & erunt 53455176: Poſtea baſis pedum 9. ideſt vnciarum 108 quatuor zifris auctę, vt ſit 1080000. reperies ſinum ſimillimum in tabulis 1079994. cuius logarithmus eſt 2223-6290. Huiac itaque logarithmum à ſumm 5345-5176. ſubducito, & erit logarithmus 3118886. qui dabit ſinum 442006. à quo abiectis quatuor zifris reſtabunt vnciæ 44. ideſt pedes 3, & $\frac{8}{12}$, pro ſegmento baſis alternæ. Cętera autem exequeris, vt propoſ. 26.

Patet hæc praxis ex propoſ. 30. cùm ibi probatum ſit aggregatis crurum logarithmum, & differentiæ eorumdem in vnam ſummam redactum æquari ſummam logarithmorum baſis veræ, & alternæ. Quare ſubducto logarithmo baſis veræ remanebit logarithmus baſis alternæ.

Habitis autem duobus rectangulis, anguli eorum reperientur per logarithmos, vt Expenſ. 2. docuimus.

TRACTATVS XXVII.

TRIGONOMETRICI PARS II.

De Triangulis Sphæricis ſoluendis.

TRiangulorum ſphæricorum doctrina aſtronomiæ, & aſtrologiæ baſis eſt, nullúſq; ſine ipſa in illis proficere, aut aliquid ritè cognoſcere poteſt: ſed ſicut præcipuæ vtilitatis referta eſt, ſic non minima difficultas in demonſtrationibus penitùs percipiendis dignoſcitur: vnde multi de hac cognitione haurienda diffiſi ſolis praxibus potiùs incubuere. Nos, vt tam præcipua Mathematicæ pars etiam imaginationibus minus viuacibus pateret clariùs, quàm fieri potuit, tum verbis, tum figuris cum difficultate decertauimus.

EXPENSIO I.

De rectangulis ſphæricis ſoluendis.

SOluere triangula ſphærica eſt ex datis aliquibus partibus alias manifeſtare, in quo negotio ritè peragendo videnda ſunt ea, que diximus prop. 14. & 28. & Coroll. tract. 23. part. 2. vbi euitare fallacias, & amphibologias docemus; ne pro latere, aut angulo quæſito, alium inueniamus, & loco quæſiti adhibeamus; & vt ſecuriùs id fiat, ſatiùs erit vti ſemper triangulo, cuius duo anguli ad baſim ſint quadrante minores, & tales erunt ex cit. Coroll. ſi, & arcus, cruraque ſubtenſa ſint quadrante minora, non verò ſi vnus ſit acutus, alter obtuſus angulus, aut crus vnum quadrante minus, alterum verò maius. Quomodo verò poſſimus ſemper vti triangulo duos angulos acutos habente infrà docebimus, cum de ſubſtitutione.

Aduerte autem, baſis in iſtis triangulis ſibi nomen vſurpare crus angulo recto oppoſitum, crurum verò arcus, qui obliquis ſubtenduntur, angulus verò adiacens vocatur, qui adhæret cruri, quod efficitur à baſi, & altero crure.

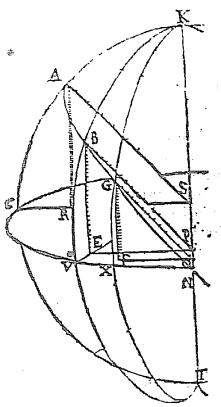
THEOR. I. PROP. I.

Triangula ſphærica duobus circulis inclinatis effecta, & tertio quocumque alteri ipſorum perpendiculari habent ſinum cruris ad ſinum baſis in eadem proportione.

SInt duo circuli inuicem inclinati AEN, & CVN, & alij circuli perpẽdiculares, vt KCT, KBVT, & GXT alteri ipſorum, vt circulo CVN deſcendant, & cõpleant triãgula ſphærica rectãgula ACN, VBN, & XGN. Dico, quod ita eſt ad ſinum FG cruris GX ſinus GO baſis GN, vt ad ſinum BE cruris BV ſinus DF baſis BN, & ad ſinum RA radius AS.

Pro-

Probatur. Sinus totus SA, & BP, & GO sunt paralleli, ita sinus RA, EB, & FG sunt paralleli. Ergo triangula RAS, & EBP, & FGD sunt æquiangula, cum parallelis claudãtur. Quare ex propos. 4. lib. 6. Elem. ita est AS ad AR, vt BP ad BE, & OG ad GF.



Quod autẽ sinus EB, & FG, & RA sit paralleli patet (& deseruiat pro vniuersali ostensione in alijs) nã debẽt esse ex def. sinus perpẽdiculares radijs V. g. AR sinus radio CS, vel sinus EB ei, qui transiret ab V per E in S, & cæt. quibus omnibus, vtpote in eodem plano positis perpendicularis est SK sectio planorum circulorum perpendicularium communis ex propos 16. tract. 22. de intersect. Cum ergo singuli sinus AR, & EB, & GF sint perpendiculares radijs: quibus, & perpendicularis est SK, & in eodem plano, vt SK singuli sint; Ergo ipsi SK sunt paralleli: quare ex prop 9. tract. 22. etiam inter se.

Idem ostendetur de sinubus basium AS, & BP, & GO cum ex def. sinus sint omnes perpendiculares sinui toti NS, & in eodem plano sint circuli ABN, quare omnes erunt paralleli.

COROLLARIVM.

OBserua autem, quod AR mensurat angulum ANC. Quoniam KAT ductus est polo N; vnde circuli inclinati inuicem ABN, & CVN transeunt per polum N, quadere etiam circulus KAT per polos illorum transibit ex 15. tract. 21. part. 1. & hac ratione ex prop. 14. eiusdem tract. erit KAT vtrique perpendicularis, ideoque arcus AC. ex def. 6. tract 21. part. 1. angulum ANC mensurabit, & AR erit sinus illius anguli sc. arcus AC. Quamobrem erit sinus totus AS ad sinum anguli AR, vt sinus basis BP ad sinum cruris BE illi oppositi.

THEOR. II. PROPOS. II.

Triangula sphærica duobus circulis inuicem inclinatis effecta, & tertio quocumque alteri ipsorum perpendiculari habentes sinum anguli recti, idest sinum totum ad sinum basis, vt sinus anguli obliqui ad sinum cruris.

QVoniam eadem figura vtendo AS sinus totus est ad AR sinum anguli, vt basis BP ad sinum BE cruris; erit etiam *permutando* sinus totus AS ad sinum basis BP, vt sinus anguli AR ad sinum cruris BE.

PROBL. I. PROPOS. III.

Dato radio, sinu anguli, & sinu basis latus oppositum angulo dato inuenire in rectangulis triangulis.

QVoniam ex anteced. 1. & 2. propos. AS est ad AR, vt PB ad BE, ideo si detur AS sinus totus AR sinus anguli PB sinus basis per regulam auream episcabitur sinus BE cruris BV, qui debebit esse specie cõformis dato angulo. Exẽpli erit. Sit basis data Gr. 50 cuius sinus 7660445 angulus Gr. 30. m. 30. Sinus verò 5075384. & sinus totus. Dicaturque; si sinus totus dat sinum anguli Gr. 30. m. 30. par. 5075384. quid sinus basis 7660445. & prodibit sinus cruris anguli dato oppositi par. 3887969. Gr. 22. m. 52. & paulò magis. Debet autem hoc crus conformari specie angulo opposito dato ex prop. 28. tract. 23. Cor. 5.

COROLLARIVM.

HInc educes posse alias comparationes fieri, sed paulò in opere laboriosiores, quæ sunt.

Dato sinu basis BP, & sinu cruris BE, & sinu toto AS reperire sinum AR anguli oppositi N cruri dato EB.

Sic etiam dato CNA anguli sinu RA, & sinu toto AS, & sinu cruris EB reperies basim BP: sed hæ operationes ob diuisionem, quæ debet fieri cum sinus totus 2. loco inuenitur, sunt paulò operosiores, & in his debet aliqua reliquarum partium cognosci quadrante minor V. g. quod crus BV minus quadrante, vel angulus VBN sit acutus.

THEOR. III. PROPOS. IV.

In omni triangulo sphærico rectangulo proportio sinus anguli recti ad sinum anguli non recti, est vt sinus complementi cruris reliquum angulum subtendentis ad sinum complementi ipsius anguli reliqui.

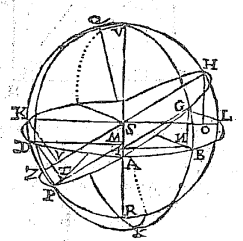
SIt triangulum GBA factum ex duobus circulis inclinatis EGAZ, & EBAR, claudatque alterum latus arcus descendens circuli VGBX perpendicularis super circulum EBAK.

Sitque GN sinus cruris GB, & GI sinus basis GA, sicut HO sinus arcus LH mensurantis angulum A. Numeratis autem à puncto G 90. Gr. & in G facto polo ducatur arcus QPX perpendicularis circulo HAZ; & circulo VGX ex Coroll. 1. propos. 13. Tr. 19. cum polus sit in cõmuni puncto A. Quare GBX, & GAP erunt quadrantes ex prop. 13. eiusdem Coroll. 2. Illud autem, quod in primis est ostendendum BAD, & XPD esse quoque quadrantes.

Probatur autem: Nam VGX circulus secat XPQ circulum orthogonaliter, vt diximus, & bifariam cum sint maximi; Ergo ex prop. 13. tract. 23. etiam per polos eius circulus QPX transibit. Pariter quoque EBAK circulus eundem VGX secat orthogonaliter ex dictis, & bifariam, cùm sint maximi. Ergo ex prop. 13. cit. per polos eius circulus BAD transibit. Quapropter in eodem polo circuli VGX duo circuli EAK, & XPQ conuenient in D. Sed post ex

ex Coroll. 3. prop. cit distant quadrante, à circulo, cuius sunt poli. Ergo BAD, & XPD quadrantes sunt cùm debeant distare ab X, & G punctis circuli VGX quadrante. Propterea AD erit complementum arcus BA, cruisque PD erit complementum arcus CRUIS BA, & PD erit complementum arcus XP, qui mensurat angulum G cum circulis XBG & GAP ex effectione sit perpendicularis. Quadere MD erit sinus arcus AD complementi cruris BA, & DT sinus arcus DP complementi anguli G.

Dico itaque sinum totum HS ad sinum HO anguli obliqui A dicere eam proportionem, quam sinus DM complementi cruris adiacentis AB dicit ad sinum TD complementi reliqui anguli G.



Probatur autem ex præhabitis. Nam propos. 1. ostendimus, quod sit, vt SK ad KY, sic MD ad TD quod descendat super alterum inclinatorum HGAP perpendicularis circulus XPQ. Sed SK æquatur SH, cùm sit sinus totus, & KY æquatur sinui HO, cùm sint sinus angulorum æqualiũ ex prop. 3. par. 2. tract. 23. cum sint ad verticem A, & ideo arcus HL, & XK eos mensurantes erunt æquales: quare etiam sinus HO, & KY subtensi erunt æquales. Quadere ex 7. lib. 5. erit SH ad HO sinus totus ad sinum anguli HAL non recti, vt MD sinus complementi AD cruris BAad TD sinum complementi anguli reliqui G.

PROBL. II. PROPOS. V.

Dato radio sinu anguli, & sinu complementi cruris angulo dato adiacentis inuenire angulum reliquum.

QVoniam radius est ad sinum anguli OH, vt ad sinum TD complemẽti anguli reliqui G sinus MD complementi cruris, ideoque. Si statuatur I. loco radius, 2. sinus anguli A, sc. HL arcus 3. sinus complementi cruris adiacentis BA inuenietur sinus DT complementi anguli reliqui, nempe arcus PD, qui ablatus à Gr. 90. relinquet arcum exoptatum PX mensuram anguli G.

Exemplum. Sit arcus Gr. 39. m. 25. anguli A, cuius sinus 6349553. Crus AB Gr. 47. m. 30. cuius complementum sit arcus Gr. 42. m. 30. & eius sinus 6735902. qui multiplicabitur cum sinu anguli A, & proferet diuisus per sinum totum. Sinum 4289695. DT Gr 25 m. 24. & paulò magis, qui arcus deductus à Gr. 90. exibebit arcum XP Gr. 64. m. 36. Debent verò isti arcus dati anguli, & cruris esse quadrante minores ad hoc, vt cruris, accipiamus complementum ex prop. 28. tract. 23.

Quòd, & obseruandum est in reliquis praxibus, quando complementa intercueniunt pro arcubus accipiendis.

COROLLARIVM.

HInc quoque inuenies dato primò cruris BA complementi sinu MD, secundò anguli G complemento, cuius sinus DT, & radio, inuenies inquam sinum anguli A dato cruri adiacentis.

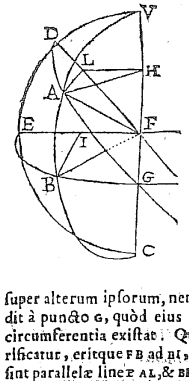
Sicut dato I. sinu HO, anguli adiacentis cruri BA, & 2. Radio, & 3. anguli reliqui G cruri dato oppositi complementi sinu DT, inuenies complementi AD cruris BA sinum MD; sed paulò maiori labore ob Radium, qui 2. loco incidit, & hic etiam aduertere oportet ad speciem, nam crus, quòd expromitur debet specie respondere angulo dato, vt sint ambo quadrante minores.

THEOR. IV. PROPOS. VI.

In omni triangulo sphærico rectangulo sinus quadrantis ad sinum complementi cruris eam obtinet proportionem, quam sinus complementi reliqui cruris ad sinum complementi basis.

SIt sphæra, in qua sit triangulum ABC ex circulis inclinatis inuicem DAG, & EBG, claudatque alterum latus arcus perpendicularis VABC. Eritque FB sinus totus, & BAV quadrans, & VA arcus complens crus BA vsque ad quadrantem VB, & sinus eius AH parallelus sinui toti BF in superficie circuli VABC descriptus. Arcus verò EB complentis crus BG sinus BI in plano circuli EBG. Sicut etiam arcus DA basim AG complentis sinus AL in planitie circuli DAG descriptus.

Dico itaque, quòd sicut se habet sinus totus FB ad sinum BI complementi cruris, ita in proportione assimilatur sinus AH complementi reliqui cruris ad sinum AL complementi basis.



Probatur ex 1. propos. h. Nam VABC, VDEC sũt circuli inclinati inuicem, & arcus EB circuli EBG mensurat angulum inclinationis ad V cùm polus eius sit in V. Vnde BV, & VE sunt quadrantes. Alius autem circulus DAG perpendiculariter super alterum ipsorum, nempe super VEC descendit à puncto G, quòd eius polus in circuli VEC circumferentia existat. Quare ea prop. 1. hic verificatur, eritque FB ad BI, vt AH ad LA, eo quod sint parallelæ lineæ AL, & BI, vtpote sinus perpendiculares semidiametris DF, & EF, & etiam BF, & AH eoquòd sint perpendiculares, vtpote sinus radio FV. Cum ergo lineę sint parallelæ erunt triangula æquiangula ALH, & IBF, & ideo latera erunt proportionalia, & erit FB ad BI, vt AH ad AL.

PROBL. III. PROPOS. VII.

Dato radio, & sinu complementi cruris, & complementi cruris alterius basim inuenire.

QVoniam est radius BF ad BI sinum complementi cruris BG, vt AH sinus complementi alterius cruris BA ad sinũ AL complementi basis; adhibendo regulam proportionum ex radio, & ex ijs sinubus datis complementorum crurum prodibit sinus complementi basis.

Exemplum. Sit datum crus Gr.42.cuius complementum G.48. & sinus 7431448. complementi huius, & alterum crus Gr.33.m.15. cuius complementum Gr.56. m.45. & eius sinus 8457278. Multiplicentur simul, & productum per radium diuidatur, prodibitque sinus complementi basis 6284982. Gr.38. m.56, & paulò magis, erit autem minor quadrante basis, si crura specie concordauerint; si verò dissentiant specie, maior quadrante ex prop.18. Tract.23. Cor.4.

COROLLARIVM.

HInc etiam enascitur; quòd dato sinu BI complementi cruris BG, & sinu toto, & sinu AL complementi basis, inueniatur sinus AH complementi cruris reliqui AB; Vel etiam dato AH sinu cõplementi cruris BA, & sinu complemẽti basis AL, & radio BF, inueniatur sinus BI complementi alterius cruris; Verùm cùm radius non veniat primo loco paulò operosior est calculus.

EXPENSIO II.

De tangentibus.

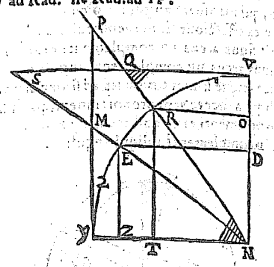
QVoniam per solos sinus trigonometria non est perfecta, cùm non omnes possint inquiri rectangulorum partes secundùm omnia data, per quæ inquisitio placeat ordiri, & etiam quædam per solos sinus laboriosiùs acquirantur, ideo, vt illorum defectibus succurrant, tangentes adinuẽtæ sunt, & secantes. Sed priùs de tangentibus in hac expensione tractabimus, cum ipsæ cum sinubus ad soluendos omnes casus trigonometriæ sufficere possint. Sed præter ea, quæ diximus prop. 24. & 25. Tract.20. hic etiam aliæ præuię propositiones statuendæ sunt.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Si sint duo arcus, ita erit tangens primi ad tangentem complementi posterioris, vt tangens posterioris ad tangentem complementi prioris.

SInt duo arcus primus RV, & EY secundus. Dico quòd sicut tangens prioris QV est ad tangentem complementi posterioris VS, sic tangens postremi YM ad tangentem complementi prioris YP.

Probatur. Tangens QV est ad radium, vt radius ad tangentem YP complementi ex prop.25. Tract.20. Et tangens YM arcus posterioris refertur quoque ad radium, vt radius ad SV tangentem sui complementi: vnde etiam erit *inuertendo* Radius ad YM, vt SV ad radium: quamobrem dispositis ritè terminis est proportio pertusbara. vt QV ad Rad. Et vt Rad. ad YM, Ita SV ad Rad. sic Rad.ad YP.



Quare ex *æquo* ex def.18. Tr 9. erit quoq; VQ ad YM tangentes arcuum, vt SV ad YP tangentes complementorum, sc. prioris, & posterioris, & *permutando* VQ ad SV, vt YM ad YP, nempe tangens primi QV ad tangentem complementi secundi SV, vt YM tangens huius ad YP tangentem complementi prioris.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Si sit arcus, cuius radius referatur ad sinum suum, sicut tangens alicuius secundi refertur ad tangentem alterius tertij. Sic quoque refertur tangens complementi huius tertij ad tangentem complementi illius secundi, vt radius primi ad suum sinum se habebat.

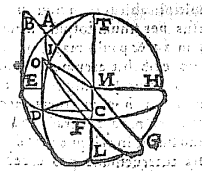
PRobatur ex propos. 16. lib.5. Nam eidem proportioni tertiæ arcuum tangentis VQ ad YM sunt duæ proportiones eædem radij BN V. g. ad sinum OR arcus alicuius ex Thesi, & ex præc. contextu YP ad VS, quare erit etiam eadem proportio RN ad RO, quam YP ad SV.

THEOR. III. PROPOS. X.

In triangulo sphærico rectangulo sinus cruris est ad tangentem alterius cruris reliqui, vt radius est ad tangentem anguli reliquo cruri oppositi.

SInt duo circuli inclinati AFG, & EFH, & huic circulus normalis TDL descendat, claudatque triangulum IDF. Dico quòd DC sinus cruris DF est ad DO tangentem alterius cruris DI secundi, vt EN radius est ad EB sinum anguli IFD.

Probatur. Nam tangentes EB, & OD, vtpote perpẽdiculares ex 30. lib.3. Elemẽtis dijs DN, & IN, & ideo parallelæ radio NT erunt perpendiculares EFH plano, cui radius NT perpendicularis est, quare inuicem quoque erunt parallelæ, & insuper DO erit perpendicularis, sinui DC parallelæ radio EN. Quapropter triangula ENB, & ODC erunt æquiangula, tanquam parallelis constantia ex 4. lib.6. Elem. & ideo DC erit ad DO, vt radius EN ad EB tangetem anguli IFD.



PROBL. I. PROPOS. XI.

Dato radio, & sinu cruris adiacentis angulo, & tangente ipsius anguli; cruris oppositi tangentem reperire dato angulo specie conformem.

QVoniam diximus DC sinum cruris esse ad DO tangentem cruris alterius, vt radius ad tangentẽ EB anguli F erit etiam *permutãdo* DC sinus ad EN radium, vt DO tangens cruris ad EB tangentem anguli, & *inuertendo* radius EN erit ad DC sinum, vt tangens EB anguli F ad tangentem DO cruris oppositi DI. Quare dato radio primo loco; deinde sinu cruris, postea tangente anguli adiacentis, prodibit tangens cruris oppositi conformis specie dato angulo ex Cor.5.prop.28.Trac.23.

Exemplum. Sit crus Gr.29. m.20. cuius sinus 4898897. Anguli adiacentis tangens Gr.21.m.45. quæ est 3989596. Multiplicentur simul, & numerus genitus diuisus per radium proferet tangentem 1954461; quæ est Gr.11. m.3. & paulò magis, anguli oppositi.

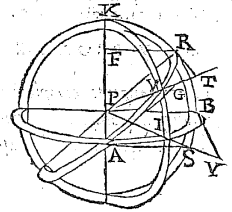
COROLLARIVM.

HInc etiam: Dato primò tangente EB anguli F, secundò radio EN; tertiò tangente cruris oppositi angulo dato poterit inueniri crus adiacẽs, vt preced. patet. Sicut etiam dato sinu DC cruris, & data tangẽte alterius cruris DO, & radio angulus F oppositus alteri crurum extrahi poterit; sed paulò laboriosiùs, quæ tamen inuenta datis debent esse esse specie conformia ex prop.28. Tr.23. Cor. 5.

THEOR. IV. PROPOS. XII.

In triangulo sphærico rectangulo radius est in proportione ad sinum complementi anguli non recti, vt tangens basis ad tangentem cruris dicto angulo adhærentis.

SIt sinus BF complementi arcus BR anguli A; Tangens autem cruris AI sit AS, at basis AV tangens sit AG. Ex præced. radius PB ad, sinum FR



adiacentis cruris angulo K dicit eam proportionem, quam tangens BY anguli K ad tangentem BT oppositi cruris. Verùm ex 8. huius, sicut est BY ad BT; ita est complementi posterioris arcus tangens AG ad tangentem SA complementi arcus prioris: Ergo etiam ex prop.16. lib.5. Elem. Radius BP erit ad sinum BF complementi KR arcus RB anguli A, vt AG tangens basis VA ad SA tangentem cruris IA angulo A adhærentis triang. AIV.

PROBL. II. PROPOS. XIII.

Dato radio, & sinu complementi anguli, & tangente basis inuenire crus adiacens angulo dato.

FAciliter id fit ex præced. per regulam auream. Nam cum sit radius ad sinum complementi anguli, vt tangens basis ad tangentem cruris. Sinus complementi anguli multiplicetur cum tangente basis, & diuidatur per radium, prodibit tangens cruris quæsiti adiacentis.

Exemplũ. Sit arcus anguli G.33.m.20. cuius cõplementũ G.56. m.40. & eius sinus 8354878. Sit verò basis Gr.42 i cuius tangens 9004040. Multiplicentur simul, & genitus numerus per radium diuisus dabit tangentem 7522765. Gr.36. m.57. & paulò magis. Hoc autem crus debet esse specie conforme angulo dato ad vitandas fallacias prop.28. Coroll.5. Tract.23.p.2.

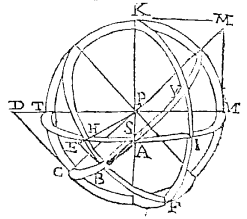
COROLLARIVM;

HInc etiam posset data tangente anguli AS, & radio, & tangente AG basis extrudi sinus RF complementi anguli A cruri dato adiacentis. Verũm operosiùs.

THEOR. V. PROP. XIV.

In rectangulo sphærico radius est ad tangentem anguli in eadem proportione, quam obtinet sinus complementi basis ad tangentem complementi alterius anguli.

SIt triangulum IAV, & basis VA complementum sit AB, mensura verò anguli V sit arcus FB ducẽs polo V, cuius complementum, vt ostendi prop.5. huius est arcus BH. Dico, quod radius PC est ad tangentem NM anguli A, quam sinus SB complementi basis possidet ad tangentem BE complementi BH anguli V.



Pr. Ex pr.10.h. ita est PC radius ad CD tãgentẽ anguli HAB, vt sinus crurisadiacentis SB ad tangentẽ BE cruris oppositi BH; Sed hoc crus BH est cõplemẽtũ anguli V, & CD æquatur tangenti MN, cũ sint tangẽtes æqualiũ angulorũ ad verticẽ A ex 3. tr.23.p.2. Ergo radius erit ad tangentẽ NM anguli A trianguli IVA,

SVA, vt sinus SB complementi basis ad tangentem BE complementi alterius anguli V.

PROBL. III. PROPOS. XV.

Dato radio, & tangente anguli, & sinu complementi basis, tangentem compl. alterius anguli reperire.

QVoniam ex præced. radius est ad tangentem anguli, vt sinus complementi basis ad complementi reliqui anguli tangẽtem, adhibita regula proportionum postulatam exhibebit tangentem.

Exemplũ. Detur radius, & anguli G.45.m.19. tãgẽs 1011153. & basis G.62.m.55. cõpl.G.27.m.5 sinus sit 5113589. qui numeri inuicem multiplicati exhibebũt 5170428 pro tãgẽte quęsita cõpl.anguli alterius G.27.m.20. Vnde ãgulus erit G.62.m.40. qui debet esse minor quadrãte, quòd data ãgulus, & basis esse debeant quadrante minora, at si basis sit maior quadrante angulus esset obtusus ex cit. propos.28.Tr.23. Cor.2.p.2.

COROLLARIVM.

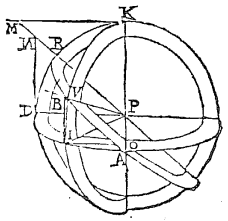
POssent etiam alio pacto ordinari termini statuto primo loco CD, vel MN tãgẽte anguli oppositi, 2. loco radio, 3. loco anguli alterius complemẽti tãgente, & prodiret sinus BS compl. basis.

Vel 1 sinus SB cõplementi, 2. tangens complementi anguli, 3. radius, generaret anguli tang. CD, vel NM. Sed faciliùs hæc quæsita alio pacto venabimur. Debent autem data esse quadrante minora ob vsum complementorum ex propos.4.Tract. 27. huius.

THEOR. VI. PROPOS. XVI.

Trianguli sphærici rectanguli radius ad tangentem cruris eadem proportione potitur, quà tangens complementi basis ad sinum complementi anguli adiacentis.

IN triangulo KRV, cuius angulus rectus R; basis verò VK, tangens verò IB eius complementi IV, & crus sit KR, cuius tangens KM, & tangens eius complementi DN. Arcus, qui angulum K mensurat sit DI, cuius complementum sit IA, & eius sinus IO. Dico, quod Radius KP est ad tangentem cruris KM in proportione illa, quam habet tangens complementi basis IB ad sinum IO complementi anguli K.



P Probatur ex propos.10: Sinus IO, est ad tangentem IB, vt radius DP ad tãgentem DN anguli A. Quare *inuertendo* DN tangens erit ad radium, vt IB tangens ad IO sinum ex prop. autem 25.Tr.20. vt DN refertur ad DP, ita DP radius ad MK tangentem complementi eiusdem arcus. Quapropter vt DP ad MK, sic proportione correspondebit IV ad IO tangentem. Radius itaque est ad KM cruris RK in rectangulo BKV, vt tangens IB complementi IV basis VK, ad sinum IO arcus IA complentis arcum DI mensuram anguli K.

PROBL. IV. PROPOS. XVIII.

Dato Radio, & tangente cruris adiacentis, & tangente complementi basis sinum complementi anguli dato cruri adiacentis inuenire.

QVoniam tangenti MK radius eò proportione refertur, quâ tangens complementi basis IB ad sinum complementi anguli IO adhibita regula proportionum ex tribus primis datis desideratum sinum IO exhibebit, vt exemplum docet.

Exemplum. Sit crus G.27.m.32. cuius tangens est 5213067. Basis verò compl. sit G.49.m.10. cuius tangens 11571494. Multiplicenturque simul, & productum per radium diuidatur, abiectis 7. zifris ad dextram, vt moris est, & prodibit sinus 6032297. qui est Gr.37. m.6. & paulò magis, qui subductus à Gr.90. efficietur angulus exoptatus Gr.42. m.54. Obseruaque quòd ea, quæ dantur sint ęspecie cognita quadrante minora ob vsum complementorum; vnde, & angulus, qui cruitur debet esse acutus ex prop.28. tract.23. Cor.3.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

Radius est ad tangentem complementi anguli, vt tangens cruris dicto angulo oppositi ad sinum cruris adiacentis.

SIt triangulum AVI in præced. fig. Deturque angulus A, cuius tangens est DN; complementi verò eius anguli tangens est KM; crus autem oppositum est IV, cuius tangens IB; sinus verò lateris adiacentis AI est IO. Dico *itaque, quòd radius* PK *est ad* MK, *vt* IB *ad* IO.

Probatur DN est ad DP, vt IB ad IO *inuertendo* propos.10. huius; sed vt tangens DN ad radium DP, ita ex propos.25. tract.20. est radius PK ad tangentem MK compl. Ergo vt radius PK ad tangentem MK complementi KR anguli A; sic tangens IB cruris oppositi ad sinum cruris adiacentis IO.

PROBL. V. PROP. XIX.

Dato radio, & tangente complementi anguli, & tangente complementi cruris, sinum cruris adiacentis angulo dato inuestigare.

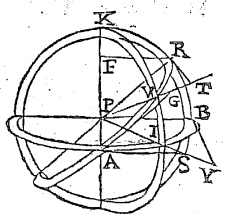
QVoniam hęc quatuòr sunt proportionalia radius, ad tangentem complementi anguli. Sicut tangens crurís oppositi ad sinum cruris adiacentis; ideo regula proportionum institutum complebit.

Exemplum. Sit datus angulus Gr.62. m.28. cuius complementum est Gr.27. m.32. Tangensque eius 5213067. crus verò Gr.18.m.26. cuius tangens est 3333020. multiplicati itaque isti numeri simul, & diuisi per radium dabunt sinum 1737525. exoptatum; qui est Gr.10, & paulò ampliùs; Opus autem erit obseruare, vt ęspecie sit crus, quòd cruitur, & conforme datis, ex prop 18. tract.23.p.2.coroll. 5. & 6. quæ sumenda erunt quadrante minora.

THEOR. VIII. PROP. XX.

Radius est ad sinum complementi anguli, vt tangens complementi cruris adiacentis ei ad tangentem complementi basis in sphærico rectangulo.

IN præced.fig.prop.12. huius detur triangulum sphęricum rectangulum AIV, & angulus RAB, cuius complementum RK, & sinus eius RF. Basis sit AV, cuius complementum VR, & eius tangens TR, crus sit AI, cuius complementũ IB, & tangens ipsius BY. Dico, *quòd* PB *radius est ad* RF *sinum complementi anguli*, vt tangens BY complementi cruris est ad tangentem TR complementi basis.



Probatur. Nam, vt ostendi propos.10. huius, vt BP ad BY, sic FR est ad TR; Ergo *permutando* radius BP erit ad FR sinum, vt BY tangens ad TR. tangentem; sed FR. est sinus complementi RK arcus R. anguli A, at BY complementi BI cruris IA angens, & TR complementi BV basis AV tangens. Ergo patet propositum.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Dato Radio, & sinu complementi anguli, & tangente complementi cruris, & ęspetie cruris, aut anguli reliqui inuenire tangentem complementi basis, & inde basim.

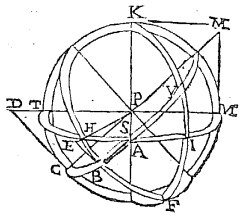
IVxta præced. propos. cum hæc proposita sint proportionalia regula proportionum ex postulata largietur.

Exemplum. Sit datus angulus 23. Gr. cuius complementum est Gr.77. & eius sinus 9743700. sit crus 37. Gr. cuius complementum est Gr.53. iusque tangens 13270448. qui numeri simul ducti, & per sinum totum diuisi dabunt tangentem 12930326. Gr.52. m.17. qui Gr. subducti à 90. exhibebunt arcum exoptatum basis Gr.37. m. 43. Si autem data cognita quantitate ęspetie consonent basis erit quadrante minor, si dissonent maior ex Cor.4. prop.28. tract.23.

THEOR. VIII. PROPOS. XXII.

Radius est ad tangentem complementi anguli obliqui in rectangulo sphærico, vt tangens complementi reliqui obliqui ad sinum complementi basis.

TRiangulum datum sit AVI in fig. prop.14. h. tangens verò complementi anguli A, seu arcus eum mensurantis, sit KM: Complementi verò basis sit AE, & sinus SB, & alterius anguli V, quę arcus FB mensurat sit complementum BH, tangens BE. Dico igitur, quòd radius PK ea proportione refertur ad MK, qua BE ad BS.



Probatur. Nam ex 10.h. ita est SB ad BE, vt PC ad CD: Ergo *inuertendo*, vt BE ad BS sic dicent CD ad CP, sed ob radii E nec non, & tangentis æqualitatem, vt CD ad CP radium, ita est NM ad NP: At vt NM ad NP, sic ex propos.25. tract.20. est radius PK ad MK. Ergo vt est radius PK ad MK tangentem complementi anguli A, sic est BE tangens complementi anguli reliqui ad BS sinum complementi basis.

PROBL. VII. PROPOS. XXIII.

Dato sinu toto, & tangente complementi anguli, & tangente complementi alterius anguli inuenire tangentem complementi basis.

PAtet operatio ex præced. quia cum data, & quæsita tangens basis sint proportionalia, inuenietur per regulam proportionum.

Exemplum. Sit datus angulus Gr.36. cuius complementum est Gr.44. & tangens 96516888. Alterius verò anguli Gr.48. sit complementum 32. & tangens sit 6248693. qui numeri multiplicati simul exhibebunt pro tangente complementi basis numerum, qui diuisus per sinum totum erit 6034192. Gr.31. m.6. ferè, qui subducti à 90. Gr. erunt Gr.58. m.54. basis. Debent autem sumi anguli quadrante minores ob vsum complementorum: vnde, & basis erit quadrante minor ex prop.28. par.2. tract.23. Cor.4.

THEOR. X. PROP. XXIV.

Radius est ad sinum cruris, vt tangens complementi alterius cruris ad tangentem complementi anguli oppositi.

DEtur triangulum KRV in fig. propos. 12. & duo eius crura KR, & RV, quæ ambiant angulum rectum R, sinus autem cruris KR sit FR; tangens verò RV cruris sit RT, & eius cõplemẽti AV sit AG, at arcus angulum K mensuranris tangens sit BY, & complementi sit AS: Dico igitur, quod sicuti PB radius est ad FR sinum cruris, ita AG tangens complementi cruris est ad AS tang. complementi anguli K oppositi.

Probatur. Nam ex prop. 10. huius, ita est sinus FR ad RT tangentem, vt PB radius ad tangentem BY; Ideoque *permutando* FR erit ad PB, vt RT ad PY, & *inuertendo* PB radius erit ad FR sinum, vt BY tangens ad RT tangentem: sed vt BY tangens ad RT tangentem sic ex propos. 8 huius tangens AG complementi arcus secũdi VR est ad SA tangentem complemẽti primi BI: Ergo sicut est radius PB ad sinum FR, ita tangens AG complementi cruris ad tangentem AS complementi anguli K.

PROBL. VIII. PROPOS. XXV.

Radio dato, & sinu cruris, & tangente complementi cruris alterius tangentem complementi anguli obliqui inuenire.

IAm ex præc. patet, quòd cum hæc sint quatuor proportionalia datis tribus vltimum regula aurea inuenire possimus, vnde.

Exemplum erit. Sit arcus Gr.37 m.15. cuius sinus sit 6052940 & arcus alter, qui crura rectanguli conficiant Gr.23. m.47. cuius complementi Gr.66. m.13. tangens est 22690909. Multiplicentur simul, & radio genitum diuidatur, & generabunt 13734671. qui numerus erit tangens Gr.53. m.56. ferè complementi anguli quæsiti. Vnde arcus Gr.36. m 4 erit angulus quæsitus.

Forrò in omnibus istis obseruanda est regula generalis, vt si quando dantur crura quadrante maiora, vel basis, aut angulus assumatur vicarium eius triangulum residuum, vt infra docebimus. Et cum vtimur triangulo vicario: simul corollaria prop. 28. tract. 13. part. 2. vbi docemus quænam crura quosnam requirant angulos, vel quinam anguli crura sibi conuenientia repoſcant, sunt obseruanda

EXPENSIO III.

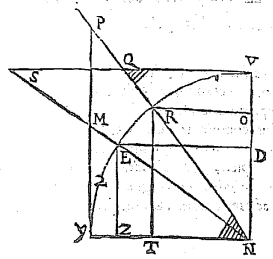
De secantibus.

QVamuis per solos sinus, & tangentes omnis trigonometria rectangulorum absoluta esset; quia tamen in tribus casibus, qui prop. 6. solui possunt. Sinus totus primo loco non venit, Ideo tum ad abundantiam doctrinæ, tum etiam, vt in eis facilior calculus eueniat, etiam secantium tabulæ conditæ fuerunt; sed antequam ad problemata, quę rectangulorũ docent solutionẽ, deueniamus; quædam secantium inter se, vel ad sinus exponendę sunt habitudines.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

Duorum arcuum sinus complementi primi ad secantem secundi est, vt sinus complementi posterioris ad secantem arcus prioris.

SInt duo arcus, primus VR, & EY secundus in fig. pr. 8. & eorum sinus complementorum RT, & ED, secantesque NQ, & NM, Dico, quòd ita est TR sinus complementi primi ad secantem secundi NM, veluti proportione respondet sinus complementi secundi ED ad secantem primi NQ.



Probatur. Ita est TR. sinus, seu ON ad radium NR, vt radius NV, siue idem NR est secantem NQ, & vt est ED, seu NZ sinus complementi ad radium EN, ita radius NY ad secantem NM ex pr. 26. tr. 10. & ideo NM erit *inuertendo* ad radium, vt rad. ad ED. Quare est proportio perturbata, vt in dispositis terminis potes videre.

VT RT est ad R. At vt R. ad ED.
Ita NM est ad R. sic R. ad QN.

Vnde ex *æquo* arguere poterimus ita esse RT ad ED, vt NM ad NQ, & ideo *permutando* ita erit RT sinus complementi prioris arcus ad NM secantem arcus posterioris, vt ED sinus complementi arcus posterioris ad NQ secantem arcus prioris.

COROLLARIVM I.

HInc deducitur esse quoque *inuertendo* secantem prioris arcus NQ ad complementi sinũ secundi ED, vt secans arcus posterioris MN ad sinum complementi arcus prioris RT.

Rursusque quòd vt sinus TR primi arcus YR ad secantẽ NM cõplementi secundi EV, sic sinus ED arcus EV huius ad secantẽ NQ complementi arcus prioris RY mutatis tantùm arcuũ denominationibus, vt sinus dicatur arcus, qui erat complementi, & secans complementi, quæ arcus secans erat.

COROLLARIVM II.

IDeoque erit etiam *permutando* sinus primi ad sinum postremi, vt secans complementi posterioris ad secantem prioris complementi, vel etiam sinus complementi prioris ad sinum complementi posterioris, vt secans posterioris arcus ad secantem prioris.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Si sit arcus, cuius sinus ea ad radium proportione feratur, quâ sinus complementi alius secundi ad sinum complementi alterius tertij; secans quoque tertij ad secatem secundi eam habebit proportionem, quam sinus primi arcus ad radium consequitur.

PRobatur. Quoniam ex prop. 16. lib. 5. Elem. quæ eidem rationi sunt eędem rationes, & inter se tales sunt. Ponitur verò id in ipsa propos. nam ex thesi sinus primi arcus ponitur ad radium & secans posterioris alius tertij ad secatem secundi, vt sinus complementi secundi ad sinum complementi tertij. Quapropter etiam inter se simili proportione gaudebunt secans tertij ad secantem secundi, quæ sinus primi ad Radium.

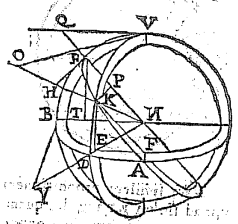
COROLLARIVM.

IDem quoque erit si sinus sint arcuum, & secantes complementorum, vt per se patet.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII.

Vt Radius refertur ad sinum basis, sic se habet secans complementi cruris oppositi ad secantem anguli.

SIt triangulum sphæricum rectangulum AKD, cuius basis AK, & eius sinus FK, ad quem ex dictis de sinubus prop. 1. h. eandem proportionem gerit sinus totus NR, quam sinus RT anguli A ad sinum cruris KE, secans verò complementi KV arcus, nempe cruris DK est NO. Secans verò complementi VR arcus EB mensuræ anguli A est NQ. Dico itaque, quòd sicut est sinus totus NR. ad sinum basis FK, ita se habet secans NO ad NQ secantem complem. anguli.



Probatur. Nam sinus TR tamquam primi arcus est ad sinum cruris ER tamquam secundi arcus, vt radius NR est ad sinum basis FK: sed ex propos. 26. huius, vt sinus primi arcus ad sinum secundi arcus, nempe RT ad KE, sic assimilatur in proportione secans NO cõplementi VK secundi arcus KD secanti NQ complementi primi arcus BR; Ergo ex 16. vt radius NR ad FK sinum basis, ita secans NO cruris complementi KV ad secantem NQ anguli A complementi RV.

PROBL. I. PROPOS. XXIX.

Dato Radio, sinu basis, & secante complementi cruris inuenire secantem complementi anguli oppositi.

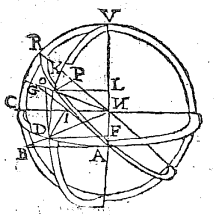
QVoniam data, & quæsitum sunt ex præced. quatuor proportionalia poterit ad quærendum quartum adhiberi regula proportionum, vnde habit.

Exemplum. Sit datum triangulum rectangulum, cuius basis Gr.43. & sinus eius 68199 84. crus verò sit Gr.37. & complementum Gr.53. cuius secans est 16616401. Ducantur simul, & producțus diuisus per sinum totum erit secans 18338358. Gr.28. m.4 paulo auctior complementi anguli, qui gr. subducti à 90. dant Gr.61. m.56. Debet verò angulus conformari speciei dato cruri ex prop. 28. tract. 13. Coroll. 5.

THEOR. IV. PROPOS. XXX.

Radius est ad sinum complementi cruris, vt secans basis ad secantem reliqui cruris.

IN triangulo rectangulo AKD sit sinus LK complementi KV cruris DK, & PK sinus complementi KR basis AK, cuius secans est GN, & sinus ID complementi DC reliqui cruris DA, cuius secans est NB: Dico, quòd radius D est ad sinum ID, vt secans NG basis ad secantem reliqui cruris NB.



Dictum est supra prop. 9. huius, vt ND rad. ad BI, sic LK esse ad KP: Ergo *permutando* ND radius erit ad sinum LK complementi cruris, vt ID sinus arcus DC prioris ad PK arcus KR posterioris. Sed ex prop. 26. huius, vt ID ad PK, ita est NG secans arcus AK complementis KR posterioris ad NB secantem arcus AD complementi arcus prioris DC: Ergo ex 16. lib. 5. vt radius ND est ad sinum LK complementi cruris, sic secans NG basis, ad secantem NB reliqui cruris.

PROBL. II. PROPOS. XXXI.

Dato Radio, & sinus cruris, & secante basis inuenire secantem reliqui cruris.

PAtet prob. ex præc. qua ostendimus quatuor proposita esse proportionalia, vnde per regulam auream quęsiti cruris sinum cognoscemus.

Exemplum. Sit crus Gr.39. m.18. cuius complementum Gr.50. m.42. & sinus 7738402. Sic

quoque

quoque basis Gr.44.m.36 cuius secans 14044431. quam cum numero sinus multiplicabis, & diuides per radium, & exhibebit secantem 10868145 Gr. 93.m.4. sed paulò minus reliqui cruris: obserua verò Cor.2. & 3. prop.28. tract.23.

THEOR. V. PROPOS. XXXII.

Radius est ad secantem cruris, vt secans alterius ad secantem basis.

TRiangulum in præc. fig. sit AKD, secans basis NG, secans cruris NO, secans alterius cruris NB. Dico itaque, quòd ea proportio militat radij ND ad secantem ON, quæ secantis NB ad secantem GN.

Probatur LK sinus complementi cruris est ad radium ND, vt radius ND ad secantem NO ex prop. 26. Tract.20. qui sunt in eadem superficie circuli VED: Sed vt est sinus LK ad radium ND, ita est sinus PK arcus KR primi complementi ad ID sinum DC postremi complementi, & ideo ex præc. prop. 26.h. vt NB secans postremi arcus ad NG secantem primi arcus. Ergo, vt radius ND ad secantem NO, ita est secans NB ad secantem NG.

PROBL. III. PROPOS. XXXIII.

Dato radio, & secante cruris, & secante alterius cruris inuenire secantem basis.

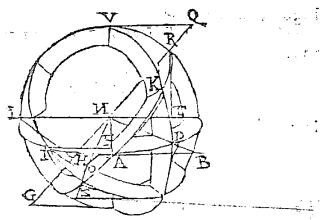
HOc regula aurea operi comittitur, vt ex præc. patet ob proportionem quatuor terminorum in thesi propositorum.

Exemplum. Sit crus Gr.28. m.7. cuius secans 11337999. cruſque aliud G.87. m.18. cuius secans sit 212294614. quę multiplicata per exhibitam secantem alterius cruris, & postea diuisa per radium exprometsecantem 240699612. Gr.87.m.37. & paulò minùs, erit itaque basis minor quadrante; quia crura in hoc casu specie concordant, at si specie dissonent, basis erit maior quadrante ex Cor. 4. prop.28. tract.23.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIV.

Radius est ad sinum anguli obliqui, vt secans alterius ad secantem cruris oppositi.

SIt angulus A obliquus trianguli AED, cuius sinus RT, sinus verò totus RN, secans NZ anguli K reliqui; secans verò cruris oppositi NB.



Dico, quòd radius RN, ita proportione correspondet ad sinum TB anguli A, vt secans NZ anguli K reliqui ad secantem NB cruris oppositi anguli E.

Probatur. Dictum est de sinubus propos.4.h. sinum FI complementi lateris AD, ita esse in proportione ad cõplementi sinũ IO, sicut radius NL, seu NR ad sinũ LH, seu æqualẽ RT anguli A: sed vt sinus complementorum sunt inuicem, sic secantes arcuum inuersè in eadem proportione sunt: quare secans NZ anguli K ita erit ad secantem NB cruris oppositi AD, vt sinus FI cõplementi cruris ad sinum IO complementi anguli ex 26. prop. h. 6. Cor. 2. & ideo erit ex 16. lib.5. vt radius NR ad sinum TB, sic secans NZ ad secantem NB.

PROBL. IV. PROPOS. XXXV.

Dato radio, & sinu anguli, & secante alterius anguli, secantem cruris inuenire huius alterius anguli oppositi.

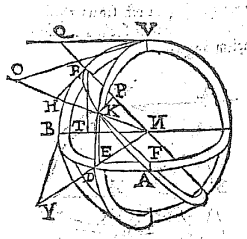
PAtet id regula aurea posse operi demandari, cum habeamus ex præced. quatuor proportionalia, quorum tria dantur, quartum inquiritur.

Detur angulus 37. Gr. & alter angulus Gr.58. sinus primi sit 6018150. secans secundi sit 18870800. qui numeri simul multiplicati, abiectisque ob diuisionem sinus totius 7. figuris dextris proferet secantem 11356730, quæ est G.28. m.17. proximè cruris oppositi, quod debet esse concors in specie angulo opposito ex Coroll.2. propos.28. tract.23.

THEOR. VII. PROPOS. XXXVI.

Radius est ad sinum anguli, vt secans complementi cruris ei oppositi ad secantem complementi basis.

TOtus sinus sit NR, sinus autem anguli A sit RT, & secans complementi KR basis KA, sit NH, at secans NO tandem complementi VK, cruris DC. Dico, quòd ea proportione refertur sinus totus NR ad sinum RT anguli A: quã secans NO complementi cruris ad secantem NH complementi basis.



Probatur. Nam similem proportionem dicit sinus NR totus ad sinum RT anguli, quam sinus FK basis ad sinum EK cruris anguli A oppositi, ex pr.1. Cor.de sinubus; sed hanc quoque proportionem dicunt secantes complementorum, & vt est sinus primus basis KF ad sinum secundum cruris KE ita est secans NO complementi VK, huius ad secantem NH complementi BR primi arcus AK. Quapropter ex 16. lib.5. ita quoque radius NR erit ad sinum RT anguli A, vt secans complementi cruris NO ad secantem complementi basis NH; quod tertiæ proportioni FK ad KE consentiant.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. XXXVII.

Dato Radio, & sinu anguli, & secante complementi cruris ei oppositi, basis complementi secantem inuenire, si tamen reliquum crus, seu reliquus angulus specie notus sit.

QVoniam ex anteced. exhibita sunt quatuor proportionalia, ideo regula aurea ad inquirendum quartum est adhibenda, & sic erit.

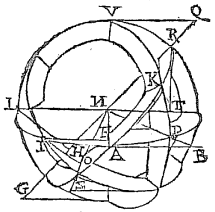
Exemplum. Sit angulus Gr. 50. cuius sinus 7660445. Arcus cruris 41. m.48. cuius complementum Gr.48. m.12. & secans 15003020. qui numeri multiplicati inuicem, & per radium diuisi dant 114980. Gr.29. m.31. proximè, qui subducti à Gr.90. dant Gr.60. & m.29. pro basi.

Aduerte autem, quod si anguli, vel crura vtrum quidem notum quantitate alterum specie concordauerint, basis erit quadrante minor, si non concordauerint maior ex Coroll. 3. & 4. propos.28. tract.23.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXVIII.

Radius est ad secantem cruris, vt secans complementi anguli adiacentis ad secantem anguli oppositi.

IN Schemate prop.34. sit triangulum KAD, & ei sinus totus NR, secans NQ complementi anguli A erit; at secans cruris angulo A adiacentis sit NB; secans verò anguli K sit NZ. Dico itaque, quòd NR radius est ad secantem NB, vt secans NQ est ad secantem NZ.



Probatur ex 4. huius, vt NL radius est ad sinum LH æqualem sinui RT anguli A; sic IF complementi cruris sinus est ad IO sinum complementi alterius anguli K: Ergo *permutando*, vt LN ad IF, sic LH ad IO; & *inuertendo*, vt IF ad LN, sic IO ad HL: sed vt IF sinus complementi ad LN radium, sic est radius ad illius arcus secantem; quæ est NB cruris ex Tract.20. propos.26. Ergo, vt est radius NL ad secantem NB cruris, sic est sinus IO complementi vnius anguli K ad sinũ HL, vel RT alterius A: sed vt sinus IO ad HL, sic est secans NQ cõplementi huius HL, vel æqualem RT ad secantem complementi prioris NZ, qui est arcus anguli K ex Cor.2. prop.26. Ergo ex 16. lib.5. vt radius NR ad secantem NB cruris, sic secans NQ complementi A anguli ad secantem NZ anguli K.

PROBL. VI. PROPOS. XXXIX.

Dato radio, & secante cruris, & secante complementi anguli adiacentis secantem anguli oppositi reperire.

QVoniam proposita sunt quatuor proportionalia ex predict. propos. regula proportionum, quartum, quòd exposcitur, inuenietur.

Exemplum detur crus Gr.25. cuius secans sit 11033783. & angulus Gr.32. m.55. cuius complementum est Gr.57. m.5. & secans 18402017. multiplicentur simul, prodibitque numerus, qui per radium diuisus restabit 20304386. quæ est proximè secans Gr.60.m.29. angulus ipse, quidesideratur, quidebet esse specie conformis dato cruri ex propos.28. Cor.6. Tr.23.

THEOR IX. PROP. XL.

Radius est ad sinum complementi cruris, vt secans anguli obliqui oppositi ad secantem complementi anguli obliqui alterius, quę cruri adiacet.

RAdius NL in præc.fig. sinus cõplementi cruris AD, triãguli KAD rectãguli est IF secans anguli K est NZ; & secans NQ cõplementi VR anguli obliqui alterius A. Dico itaque, quòd radius NL est ad IF sinum complementi cruris, vt secans NZ anguli oppositi ad secantem NQ anguli adiacentis.

Probatur. Nam iam dictum est prop.4. sinum NL esse ad LH, seu RT sinum anguli A, vt IF sinus complementi cruris AD ad sinum IO complementi guli K. Ideo *permutando* NL erit ad IF, vt LH ad IO: sed vt sinus LH anguli A ad IO sinum; sic secans huius complementi NZ, qui est arcus anguli K ad secantem prioris complementi NG, seu æqualem NQ. Ergo, vt est radius NL ad IF sinum complementi cruris; sic est NZ secans arcus anguli oppositi ad secantem NQ complementi alterius anguli adherentis cruri AD.

PROBL. VII. PROPOS. XLI.

Dato radio sinu complementi cruris, & secante anguli obliqui oppositi secantem complementi anguli cruri adiacentis reperire.

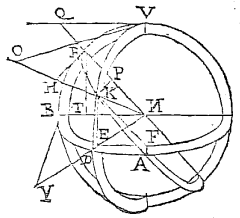
REgula proportionum habet in hac operatione locum, cum in antecedenti propos. ostensa sint tria data, & quartum quæsitum proportionalia.

Exemplum. Sit crus 19. Grad. cuius complementum Gr.71. & sinus eius 94551186. Anguli Gr.32. m.4. verò secans sit 11800371. qui numeri simul multiplicati, & per radium diuisi dabunt numerum 11157470. Gr.26. m.20. ferè, qui, vtpote complementum subductus à Gr.90. relinquit Gr. 63.m.40. anguli. Debet autem cognosci specie crus alterum ex dictis prop.28. tract.23. Cor.4. vt angulus inuentus ei conformetur.

THEOR. X. PROPOS. XLII.

Radius est ad secantem complementi basis, vt secans complementi anguli oppositi ad secantem complementi cruris angulo oppositi.

RAdius est NR, basis AK in triangulo AKD, cuius cõplementi sinus KP, secans verò eius cõplementi NH; compl. anguli A est VR, cuius secans est NQ: crus verò DK, cuius compl. KV secans est NO. Dico itaq; quòd ita refertur radius ad NH secantẽ complementi basis, vt NQ secans complementi anguli A ad secantem NO complementi VB. cruris DK.



Probatur. Quoniam ex dictis propos. 6. huius Ita est basis FK ad sinum EK, vt NR radius ad RT sinum A anguli, & ideo *permutando*: Ita erit FK ad radium NR, vt sinus EK ad sinum TR, sed vt FK sinus basis refertur ad radium, ita radius ipse refertur ad secantem NH complementi basis ex pr. 26. tract. 20. cum sint in eodem plano BKA: Similiter vt EK sinus cruris refertur ad TR sinum anguli; sic NQ secans complementi huius posterioris ad secantem NO complementi illius prioris ex Coroll. prop. 26. h. Ergo ex prop. 16. lib. 5; vt NR radius est ad secantem complementi basis NH, sic NQ secans complementi anguli ad NO secantem complementi cruris.

PROBL. VIII. PROPOS. XLIII.

Dato radio, & secante complementi basis, & secante complementi anguli reperire secantem complementi cruris oppositi.

IN operi demadatur regula aurea cum trla exhibeantur proportionalia, & quartus quæratur, debet autem angulus repertus conformari specie angulo opposito, vt ex prop. 18. tract. 23. Cor. 5. patet.

COROLLARIVM.

ABistis omnibus propositionibus eruitur modus, quò semper primo loco radium ponas, vt infra declarabimus.

EXPENSIO IV.

Regulæ facillimæ, & breuissimæ pro rectangulis adhibendæ præcipuè in logarithmis.

REgulæ quædam breues, & vniuersales remanent tradendæ; licet non adeo faciles in geometricis operationibus, eo quod sinus primò loco, non semper veniat; sed æquè faciles in logarithmicis, ideoque pro logarithmis à Nepero specialiter inuentæ, quarum fundamenta quatuor propos. exponemus quamuis ipse non explicet.

THEOR. I. PROPOS. XLIV.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt sinus totus ad sinum complementi oppositæ extremæ remotæ, sic sinus complementi alterius remotæ extremæ oppositæ ad sinum intermediæ.

NOn vsurpamus hic complementa in propria significatione, sed eo modo, quò declarabimus. Sciendum est itaque, quòd præciso angulo recto, & posthabito in triangulo sunt quinque partes, quæ ad modum pentagoni sunt disponendæ, nempe basis duo anguli, & duo crura angulos subtendentia, quas numeris prænotauimus 1. 2. 3. 4. 5. tamquam alicuius pentagoni lateribus, vt possimus intelligere quænam partes oppositæ extremæ, quænam adhærentes, vel circumpositæ, quæque intermediæ partes appellentur. Pro angulis verò, & basi eorum complementa debent vsurpari.

In hac ergo figura tribus complementis duorum angulorum, & basis, & duobus cruibus constante. Partes adhærentes sunt, quæ datæ intermediæ immediatè succedunt V. g. in triangulo ABC. Posito basis AC complemento pro parte media adhærentes sunt partes complementa angulorum A, & C sic posito crure 4. partes adhærentes sunt, posthabito angulo B recto, crus 3, & complementum anguli 5. At verò remotę complementi 1 basis essent crura 3. & 4. & lateris pro parte intermedia vsurpati partes remotæ essent AC basis complementa, & anguli A. Complementa verò horum complementorum sunt sinus ipsi arcuum. Ita, quod complementa de angulis, & basi dicta intelligantur pro arcubus angulorum, & basis: at quando dicitur sinus basis, vel angulorum intelligatur de cõplementis. Verũ de cruribus, sicut ipsa in propria significatione sumuntur, sic, & complementa.

Dicit itaque propositio sinum totum ad sinum complementi alterius extremæ oppositæ, sic sinus complementi alterius extremę oppositæ ad sinum intermediæ. Hoc verò Theor. probatur inductione numerando omnes casus, qui possunt accidere, qui ex dictis de sinibus ostenduntur: Sunt autem expressi.

Rad.

xtre

Rad.	E	3 mæ datæ	Media quæsita	
0		4	1	
0	4	3	1	Casus primus.
0	5	4	2	
0	4	5	2	Casus secundus.
0	2	3	5	
0	3	2	5	
0	1	5	3	
0	5	1	3	Casus tertius.
0	1	2	4	
0	2	1	4	

Casus primus. Cum itaque duo latera dantur 3. & 4. & quæritur basis. Dico, quod sinus totus ad partes extremas, nempe ad complementa crurum V. g. ex 6. oropos. huius tract. se habet, vt alterum eorum V. g. complementum 4. se habet ad sinum basis, nempe ad sinum eius complementi, quod pro basi vsurpatur, quia in ea fig. ita est BE ad AH, vt BI ad AL, nimirum 0. ad 3. vt 4. ad 1. & *permutando* 0. ad 4. vt 3. ad 1. Vnde duo primi casus sunt ostensi.

Casus secundus. Cum crus, & angulus datur, & quæritur angulus alter. Dico eodem modo sinum totum esse ad sinum complementi extremæ remotæ V. g. 5. vt sinus complementi alterius extremæ remotæ V. g. 4. ad sinum intermediæ alterius anguli 2. nempe ad eius complementi sinum pro angulo vsurpati. Nam ex propos. 4. vt in illa figura, ita est sinus totus SH ad sinum anguli OH, nempe complementum complementi HV pro angulo ipso vsurpatum, vt sinus complementi lateris AB, quod est MD ad sinum OT, qui sinus est complementi pro angulo ipso vsurpati, nimirum 0 ad 5. vt 4. ad 2. & sic quatuor casus secundi generis remanent soluti, nam etiam *permutando* erit SH ad MD, nempe 0. ad 4. vt HO ad DT, nimirum 5. ad 2. Et sic dicas de altero angulo dato 2. latere altero dato 3. & angulo quæsito 5. quòd ita sit 0. ad 2. vt 3. ad 5. & *permutando*, quòd sit 0. ad 3. vt 2. ad 5.

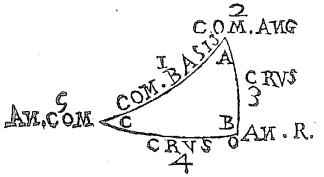
Casus tertius. Cum basis, & angulus datur, & crus quæritur. Dico rursus, quòd sit sinus totus 0. ad sinum complementi extremæ remotæ V. g. 1, vt sinus alterius extremæ remotæ 5. complementi ad sinum intermediæ 3.

Quod probatur ex 1. Prop. Nam vt in illa figura sinus totus SA est ad sinum basis BP, nempe complementum sui complementi pro ipsa basi vsurpati, vt sinus AR anguli N, nimirum complementi arcus AK pro arcu ipsius anguli sumpti ad sinum EB ipsius lateris, nempe erit, vt 0. ad 1. sic 5. ad 3. vel *permutando*, sic erit 0. ad 5. vt 1. ad 3. Et pro alio angulo, si detur, idem argumentum valebit, & erit 0. ad 1. vt 2. ad 4. & *permutando* 0. ad 2. vt 1. ad 4. Propterea quatuor casus vltimi remanent ostensi. Vnde propositio tota remanet ostensa secundùm omnes casus.

THEOR. II. PROPOS. XLV.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt sinus complementi cuiuslibet extremæ remotæ ad sinum intermediæ, sic radius est ad sinum complementi reliquæ extremæ remotæ.

HÆc propositio eodem modo intelligitur, & præcedens, & eodem modo ostenditur & dictis singulis casibus enumeratis.



Data Extr. Media R. quæsita extrema.

3	1	0	4	Casus primus.
4	2	0	5	
3	5	0	4	Casus secundus.
5	3	0	1	
2	4	0	1	Casus tertius.

Prob. primus casus ex prop. 6. sinuum. Nam cum ex ea sit proportio, vt citauimus 0. ad 3. vt 4 ad 1. Erit etiam, *permutando* 0. ad 4. vt 3. ad 1. & etiam 3. ad 1. vt 0. ad 4. debet autem intermedia occupare secundum locum iuxta tenorem propositionis; vnde non dabitur casus, quod sit 1. ad 3. vt 0. ad 4.

Probatur quoque secundus casus ex propos. 4. supra citata; quia enim est 0. ad 4. vt 5. ad 2. erit etiam *permutando* 0. ad 5. vt 4. ad 2. Vnde etiam erit 4. ad 2. vt 0. ad 5. Quod & intelligitur de altera simili partium combinatione 3. ad 5, vt 0. ad 2. Porrò non poterit esse, vt in præcedenti casu dictum est 2. ad 4. neque 5. ad 3. quòd intermedię 2. & 5. debeant esse secundo loco.

Probatur quoque tertius casus. Quia enim ex 1. prop. h. iuxta dicta in pr. præc. 3. casu 0. ad 1. vt 5. ad 3. erit etiam 5. ad 3. vt 0. ad 1. & similiter 2. ad 4. vt 0. ad 1.

Intelliguntur autem sinus arcuum esse complementorum, vbi ipsa complementa in figura vsurpatur, & esse vera complementa, vbi arcus ipsi sumuntur: Sic erit sinus complementi anguli 5. ipse sinus anguli 5. quia complementum pro ipso anguli arcu in figura vsurpatur; at sinus cruris 3. erit sinus propriè dictus ipsius cruris; quia non complementum; sed ipsum crus in figura sumitur, & sic dicas de alijs.

THEOR. III. PROP. XLVI.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt radius ad tangentem extremæ proximæ; sic tangens reliquæ extremæ proximæ ad sinum intermediæ.

HÆc propositio probatur per enumerationem casuum, vt præcedens; sed ex principijs positis Expens. 2. de tangentibus.

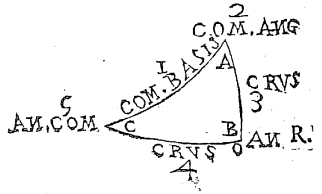
R. Extremæ datæ intermedia quæsita.

o	2	4	3	Casus primus.
o	4	2	3	
o	5	3	4	
o	3	5	4	
o	4	1	5	Casus secundus.
o	1	4	5	
o	3	1	2	
o	1	3	2	
o	5	2	1	Casus tertius.
o	2	5	1	

Probatur autẽ primus casus ex prop. 10 tangentium, cùm angulus, & crus datur, & quæritur aliud crus. Nam vt illius propos. schemate apparet. Ita est radius EN ad tangentem EB, vt CD sinus ad OD tangentem: nimirum, vt O ad tang complementi anguli 2. sic tangens cruris 4. ad sinum cruris 3. Vnde etiam *permutando*, ita erit Radius o. ad 4. sic 2. ad 3. Et si detur alius angulus 5. & crus 3. eadem ratio erit, & respondebit proportione o. ad 5. vt 3. ad 4. & *permutando* o. ad 3. vt 5. ad 4.

Secundus casus cum datur basis, & crus, & quæritur angulus. Probatur quoque ex propos. 16. vt est radius PK ad tangentem KM cruris KB. in triangulo RKV, Ita est tangens IB complementi arcus VI basis VK ad OI sinum complementi arcus ID anguli K. Itaque est vt PK ad KM, nempe o. ad 4. ita est IB ad OI, nempe 1. ad 5. Quare *permutando* quoque erit o. ab 1. vt 4. ad 5. & si detur latus 3. erit quoque o. ad 3. vt 1. ad 2. & *permutando* o. ad 1. vt 3. ad 2.

Tertius casus. Probatur quoque ex propos. 22. cum dantur duo anguli, & quæritur basis. Nam radius est ad tangentem complementi anguli V. g. in eo schemate KP radius ad KM tangentem, vt BE tang. ad sinum BS, ideſt complementi anguli V tangens ad sinum complementi basis AV, ideo o. erit ad 5. vt 2. ad 1. & *permutando* o. erit ad 2. vt 5. ad 1.



THEOR. IV. PROPOS. XLVII.

In triangulis sphæricis rectangulis habentibus crura, seu cruribus oppositos angulos sigillatim quadrante minores, vt tangens extremæ proximæ ad sinum intermediæ, ita radius ad tangentem reliquæ extremæ proximæ.

PRobatur ex dictis priùs enumeratis casibus prop. præced.

Extremæ datæ.		R.	Intermedia quæsita.	
1	5	o	4	Casus primus.
3	2	o	1	
1	2	o	3	Casus secundus.
4	5	o	1	
2	3	o	4	Casus tertius.
5	4	o	3	
3	4	o	2	Casus quartus.
3	4	o	5	
5	1	o	2	Casus quintus.
2	1	o	5	

Probantur autem singuli casus, & Primus cùm datur basis, & angulus; & quæritur latus. Quia ex secundo casu propos. anteced. est o. ad 4. ita est 1. ad 5. Ergo erit, vt 4. ad 5. ita o. ad 4. Et quia est o. ad 3. vt 1. ad 2. erit etiam *permutando* o. ad 1. vt 3. ad 2. Ideoque etiam 3. ad 2. vt o. ad 1.

Secundus verò casus est cùm datur angulus, & latus, & quæritur basis. Quòd ex eodem secundo casu præced. propos. ostenditur. Siquidem ibi est o. ad 3. vt 1. ad 2. Quare erit etiam 1. ad 2. vt o. ad 3. Eademque ratione ostendetur, quia est o. ad 4. vt 1. ad 5. quod *permutando* sit o. ad 1. vt 4. ad 5. & ideo 4. ad 5. vt o. ad 1.

Tertius casus est ex primo casu præced. propos. ostenditur. Nam ibi dictum est ita esse o. ad 4. vt 2. ad 3. Quare etiam erit 2. ad 3. vt o. ad 4. Et quia ibi est o. ad 3. vt 5. ad 4. Ergo 5. ad 4. vt o. ad 3. nempe crure, & angulo crus aliud habetur.

Quartus casus. Et quia ex eadem propos. præc. casu est o. ad 2. vt 4. ad 3. Erit etiam 3. ad 4. vt o. ad 2. Et eadem ratione 3. ad 4. vt o. ad 5. quòd in præced. primo casu ostensum sit esse o. ad 5. vt 3. ad 4. ideſt duobus cruribus obtinetur angulus.

Quintus probatur ex 3. casu præced. propos. quia enim est o. ad 5. vt 2. ad 1. Erit etiam 2. ad 1. vt o. ad 5. Et quia est è contra o. ad 2. vt 5. ad 1. erit etiam 5. ad 1. vt o. ad 2. nempe dato angulo, & basi crus inuenietur. Vnde omnes casus remanent ostensi.

COROLLARIVM.

EX præcedentibus itaque propositionibus colliguntur istæ quatuor praxes, quibus omnes casus soluuntur, tum Geometricè, tum Logarithmicè.

1. Arithmeticè.

AD inueniendam partem intermediam datis partibus oppositis, & remotis. Multiplica inuicem complementorum sinus remotarum extremarum partium, & diuide per sinum totum, & prodibit sinus intermediæ.

Sed aduertendum est, quod vbi ponitus *latus* ibi complementum intelligitur propriè sumptum, vbi verò complementũ ponitur in fig. impropriè sumitur in prop. pro complemento ipsius cõplementi; nempe pro sinu ipso basis, seu anguli.

Logarithmicè.

ADditi inuicem complementorum eodem sensu sumptorum logarithmi faciunt logarithmum intermedię subducto o. vel 1. pro diuersitate tabularum.

2. Arithmeticè.

AD inuediendam extremam aliquam remotam data altera parte extrema remota, & intermedia. Multiplica sinum intermedium cum sinu toto, & diuide per extremum remotum sinum complementi, & prodibit sinus complementi reliquæ extremæ, quæ complementa debent intelligi, vt explicatum est.

Logarithmicè.

SVbducito logarithmum complementi extremę remotæ partis eodem sensu intellecti à logarithmo arcus intermediæ, & prodibit alterius extremæ remotæ logarithmus complementi, & hoc iuxta logarithmos Neperi: iuxta vero alios addendus est prius logarithmus sinus totius logarithmo intermediæ, & deinde subductio instituenda, vt priùs.

3. Arithmeticè.

AD inueniendam intermediam partem datis extremis partibus proximis Tangentes proximarum partium, si in schemate sint notata *compl.* complementorum ipsorum, si sint notata *latera*, ipsorum laterum inuicem multiplicentur, & diuidantur per sinum totum, & prodibit sinus intermediæ: nempe sinus illius partis, prout in schemate notata est sinus lateris, vel sinus complementi anguli, vel basis.

Logarithmicè.

LOgarithmi tangentium simul addantur partium vicinarum, & subducatur o. secundùm tabulas Neperi; at 1. secundùm alias, & prodibit logarithmus intermediæ, & qui debet intelligi sensu supra explicato.

4. Arithmeticè.

AD inueniendum extremam partem vicinam data altera vicina, & intermedia. Multiplicetur simul sinus intermediæ, vt supra intellectæ cum sinum toto, & diuidatur per tangentem alterius extremæ vicinæ datæ, & prodibit tangens extremæ proximæ quæsitæ.

Logarithmicè.

ASinus logarithmo intermediæ datæ eodem modo intellecto addito priùs o, seu logarithmo sinus totius secundùm diuersitatem tabularum subducatur logarithmus tangentis vicinæ partis cognitæ, & prodibit logarithmus tangentis iterius partis vicinæ.

Aduerte, quod Cauallerius istas regulas asserit propos. 33. sed mutillatas, nec plenè explicatas.

EXPENSIO VI.

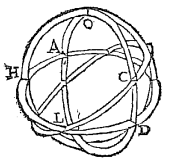
De substitutione figurarum, & laterum.

QVia Cum præcipit propos. vsum complementorum, si detur triangulum, cuius partes, pro quibus complementa sumenda sunt, sint quadrante maiores ad calculum inеundum substituere aliquando triangulum alteri, latusque alteri, prout res postulabit, oportet, & etiam commodiùs est, si calculus sit obscurus aliquando ob angulorum magnitudinem, vel parum securus ob exilitatem; ideoque cognoscere opus est tali casu, & quomodo substitutio ineunda sit.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

Dato triangulo obtuso pro illo acutum assumere.

VT securiùs, & intelligibiliùs opus trigonometricum exequatur, operę pretium est dato triangulo omnibus angulis obtusis, aut etiam duobus constante, illud in triangulum saltem duos acutos habens conuertere, quòd enim sinus quadrantis sint; hinc est quòd si latera sint longiora quadrante, vt talia sinus non habeant, nec tangentes, & per consequens, nec secantes, nec complementa, & ideo reddatur calculus obscurus, cùm debent assumi sinus alterius quadrantis pro dati trianguli, cuius latera omnia quadrante superant, calculatione: ideo satiùs erit datorum laterum complementa in obliquangulis, quæ claudunt angulum adiacentem, seu verticalem sumere; illius enim trianguli lateribus inuentis, vel angulis statim triãgulum datum secundùm omnes suas partes dignoscitur.



Prob. Nam sit triangulum scalenum, vel Isosceles, AOCHL, anguli; omnes obtusi apud A apud L, & apud C. Si assumas complementa lateris ad semicirculũ AOC V.g. &AHL, quæ sunt LD, & DC habebis angulos ad L, & C acutos eadem basi manente LC. Si ergo datis lateribus LHA, & AOC, & ideo complementis, & angulo eodem A æquali angulo D verticali queratur basis LC; soluto triangulo LDC inuenta erit, cùm sit eadem. Si quærãtur anguli ad basim inuenientur acuti LCD, & CLD, vnde ablati à duobus rectis restituent obtusos.

Quod si angulus verticalis A BOTUS non sit, sed angulus CLH adiacens lateri AHL, & notum sit latus oppositum COA auferatur arcus AHL adiacens à semicirculo, sicut & OAC, & remanebit CD, & LD, cum quo, & anguli CLH residuo CLD perficies operationẽ, & reperies V.g. angulũ DCL, cuius cõplementũ ad semicirculũ notum erit, OCL obtusus trianguli dati. Poteris etiã reperire basim, quæ erit crus adiacens angulo CLD in triangulo CLD, & adiacens quoque in triangulo CLA. Poteris quoque

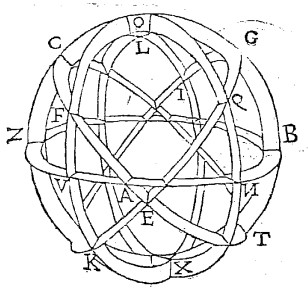
que inuenire angulum D verticalem qui æquabitur angulo A trianguli ACL, & eodem modo ages crure V g. AHL, & duobus angulis HLC, & OCL datis.

Si dentur tria crura maioribus à semicirculo deductis AHL, & COA habebis DL, & DC complementa cum basi LC iam nota. Quod si dentur tres anguli maioribus V. g. L, & C in triangulo ALC à duobus rectis detractis habebis DLC, & DCL cõplemẽta ad duos rectos acuta, cũ opposito apud D in triangulo CLD. Vnde opposita latera DL, & DC prædictis angulis DLC, & LCD perquires, & erunt complementa laterum LHA, & COA ad semicirculũ.

THEOR. I. PROPOS. XLIX.

Trianguli anguli in latera, & in angulos latera permutari possunt complemento, maioris anguli pro latere sumpto.

SIt triangulum GOQ, & anguli O mensura sit arcus BN descriptus polo O; mensura anguli G sit arcus CFAE; mensura verò anguli Q sit arcus IL. Dico, *quod isti arcus* BN, & IL *constituunt triangulũ, q̃ od pro tertio latere obtinet* cõplementũ arcus GE ad semicirculum mensurantis angulum maiorem G, quod complementum est TE. Hoc autem triangulum est AFV; quod habet latus AV æquale arcui BN, VF æquale arcui LI, & AF æquale arcui ET complemento arcus EC, quod sic probatur.



Prog. 1. Ex prop. 14. Cor, ex 12 sphæric. intersectio circulorum, qui habent polos in aliquo alio maximo circulo, quadrante distat à circulo, quo polos habent: igitur ENA, & TEA quadrans erit, quod poli horum circulorum sint in circulo TBGO in O, & G, & intersectio eorum in A existet; sic quia suos polos habent in Q, & G circuli ILFV, & CFAT; eorum intersectio F à circulo prædicto GQ EK quadrante distabit: vnde ILF erit quadrans, & EAF quadrans erit.

Pr 2 Item quia in circulo OQ polos habet CFET in Q, & BNAV in O eorum intersectio V distabit quadrante, & NAV quadrans erit, & LFV quadrans.

Pr. 3. Auferatq; NA cõmunis, à BNA, & NAV quadrantibus, & ideo æqualibus remanebunt BN mensura ãguli O, & AV æquales; sic auferè à quadrãtibus ILF, & LFV cõponentes arcum ILFV erit LF æqualis IL mensurę anguli Q. Tandem quia arcus CFAE subtendit angulum maiorem G ostendam iuxta tenorem propositionis ET complemento esse æquale AF tertium crus trianguli AFV: Siquidem TA quadrans, & EAF ostẽsus est quadrans pr. 1. auferatq; EA communis, & remanebit AF æqualis ipsi TE complemento, cui ET adde CF; & EA, & erunt tres arcus æquales totì CFAE mensure anguli G.

Probatur secunda pars, quòd anguli in latera queant commutari.

Progress. 1. Circulus CAT in G ex prop. 1 polos habet, ergo circuli ZOB, GEK in ipso CAT polos habebunt ex prop. 15. tract. 21. spheric. 1. p. vnde ex ipsius Cor. COG, & GQE quadrans erit; Sic quia ZAB in O polos habet, etiam ONX, & ZOB in ZAB circulo in communi puncto A circulorum ZOB, & CAT polos habebit. Vnde ZCO, & OQN ex Cor. citat. quadrantes erunt, & CZ mensura anguli A, Quia ergo ZCO, & COG ostensi sunt quadrantes, ablato cõmuni arcu CO arcus ZC mensura anguli A æquabitur lateri OG.

Progress. 2. Circulus quoque OFK polo Q, ductus est, ergo in ipso ONX circuli, & GEK polos habebunt. Quare intersectio Q à circulo OFK distabit quadrante, & KEQ, & XNQ, & LOQ quadrantes erunt, sed iam GQE ostensus est quadrans, & nunc KEQ quadrans demostratur; ablato ergo communi arcu EQ remanent arcus KE, & GQ æquales, & quia GEK ostensus est in circulo CET, & OFK polos obtinere, ideo habebit in communi eorum puncto F, vnde, vtpote ductus polo F arcus KE mensurabit angulum F, qui æquatur lateri GQ ex 1. p. par.

Progr. 3. Circulus quoque ONX in circulo OFK, & circulo ZVAB ostensus est habere polos, ergo obtinebit eos in communi eorum puncto V, ideoque anguli V arcus LOQN mensura erit. Verùm OQN p. 1. ostensus est quadrãs, talis quoq; est arcus XNQ, vt progr. 2. ablato ergo communi arcu QN remanebunt æquales OQ, & NX, est autem NX vsque ad semicirculum LONX mensurę anguli V arcus LOQN complementum: quare arcus angulorum F, & A in latera OG, & GQ sunt mutata, sicut angulus FVA in latus æquale complemento NX.

PROBL. III. PROPOS. L.

Datis loteribus reperire angulos, & datis angulis latera inuenire.

QVoniam laboriosa est operatio illa, qua datis lateribus anguli reperiuntur, multisque praxibus impedita; ideo hæc fortè erit facilior; hoc autem sit angulos in latera cõmutando. Nam ex 1. par. pr. antec. dato triangulo GOQ, cuius latus OQ, sit G 80. & G. 70. & QG G. 60. Igitur ex prec. trianguli AFV angulus F erit, cuius mensura EK, erit 70. angulus A cuius mensura CZ erit 60. & mensura anguli V; nempe arcus NOL erit 100. ex notis itaque angulis trianguli AFV reperiemus latera, quæ erunt anguli prioris propositi trianguli GOQ, nempe AV erit æquale O anguli mensuræ NB, & VF anguli Q mensuræ IL, & tandem complementum CFAE lateris FA, vel æqualis ET erit mensura anguli G.

Sic ex secunda parte preced. propos. Si dentur anguli GOQ, nempe arcus BN, at anguli OQG arcus IL, & complementum ad duos rectos anguli G constituetur triangulum AFV; cuius reperies angulos EK, & erit latus prioris GQ, & CZ, & erit latus GO, & complementum anguli V ad duos rectos, nempe NX, & erit OQ.

PROBL.

PROBL. IV. PROPOS. LI.

Sinus loco primam sedem occupante substituere radium, qui secundoloco reperiatur in regula proportionum.

ADmodum facilis est diuisio, cum debemus diuidere numerum per radium; quia tot numeri ad dexteram abicienti, quot zifræ in radio inueniuntur V. g. si diuidamus 646789 per 100. diuisus erit numerus, si excludantur duo numeri extremi dextri 89. & 6467. erit quotiens, fractioque erit $\frac{6467}{100}$. Ideo prouidendum semper est, vt facilitatis gratia sinus totus, seu radius primum locum sibi assumat.

Loco igitur sinus pone radium primo loco, sed secundum occupet secans complementi arcus.

Probatur. Quia vt sinus alicuius arcus respicit proportione radium; sic radius respicit secantem complementi arcus, vt dictum est propos. 26. tract. 20.

Quod si sit sinus complementi arcus, seu anguli in primo loco, & radius in secundo Vice complementi radius in primo loco existat, sed loco secundo secans dicti arcus existat; Ratio est, quia ita est sinus complementi arcus ad sinum totum; vt sinus totus est ad secantem ipsius arcus ex propos. 26. tract. 20.

PROBL. V. PROP. LII.

Loco secantis alicuius arcus, seu complementi primum locum occupantis ponere radium.

LOco secantis primo loco radius collocetur secundo sinus complementi ipsius arcus, seu si secans sit complementi alicuius arcus; primo loco ponatur radius, secundo sinus ipsius arcus, & cætera fiant, vt regula aurea præcipit. Ratio est fundata in citatis propos. 26. tract. 20.

PROB. VI. PROPOS. LIII.

Si tangens alicuius arcus, seu complementi primo loco reperiatur radium vice eius ponere.

POnatur radius primo loco, secundo tangens complementi ipsius arcus; Quod si sit tangens complementi primo loco, ponatur radius; secundo verò tangens ipsius arcus.

Probatur ex propos. 24. tract. 20. Nam vt est tangens ad radium, ita radius ad complementi illius arcus tangentem, & viceuersa, vt tangens complementi ad radium, ita radius ad tangentem alicuius arcus. Vnde cum sit eadem proportio, alterum loco alterius substitui potest.

COROLLARIVM.

NE dum ob facilitatem anguli acuti aliquando obtusis substituendi; sed etiam ob securitatem, & anguli semper illi spernendi, nec adhibendi, quantùm fieri potest, qui sinus extremorum arcuum V. g. 1. aut m. 30. & cæt. exhibent; nam ob angulorum, & laterum exilitatem, & breuitatem veram deinde quantitatem quęsiti lateris, & anguli non tribuunt, sic si adhibenda sint complementa nimis breuia V. g. complementi arcus 89. m. 30. aut simile, & possit alia regula vti non adhibito complemento m 30. illius arcus 89. m. 30. debes non vti, & cùm datur electio adhibẽda sunt latera mediocra, quàm fieri possit, & anguli mediocres, & per illos exquirere, quod placet reliquorum.

EXPENSIO V.

De triangulis obliquangulis ad rectangula reducendis per tres operationes.

MOdus, quo triangula sphærica obliquangula soluuntur transfundendo illa in duo rectangula operosior; quidem; at captu facilior, nullaque præuia demostratione indiget: quare post rectangula soluta, cùm in illis propositionibus fundetur, subnectendus est.

PROBL. I. PROPOS. LIV.

Cognitis duobus trianguli obliquanguli cruribus, & angulo opposito, & altero specie noto; angulum reliquum reliquo cruri cognito oppositum reperire.

SIt triangulum obliquangulum GAB, in quo sit cognitũ crus AB, & crus AG, & angulus cruri AB oppositus G: docet propositio angulum B reliquo cruri oppositum reperire.

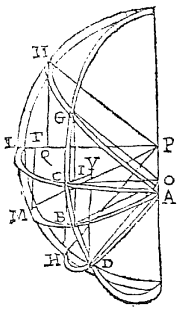
Quia ab angulo A super latus GB potest cadere arcus perpendicularis AC, seu cadat intrà, cum anguli specie conueniunt, vt in proposito triangulo BAG, seu extra, cum dissentiunt, vt triangulo DAB, hæc inueniatur: Datis itaque angulis specie concordibus sinum CO arcus normalis AC primò inuenies.

Datur enim basis AG, & angulus adiacens G: quare ex prop. 3. h. crus oppositum normale AC angulodato G inuenire poteris, quo obtento.

Dato crure AC, & basi AB deinde ex 18. huius poteris inuenire angulùm oppositum dato cruri AC, & ideo arcui AC: qui est B quęsitus. Quod si anguli specie dissonent, & cognitus sit obtusus V. g. ABD, assumatur eius complementum ABC, & inueniatur AC, quo obtento.

Data basi AD, & arcu AC inuenies angulũ oppositũ apud D, & deinde reliqua si placuerit reperies V. g. ex 17. h. data AB basi, & CA reperies angulum BAC, scilicet sinum MT, & arcum ML, & dato AG, & AC reperies angulum CAG, scilicet sinum QN, & hinc arcum NL, quæ inuenta copulabis, si anguli cogniti fuere ambo acuti, vel obtusi, vt in triangulo GAB. Deduces minorem à maiori, si fuere specie diuersi, vt in triangulo DAB. Et idem ages si quæras basim; nam inuenies duos sinus GI in triangulo GAC, & BI in triangulo BAC, cuius duo anguli specie conformes, & arcus eorum vnies, & fiet basis BG. At in triangulo DAB, in quo anguli

specie



specie differmes inuertis sinubus DY, & BI arcus eorum BC minorem à DBC maiori subduces, & restabit DB, & ita totum triangulum notum erit: Cur autem in concordibus angulis vniendi arcus in discordibus subducēdi ratio est, quia perpendicularis in concordibus intra cadit, in discordibus extra ex propos. 30. & 31. Tract. 23.

PROBL. II. PROPOS. LV.

Duobus angulis, & crure opposito datis inuenire crus oppositum alteri eorum.

SIt datū triangulū obliquangulū GAB in prec. fig. & anguli G, & B concordes specie, & crus AG, & oporteat reperire crus AB oppositum angulo G.

Quoniam possumus deducere arcum perpendicularem intra triangulum cadentem, vt AC, is inueniatur.

Datur enim basis AG, & angulus G, vnde ex cle. propos. 3. huius inuenies crus oppositum AC perquirendo sinum eius CO. Deinde dato arcu, crureque opposito AC, & angulo B inuenies basim AB ex propos. 21. huius; habita verò basi AG, & crure AC inuenies reliqua, vt supra.

Detur deinde triangulum DAB, in quo anguli spetie dissentiant, & sit notū crus AB, & anguli, vt ADB, & ABD. Anguli complemento ABC, inueniatur arcus perpendicularis AC inueniendo sinum OC, quo obtento crure AC perpendiculari, & angulo D inuenietur basis AD ex cit. propos. 21.

PROBL. III. PROPOS. LVI.

Duobus cruribus, & angulo datis altero spetie noto, basim inuenire.

DEtur triangulum AGB, in quo anguli specie consentiant G, & B: At G angulus sit quoque notus quoad quantitatem sicut, & crura AB, & GA desidereturque basis BG.

Quoniam datur AG basis, & angulus G; inueniatur perpendicularis arcus AC demissus super incognitam basim ex 3. huius.

Deinde arcu perpendiculari AC, & basi AG ex propos. 30. inuenies crus, & arcum GC.

Postea arcu eodem inuento normali AC, & arcu dato AB inuenies arcum BC ex prop. cit. 30. & simul arcus inuentos BC, & CG copulabis, & fiet tota basis, arcusque BG.

Si verò anguli specie dissonent, vt in triangulo ADB pro obtuso angulo ABD angulum complemēti CBA accipies, & inuenies arcum normalem AC, quo & basi BA reperies ex cit. propos. BC, & rursùs arcu AC, & basi AD arcum DBC, à quo subduces basim priùs inuentam BC, & habebis DB pro arcu residuo, & basi quæsita.

PROBL. IV. PROPOS. LVII.

Duobus angulis, & crure datis vni eorum opposito basim interpositam angulis reperire.

DAto arcu GA, & anguli G, & BA noto specie inueniatur, vt supra normalis arcus CA, vt propos. 3. h. & deinde si anguli specie consentiant, vt in triangulo GAB. Dato crure AC, & angulo opposito G, inueniatur crus alterum GC adiacens angulo dato G ex 19. huius.

Sic dato crure normali AC, & angulo B, ex eadē inuenietur arcus BC, & simul vniātur CB, & GA. At si specie discordēt vtendum est angulo vicario, & complemento ex eadem propos. V. g. in triangulo APB dato crure AC, & angulo ABC inueniendus arcus BC; rursùsque eodem crure normali dato, & angulo D inueniendus est arcus DBC, alterque minor ab altero subducendus, vt remaneat arcus, & basis DB quæsita.

PROBL. V. PROPOS. LVIII.

Duobus cruribus, & angulo opposito vni eorum datis, & altero specie noto angulum verticalem inuenire.

DEtur triangulum obliquangulum GAB, & angulus G, duoque crura quantitate nota AG, AB, angulusque notus specie, nempe alteri cōsonus Angulo G, & Crure GA crus normale AC reperiemus, vt supra. Deinde angulū CAB apud A ex pr. 15. huius scilicet arcum NL. Deinde dato crure normali AC, & basi BA inueniatur angulus BAC apud A scilicet arcus LM ex 17. huius, & anguli reperti BAC, & GAC, ideſt arcus NL, & LM simul vniantur, & fiet totus angulus BAG.

Quod, si anguli specie dissonent, vt in triangulo DAB; tunc reperiatur ex 15. huius angulus BAC scilicet arcus ML. vtendo complemento ABC pro dato angulo obtuso ABD, & rursùs crure AC, & basi AD, quæratur angulus DAC, scilicet arcus HML ex 17. huius, subducaturque alter ab altero, & fiet angulus quæsitus DAB, videlicet arcus HM. Quod si notus quantitate sit acutus angulus eodem modo efficies, ac supra, & angulo D, & crure AD reperies normale crus AC. Deinde crure AG, & angulo D angulum DAC, ideſt arcum HML ex 15. h. & hinc crure normali AC, & basi AB angulū CAB, ideſt arcū ML extrahes, atq; angulum BAC minorem subduces à maiori, prodibitque arcus HM exoptatus.

PRORL. VI. PROPOS. LIX.

Duobus angulis, & crure opposito datis angulum verticalem conquirere.

IN triangulo obliquangulo GAB, in quo anguli dati G, & B specie conueniunt, & quantitate innotescunt, detur crus AG.

Itaque ex 3. huius dato crure AG, & angulo G inuenies crus normale oppositum AC. Postea ex propos. 15. inuenies angulum CAG, ideſt arcum NL apud

apud A data basi AG, & angulo G.

Deinde dato angulo B, & crure opposito AC inuenies angulum alterum ex propos. 41. BAC hoc est arcum ML, quos simul copulabis, nempe angulum CAG, & CAB, & efficies totum angulum GAB hoc est arcum NLM.

Quod si anguli specie sint absoni, dati anguli B obtusi cōplemento vtere, & crure BA dato, angulōque complente ABC inuenies AC ex 15. huius.

Rursùsque crure AC normali, & angulo D in triangulo DAC inuenies angulum DAC hoc est arcum HML maiorem, à quo subduces angulum BAC, ideſt arcum ML, & residuus erit exoptatus angulus DAB. Inuenies autem angulum CAB sc. arcum ML dato angulo ABD complemento ABC, & crure opposito AC ex prop. 48. huius.

THEOR. VII. PROPOS. LX.

Dato angulo verticali, & duobus cruribus comprehendentibus basim, & angulos inuenire altero angulo specie cognito.

COgnitus detur angulus B quantitate, & duo crura BA, & BG comprehendentia sint quoq; nota, & alter angulus G notus specie, nempe quòd sit quoque, vt B acutus.

Dato itaque angulo B, & basi AB inueniatur crus normale CA ex 3. prop. h. & ex 15. h. angulus BAC.

Deinde crure, & basi AB, & angulo eodem B inuenietur arcus BC ex propos. 13. huius, quem subduces à noto crure BG, & habebis crus CG.

Hoc itaque crure CG, & AC normalibus inuenies basim AG ex prop. 7. h. & angulū G, & CAG ex 25. h.

Quod si anguli specie differant; Ex dato angulo DBA, & crure AD, quòd datus angulus sit obtusus DBA, vtere complemento ABC, & basi AB, inuenies crus AC normale, quod extra cadit.

Deinde angulo B obtuso & crure, seu basi AB si detur obtusus angulus inuenietur crus BC ex pr. 13. h. quod addes noto cruri BD, & efficies arcū DBC.

Quo arcu DBC, & AC normalibus inuenies basim quæsitam AD ex 7. h. & angulum D.

Quod si angulus sit D acutus angulo D, & basi DA inuenietur arcus DBC, à quo subduces crus notum BD, & obtinebis crus BC.

Hoc itaque crure BC, & crure AC normalibus inuenies AB quæsitam basim ex 7. h. & angulū BAC, quem subduces ab angulo recto, & fiet ang. ABD.

PROBL. VIII. PROPOS. LXI.

Dato crure interiacente, seu basi, & duobus angulis ad basim angulum verticalem reperire.

IN triangulo obliquangulo ABC detur basis AG, & anguli noti sint G, & A. & perquiratur angulus B, cum anguli specie concordant. Itaque data basi AG, & angulo G perquiremus crus normale AC. Deinde ijsdem datis angulum GAC ex prop. 15. h. quem subducemus à toto angulo dato GAB, & restabit angulus BAC.

Hoc itaque angulo CAB, & crure AC perquiremus reliquum angulum ABC ex propos. 5. huius, qui erit angulus verticalis quæsitus B oppositus basi AG.

Quod si detur triangulum BAD, in quo anguli B, & A specie dissonant, & basis detur BA. Complemēto anguli CBA, & basi BA inueniatur crus normale AC ex 3. h. & ijsdē datis āgulū BAC ex 15. h. quē addes angulo acuto noto DAB, & efficies ang. DAC.

Hoc itaque angulo acuto DAC, & crure AC perquires alium angulum verticalem apud D ex prop. 5. huius.

PROBL. XI. PROP. LXII.

Dato crure interposito, & angulis adnexis reliqua crura perquirere.

EXponatur triangulum obliquangulum GAB, cuius nota basis AG, & anguli ad basim A, & G, & perquiratur aliquod crurum AB, vel BG.

Dato itaque angulo G, & basi AG ex 3. huius perquireretur crus normale AC.

Deinde basi AG, & angulo G crus normale GC adhærens angulo G ex prop 13. huius.

Postemodum angulum GAC ex propos. 15. huius, quem subduces à toto noto GAB, & restabit angulus CAB, quō CAB, & crure inuento AC perquires reliquum crus oppositum BC ex 3. h. & crus adiacens AB ex 13. huius. Iunges tandem duo crura GC, & BC, & obtinebis GB, idem ages, si anguli dati sint specie dissoni, sed adhibita cautella subductionis vnius ab allo.

Itaq; omnes casus obliquangulorum soluuntur per reductionem ad duo rectangula exceptis solùm duobus, nempe cùm dantur tres anguli, vel tres arcus. Nam per doctrinam precedentem isti duo casus solui nequeunt, cùm in rectangulo non detur, nisi vnica res, nempe vnicū crus, vel vnicus angulus, reliqua enim, quæ dantur non sunt rectanguli, sed obliquanguli cum in rectangulo reliqui anguli vnus sit rectus, alter sit semper aut maior, aut minor eo, qui datur in obliquangulo, & idem dices de cruribus V. g. in triangulo ABG crus BG, & AB est maius crure AC, vel crure GC, vel BC rectanguli. Sicut angulus CAB est maior anCAB, vel CAG, angulus verò B, vel G minor, quam rectus ad C. Vnde cum non nisi vnica pars rectanguli, tunc detur ex præcedentibus doctrinis, in quibus duæ semper partes rectangulorum ad ea soluenda requiruntur, mensuris subijci nullo modo queunt.

EXPENSIO VI.

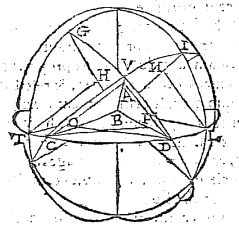
De obliquangulorum sphæricorum solutione deducendo perpendicularem, sed per duas operationes operi consignata.

MOdi quos hìc trademus ex parte quidem prædictis faciliores; Nam non nisi duas operationes adhibent; ex parte verò difficiliores, quòd in secunda operatione sinus totus non adhibeatur; quare ne dum multiplicatione, sed etiam diuisione opus sit; præcepta tamen omnes casus soluunt, & totam trigonometriam obliquangulorum sphæricorum amplectuntur.

THEOR. I. PROPOS. LXIII.

In omni triangulo sphærico rectangulo sinus angulorum eandem proportionem seruant ad sinus crurum oppositorum.

SIt triangulum rectangulum VDC, & rectus angulus V, in quo anguli, sine æquales, seu inæquales D, & C sinus toti LB, & BT, & BI, & BG, sinus cruris VD sit DA, sinus verò cruris VC sit AC, sinus cruris DC, sint CF, & DO. Sinus verò angulorum sint TH, & LN, quòd distent ab angulis C, & D quadrante ob sinus BT, & BL totos cum duo arcus TC, & DT ex defin. anguli præsupponantur quadrantes; sicut etiam CL, & CI; vt enim arcus LI, & GT sit angulorum mensura vtrique arcui perpendicularis esse debet. Vnde, & eorum poli debent esse in D, & C ex prop. 15. tract. 21. Corolla.



Probatur propos. arcus DT, & CL sunt æquales, vtpote quadrantes, & DC arcus idē, vnde æquales erunt sinus toti BL, & BT; necnon, & DO, & CF, vt eiusdem arcus; Proptereaque erit FC ad BT, & OD ad BI, vtpote æqualium eadem proportio: Verùm vt CF ad BT, ita est CA ad TH ex 1. huius Cor. & vt DO ad BL, sic est DA ad LN. Quare ex 16.l.5. vt est CA ad HT sic erit DA ad LN.

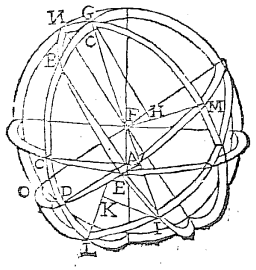
COROLLARIVM.

VNde colligitur quoque *permutando* ita esse sinus CA ad sinum AD crurum, vt angulorum sinus HT ad LN.

THEOR. II. PROPOS. LXIV.

In omni triangulo obliquangulo quoque sinus arcuum ad sinus angulorum sunt in eadem proportione.

SIt triangulum obliquangulum EBD, & ducatur perpendicularis arcus EC. Itaque sinus anguli B in rectangulo triangulo ECB erit IK, & cruris normalis sinus AG; sinus verò basis AB. Sic in triangulo rectangulo ECD sinus anguli erit ob sinus cruris oppositi normalis idem AG; sinus verò basis AD.



Igitur ex præced. vt est AB sinus basis ad FN sinum totum, sic AC sinus cruris ad IK sinum anguli E. Et pariter, vt DA sinus basis ad FO, seu FN sinum totum, sic AC cruris sinus ad GH sinum anguli D. Quare *inuertendo* FN erit ad DA, vt GH ad AC; Proportio itaque erit *perturbata*, vt vides.

Basis AB ad FN Rad. & FN ad AD,

vt GH ad crus AC ad IK angulum.

Vnde ex *æquo* AB erit ad AD, vt GH ad IK: & *permutando* AB erit ad GH, vt AD ad FK. Et idem sequetur, etiam si perpendicularis extra cadat, vt potes considerare si cogites ED arcum esse ad eandem partem, quâ reperitur arcus EB.

PROBL. I. PROPOS. LXV.

Datis duobus cruribus, & angulo in obliquangulo sphærico angulum reliquum oppositum reperire.

CVm ex præced. hæc tria data, & quartum quæsium sint proportionalia, datis tribus quartum regula trium reperire possumus, ponemusque primo loco sinum cruris dati AD, secundo anguli dati IK sinum, tertio cruris alius dati sinum AB; & prodibit sinus GH anguli quæsiti D oppositi.

PROBL. II. PROPOS. LXVI.

Datis duobus angulis, & vno crure reliquum crus oppositum reperire.

EX 64. propos. huius data, & quæsitum sunt quatuor proportionalia; Quamobrem Positis primo loco sinu anguli dati GH, secundo cruris dati sinu AE, tertio anguli dati sinu IK regula aurea exprimet quartum quæsitum sinum AD cruris oppositi ED.

THEOR. III. PROPOS. LXVII.

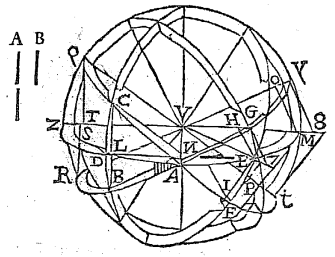
Si in triangulo obliquangulo sphærico perpendicularis intus cadit, sinus complementi anguli maioris apud basim ad sinum complementi alterius anguli minoris ad basim est, vt sinus anguli minoris ad sinum maioris, in quos verticalis angulus diuiditur ab arcu normali.

TRiangulo ACB obliquangulo super latus CB cadat perpendicularis arcus AD, & diuidat in duos arcus inæquales BD, & DC. Arcus verò EF. Sic complementum anguli C. At EG complementum anguli B; qui ponuntur ducti polo B, & C, vt ostendimus propos. 4. Tract. h.

Dico itaque, quod EG complementi sinus EH anguli B est ad sinum EI complementi FB anguli C, vt sinus RS anguli RAZ apud A ad sinum QT alterius anguli ZAQ apud A, quos perpendicularis intus

intus cadens facit, dum angulum verticalem apud A in duo diuidit.

Probatur. Iam ex dictis propos. 1. h. EN sinus complementi EA arcus normalis AD est ad radium MV, vt sinus EH complementi anguli B est ad MO



sinum anguli GAE, & ideo ZAR apud A, qui vtpote ad verticem æquantur, & ideo sinui RS: Sic idem EN sinus complementi arcus normalis AD, est ad sinum totum VM, vt sinus EI complementi anguli C ad sinum MP anguli apud A æquali angulo ad verticem ZAQ, & ideo sinui QT. Cum ergo sint in eadem proportione, quæ est EN ad MV radium, tum EH ad RS tum EI ad TQ ex prop. 16. lib. 5. erit eadem proportio EH complementi anguli B ad RS sinum anguli ZAR, vt EI minoris C complementi sinus ad sinum TQ anguli maioris ZAQ apud A. Quare *permutando* EH erit ad EI, vt RS ad TQ.

Idem quoque sequitur etiam si perpendicularis extra cadat, vt quilibet cogitare poterit si imaginetur QAt arcum ad alteram partē esse arcus RAY.

THEOR. III. PROPOS. LXVIII.

Data summa duorum angulorum, & eorum proportione reperire casu arcus normalis.

HVius problem. fundamentum latiùs supra explicauimus pr. 21. h. in triangulis planis obliquangulis, vbi probauimus. Quod sic se habet summa duorum sinuum ad eorum differentiā, sicut tangens medietatis arcuum ad tangentem semidifferētię eorū. Quare etiā si adsit quælibet alia proportio V.g. lineę A ad lineam B; quæ sit, vt summa duorum laterum ad eorum differentiam ex 16.l.5, erit etiam linea A ad lineam B, sicut tāgens medietatis arcuum ad tangentem semidifferentię eorum.

Detur itaque quælibet linea V.g. EI in præsenti fig. quę sit ad quamlibet aliam EH, vt QT ad RS sinus. Erit itaque *diuidendo* EI ad differentiam quā differt ab EH, vt QT ad differentiam suam ab RS, & *inuertendo* quoque differentia EI ab EH ad EI, vt differentia QT ab RS ad ipsam QT.

Et quia ponitur EI ad EH: vt QT ad RS erit etiam *componendo* EI ad EI cum EH: vt QT ad QT cum RS. Quare ex *æquo* differentia, qua differt EI ab EH erit ad summam EI cum EH, vt differentia, qua discrepat QT ab RS ad summam QT, & RS.

Proptereaque *inuertendo* summa EI cum EH erit ad differentiam earum; vt summa sinuum arcus QT & RS ad differentiam ipsorum. Sed vt summa sinuum QT, & RS ad ipsorum differentiam, ita est tangens medietatis arcuū QZ, & RZ, ideſt arcus RQ ad tangentē semidifferentiæ eorū QZ, & RZ arcuum. Ergo ex 16. lib. 5. vt summa sinuum EI, & EH complementorū ad semidifferentiam eorum, ita est tangens dimidij arcus QZ, & RZ, scilicet dimidiati arcus RQ ad tangentem semidifferentiæ ipsorum.

Primo itaque subducendus est sinus EI ab EH, vt habeatur differentia. Postea EI, & EH in vnam summam sunt redigendi; vt summam consequamur. Hinc arcus datus QR in duo partiendus, & medietatis tangens ex tabulis excerpenda.

Adhibita postea regula trium. Dices si summa linearum, seu sinuum proportionalium datorum dat differentiā eorū; quid dabit tangens semisummæ angulorū, & prodibit tangens semidifferentiæ eorum. Hæc itaque tangens quæsita in tabulis exhibebit arcum, qui additus medietati arcus QR dabit angulum maiorem ZAQ, subductus relinquet minorem ZAR, & punctum Z erit illud, in quod arcus normalis AZ cadit,

THEOR. IV. PROPOS. LXIX.

Obliquanguli trianguli tribus angulis datis eius latera reperire.

PRimo secundùm præc. doct. angulorum C, & B datorum complementis EI, & EH, & semisumma arcus QR anguli QAR inuenies singulos CAD, & BAD angulos, nimirum arcus QZ, & RS; siquidem ex propos. 67. ita est EH ad EI, vt SR ad TQ. Et si triangulum exhibitum habeat vnicum angulum obtusum, sumes pro angulis ad basim duos acutos, quod si obtineat duos obtusos, illos constitues pro angulis ad basim semper specie concordes. Vnde semper perpendicularis intra triangulum cadet. Quare in triangulo rectangulo CAD habentes duos angulos ad basim notos, nempe angulum C, & CAD ex propos. 23. huius inueniemus basim AC, & ex prop. 35. crus CD. Postea dato angulo B, & DAB ex propos. 23. basim AB inuenies, & ex prop. 35. crus DB, addesque cruri CD, quoniam anguli specie concordes assumpti fuere, & obtinebis tria latera nota AC, CB, & BA.

PROBL. V. PROPOS. LXX.

Dato crure opposito, & duobus angulis, & altero specie noto, angulum verticalem manifestare.

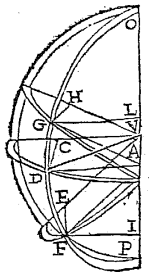
DEntur anguli B, & C, & crus oppositum CA ipsi B: Priùs itaque reperies angulum apud A in triangulo ACD dato pro basi crure AC, & angulo acuto C ex prop. 15. h. scilicet QZ arcum.

Secundo, quia ex prop. 67. ita est sinus EI complementi anguli dati C ad sinum PM, vel æqualem TQ, vt EH ad MO, vel æqualē SR ex dato EI complemento anguli C, & inuento sinus TQ, & EH complemento anguli B reperiemus MO, ideſt SR, & si anguli specie consentiant, simul arcus addendi, quod si specie differant, tunc pro angulo obtuso eius complementum assumendum est, & inuenti anguli, seu arcus minor à maiori est subducendus.

THEOR. IV. PROPOS. LXXI.

Sinus secundi arcuum in obliquangulo triangulo, in quos à perpendiculari diuiditur basis, sunt inuicem, vt sinus complementorum arcuum ipsis conterminalium.

SInt AG, & AF sinus arcuū conterminaliū FB, & GB & GH, & FE eorum complementorum; arcus



verò, in quos diuiditur basis FD, & DG, & sinus complemẽtorum L G, & IF. Dico, *quod ita se habet* LG ad IF, vt GH ad FE.

Probatur ex prop.6. h. Nam, vt est HG ad GL; sic est CD ad radium VD ex propos.6. huius; Item, vt FE ad FI; sic CD ad radium B DV. Quare ex propos.16. lib.5. GH erit ad GL, vt FE ad FI; cum eidem proportioni CD ad DV consonent. Idem autem ostendetur si perpendicularis extra cadat, vt ex te videre potes.

PROBL. VI. PROPOS. LXXII.

Dato angulo verticali, & duobus cruribus illum claudentibus basim inuenire.

OFferatur angulus G, & crus BG, & GF, alterq; angulus F specie angulo G consentiat.

Primo dato angulo G, & basi GB reperies crus GD adiacens ex propos.13. huius, quòd à dato crure GF subduces, & consequeris DF.

Itaque primo sinu LG complementi cruris reperti DG, secundo loco sinu FI complementi DF residui cruris dati, & tertio sinu secundo HG arcus conterminalis BG reperies sinum EF complementi basis BF quæsitæ angulo G verticali oppositæ. Hoc autem docuimus alio modo propos.60. h. Quod si alter angulus specie diuersus sit, vteris complemento, si angulus verticalis sit obtusus, arcumque inuentum minorem à maiori dato suduces, vel si sit acutus ab arcu inuento maiori minorem datum pro inuento primo, quo, & cet. vt priùs.

PROBL. VII. PROPOS. LXXIII.

Datis duobus cruribus, & angulo opposito, reperire basim altero angulo specie noto.

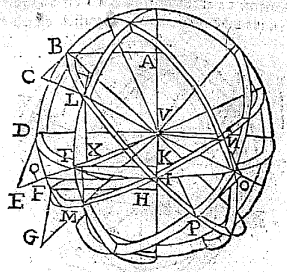
DOcuimus propos.56.h. id alio modo. Dentur itaque duo crura BG, & BF, & angulus G, sed F sit tantùm specie notus. Primo angulo G, & crure GB reperiemus crus GD ex 13.h.

Deinde fiat, vt HG complementi cruris GD sinus ad FE sinum cõplemẽti alius cruris BF; sic sinus LG complementi arcus inuenti GD ad IF ignoti arcus complementum, & duo inuenti arcus simul addantur GD, & DF, & fiet GF basis, si anguli specie concordent: quod si dissonent alter ab altero subducatur, & residuum erit arcus quæsitus.

THEOR. V. PROP. LXXIV.

Tangentes secundæ laterum conterminalium arcui normalis sunt inuicem in proportione, vt angulorum sinus secundi, in quos triangulum à normali diuiditur.

TRiangulo LMI latera arcui ITD conterminalia sint IM, & IL; quorum complementorum tangentes sunt BC, & FG: Arcus verò angulorum sunt FD, & BD; quorum sinus secundi AB, & HF. Dico itaque, quod vt BC ad FG tangentes crurum secundæ; sic AB ad HF sinus secundi angulorum.



Probatur. Nam ex propos.20. huius Radius, VD est ad sinum complementi anguli, nempe AB, vt tangens DE complementi cruris adiacentis IT ad tangentem BC complementi basis. Vnde, & *conuertendo* EC erit ad DE, vt AB sinus ad radiũ DV, sed ex eadem propos.20. in altero triangulo, vt DE ad FG; sic VD radius ad sinum HF. Ergo ex *æquo* BC erit ad FG, vt AB ad HF.

PROBL. VIII. PROPOS. LXXV.

Datis duobus cruribus; & angulo verticali angulos reliquos obtinere; si alius angulus tertius specie sit cognitus.

SInt data crura MI, & LI, & angulus I verticalis. Quia est CB tangens secunda ad FG tangentem secundam, vt BA ad FH sinus complementorum angulorum datur itaque proportio BA complementi angulorum ad FH, in quos verticalis est diuisus in tangentibus CB, & FG; datur quoq; summa anguli FIB eorundem angulorum, ideoque ex 48. h. si fiat, vt CB, & FG summa tangentium 2, crurum ad ipsarum differentiam, sic semisummæ arcuũ DB, & DF tangens ad ipsorũ semidifferentiæ tãgentẽ reperies semdifferentiã arcuum DB, & FD, quam subtrahes, & consequeris minorem arcum DF addes, & obtinebis maiorem BD arcus angulos BID, & DIF mẽsurantes. Vnde dato angulo BID, & latere LI consequeris angulum L, sic dato angulo DIF, & latere MI consequeris angulum M, ex 13.h. Quosvnies angulis specie consentientibus: subduces alterum ab alio, si specie dissonent.

PROBL. IX. PROPOS. LXXV.

Datis duobus angulis, & basi exquirere angulum verticalem.

DEtur angulus L, & M, & basis LM, & in animo sit reperire angulum LIM. Ex complementorum angulorum tangentibus NO, & OP erit nota proportio MX ad XL sinus ex 77.h. vnde reperietur MX, & XL ex prop.68. h. deinde angulo M, & sinu MX exquiretur angulus TIM ex prop. 5. h. rursusque angulo L, & LX; angulus TIL, & sic totus angulus MIL notus erit, si simul vniantur, eo quod anguli ad basim specie consonent, vel subducatur alter ab alio, si dissonent.

PROBL.

PROBL. IX. PROPOS. LXXVI.

Datis duobus cruribus, & angulo opposito angulum verticalem consequi alio tertio angulo specie noto.

DEtur crus LI, & MI, & angulus L oppositus cruri MI. Primo data basi IL, & angulo L ex propos.13. huius inuenietur angulus DIB.

Deinde fiet ex pr.74. vt tangentes BC ad FG complementorum crurum, sic AB sinus complementi anguli reperti DIB ad aliud, & inuenietur FH sinus complementi anguli alterius DIF, quos iunges si concordent anguli, subduces minorem à maiori si anguli specie disconueniant. Hoc autem etiam docuimus alio modo propos.58.

THEOR. VI. PROP. LXXVII.

In obliquangulo triangulo sinus segmentorum basis à perpendiculo factorum in ea sunt proportione; in qua tangentes complementorum angulorum segmentis adiacentium.

ANguli adiacentes segmentis TM, & LT à normali factis, sint L, & M, & tangentes complementorum ipsorum PO, & NO. Dico, quòd, vt sinus LX ad sinum MX; ita sit PO ad ON in proportione in præced. schemate.

Probatur ex 24. huius. Quoniam radius LV est ad sinum LX cruris LT, vt tangens DE complementi alterius cruris IT ad tangentem OP complementi anguli ipsi cruri IT oppositi. Ergo *inuertendo* sinus LX erit ad radium, vt tangens PO ad tangentem DE. Et ex eadem propos. vt radius est ad MX, sic DE tangens ad ON tangentem: Ergo ex *æquo* vt sinus LX ad XM sinum, ita PO tangens ad NO tangentem complementorum, & ideo erit etiam PO ad LX *permutando*, vt NO ad MX.

PROBL. X. PROP. LXXVIII.

Dato crure, & angulis duobus basim interiacentem angulis expromere.

DEtur angulus L, & M, & crus IL, & in animo sit reperire crus, seu basim ML.

Dato angulo L, & crure IL inuenies in primis crus LT ex propos.13. huius.

Secundò ex præced. facies, vt OP tangens complementi anguli ad sinum XL; sic tangens alterius anguli ON ad MX; habebisq; duos arcus LT, & MT; quos simul addes, si anguli dati sint speciei eiusdem; subduces si diuersi sint diuersæ speciei: Hoc autem docuimus supra propos. 61. Quòd autem sit PO ad LX, vt ON ad MX patet ex præced. Nam cum sit PO ad ON, vt LX ad XM erit etiam *permutando* OP ad LX, vt ON ad MX.

PROBL. XI. PROPOS. LXXIX.

Datis duobus angulis, & basi interiacente duo crura reperire.

QVoniam enim est ON ad OP, vt MX ad XL *inuertendo*: dentur verò basis LM, & anguli L, & M in triangulo obliquangulo LIM, & consequenter complementorum tangentes PO, & ON dabitur proportio, quam habet XL ad XM in duabus tangentibus PO, & ON, & dabitur summa arcus ML basis scilicet interiacentis.

Vnde ex dictis supra propos.68. exquires sinus XL, & XM, & arcum TL, & TM; quo obtento.

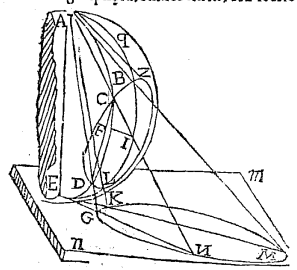
Secundo crure MT, & angulo M exquires basim IM. ex propos.21. huius, & rursus dato crure LT, & L angulo ex eadem perquires crus, seu basim IL: quod & fecimus supra propos.62.

Si verò anguli sint specie differentes pro angulo obtuso accipies eius complementum acutum ad ineundam operationem pro altero angulo, & eadem exequeris, vt priùs.

THEOR. VII. PROPOS. LXXX.

Dato in sphæra triangulo obliquangulo, si polo in angulo verticali maioris cruri oppositi, interuallo minimi cruris circulus minor describatur, tangens dimidiæ basis est ad tangentem dimidij aggregati crurum, vt tangens dimidiæ differentiæ crurum refertur ad tangentem eius portionis basis, quæ extra circulum remanet.

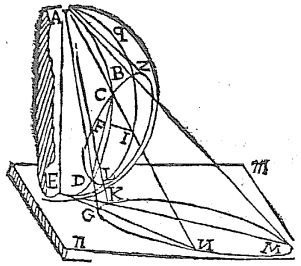
SPhæra super aliquod planum locata sit, & puncta contactus sit vertex E trianguli obliquanguli ICE sphæra descripti, & polo I. qui opponit maiori lateri EDC describatur circulus ZBCD interuallo arcu CI minori. Itaque IC arcus erit æqualis arcui IB; Vnde totus arcus BILE erit aggregatũm ex cruribus IC, & ILE. Quia verò planum m n tangit sphęrã, omnes lineæ, seu sectiones



in eo delineatæ erunt tangentes sphęræ. Ergo si planũ AQILE circuli productũ intelligatur, & secet planũ m n patet sectionẽ ME, & ducta per B linea AM efficietur ME tangens arcus BILE summę duorũ crurum. Rursus, quia IC æquatur IL arcui LE erit crurum differentia, & ductâ lineâ AK per L linea KE differentiæ EL crurum erit tangens. Sic arcus CDE est basis, & producto plano circuli, ACDEA culus portio est secabit planum m n in EN, & per C ductâ rectâ AN efficietur NE eius tangens; Quod verò basis remanet extra circulum arcus DE voca-

tur

tur *basis alterna*, & ducta AG per D linea GE erit eius tangens.



Sunt autem tangentes non angulorum, sed semiangulorum, eo quod oporteret, vt essent tangentes angulorum integrorum: quod prouenirent à centro, at quia anguli MAE, & DAE sicut, & anguli KAE, & GAE sunt ad peripheriam hinc ex propos. 23. el. 3 sunt tang. non angulorum, sed semiangulorum.

Per ea autem, quæ diximus de proiectione circuli obliqui in sphæra prop. 9. tract 26. MNHC sunt puncta in peripheria circuli proiecti existentia, quòd sit basis radiosi coni scaleni; cuius basis subcontraria est circulus ZBCDL. Et hinc est, quòd illud idem, quòd supra pr. 22. de triangulis planis ostensum est, hic verificetur, & ita sit tangens EN semibasis veræ ad tangentem ME semiaggregati crurum, vt tangens semidifferentiæ crurum KE est ad tangentem GE semiportionis baseos extra circulum remanentis: Omnia autem elliguntur dimidiata, quia secantes illæ, vt AG, AN, AM, & AH, quę terminant tangentes non prouenient à centro sphæræ, vt dixi, vnde arcus mensurantes angulos ducti radio AE apud A sunt duplo minores, quàm ij qui in circumferentia sphæræ sunt, scilicet EPC, & ELB, & cæt.

PROBL. XII. PROPOS. LXXXI.

Datis tribus lateribus obliquanguli sphærici, illud ad duo rectangula reducere.

DEntur trianguli sphærici tria latera primùm 40. secundùm 35. tertiùm 60. Gr. Statuatur pro basi crus maius, cuius medietas est 30. Gr. & tangens grossioribus numeris tantum accepta est 577. reliqua verò duo latera in vnum aggregentur, & fient Gr. 75. qui bifariam diuisi erunt Gr. 37. m. 30. quorum tangens est 767. Rursus subducatur crus maius à minori, & Gr. 5. pro differentia remanebunt, & pro semidifferentia Gr. 2. m. 30. cuius tangens par. 43. Adhibeatur itaque regula proportionum, & ponatur primo loco tangens semibasis EN par. 577. secundo tangens semiaggregati crurum EM Par. 767. tertio tangens differentiæ crurum EK par. 43. & prodibit tangens 57. GE arcus DE Gr. 3. m. 16. semibasis alterna, qui duplicati, vt sint Gr. 6. m. 32. & ablati à basi Gr. 60. remanebunt Gr. 53. m. 28. pro basi DC intra circulum remanente, cuius medietas DF erit Gr. 26. m. 44. in quam cadit arcus normalis IF; reliqua verò medietas addita basi alternæ 6. m. 32. dat reliquum arcum FDE Gr. 33. min. 16.

Ratio huius rei est ex præced. Quia ita est tangens EN ad tangentem EM, vt tangens EK ad tangentem GE; Vnde datis tribus primis regula proportionum quarta inuenietur.

PROBL. XIII. PROPOS. LXXXII.

Datis tribus lateribus angulos quoslibet reperire.

EX propos. anteced. id optimè fit. Nam cum iam consequti fuerimus notitiã partiũ basis, in quas arcus normalis cadit crure ILE dato pro basi, & crure EDF, iam reperto inuenies per propos. 18. huius angulum E adiacentem cruri dato ILE.

Secundo inuenies ex eadem propos. dato crure IC, & FC angulum C adherentem cruri FC.

Tertio eodem dato crure IC, & CF inuenies partem anguli *verticalis* CIF ex prop. 3. huius, & ex eadem dato crure FDE, & crure ILE pro basi inuenies partem alteram anguli apud I, quos angulos simul addes, & consequeris totum angulum CIL. Semper autem perpendicularis intus cadet, quia enim dantur tria latera possumus elligere duo, aut simul maiora quadrante, aut minora, quæ cruta efficiant, vt tertium dissonum crus sit illud, in quod perpendicularis cadit.

Habes itaque in hac Expens. omnem doctrinam obliquangulorum penitùs explicatam, & omninò absolutam. Cætera verò, quæ ab alijs ad abundantiam doctrinę traduntur omnes casus non plenè adequant sine istis licet ingeniosissima sint. Vnde huic libro, qui necessaria complecti intendit, & sufficientia non omnia, propositiones prædictæ satis erunt.



TRAC-

TRACTATVS XXVIII.

De Progressionibus superficierum.

TRansactis tractatibus, quæ de lineis erant consideratis, vt in corporibus, vel circa corpora deductis, nunc de corporum, superficiebus agendũ est. Et quia supra tractauimus de progressionibus in numeris, & in lineis, ratio postulat, vt eas propositiones, quæ veræ vniuersales sunt, ostendamus similiter de superficiebus quoque verificari, & simul specialia quædam de progress. Arithmetica superficierum attingamus, quæ cubandis sphæroidibus necessaria sunt.

EXPENSIO I.

De serie proportionis Geometricæ superficierũ

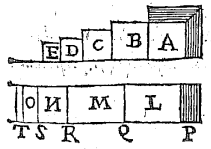
DVplex est series superficierum, quæ continuata in infinitum geometricè extendi potest; Alia est, quæ vnicam superficiem constituit: alia quę diuersas superficies inuicem similes componit, de hac præcipuè hic propositiones tãgemus: quas exhibuit nobis Ambrosius à S. Vincentio ab ipso singulari ingenio excogitatas.

THEOR. I. PROPOS. I.

Omnes propositiones, quas supra de lineis demonstrauimus de superficiebus geometricè continua progressione procedentibus verificantur.

SInt quadrata similia, seu quodcumque aliud genus figurarum A, B, C, D, & cæt. proportione geometricâ continuâ procedentia; Dico de illis omnia illa verificari, quæ supra tract. 16. part. 1. de lineis memoraumus.

Quod, vt ostendatur fiant rectangula equalia illis figuris A, B, C, D, & cæt. sed eiusdem altitudinis ex pr. 43. vel 44. l. 1. elem. quę sint L, M, N, O, quæ inuicẽ eam proportionem obtinebũt, quam bases ex prop. 1. lib. 6. Elem. erit-que L ad M, vt PQ ad QR, & sic de alijs vnde



Probatur. Ita est figura A ad figuram B, vt rectangulum ipsi A æquale ad M rectangulum æquale figuræ B; sed ex lib. 6. prop. 1. vt rectangulum L ad M, ita est basis PQ ad basim QR: Ergo ex propos. 16. lib. 5. Elem. vt A ad B ita PQ ad QR, & ita dicas de alijs C, D, quæ se referent, vt bases RS, & sT minoribus in infinitum. Cum ergo spatia successiuè minora in proportione Geometrica conseruent semper eandem proportionem, ac lineæ, seu bases successiuè minores, omnia erunt, quæ de lineis dicta sunt, etiam de spatijs similibus verificari poterunt.

COROLLARIVM I.

OMnia ea, quæ dicuntur de lineis supra tract. 16. verificari nedum de spatijs similibus; sed etiam dissimilibus continuè proportionalibus, vt sunt rectangula L, M, N, O. Sicut etiam non tantùm de ijs, quæ diuersas similes figuras constituunt; sed de ijs, qui vnicam, quorum tamen singulę partes assignate decrescant continuâ proportione geometrica. Tale est totum spatium LO, cuius singulæ partes L, & M, & N, & cæt. se referunt, vt bases PQ, & QR, & RS.

COROLLARIVM II.

ELicitur rursùs progressionem infinitam figurarum similium A, B, C, D, & cæt. seu dissimiliũ L, M, N, O producere determinatam spatij quantitatem; si simul omnia spatia sumantur; Nam etiam lineæ PQ, & QR, & RT determinatam longitudinem simul sumptæ, licet in infinitum multiplicatæ, producunt ex prop. 15. part. 1. tract. 16.

COROLLARIVM III.

DEducitur quoque omnia spatia antecedentia A, B, C, D esse ad omnia cõsequentia B, C, D, E, & cæt. vt vnũ antecedens A, ad suum consequens B, & similiter antecedentia L, M, N ad consequentia M, N, O, esse, vt L ad M: Quia ex Cor. 2. pr. 16. Tract. 16. sic sunt lineæ PQ, & QR, & RS, & cæt. ad lineas QR, & RS, & ST, vt PQ ad QR.

Vnde

Vnde, & *permutando* A,B,C,D V.g. antecedentia omnia erunt ad A, vt consequentia omnia B,C,D,E erunt ad B.

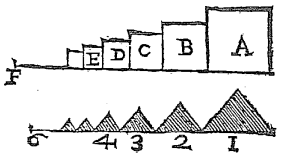
COROLLARIVM IV.

GNomonem nigrum nempe differentiam primi A à secundo termino B, & ipsum primum terminum totum A, & totam seriem terminorum infinitam esse in continua analogiâ eâdem. Sic & rectangulum nigrum differentiam primi I, à secundo M, & ipsum primum L, & totam collectionem rectangulorum esse in continua proportione, quòd ex 3. Coroll. prop. 15. ita lineæ se habeant.

THEOR. II. PROPOS. II.

Si dentur duæ progressiones in eadem analogya procedentes planorum, seu quælibet figura vnius sit similis alterius figuræ correspondenti, seu dissimilis; dummodò singulæ vnius seriei inuicem similes sint, sicut, & alterius: Ita se habebit tota planorum series ad totam seriem, vt primum vnius ad primum planum alterius.

SInt ABCD, & 1, 2, 3, 4 progressiones, quarum termini inuicem similes sint; licet diuersi ab alterius seriei terminis V.g. illa sint quadrata, hæc triangula, sintque in eadem proportione V.g. A ad B, vt 1 ad 2, & B ad C, vt 2 ad 3, & sic consequenter, & termini earũ sint F, & 6. Dico, *quod tota series* ABC, & cæt. erit ad totam seriem 1 2 3, & cæt. vt primus terminus A, quadratum ad primum triangulum 1,

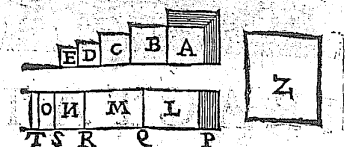


Probatur tota series antecedentium AF, & cæt. est vt consequentium seriem totã BF, sic A est ad B; sed vt A ad B ita est ex Hypothesi triangulum 1 ad 2, & sic ex Coroll. 3. huius omnia antecedentia, & series tota 16. ad consequentia 26. Ideoque ex 16. lib. 5. antecedentia AF ad consequentia FB erunt, vt antecedentia 16. & 26. consequentia. Quare *conuerteado*, vt series tota FA ad A primum terminum, ita 1.6. series tota ad 1 primum terminum. Propterea que *permutando*, vt AF series ad 16. seriem, sic A primus terminus ad 1 primum alterius seriei terminum.

PROBL. I. PROPOS. III.

Planitiem æqualem toti seriei Geometricæ continuæ superficierum exhibere.

FIat, vt gnomon niger redactus in quadratum ex 45. lib. 1. quadrati A, quà differt à quadrato B, sic quadratum totum maius A ad Z. Dico Z planitiem toti seriei AF æqualem esse;



Patet ex propos. 15. part. 1. de progress. vbi id probauimus de lineis. Sed iam ostendimus eas propositiones esse vniuersales, & planitiebus conuenire. Ergo, si tertia proportionalis linea in ea proportione, quam habet differentia primæ lineæ à sequenti ad ipsam primam lineam, hæc inquam tertia proportionalis totam seriem æquat linearum sic etiã superficies tertia proportionalis gnomoni nigro, & quadrato toti A æquabit totam seriem superficierum.

Et eodem modo operaberis de rectangulo P nigro, nam si fiat, vt P ad totum L, in quadratum trãsfusa, sic L in quadratũ redactum ad aliud inuenies Z æqualem progressioni 10 rectangulorum.

COROLLARIVM.

HInc est, quod si sint aliæ species figurarum, quòd possis reperiri similem figuram æqualem toti seriei, si differentiam in similem figuram redigas ex prop. 45. lib. 6. & ex tertiam proportionalem inuenias, vt tract. sequent.

PROBL. II. PROPOS. IV.

Datis duobus planis similibus, cuius bases homologæ in continuum sint positæ reperire illorum planorum terminum.

IN prop. seq. fig. sint bases planorum homologo similium AB, & BC indirectum positæ, & cupiat quis agnoscere vltimum terminum, ad quem progressio similium superficierum eis basibus insidentium data peruenlat.

Inueniatur ex prop. 15. Tract. 16. par. 1. basium AB, & BC progressionis vltimus terminus, qui sit F. Dico F esse etiam vltimum terminum datorum planorũ, ad quem producta in infinitum eorum progressio peruentura sit.

Probatur, quia cum bases sint tot, quot plana, & in eadem proportione duplicata. Siquidem ex prop. 27. lib. 6. plana similia duplicatam habent basium proportionem, vnde patet suis basibus ad eum terminum æquali multiplicatione peruentura.

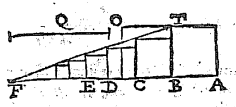
PROBL. III. PROPOS. V.

Datis duabus primis basibus reperire planorum seriei infinitæ æqualem superficiem.

DEntur bases quadratorum AB, & BC, & ex propos. 14. lib. 6. reperiatur eis tertia proportionalis CD: duarum verò AB, & CD datarum reperiatur seriei infinitæ linea æqualis Q ex propos. 16. tract. 16. par. 1. Fiatque super Q rectangulum AO æquale altitudini BT, & illud erit, quod postulatur, æquale toti seriei quadratorum,

Proba-

Probatur. Nam linea Q ex prop. 11. tract 16. par. 1. cùm sit æqualis toti seriei basium imparium ex effectione obtinet duplicatam rationem, ad primam basim AB eius, quam habet series basiũ AF ad primam basim eâdem AB. Propterea que ex 1. lib. 6. etiam



rectangulum AO ex Q factum eiusdem altitudinis ad primum quadratum AT duplicatam habebit proportionẽ, quòd sit eadẽ, ac basis suæ Q ad basim AB quadrati AT, illius, quam habet series basium AF basim AB. Sed series quadratorum AF ad quadratum primum AT duplicatam obtinet proportionem seriei basium ad primam basim; siquidem singula ex prop. 21. lib. 6. duplicatam basium obtinẽt proportionẽ; quare ex 17. l. 5. & omnia. Ergo eandem obtinent ad idem quadratum AT, quam rectangulum AO ex Q altitudinis BT, ad idem quadratum AT. Quare quadratorum series infinita, & rectangulum prædictum AO ex Q erunt æqualia ex 9. lib. 5. cum eidem eadem dicant proportionem.

COROLLARIVM.

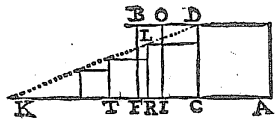
SI inter Q, & BT reperiatur media proportionalis quadratum ex ea erectum erit æquale rectangulo sub Q & BT cõprehenso ex 19. l. 6. Vnde erit quoq; æquale toti seriei infinitæ quadratorũ.

PROBL. IV. PROPOS. VI.

Dato quadrato, & eiusdem altitudinis rectangulo, seriem infinitam exhibere, quæ & à dato quadrato incipiat, & tota dato rectangulo sit æqualis.

FIat ex prop. 15. lib. 6. vt AF ad CF latus rectanguli, sic CA ad CI aliam inueniendam, & ex I erigatur parallela ad FB, & sit rectangulum CO: huic autem rectangulo fiat quadratum æquale CL.

Dico *seriem quadratorum* AD, & CL, & *cæt. rectangulo* AB, *æquari.*



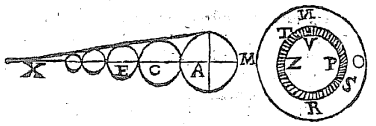
Probatur. Fecimus AF ad CF, vt CA ad CI. Ideoque cum sit CA sumptus, vt primus terminus ad CI, vt secundum velut AF totum cum primo ad CF residuum ex primo ex Coroll. 1. prop. 16. tract. 16. part. 1. AF erit æqualis toti basium infinitæ seriei in ratione AC ad CI, procedentium.

Deinde quia quadratum CL æquatur rectangulo CO habebit eandem ratiõnẽ ad illa quadratũ AD: Quare cum quadratum maximum AD sit ad quadratum CL, vt AC basis ad tertiam proportionalem BT, quia sunt in duplicata proportione basium; erit etiam talis proportio Quadrati eiusdem maximi AD ad rectangulum CO ob eandem altitudinem, vt basis AC ad CI basim; ergo bases CI, & RT sunt æquales, quod eisdem basis AC eandẽ dicant proportionem quadrati AD ad quadratum CL, vel rectangulum æquale CO. Quadere cum sit, vt fecimus AC ad CI, vt AF ad CF, & ideo (vt monuimus) AF æquetur seriei basium infinitæ in ratione AC ad CI, æquabitur etiam toti seriei infinitæ basium alternarum, & interruptarum in ratione AC ad RT quod CI, & RT sint æquales. Quare ex anteced. rectangulum ex FA, & CD, nempe rectangulum AB, seriei infinitæ quadratorum AD ad CL, & cæt. erit æquale, cum sit erectum super AF æqualis seriei basium alternarum AC, & RT, & altitudinis CD, vt docet prop. 5. h. quod est promissum.

PROBL. V. PROPOS. VII.

Planorum seriem exhibere, quæ à dato segmento simili toti alicui planitiei incipiat, & ipsa series sit toti planitiei datæ æqualis.

SIt datus V. g. circulus OMN. à quo auferatur portio VZP similis toti, & debeat constitui series, quæ incipiat à circulo PVZ, & tota sit æqualis planitiei toti ONM.



Si esset iam constituta series ista, & esset AX, ita esset series XA ad seriem XC, vt circulus A ad C ex propos. 15. tract. 16. part 1. Coroll 1. Fiat itaque vt circulus OMN totus ad annulum residuum ONM, VPZ: ex prop. 26. lib. 6. vel etiã ex tr. 29. sequenti, sic PVZ circulus ad aliud RTS annulũ nigrũ. Cõstituat autẽ PVZ pro primo termino, & sit A, & fiat planũ C æquale ãnulo RTS nigro simile ex 23 l. 6. circulo, & planitiei A, & ideo planitiei toti ONM, & producatur progressio vsque ad suum terminum X. Dico *seriem* AX *æqualem esse planitiei datæ* ONM.

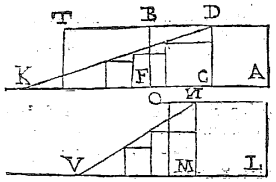
Probatur, Nam ita est ex constructione tota planities OMN ad annulum suum seminigrum NOZP, vt PVZ circulus ad RTSZP annulum nigrum, & vt A ad C æquales ex effect. sed vt A ad C; ita est AX series ad CX seriem ex Cor. 3. p. 1. h. Ergo, vt OMN planities ad ONMZP residuũ annulũ: sic series AX ad seriem CX: quare *conuertendo* erit AX tota series ad residuum, compartemque seriei A primum terminum, vt OMN planities tota ad PVZ residuum ex annulo: Vnde *permutando* erit etiam AX series ad OMN planitiem totam, vt terminus A ad PVZ residuum; sed A, & PVZ ex effectione æquantur. Ergo etiam series AX, & planities ONMR tota æquabuntur ex prop. 1. lib. 6. Elem.

Fiet autem circulus C æqualis annulo nigro ex lib. 6. vt infra docebimus Tract. 30.

PROBL. VI. PROPOS. VIII.

Seriem à dato termino incipientem; sed alteri æqualem instituere.

FIat rectangulum AB in altitudine CD æquale toti seriei AK ex propos.5. h. Sitque datum quadratum LN minus, quam rectangulum AB (alioquin propositio est impossibilis) cui addatur talis pars MO, vt totum LO sit æquale prædicto rectangulo AB. Et ex propos.6. huius, fiat rectangulo LO series æqualis LV, quæ à quadrato NL incipiat, & erit factum, quod exposcitur.



Patet, quia ex constructione series LV æquatur rectangulo LO, quod est æquale rectangulo AB, quod æquatur seriei AK; quapropter series LA æquabitur seriei AK.

PROBL. VII. PROPOS. IX.

Seriem superficierum alteri datam proportionem obtinentem ordinare, quæ incipiat à dato quadrato.

SIt data proportio 7. ad 4. Fiat autem rectangulum AB adhibendo schema præced. æquale progressioni KA ex h. prop.5. Deinde fiat, vt 7. ad 4. ita rectangulum AT ad rectangulum eiusdem altitudinis AB.

Sit autem quadratum datum L minus, quàm rectangulum AT, & ei addatur tale parallelogrammum ex 35. lib.1. elem. MO, cum quo faciat planum æquale plano AT faciendo rectangulũ LO æqualis MN altitudinis æquale ipsi AT; deinde ipsi fiat ex prop.6. h. æqualis series quadratorum LV; & erit factum, quod exigitur.

Patet ex constructione. Nam series LV æquatur rectangulo LO, quòd æquale est rectangulo AT; rectangulum verò TA se habet ad rectangulum AB; & ideo ad seriem AK ei rectangulo æqualem, vt 7. ad 4. Ergo etiam series LV ad seriem AK se habebit, vt 7. ad 4.

EXPENSIO II.

De planorum progressione Musica.

VIsa progressione Geometrica restat, & Musicam planorum progressionem breuiter attingamus. Vnde sit.

PROBL. I. PROPOS. X.

**Triangulum, seu parallelogrammum datum ita secare, vt partes proportionem musicam seruent.*

SIt triangulum ABC; quod oporteat ita secare, vt totum ABC planum sit ad planum FCA, vt differentia plana HBC ad planam differentiam HCF.



Diuidatur latus AB ex 25.pr. tr.15. vel 1. tr.16. in partes musicæ proportionales, ita vt sit AB ad FA vt BH ad HF Geometricâ proportione respondentes, ducanturque rectæ HC, & CF, eritque factum. Nam ABC totum triangulum erit ad AFC, vt differentia BCH ad differentiam HCF, vel si sint parallelogrammum ducantur normales ab F, & H ad basim AB, & partes erunt harmonicè proportionales.

Probatur, vt refertur AB ad AF bases, sic refertur BH ad HF basium differentiæ; sed triangula, vtpote eiusdem altitudinis ex 1. lib.6. eandem habet basium rationem. Ergo eiusdem rationis BH ad HF, quæ est eadem, quæ BA ad FA. Quare erit quoque triangulum BAC ad triangulum FCA in eaproportione, vt BHC ad HCF.

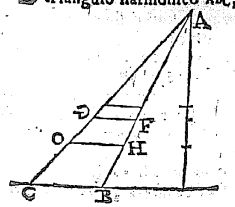
COROLLARIVM.

HInc colligas de istis planis, omnes quoque propositiones, quas de lineis diximus verificari, cumque de istis nil ampliùs dicendum nobis sit ad ipsa spatia, quę ab harmonicis lineis efficiuntur accedendum.

PROBL. II. PROPOS. XI.

* *Trapezia harmonicis lineis intercepta in harmonico triangulo habent eam proportionem, quæ trianguli ad triangulum, nempe proportionem duplicatam basis ad basim.*

*SInt lineæ harmonicæ BH, HF, BC, & HO, & FG in triangulo harmonico ABC, quæ faciant spatia BO, & HG. Dico *ea spatia* BO *ad* HG *habere inuicem eam proportionem, quæ trianguli* AC B *ad triangulum* AG F, *nempe proportionem duplicatam* BH *ad* HF.



* Probatur. Triangulum ACB ad triangulum simile AGF ob æquales angulos, à parallelis effectos est in duplicata ratione lateris AB ad latus AF; Trapezium quoque BO ad trapezium HG duplicatam habet lateris BH ad latus HF rationem ob similitudinem eorum cum angulis æqualibus cõstent ob parallelas; sed vt crus AB ad crus FA, ita est ob proportionem musicam ex propos.1. tract.16. part.2. latus BH ad latus HF; ergo etiam ACB triangulum ad AGF triangulum erit, vt trapezium BO ad trapezium HG.

COROLLARIVM.

HInc educitur omnes illas propositiones, quas posuimus de lineis agentes in seriem harmonicam progredientes, etiam superficiebus applicari debere, & veritatem eandem obtinere; quia earum omnium fundamentum est proportio Musica, secundùm quam in seriem continuam Musicè procedunt, vt facilè ex te ipso poteris considerare absque noua omnium earum propositionum repetitione.

EXPENSIO III.

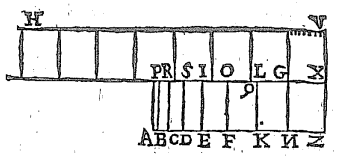
De progressione spatiorum Arithmetica.

HÆc Expensio quadrandis Ellipticis spatijs & spiralibus, & cubandis Conoidibus maximè deseruit; estque veluti fundamentum ad illas operationes præstandas.

THEOR. I. PROPOS. XII.

* *Rectangula Arithmeticè decrescentia, & eiusdem altitudinis æquiualent medietati rectanguli, ex eorum integrorum summa constantis vno excluso; dummodo partes secundùm quas decrescunt, tot sint quot ipse.*

SInt rectangula ZG, & cætera vsque ad A, V. g. 8. & octaua sui parte decrescant alterũ respectu alterius. Dico, *quod omnia sic diminuta simul æquiualent medietati summæ, quæ ex eis integris conflatur, nimirum rectanguli* HG *medietati excluso* GV *vnico rectangulo, vt sint 7.*



Probatur. Nam primum NL remansit tantùm, quantùm ablatum est ab vltimo AP, siquidem septem partes in NL remansere ablata vna septima, ibi in AP vna septima relicta est; cæterę septem ablatę. Ergo æquatur, quod remanet ei, quod ablatum est. Sic dicas de residuo OK, quod æquatur defectui BR; siquidem hinc ablatæ sunt 6. partes, ibi sex remansere, & sic de alijs, ergo defectus hinc, & residua inde æquabuntur: sed si sumantur simul augmenta, & defectus facient totum rectangulum. Ergo cum sint septem rectangula deficientia erunt simul defectus, & residua æqualia septem rectangulis integris. Ablatis itaq; æqualibus defectibus, residua remanebunt dimidia septem rectangulorum nempe dimidio HG excluso primo GV, sunt autem septem deficientia, quia à primo nihil aufertur.

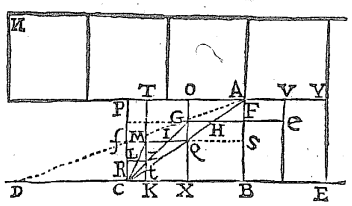
Id etiam diximus, cum ageremus de proportione Arith. summanda in Cor. prop.9. Tr.14. Siquidem ostendimus numeros datos continua diminutione Arithmetica deficientes in vnam summam redactos efficere dimidium numeri ipsius maximi in se ducti consurgentis, ipso tamen maximo excluso, vt videre in istis numeris. Namque maximus terminus est 10. qui multiplicatus in se facit 100. summa verò omnium est 45. nempe dimidium numeri quadrati ipso maximo 10. excluso, vt fiant 90. cuius dimidium est 45.

10	0
9	1
8	2
7	3
6	4
5	5
4	6
3	7
2	8
1	9
45	45

THEOR. II. PROPOS. XIII.

* *Rectangula prædicta iam arithmeticè deficientia; si adhuc secundùm aliud latus prædicto modo arithmeticè deficiant sunt maiora suis residuis.*

SInt rectangula Arithmeticè iam diminuta AX vsque ad KP; quæ adhuc eodem prædicto modo diminuantur, & primo auferatur rectangulum, cuius basis sit AF partis vnius, OQ duarum, ZT trium prout supra fecimus; Dico hæc residua rectangula, seu quadrata simul sumpta excedere partes omnes à se ablatas, nempe FO, & QT, & ZP;



Præassumptum. Et in primis notandum, quod omnis vnitas est ad latus alicuius quadrati, vt latus ipsum ad quadratum suum; quòd ex def.15. tract.8. ratione multiplicationis sui, ita vnitas metitur radicem, seu latus; vt latus, ipsum quadratum; sic 1. metitur 4. vt 4. metitur 16.° Quare si à radice auferatur vnitas, & à quadrato dematur ipsa radix; ita quoque erit 1. ad 3. vt 4. ad 12. Nam si est 1. ad 4. vt 4. ad 16. erit etiam *dividendo* 1. ad 3. vt 4. ad 12.

Quo posito insuper considerandum est, quòd BG est radix, seu latus EB ex hypothesi minutum vnica vnitate, & BD duplum BC est radix ipsa in se multiplicata ex præc. sed minuta ipsa radice BE. Nam diximus, quod omnia rectangula, idest BP arithmeticè decrescentia æquant dimidum rectangulorum AN integrorum sumptorum toties, quot

partes in ipso latere BA sunt, iuxta quas arithmeticè decrescunt, si tamen demātur rectangulum ipsum maximum AE: sed rectangula inuicem sunt, cum sint eiusdem altitudinis, vt bases, quare bases quoque BC arithmeticè decrescentes æquabunt dimidium BD radicem BE in 4. part. diuisam, & per 4. scilicet in se, ductam; sed diminutā ipsa radice ED.

Quare ex præced. præsſ. ita erit AF vnitas ad FG latus minutum vnitate, vt AB ad BD radicem in se ductam toties, quod in ipsa sunt partes sed ablata ipsa radice EB; Vnde FA erit ad FG, vt AB ad BD: Quare, & FA vnitas erit ad dimidium radicis FH, vt AB radix ad BC dimidium ipsius AB ex 18. lib. 5.

Cum ergo FH sit dimidium radicis vnitate diminutæ, & AFH triangulum æquale triangulo HOQ, ex altera vnitate QG, & dimidio HG effecto, erit trapezium BAQX æquale quadrato primo DG.

Vnde si etiam cætera trapezia QXTK, & cæt. essent æqualia suis quadratis XM, & alijs correspondentibus, spatium occupatum à quadratis decrescentibus esset æquale triangulo BAC, ex BC latere omnium diminutorum rectangulorum, & BA radice. Vnde rectangula ablata eis essent æqualia. Verùm hoc non est. Siquidem vnitas FA est ad radicem dimidiatam, & diminutam FH, vt radix ipsa tota AB ad BC; erit etiā ex 18. l. 5. dualitas AS ad SQ radicem diminutam; vt radix tota BA ad BC. Si verò demātur dualitas à maximā radice fit radix sequentis minoris quadrati XQ. Quare AC diagonalis transibit per Q. Vnde trapezium à diagonali efformatum in sequenti quadrato minus erit, quam ipsum quadratum; siquidem XQ vnū latus quadrati est idē, ac trapezij QTXK alterū verò latus minus KT non potest æquari, & sic dicas de reliquis, licēt sufficiat probasse de vno. Quare verùm erit, quod rectangula, seu quadrata decrescentia, rursùs Arithmeticā diminutione, vt BG, & XM, & KR, maiora euadunt, quàm medietas BAC rectanguli BACP ex summā omnium solā primā diminutione deficientium constati.

COROLLARIVM.

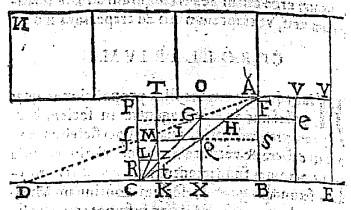
HInc est, id quod ostendimus de triangulis FHA, & HOQ, quod sint æqualia, id etiam ostendi de alijs, si XG assumatur tanquam latus maximi quadrati, vt sumitur BA; quare ducta diagonali CG secabit QM, dimidiam in I, & triangulum QGI erit æquale triangulo IZM, & triangulum ZML triangulo RCL; & ita si sint alia, siue quadrata, siue rectangula.

THEOR. III. PROP. XIV.

* *Summa rectangulorum, seu quadratorum duplici Arithmetico decremento minutorum est minor summā ipsorum integrorum excluso vno; seque habet ad eam minus in proportione, quam* 1. *ad* 3.

SInt rectangula BG, & XM, & KR. deficientia Arithmeticè, ne dum quòad latus BX, & alia, sed etiam quoad latera BE eodem modo. Dico, *quòd eorum summa* BG, *&* XM, *&* KR, dicit ad AN integra quadrata per 3. multiplicata numerum partium succesſiui deffectus minorem proportionem, quàm 1. ad 3.

Probatur. Quoniam ex præced. Coroll. omnia triangula, in quibus trapezia, vt QXKZ, & cæt. excedunt quadrata sua, vt XM sunt æqualia triangulis, quibus exceduntur, nimirum QGI triangulum triangulo IMZ, & alia alijs. Posito itaque illo spatio triangulari vt IZM, & LRC, in quo quadrata excedūt triangula QGG, & ZMC pro illo QGI, & ZML, in quibus exceduntur cū ZII Q, & LZTC sit commu-



ne; spatium QGZT æquabitur spatio MTQ, & MCT spatio ZRCT: vnde omnia triangula QGC, MZC equalia erūt excessibus quadratorū extra diagonalē AC excedentium, & remanentium; nempe spatio QMT, & RCZT, quò superant BAC triangulum; sed hæc triangula QGC, & MZC sunt equalia dimidio rectangulorū FG, & LM, vtpote eiusdē altitudinis. Ergo etiā excessus quadratorū QMT, & ZCR extra CAB, triangulis QGC, & MZC æqualia sunt dimidio eorūdem rectangulorum FG, & RM. Si autem etiam BG quadratum primū inter decrescentia excluso maximo excessū eodem excederet rectangulum FP; iam excessus omnium quadratorum super medietatem BAC æquaretur dimidio rectangulorum FP, & FG, omnium inquam defectuum, & ideo si esset triangulum APC partium 3. duæ cederent FP, FG, & MR rectangulis, at vna excessui quadratorū. Quare quadrata BG, XM, & KR posito toto rectangulo BACP partium 6. essent dimidium, & tertia pars alterius dimidij, nempe $\frac{1}{6}$, & rectangula residua FB, & FG, & RM $\frac{2}{6}$. Sed iam ostensum est quadratum GB primum deficientium nullo pacto excedere BAC. Vnde sūma quadratorū BG, & XM, & KR deficit à $\frac{1}{6}$ dimidio rectangulo PF, siquidem si spatio æquali illi dimidio excederet BG quadratum diagonalem AC, iam æquaret $\frac{1}{6}$ totius BACP. Sed quantitas BACP est dimidium quadratorum AN ex h. propos. 12. Ergo quadratorum, (cùm BP ponatur 6) AN rectangulum erit 12. & ideo BG, & XM, & KR summa erit ad AN 4. quadrata integra minùs quam 4. ad 12. ideſt minus, quā 1. ad 3. cum sit ad PB, vt 4. ad 6.

THEOR. IV. PROPOS. XV.

* *Si quadratis decrescentibus, & quadratis quoq; non decrescentibus addamus maximum quadratum, erit maior proportio omnium decrescentium ad omnia non decrescentia addito vtrobique maximo, quam* 1. *ad* 3.

SI series quadratorum, seu rectangulorum decrescens in præced. schemate addito maximo BA, & BG, & XM, & KR, iterumque quadrata integra tot numero YN addito eis quoque maximo. Dico, quòd quadratorum prædictorum decrescentium BA, & BG, & XM, & KL, Proportio ad YN quadrata

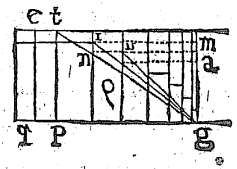
drata æqualia erit maior, quàm 1. ad 3.

Probatur. Ita est vnitas ad radicem, vt radix ipsa ad suum quadratum. Ergo æquabitur rectangulum ex vnica parte V. g. AF, & EX ED partibus tot, quot sunt in quadrato BA partes, constante quadrato ipsi AB ex 17. Elem. lib. 6. Quare etiam dimidium EP rectanguli EX ED, & AF erit æquale dimidio EV rectanguli EA. Quod autem ED constet tot partibus, quot in BA sunt quadrata parua patet ex hypothesi; quia est radix ipsa BA toties accepta, quot in ipsa BA sunt partes: Vnde si in BA sunt 4. partes in ED erunt 16. quia in AE sunt 16. partes productæ ex multiplicatione lateris BE in se quo posito. Iam BP rectangulū est ad AN, vt 3. ad 6. ex propos. 12. huius: addito autem quadrato, vt sit YN, & quadratis decrescentibus BV dimidium ipsius; erit adhuc VC ad YN; vt 3. ad 6. Ideoque cum quadrata decrescentia BG, & XM, & KL sint minus, quam 2. ad 6. ex præced. ad AN quadrata æqualia, si addamus eis duas tertias partes parallelogrammi BV erunt adhuc quadrata decrescentia GB, XM, & KR cum $\frac{2}{3}$ ipsius VB ad YN quadrata non decrescentia minus, quam 2. ad 6. & defectus erit ex præced. dimidium parallelogrammi FP: Si ergo addamus EV dimidium quadrati BA addimus plus, quàm FP, vt in principio ostendimus nimirum PC. Ergo addito toto quadrato BA quadratis decrescentibus, cum addamus magis, quàm quod requirunt ad hoc, vt dicant proportionem 2. ad 6. vel 1. ad 3. habebunt ad quadrata non decrescentia YN maiorem proportionē, quàm 2. ad 6. vel 1. ad 3. & excedent ferè rectangulo dimidio EP, & triente EV.

THEOR. V. PROPOS. XVI.

* *Quadrata decrescentia, seu rectangula duplici decremento Arithmetico supra descripto, quò iuxta minutiores partes successiuum eorum decrementum constituatur, eò magis accedunt ad proportionem* 1. *ad* 3. *respectu quadratorum non decrescentium.*

MVltiplicentur GB, XM, & KR rectangula præcedentia per diuisionem subduplam, vt in fig. Q. Proportio quadratorum, seu rectangulorum semper crescet ad quadrata non decrescentia, & semper fiet magis proxima ad eam proportionem, quam habet 2. ad 3.



Probatur. Nam rectangulum m t erit minus, quàm FP in præced. fig. & ferè duplò minus, quam FP, siquidem etiam, si secundùm longitudinem excrescat ei pars t I, ea certè non æquat longitudinem Im, vt ex dictis etiam colligi potest. Cum ergo hoc rectangulum sit minùs, reliqua erunt maiora, vt patet. Nam loco sequentis g f præced. fig. succedent in hac duo rectangula nm, u a simul æqualis latitudinis, ac GQ, sed quæ magis distent ob diuisionem minutiorem, & subduplam à termino g erunt longiora, & sic de cæt. Propterèaque etiam triangula, vt n I g, dimidia rectangulorum erunt maiora triangulis QGC in præced. fig. si duo triangula illius vni huius ob basim n I subduplo minorem sumantur. Sed hæc sunt æqualia incremento rectangulorum I vsque ad g supra dimidium tgp; Ergo etiam rectangula, seu quadrata, velut t p crescunt magis vltra dimidium, quàm quadrata GB, & cæt. præced. fig. & magis ad $\frac{1}{3}$ acceduut.

Nec tamen vnquā peruenīunt ad $\frac{1}{3}$, quia semper ad $\frac{1}{3}$ deficiet dimidium rectanguli t m; quare ad quadrata, seu rectangula q t septem integra erunt proximè; vt 3. ad 6. ex propos. 13. huius, cùm ea integra sint duplo maiora, quam rectangulum g t. Quod si quadratis non decrescentibus septem, & istis decrescentibus addas q t; eodem pacto, & eadem ratione erunt magis, quam $\frac{1}{3}$: sed multo magis accedent ad $\frac{1}{3}$, quadratis præced. fig. BA, & & GB, & cæt. Nam tertia pars rectanguli e p erit minor, quàm tertia pars residua BV, & dimidium e p huius, quod æquatur rectangulo e m erit minus, quàm dimidium EV illius, quo dimidio, & qua tertia parte quadrata precedentia decrescentia sunt magis, quàm $\frac{1}{3}$ respectu non decrescentium, vnde addito vtrinq; maximo q t rectāgula octo h. fig. minus discrepabunt à $\frac{1}{3}$, quam rectangula præced. fig. respectu octo rectangulorum integrorum quale vnum est t q.

THEOR. VI. PROPOS. XVII.

* *Series quadratorum, seu rectangulorum si infinita subdiuisione in Arithmeticam seriem, quoad ambo latera diminuatur, æquatur duobus sextis, quadratorum integrorum saltem quoad sensum.*

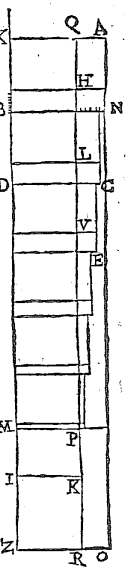
PRob. Nam quò numerosior est subdiuisio eò fit propinquior accessus ad $\frac{1}{3}$ rectanguli g t excluso maximo rectāgulorum à minori proportione; Sic incluso maximo fit accessus ad $\frac{1}{3}$ rectāguli gt à maiori proportione: nec exclusō maximo accedendo ad $\frac{1}{3}$ potest excedere $\frac{1}{6}$, nec incluso maximo ex præc. Ergo si diminutio fiat quoad vsque fieri potest æquabit tota simul $\frac{1}{6}$. Patet consequent. Nam non erit magis, quam $\frac{1}{6}$ alioquin posset adhuc fieri subdiuisio à maiori proportione, per quam acceditur ad $\frac{1}{3}$, sed nec erit minùs, quam $\frac{1}{3}$ integrorum rectangulorum eadem de causa; quia inquam posset fieri adhuc subdiuisio, per quam accedimus ad $\frac{1}{3}$ à minori proportione: Ergo æquabit $\frac{1}{6}$ rectanguli t g. Et ideo totius rectanguli, quod componitur ex rectangulis integris eodem numero constantibus, quod est ex 12. huius duplum rectanguli ex deficientibus vnico decremento rectangulis compacti erit vt 4. ad 12. ideſt, vt 1. ad 3.

THEOR.

THEOR. VII. PROPOS. XVIII.

* *Si rectangula Arithmetico decremento ſine fine deficientia vſque ad vltimum ſui non deficiant; tunc rectangula defficientia ad illa minora, quæ integra perſeuerant proportionem æqualitatis; ad complementa verò proportionem ſubduplam, ad rectangula verò circa diametrum reſiduum ſubtriplam.*

SInt rectangula Arithmeticè deficientia AB, & BC, & DE: Quorum defectus peruenìat vſque ad MK. Dico rectangula deficientia omnia eſſe primo rectangulis XH, BL, DV, & cæt. æqualia. Dimidium verò complementorum AH, & HB quòad totam ſeriem: Tertiam verò partem rectangulorum HN circa reſiduum HN diametri XN exiſtentium non deficientium.



Probatur. Quia rectangula XH, BL, DV integra perſeuerant. Ergo ſeries talium æqualium ſeriei æquè multiplicatę erit æqualis. Complementa verò HB, & LD deficiunt pro medietate ſui, ſicut, & AH, & NL, & CV pro medietate ſui deficiunt, ex 12. h. ergo ſimul AH, & HB, & cæt. dimidio quoque deficient. Rectangula verò circa diametrum, quod duplici Arithmetico decremento deficiant ex 17. h. extenuabuntur ſucceſſiuè vſque ad ÷ omnium. Quarè omnia ſimul ad integra HN rectangula æquè multiplicata ſe habebunt vt 1. ad 3. Itaq; rectangula deficientia Arithmetico decremento ſecundum vtrumque latus; ſed non vſque ad vltimum ſui; ſe habebunt ad integra, ad rectangula quidem XH, BL, DV, circa diametrum, vt 1. ad 1. ad cõpleméta verò BH, HA, vt 1. ad 2. ad reliqua verò rectangula circa diametrũ HN, vt 1. ad 3.

THEOR. VIII. PROP. XIX.

* *Rectangula duplici Arithmetico decremento ſe extenuantia, & non ad vltimum ſui, ſunt ad rectangula integra, vt rectangulum ſub maximo, & minimo latere, & triente rectanguli differentiæ ad rectangulum primum.*

IN præced. fig. ijſdem poſitis. Dico rectangula Arithmetico decremento, & non vſque ad vltimum ſui deficientia AB, & BC, & DE eſſe ad integra pari numero conſtantia, vt rectangulum BQ ex maximo latere XB, & minimo XQ conſtante, & triente rectanguli HN, quod oritur à differentijs laterum, quæ inter maximum, & minimum reperiuntur.

Probatur. Nam XH æquat ipſum rectangulum XH non deficiens, at HB eſt medietas complementorũ HB, AH, quod cõpleméta ſunt inuicem æqualia ex 45. l. 1. Quamobrem ſi, & aſſumas ÷ quadrati, vel rectanguli HN circa diametrum, erit tota ſeries rectangulorum deficientium proportione Arithmetica ad ſeriem multiplicem rectangulorum non deficientium, vt rectangulum QB, ſub latere XB maximi, & minimi XQ vna cum tertia parte rectanguli HN ad integrum XN, quia ſeries deficiens ad integra ſe habet quoque, vt 1. ad 1., & vt 1. ad 2. & tandem, vt 1. ad 3. ex 18. h.

COROLLARIVM.

HInc etiam educes: Totam ſeriem rectangulorum arithmeticè deficientium eſſe equalẽ rectangulo ex latere totã ſeriẽ integrã ſubtẽdente XZ, & latere MP minimi rectanguli, vnà cum tertia parte rectanguli differentiæ crurum PO. Nam tota ſeries rectangulorum minorum non deficientium finiat in PM; vnde rectangulum PX erit equale toti ſeriei minori rectangulorum non deficientium. Differentia itaque eſt inter ſeriem maiorum, & minorum non decreſcentem rectangulum PZ; quod eſt dimidium omnium complementorum; ſiquidem PZ æquat complementum FA, & ideo eſt dimidium omnium complementorũ hinc, & inde deficientium cum ipſa ſint dimidium integrorum ex 18. h. Cum itaque XP æquet omnia rectangula minora At AP, vel PZ omnia cõplementa deficiẽtia dimidio ſui, etiam rectangulũ PO, æquabit omnia quadrata reſidua circa diametrum, vt HN non deficientia.

Si ergo accipiatur rectangulum XR habebimus totam ſeriem rectangulorum minorum in rectangulo XP, & in reſiduo PZ dimidium omnium complementorum; ſi ergo inſuper aſſumamus tertiam partem PO rectangulj conſequemur omnia rectangula deficientia HN, LC, & VE, & cæt. Itaque tota ſeries rectangulorum deficientium ſine meta, ſed ad ſui vltimam diminutionem non peruenſentium erit æqualis in ſua planitie rectangulo ſub rectanguli primi latere ZR, vel XQ, & ſub latere omnũ rectangulorũ non deficientiũ XZ, & tertia parte rectanguli differentiæ OR crurum ZR, & OZ, & differentiæ MZ laterum XM, & MZ. Si verò conſideres ea, vt deficientia quidem; ſed non quoad omnem poſſibilem extenuationem ſingulorum, tunc omnia rectãgula deficientia excluſo maximo erunt æqualia rectangulo XR, & minus, quam tertiæ parti rectanguli PO; ſi verò includas maximum, erunt æqualia rectangulo XR, & magis, quam tertiæ parti rectanguli PO; Ratio eſt, quia excluſo AB rectangulũ PB æquat omnia minima nõ deficientias at PB, omnia complementa pro medietate ſui deficientia; cætera verò quadrata deficientia quoad vtrumque latus excluſo HN ſunt minus, quam tertia pars omnium quadratorum eiuſdem numeri non deficientium, quam multitudinem æquat rectangulum PO, ſi verò addas maximum XN iam deficientia complementa in complemento AH ſunt maiora rectangulo XR, & quadrato HN, quod additum rectangulis LC, VE, & cæt, fagiet magis, quam ÷ rectanguli PO.

TRACTATVS XXIX.

De Geodæſia Rectilineorum Planorum.

GEodæſia eſt pars Geometriæ admodum inſignis, & in vſibus humanis neceſſaria, quam apud Clauium lib. 6. Pediaſimus definit eſſe. Partitionem areę inter diuerſas perſonas; Verùm in ſuo Lexico Hyeronimus Vitali eruditiſsimus deſcribit Geodęſiam eſſe corporum quoq; dimenſionem per ſenſibiles menſuras. Sed quidquid ſit de ſignificatione nominis: nos eam vſurpamus pro ea parte Geometriæ, quæ ſuperficies rectilineas conſiderat, ſiue eas transformando, ſiue partiendo, ſiue menſurando; ſiquidem, ſi altera harum conſiderationum alteri deſit, mancha euadit, & imperfecta.

EXPENSIO I.

De figurarum planarum rectilinearum transformatione in æquales ſuperficies.

SVperficies rectilineæ planæ facilem inuicem ſubeunt transformationem, & non multo labore, licet, vel angulis, vel lateribus, tum quantitate, tum numero diſcrepantes, ſeruata ſemper æquali capacitate in alias fecedunt.

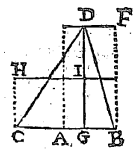
PROBL. I. PROPOS. I.

Aream cuiuſlibet trianguli in parallelogrammi aream transformare.

HOc efficitur ducendo perpendicularem ad baſim. Nam ſi ex dimidiata baſi CB, quæ eſt AB, & tota perpendicnlari AD fiat rectangulum, vt eſt AF, hoc erit triangulo CDP æquales.

Probatur ex 41 prop. Elem. Nam ibi hoc docetur. Vnde non debemus repetere.

Id etiam operi mandatur diuidendo perpendicularem bifariam, & conſtituendo rectangulum BH, ex dimidiata perpendiculari, & tota baſi, hoc enim erit æquale triangulo CDB.



Probatur. Nam DGB triangulum ex 41 primi eſt æquale parallelogrammo IB ſuper dimidiatam baſim CD ad eandem altitudinem effecto: Sic eſt triangulum CGD æquale parallelogrammo GH; Ergo totum triangulum CDB toti parallelogrammo HB erit æquale.

COROLLARIVM.

HInc eſt aream ſimiliter parallelogrammi poſſe in triangulum transfundi, ſi ſuper duplam baſim ad eandem altitudinem triangulum fiat.

PROBL. II. PROPOS. II.

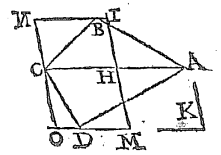
Aream cuiuſlibet trianguli, vel parallelogrammi in aream alterius trianguli, ſeu parallelogrammi transformare, quæ habeant angulum datum, & latus datum.

VIde propoſ. 43. lib. 1. Element.

PROBL. III. PROPOS. III.

Dato quadrilatero æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

HÆc operatio facilior eſt, quam ex Eucl. prop.



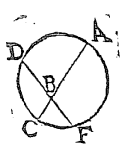
45. l. 1. Detur ABCD quadrilaterum, & ducatur diagonalis AC; detrunceturque bifariam in H, & ducatur MI faciens cum ipsa diagonali apud H angulum æqualem angulo K. & per verticem C ducatur parallela ON ipsi IM, sicut, & diagonali à vertice D, & BP parallelæ IN, & MO; eritque parallelogrammum IMNO æquale quadrilatero ABCD.

Probatur. Nam parallelogrammum HO est æquale triangulo ACD ex dictis in propos. 1. sic & parallelogrammum HN est æquale triangulo ABC ex eadem propos. quod sint inter easdem parallelas, & ideo ad eandem altitudinem, & super dimidiatam basim AC. Ergo & totum quadrilaterum ABCD toti parallelogrammo IMNO erit æquale.

PROBL. IV. PROPOS. IV.

Dato parallelogrammo supra datam rectam æquale parallegrammum constituere in dato angulo rectilineo.

*SIt datum parallelogrammum rectãgulũ, quod cõtineatur rectis AB, & BC, dataque recta BD. Latera itaque parallelogrammi dati in vnam rectam redigantur, quæ sit AC, & à puncto B trahatur recta data DB, faciens cum AB, quemcumque angulum: Triumque punctorum ADC reperiatur centrum ex prop. 11. lib. 3. Elem. & fiat circulus per ea transiens ADC: deinde prolungetur DB in F, nam dico DB, & BF æquale rectangulum constituere ipsi ex BA, & BC constituto.



Probatur ex propos. 35. lib. 3. Eucl. Nam si in circulo duæ rectæ se mutuò secuerint, vt DF, & AC rectangulum comprehensum sub segmentis vnius AB, & BC æquale est rectangulo comprehenso sub segmentis alterius qualia sunt DB, & BF.

Si verò ex propos. 3. huic rectangulo constituamus æquale parallelogrammum in angulo dato habebimus id, quod propos. desiderat.

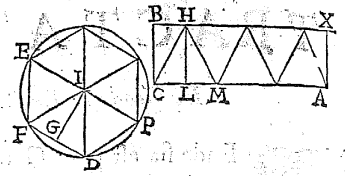
Idem quoque assequemur si tribus datis rectis ex 14. lib. 6. inueniatur quarta proportionalis, ita vt DB data sit prima. Nam ex prop. 18. erit rectangulum sub prima DB, & sub quarta inueta æquale rectangulo sub duabus mediis comprehenso.

PROBL. V. PROPOS. V.

Aream cuiuslibet figuræ regularis in æquale parallelogrammum redigere, seu etiam triangulum.

FIat parallelogrammum AB quod habeat AC æquale ambitui dimidio dati hexagoni V. g. cuius centrum I; aliud verò latus æquale perpendiculari IG in aliquod latus figuræ regularis cadente à centro I. Nam dico hoc parallelogrammum rectangulum æquale esse areæ hexagoni.

Probatur. Nam comprehendet tot triangula æqualia, quot habet figura regularis: Latus enim AC rectanguli, cum sit dimidium ambitus PDFE substernet bases tres, vt MC, vnde dimidia LC erit æqualis FG dimidiæ FD æqualis basibus tribus BD, & cæt. linea vero LH perpendicularis est æqualis perpendiculari IG; Quare ex 1. h. triangulum LHC est æquale triangulo IGF: Horum verò triangulorum duodecim habet parallelogrammum, sic duodecim hexagonũ. Vnde cũ constent æqualibus numero, areaq; triangulis erunt æqualia.



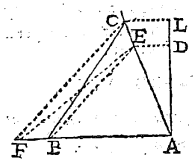
Si verò libeat habere triangulum æquale figuræ datæ dupletur basis AC, & fiat æqualis toti ambitui, & super eam fiat quodcumque triangulum contentum parallelis AC, & BX. Nam cùm hoc ex 1. propos. sit æquale rectangulo AB, erit etiam æquale hexagono I.

PRORL. VI. PROPOS. VI.

Datum triangulum, vel parallelogrammum in aliud æquale, sed vel maioris, vel minoris altitudinis transformare. Sicut & in aliud maioris, vel minoris basis.

SIt triangulum ABC, & illud oporteat reducere ad minorem altitudinem AD, ducatur DE parallela AB, & ducatur EB ad angulum B, cui parallela à vertice C agatur CF, & deinde ducatur FE: Dico triangulum AEF altitudinis datę esse æquale triangulo ACB.

*Prob. autem. Quia ECB triangulum ablatum est æquale triangulo FBE, quòd additur ipsi AEB, vtpote super eandem basim BE, & inter easdem parallelas EB, & CF. Vnde remanet adhuc æquale cum æquale sit, quod additur ei, quod aufertur.



Eodem modo poterit augeri in altitudinem. Nam si ponamus esse nobis exhibitum triangulum AEF, quod oporteat in altitudinem AL subleuare producatur AE, & ducatur parallela basi LC, & à puncto C, vbi secat latus AC ducatur ad F recta CF, cui à vertice dati trianguli E ducatur parallela EB, & vbi basim secat in B, ducatur BC. Nam dico hoc triangulum BCA in altitudinem AL subleuatum esse æquale triangulo exhibito AEF.

Probatur, vt antecedens praxis. Nec aliter maiori basi accommodabitur sit enim triangulum ACB, cui sit prolungãda basis vsq; ad F, cõiungatur FC, & à pũcto C ducatur lineæ CF, & ei parallela EB, à puncto B, deinde ducatur EF. Nam triangulum AEF super maiorem basim AF est æquale triangulo ACB, vt supra ostensum est. Et eadem operatio erit de diminutione basis. Eadem quoq; operatio erit de parallelogrammo, vt patet, cum sit duplum trianguli.

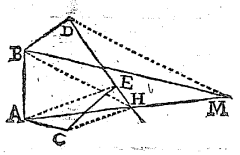
PROBL.

PROBL. VII. PROPOS. VII.

Dato rectilineo ad datum eius latus triangulum æquale constituere, seu parallelogrammum.

SIt datum rectilineum ABDEC, quod oporteat in triangulum transformare insistens super assignatum latus AB, è contra assignati lateris DE. Latus prolungetur ED in H, & ducta EA, ab angulo C ducatur ei parallela CH. Deinde ducatur AH. Quoniam enim triangulum ECA est super eandem basim AE, & inter easdem parallelas CH, & AE erit æquale triangulo AHE, & ideo quinquãgulum erit transformatum in quadrangulum HABD necessarium ad operationem faciendam.

In quadrangulo ergo HABD ducatur diagonalis HB, & prolungato latere AH, ab angulo D ducatur DM parallela diagonali prædictæ HB. & tandem ducatur MB, & erit factum triangulum AMB æquale, quinquãgulo ABCD super latus AB, quod vergit contra latus DE.



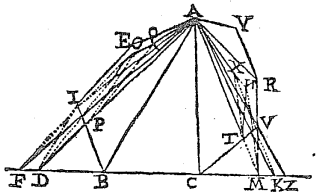
* Probatur. Quia æquat quadrangulum HABD: siquidem spatium HAB est, tum triangulo, tum quadrilatero commune. Triangulum verò reliquum HMB trianguli AMB est æquale triangulo HBD reliquo quadranguli; cùm super eandem basim HB existant, & in eandem basi parallelam MD terminent.

Sed quadrilaterum HABD est æquale quinquãgulo ECABD, vt dictum est; Ergo etiam triangulum AMB erit eidem æquale, quod triangulum ex dictis poterit conuerti in parallelogrammum habens latus AB, vt patet.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Multilineum quodcumque in æquale triangulum, seu parallelogrammum super datum latus, insistens transfundere.

*SIt multilaterum quodcumque AEIBCVY, datũq; latus BC, super quod prolũgatum triangulũ, & parallelogrãmũ dato rectilineo æquale cõstituere oporteat. E regione electo angulo A ducatur AB, & AC, & lateri AB ducatur parallela ID ab angulo I: Deinde coniungatur DA. Nam triangulum ADB supereandẽ basim AB, & in eandẽ parallelã ID terminans erit æquale triangulo AIB. Transferatur triangulum IEA super rectam AD, & sit omninò ei æquale, & simile triangulum AOP. Deinde maioris basis DA fiat iuxta propos. 6. h. conferuando æqualitatem, & sit AQD, & à vertice Q ducta ad AD parallela QF, ducatur AF. Nam ob parallelismum, & eandem basim triangulum AFD erit triangulo AQD æquale, quod est triangulo POA, & consequenter triangulo IEA, quare triangulo IEA erit æquale quoque AFD; quapropter portio multilateri AEIBE est æqualis triangulo FAD, & DAB simul; idest toti FAB: Idem erit efficiendum de alia portione.



Nam ducta ad latus AC parallela VM ab angulo V, transformabitur triangulum AVC in triangulum ACM ducta AM. Deinde super AM transferetur triangulum ARV, & erit ANT, quod extendetur ad occupandam totam basim AM, & erit AXM. Deinde ab X angulo ducta XK parallela ad basim AM, vbi secat in K ducatur AK, eritque triangulum AMK æquale triangulo AXM; quod æquatur triangulo ANT, & æquali, & simili triangulo ARV. Idem fiet de triangulo AYE. transferetur enim super basim AK, faciendo ab A triangulum ei simile, & æquale. Deinde extendetur ad occupandam totam basim AK: & tandem in triangulum AKZ transformabitur. Iamque habebimus triangulum FAZ æquale multilatero AEBCVY, quod omnia triangula, quibus componitur omnibus triangulis, in quibus multilaterum distributum est, sint æqualia. Vnde iuxta regulas traditas poterit conuerti in æquale parallelogrammum rectangulum.

PROBL. IX. PROPOS. IX.

Dato rectangulo æquale quadratum constituere.

HOc docuimus cum Euclid. propos. 14. lib. 2. cum rectilineum priùs in rectangulum. Deinde rectangulum in quadratum æquale transmutauimus.

Potest etiam fieri inueniẽdo inter duo latera rectanguli mediam proportionalem ex prop. 13. lib. 6. Nam quadratum huius mediæ est æquale rectangulo ab extremis contento ex propos. 17. lib. 6.

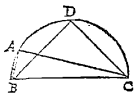
PROBL X. PROPOS. X.

Duobus quadratis inuicem inæqualibus simul sumptis inuenire duo alia quadrata simul sumpta æqualia, quæ etiam inuicem æquentur.

COnstituatur rectangulum ex duobus lateribus quadratorum inuicem inæqualium, ita vt duo latera maioris alterum. alterum minoris angulum rectum claudant, vt AB, & AC. Deinde nectantur extrema puncta basis BC: super verò basim BC cõstituatur ãgulus rectus duobus cruribus æqualibus clausus, quod fiet diuidẽdo BC bi-

fariam, & facto ibi centro ducendo semi circulum BADC,& diuidendo bifariã in D,trahendoq; latera, & crura BD, & DC. Nam cum peripherias æquales BD,& DC subtendant erunt æqualia:angulus verò, vtpote in semicirculo erit rectus ex 31 lib 3.

Dico itaque quod quadrata laterum BD, & BC sunt æqualia duobus quadratis ex lateribus BA, & AC, nam sunt æqualia quadrato basis BC ex propos.2. lib.13. ergo, & inter se erunt æqualia.

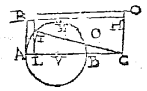


Possunt autem etiam inueniri inæqualia, vt per se patet, quod, & de rectangulis similibus valet ex 32. lib. 6.

PROBL. XI. PROPOS. XI.

Rectangulo dato alia rectangula reperire ei æqualia sub diuersa laterum quantitate.

SIt rectangulum comprehensum duobus rectis AC, & BC, velitque aliquis aliud rectangulum paulò breuioris lateris efficere iuxta mensurã datã;hæc super latus AC mesuretur,& sit CL, & diuiso bifariam segmento AB in V centro V ducatur circulus. Deinde centro C interuallo CI ducatur

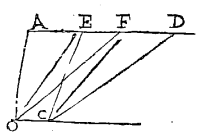


portio circuli LI, & vbi secat in L ducatur IC. Nam OC erit aliud latus, quod claudet rectangulum LO rectangulo CB æquale Probatur ex Cor. 1. propos.36. lib.3 clem. hæc duo rectangula AH, ex AC,BC,& LO ex IC,co esse æqualia, sicut & tangens circulum erit quadratum prædictis rectangulis æquale, si ex puncto C illum contingat.

THEOR. I. PROPOS. XII.

Trapezia inter easdem parallelas constituta inter se sunt æqualia, dummodo sit æqualis altera alteri correspondenti eorum basis.

SIt trapezium OACE, & trapezium OFCD quorum bases AE, FD æquales sint, & OB eadem, vel æqualis. Dico hæc trapezia esse æqualia.



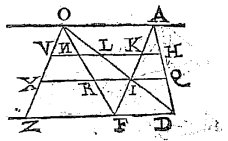
Probatur. Nam ex Cor.prop. 40.lib.1. triangula habentia eandem basim, & inter easdem parallelas inter se sunt æqualia: quare triangula OFC, & OCE erunt æqualia. Porrò triangula AEO, & FCD ob bases æquales AE, & FD erunt æqualia. Ergo trapezia quoque æqualibus triangulis constantia erunt æqualia.

THEOR. II. PROPOS. XIII.

* *Triangula inter parallelas constituta, & basi eadem, si secentur parallelis lineis segmenta sunt æqualia.*

TRiangula DAF,& DOF sint inter parallelas AO, & DF constituta super eandem basim DF, & secentur parallela aliqua,vt HN. Dico *illa segmenta esse æqualia*.

Probatur. Triangula DAF, & DFO sunt æqualia ex propos.40.lib.1. Element. Propterea que ablata communi parte DIF triangula DIA, & FIO remanebunt æqualia. Quare erit OI ad ID, vt AI ad IF ex prop.11 lib.6. Ideoque erit quoque *componendo* IO ad OD, vt AI ad AF; sed vt AI ad AF; ita se refert QI ad DF, & vt OI ad OD, sic IR ad DF. Quare QI ad DF, & IR ad DF eandem dicent proportionem OI ad OD, vel AI ad AF. Et ideo, cùm eidem DF eandem dicant proportionem duæ QI, & IR erunt ex propos.9. l.5. æquales.



In triangulo autem AIO, vt LO ad OI, sic AK ad KI. Est autem LO ad OI, sic LN ad IR, & vt AK ad KI, sic HK ad QI. Quare erit eadem proportio LN ad IR, quam HK ad QI: sed QI, & IR ostensæ sunt æquales; Ergo etiam HK,& LN ex 12.l.5 Vnde patet, quod sint super æquales bases triangula HAK, & LON,scilicet HK,& LN: vnde erunt æqualia,sic triangula QAI,& ROI cũ sint super æquales bases IQ, IR. & inter parallelas erunt æqualia. Vnde etiam residua trapezia IHKQ,& ILNQ erunt æqualia. Cùm ab æqualibus triangulis sint æqualium triangulorum residua.

COROLLARIVM.

HInc obiter patet triangula æqualis alteitudinis, atque trapezia: ne dum consequi bases æquales, sed & omnes basibus ductas parallelas esse inuicem æquales: dummodo ad eandem altitudinem sint deductæ, quod etiam verificatur ne dum in triangulis eandem basem habentibus; sed, & æqualem, vt per se patet.

THEOR. III. PROPOS. XIV.

Trapezia inter lineas proportionales constituta, & eiusdem altitudinis se habent inuicem, vt bases.

SInt in præced. fig. duo triangula æqualis altitudinis DAF, & DOZ; hęc ex 1. lib. 6. se habebunt ad inuicem, vt bases DF, ad DZ. Rursus triangula QAI, & IOX se habent ad inuicem, vt bases QI ad IX: nimirum DF ad DZ: Quadere cum sit totum DAF ad totum DOZ, vt ablatum QAI ab ablatum IOX,etiam reliquum trapezium DQIF erit ad reliquum trapezium DIXZ,vt totum DAF ad totum DOZ, scilicet, vt basis DF ad basim DZ, vel vt QI ad IX.

EXPENSIO II.

De casu perpendicularis, & ipsius quantitate.

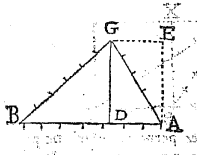
DOcuimus mediantibus tabulis quodlibet ex triangulis in duo triangula rectangula reducere in tr.27. Trigonometrico,nunc sine tabulis idem docere oportet, & primo, in quod punctum subiectum baseos cadat perpendicularis, & deinde quantitatem ipsius perpendicularis, cùm id sit necessarium ad areas planas mensurandas per numeros, & maximè triangulorum.

PROBL. I. PROPOS. XV.

Casum perpendicularis ex notis lateribus cùm cadit intra triangulum inuenire.

SIt triangulum AGB. In quo angulus G sit maior vtrolibet apud A aut apud B, habeamusque crura nota AB 7.planorum AG quinque & GB palmorum 6. Multiplicando singula latera in se fiant eorum quadrata, vt docuimus def. 1. Tract.7. lib.8. Eucl. nimirum lateris AB 49. cruris AG 25. & cruris GB 36. Adde deinde duo quadrata simul 25.& 49. fiet 74. subduc quadratum residuum 36. erunt post subtractionem 38.partire bifariam, & erunt 19. quem numerum partieris per numerum basis 7. & dabunt 2.& $\frac{1}{7}$ nimirum distantiam AD ab A, & punctum D, in quod à vertice G cadit perpendicularis.

Probatur nam ex prop.13. lib.2. quadratum BG minus est quadratis rectarum AG, & AB rectangulo bis comprehenso sub BA, & AD, quod cum ita sit sunt vnita, simul quadrata cruris AG 25.& basis AB 49. partium, & summa fuit 74. & subductum est quadratum rectę GB 36. & residuum fuit 38. nimirum duo rectangula singula contenta sub AB, & AD, vt ergo remaneat vnũ tantum rectangulum residuum 38. diuisum est bifariam,& remansit 19.& tandem, vt habeatur crus AD diuisum est 19.per latus AB 7. partium, vnde reliquum latus remansit, & segmentum, in quod cadit perpendicularis partium 2 & $\frac{1}{7}$.

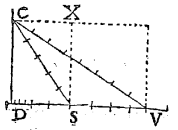


At si placeat reperire casum BD. Simul BA 49, & AG 36. quadrata vnito, vt fiat summa 85. subduco altero quadrato 25. residuum erit 60. pro duobus rectangulis sub AB, & BD contentis, diuisoque eo numero bifariam erit 30. vnum rectangulum, quod diuisumper crus AB 7. partium quotiens erit crus DB 4. partium, & $\frac{1}{7}$.

PROBL. II. PROP. XVI.

Casum perpendicularis ex notis cruribus cùm cadit extra triangulum reperire.

SI ergo sciamus perpendiculerem extra triangulum cadere,eo quod in triangulo VSC angulus ad S sit obtusus, & V acutus, tunc vtemur propos. 12.lib.2.Elem. in qua demonstratur cruris VC quadratum maius esse quadratis rectarum VS, & SC rectangulo bis comprehenso sub VS, & SC, ideo quadratum 25. cruris SC, & 16. quadratũ cruris VS in vnã summam redigantur, subducaturque à quadrato cruris VC 64. & erunt residuus numerus 23. duo rectangula contenta sub VS, & SD bifarientur, vt sint vnicum tantùm rectangulum erit 11 $\frac{1}{2}$, quod diuisum per latus VS 4. dabit 2.& $\frac{7}{8}$: pro latere SD.



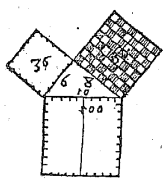
At si nesciamus: an cadat intra, vel extra, sed solùm nouerimus VC crus maximum,& latus SV,& SC; ideoque quia quadratum cruris SC, minus est quadratis rectarum VS, & VC rectangulo bis comprehenso sub VS,& segmentum ab V vsque ad illud punctum, in quod cadit perpendicularis ex 13 l.2. Eucl. nondum notum, ideo quadratum SC 25 subduco à summa quadratorum reliquorum VS, & VC quadratorum 80.& residuum erit 55.duo nimirum rectangula: diuidatur,itaque numerus 55. per medium, vt vnicum rectangulum 27, $\frac{1}{2}$, quod diuidatur per latus VS 4. & prodibit alterum latus notum VD partium 6, $\frac{7}{8}$.

PROBL. III. PROPOS. XVII.

Ex notis cruribus duobus rectanguli alterum crus inuenire.

QVoniam per deductionem perpendicularis diuisimus triangulum quodlibet in duo rectangula, quorum habemus nota duo crura, vt in fig. anteced. VD, & VC, & possumus cognoscere tertium crus,nempe perpendicularem CD.

Quia quadratum basis subtensæ angulo recto ex 11. lib.2. æquale est quadratis laterum: multiplicabimus palmos basis V. g. 12. palm. & fient 100. deinde lateris noti 8.palmorum,& fiet 64. quibus deductis à quadrato basis 100.erunt residua quadrata 36. à quibus extracta radix quadrata dabit 6. pro altero latere.



Sic si iam innotuerint ambo latera angulum rectum claudentia aliquo modo,& nesciamus basim; eadem ratione poterimus inuenire, nam quia quadratum basis anguli recti subtensæ æquale est quadratis duobus laterum,si 6.multiplicetur in se,

& fiat quadratũ 36.& 8.& fiat quadratum 64. iuncta simul dabunt quadratum 100. palmorum à quo educta radix quadrata dabit 10. pro longitudine basis angulo recto subtensæ, vt vides.

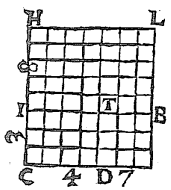
Si verò latera obtineant numeros fractos, vt in præc. latus VD est 6. $\frac{1}{8}$ omnes tũ huius, tum alterius lateris partes in easdẽ minutias proljci debẽt, & sic latus VC erit par.64.& quadratũ 4096. (nam quilibet palmus diuisus supponitur in 8. partes cumque sint palmi 8.dant 64. partes,) & latus VD erit partium octauarum 48. & addita minutia $\frac{1}{8}$ erit 55. & quadratum 4025. quo à priori deducto prodibit quadratum perpendicularis CD partium 1071. à quo educta radix quadrata dabit partes 32. $\frac{1}{4}$, & paulò ampliùs pro perpendiculari DC. Perpendicularis verò DG alterius trianguli eodem computo facto erit par. 4. & $\frac{1}{7}$.

EXPENSIO III.

De areis triangulorum, omniumque aliarum figurarum rectilinearum mensurandis.

LInea recta mensuratur, cùm tot rectas lineas continet equales. Et non alia ratione superficies mensuratur, cum continet tot minores superficies inuicem æquales: sed quia non omnes superficies spatium implent, & superficiem omninò occupant, vt circuli, ideo adhibenda fuit mensura, quę superficiem mensurandam multiplicata omninò posset occupare, & eam totam operire, ne quid extra mensuram remaneret. Hæc autem fuit rectangulum, quod multiplicatum potest omnes figuras rectangulas, rectilineas omninò tegere, & occupare. Quà de re alias figuras, vt mensurationi subijcerentur oportuit ad rectangulas reducere, quod hic agimus reducendo triangula ad rectangulas superficies, vt certę mensurationi numeris exprimibili subiaceant.

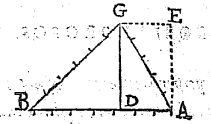
In confessis est autem rectanguli, cuius sint nota latera, etiam areã statim prodire, ex multiplicatione laterum inuicem; sic si sit notum latus HL esse 7.palmorum, & HC 8. palmorum ex multiplicatione mutua fit area 56. palmorum quadratorum, vt diximus l.2.p.3.Cor. & sic si area sit nota rectanguli 56. palmorum, & latus alterum 7. statim innotescet per diuisionẽ alterum latus, & sic, si 56. dividatur per 7. fiunt 8. palmi pro latere HC. In quadratis verò idem assequemur per extractionem radicis quadratę; sic, si à numero 25. educatur radix quadrata prodibit latus palmorum 5. quod & verificatur de partibus, vt si assumantur partes CI 3. & CD 4. laterum CH & HL, fiet area CT 12. palmorum quadratorum.



PROBL. I. PROPOS. XVIII.

Aream cuiuslibet trianguli inuenire, cùm perpendicularis intra triangulum cadit.

SVpponimus hìc omnia latera trianguli nota, vel quod mẽsurari potuerint, vel quod ex doctrina sinuum, secantium, atque tangentium potuerint inueniri, ideoque ex Expens. præced. notam quoque perpendicularem, & punctum, in quod cadit, & consequenter redactum triangulum, vel ad vnum, vel ad duo triangula rectangula, & ideo quoq; notã esse altitudine, eorũ quam perpendicularis dimetitur, & quia ex propos.40. lib.1. parallelogrammum eiusdem basis, & eiusdem altitudinis est duplum trianguli, ideo ex crure AD 2. & $\frac{1}{7}$,

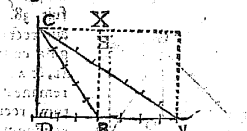


vel 19. partium, & perpendiculari DG 4. & $\frac{1}{7}$, vel 29. quæ crura angulum rectum ambiunt, fiat rectangulum AGDE 551. multiplicatione mutua quadratorum paruorum: nam medietas huius rectanguli 275 $\frac{1}{2}$ erit area AGD, idem fiat de alio rectangulo GDB; nam multiplicato latere DB part.30. cum latere DG part.29. prodibit rectangulum 870. cuius medietas erit 435. area trianguli DGB.

PROBL. II. PROPOS. XIX.

Aream triangulorum, cùm perpendicularis extra triangulum cadit inuenire.

EX noto latere AD part.6. & $\frac{1}{8}$, idest minutiarum 55.& perpendiculari CD 32 $\frac{1}{2}$. fiat rectangulum VC mutua numerorum multiplicatione quadratis paruis constans 1787 $\frac{1}{2}$, quorum medietas erit triangulum VCD 893 $\frac{1}{4}$. Rursus ex segmento BD part.23. & perpendiculari DC part.32. $\frac{1}{2}$, fiat rectangulum DX part.747. $\frac{1}{2}$, & medietas 373. $\frac{1}{4}$ erit triangulum BCD, quod auferendum est à triangulo VCD. part. 893 $\frac{1}{4}$, & residuum erit area trianguli BVC part. 520.

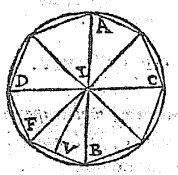


PROBL. III. PROPOS. XX.

Aream cuiuscumque figuræ regularis inuenire.

SIt octogonum CADB, cuius latus BF iam notum sit ex ijs, quæ de lineis circulo inscriptis dixi-

mus, vel ex tabulis sinuum 765. radio IF 1000. partium præsupposito. Itaque poterit diuidi, & resolui tota figura in 8 triangula isoscela, & hæc in 16. triangula rectangula ducta perpendiculari VI ad mediũ FV lateris FB octogoni, cumq; habeas notum casum perpendicularis, nempe ad medietatem lateris BF part. 382 $\frac{1}{2}$, & crus IF 1000. inuenies ex prop. 17. perpẽdicularem VI partium 924. hincque efficies rectangulum 353430. cuius medietas erit 176715. triangulum IVF, & quia 16. triangula totam figuram complent, ideo si multiplices prædictum numerum per 16. totam aream octogoni obtinebis part. 1827440. Idemque efficies in omnibus alijs, figuris regularibus, omnes enim in triangula æquicrura, & deinde in rectangula distribui poterunt, ex quorum notis arels tota area figuræ in palàm erit.

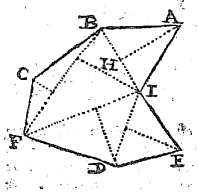


PROBL. IV. PROPOS. XXI.

Aream figuræ rectilineæ irregularis non triangularis inuenire.

REsolues totam figuram in tot triangula, eaque in rectangula transformabis, rectangulorumque singulorum exquires aream, quas deinde areas in vnam summam colliges, & illa erit area figuræ Irregularis.

V. g. sit data figura rectilinea irregularis ABCDEI. Ductis lineis BI, & IE, & ID, deinde BF erit redacta figura in tot triangula, de quorum lateribus præsuppono cognitionem te habere, vel mensura, vel ex tabulis. Desingulis itaque triangulis ex prop. 15. vel 16. h. casum perpẽdicularis, vt HA & hinc ex pr.18. vel 19. h. aream HBA; & sic ages de area IHB, & de alijs, quas omnes areas, vt inueneris, in vnam summam rediges, totamque aream totius figuræ irregularis propositæ consequeris.



PROBL. V. PROP. XXII.

Aream figuræ tum regularis rectilineæ, tum irregularis geometricæ inuenire.

ID exequeris, si eam redigas in quadratum equale, nam illius quadrati area erit, & figuræ propositæ, vt autem id fiat, ostendemus infra cum de figurarum transformatione agemus.

EXPENSIO IV.

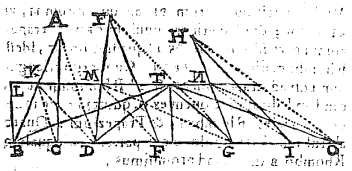
De augmento, & partitione trianguli.

DVplici modo quælibet fig. diuidi potest, vel ex pũcto in eius latere, vel in medio dato in triangula, vel per parallelas vni lateri dato, in trapezia, vel in quid simile, licet enim possit diuidi etiam ex puncto, extra dato, iste tamen modus diuidendi conuenit triangulo, conuenit etiam parallelogrammo, sed vniuersalis non est. Figuræ autem diuidendæ, vel augendę, vel sunt multilaterę, vel sunt triangula, vel sunt parallelogramma, sed vt à facilioribus exordiamur, incipiemus à triangulis.

PROBL. I. PROPOS. XXIII.

Triangulum datæ altitudinis ex multis triangulis diuersæ altitudinis coagmentatum construere.

SIt triangulum BAC, DEF, & GHI, quæ in triangulum altitudinis BL reducenda sint. Ducta BE indefinita, & huic BL perpendiculari; triangulum BAC redigatur ad triangulum BKD date altitudinis ex prædictis de transform. fig pr.6.h. apud quem super eandem lineã constituatur triangulum DEF, & redigatur in triangulum æquale eiusdem altitudinis DMG, & à puncto G erigatur



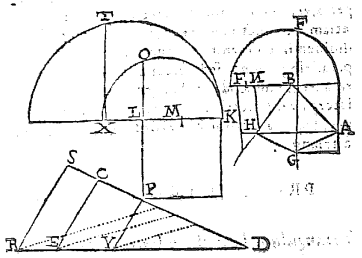
rectum triangulum GHI, & redigatur in triangulũ eiusdem altitudinis GNO. Ductis deinde rectis BT, DT, FG, & TO erunt tria triangula tribus ob basim eandẽ, & æqualẽ altitudinẽ, æqualia nempe BDT triangulo EKD, & ideo quoque triangulo æquali ex constructã BAC: triangulũ DTG item est æquale triang. DMG, & ideo triangulo DEF: at triangulum GTO triangulo GNO, & consequenter triangulo GHI. Habemus itaque triangulum BTO coagmentatum ex tribus BAC, DEF, & GHI.

PROBL. II. PROPOS. XXIV.

Triangulo datam partem addere, vel auferre eadem figura manente.

SIt primo data pars, nempe area æqualis rhombo ABGH à triangulo, quod debet esse maius, CDE auferenda. Triangulo CED fiat æquale quadratum BK, prius *conuerrendo* in rectangulum, inde in quadratum ex propos.14. lib.2. Elem. idemque fiat de rhombo ABGH, & sit quadratũ EX BF. Deinde

de duobus lateribus quadratorum KL, & BF inueniat tertia proportionalis B , quæ transferatur in latus KL, & sit LM, interq; residuũ KM, & totũ latus KL media proportionalis inueniatur LO. Inueniaturque deinde rectis KL, & LO, & DE lateri trianguli quarta proportionalis DV, ita quòd sit, vt KL ad LO, ita DE ad CV, & à puncto V ducatur parallela lateri CE. Dico *triangulo* CED *ablatum esse trapezium* EP *Rhombo* ABGH *æquale*.



Probatur triangulum DEC ad triangulum DVP duplicatam habet laterum rationem ex 19. sexti, nempe lateris DE ad latus DV, quæ ex constructione eadẽ proportio est, quę reperitur inter OL, & KL: At OL, KL, & KM sunt cõtinuè proportionales: ex effect. quare eadem quoq; proportione respiciet KL rectam KM, qua triangulum DCE alterum minus DPV. Et per *conuersionem rationis*, ita erit quoque triangulum DEC ad Trapezium EP, quo superat triangulum DPV, vt KL ad LM; quo superat lineam KM. Fecimus autem M tertiam proportionalem inter duo latera LK, & BF quadratorum. Vnde ita erit quadratum PK ad quadratum BF, vt KL ad LM; & ideo erit triangulum CED ad trapezium EP, vt sibi æquale PK ad quadratum BF, Idest Rhombum sibi æquale ABGH. Cum ergo triangulum ECD ad trapezium EP, & ad Rhombum ABGH, eandem habeant rationem ex 6. quinti, erunt inuicem æquales Rhombus, & Trapezium. Quare abstulimus à triangulo DCE partem EP equalem Rhombo BAHG. quod proposuimus.

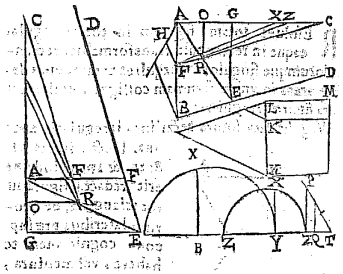
Si verò sit addendum hoc idem fiet: nisi quod LM ipsa media proportionalis inter latera quadratorum KL, & BF adiungatur ipsi lateri maioris quadrati, vt sit tota KX, & inter hãc, & latus KL reperietur media proportionalis XT. deinde fiet, vt XT ad KX, ita ED ad aliud, & prodibit DE, proportionalis: Ducta verò RS parallela ad CE erit additum triangulo, trapezium RC, quòd cum ipso integrat triangulum RSD eiusdem rationis.

Probatur autem eadem ratione. Nam triangulum RED est ad triangulum CED in duplicata ratione basis DR, ad basim DE; hæc autem proportio basis ad basim, est eadem ex constr. *inuert.* quæ lineę XK ad mediam XT, quæ est duplicata eius, quam habet eadem KX ad latus quadrati KL (siquidem media proportionalis mediat XT) & ideo KX ad KL latus habet eandem proportionem duplicatam, vt habet triangulum DRS ad DCE triangulum. Quare poterimus vti *diuisim rationis*, & dicere, quod triangulum CED erit ad trapezium SE, quo triangulum maius superet minus, vt LK latus ad residuum LX, quo linea KX superat LK. Hæc verò linea X, seu LM est BN tertia proportionalis laterũ KL, & BF, ita q; sit, vt KL, & BF, ita BF ad BN: Vnde & quadrata dicent eandem proportionem ex Cor. prop. 21. lib. 6. & ita erit quadratum EP ad quadratum ex BF, vt KL, & LX, & ideo, vt triangulum CED æquale quadrato PK ad trapezium RC. Cum itaque ad trapezium RC, & ad quadratum ex BF Rhombo æquale eandem dicat proportionem triangulum CED ex 9. lib. 5. erunt æquales inuicem trapezium RC, & ex BF quadratum; & ideo etiam Rhombus BHAG. Vnde Rhombo æqualis pars, triangulo addita est, quod est promissum.

PROBL. III. PROPOS. XXIV.

Triangulo, cui deficiat vertex, vel trapezio destinatam partem addere, vel auferre trahendo parallelam vni ex lateribus.

Sit triangulum ABC, vel Trapezium ABCD, cui parallelâ EG latere BA sit auferenda pars æqualis quadrato NM, quod sit minus toto triangulo ABC. Ducatur CF parallela lateri ND, quæ faciat triangulum AFC: Deinde cruri AB, & lateri AF inueniatur tertia proporlionalis HA, vt vides factum in triangulo BHA: Duabus verò AB, HA, & lateri LN quadrati NM, inueniatur quarta proportionalis LK, ex quâ fiat rectangulum KM. Quod dico esse ad quadratum MN, vt triangulum AFC ad triangulum BACD: si esset perfectum.



Probatur. Nam ita est BACD triangulum imperfectum ad AFC triangulum, vt BA ad HA ex Cor. p. 21. l. 6. cùm sit BA tertia proportionalis; vt autem BA ad AH; ita est NL ad LK ex effectione, & quia sunt eiusdem altitudinis, ex 1. lib. 6. Elem. ita est NM quadratum ad KM rectangulum, quòd, cùm ita sit, si auferamus partem æqualem rectangulo KL à triangulo AFC, ex documentis anteced. propositionis, quæ sit OF ducta parallela BO lateri BA (inueniendo priùs quadratum ex ZT æquale rectangulo KM, & quadratum ex TP æquale triangulo AFC, & illis duobus lateribus inueniendo tertiã proportionalem TQ, & residui ex QT lateris TP, & ipsius TP mediã proportionalẽ XY, & tandem tribus TP, YX, & cruri CA quartam proportionalẽ CR.) Cum itaq; repertum sit trapeziũ FO æquale rectangulo MK reperiatur illi trapezium simile, similiterque positum, ad quod illud se habeat, vt rectangulum MK ad quadratum MN; quod fiet ducta diagonali AB, vsque ad E, & ducta EG ex B parallela BO, vel BA. Eritque AE trapezium pars ablata æqualis quadrato MN à triangulo imperfecto AFCD.

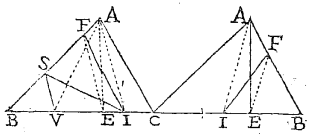
Probatur. Nam, cùm sint inter parallelas consequenter erunt similia, similiterque posita, cùm & habeant latera proportionalia ex Coroll. prop. 23. lib. 6. & sit AF ad FR, vt AB ad BE. Quare erit trapezium AE ad trapezium OF, vt AB ad AH, Sed ex effectione AB ad AH est, vt NL ad LK, & ideo ex 1. lin. 6. elem. vt MN quadratum ad rectangulum KM. Sed Trapezium OF est æquale rectangulo MK ex effectione. Ergo & trapezium AE erit æquale quadrato MN ex 12. lib. 5.

Idem prorsus agẽdum, si de additione fermo sit: nisi, quòd quadratum MN nõ intereat an sit minus: sed potest esse maius. Nam primò inuenitur tertia proportionalis AH duabus AB, & FA. Deinde tribus AB, AH, & LN, quarta LK, super quam, & LM formatur rectangulum MK. Et deinde ex documentis propositionis antecedentis vbi agitur de additione, addatur trapezium AR habens RO parallelum latus lineæ AF (primò inueniendo quadratum TZ rectangulo MK æquale, & quadratum TP triangulo AFC. Deinde reperiendo lateribus eorum tertiam proportionalem QT; duabus verò QT, & PT simul, & ipsi PT mediam proportionalem XS. Postea tribus XS soli PT, & TQ tamquã vna, & CF, quartam proportionalem CR, à quo puncto ducta EO dabit trapezium OF quæsitum) ducta autẽ AR vsq; ad DE ab E puncto ducatur parallela EG cruri AF, & dabit trapezium AE æquale quadrato MN, vt AR ex effectione est æquale rectangulo MK.

PROBL. IV. PROPOS. XXV.

Triangulum iuxta proportionem datam diuidere per lineas ab vno puncto in eius latere dato discedentes.

Sit triangulum ABC, quod oporteat diuidere secundùm proportionem datam V. g. in tres partes à puncto in eius latere dato. Diuidatur basis BC in tres partes, & tertia pars sit CE, vel ergo punctum datum cadit in E, ex qua diuidendum est triangulum, & ducta AE erit triangulum CAE, vel BAE in dextro triangulo tertia pars, cum sit vt basis ad basim, ita triangulum ad triangulum ex 1. lib. 6. Vel cadit in I, vel hinc, vel inde EXTRA E punctum, & ducatur IA: cui parallela fiat FE; connectaturque IF. Dico trapezium CIAF in sinistro, vel triangulum FIB in dextro triangulo esse tertiam partem trianguli BAC dati.



Probatur. Quia spatium BFE est commune. Triangulum verò FAE est æquale triangulo FEI, cùm sit inter easdem parallelas, & super eandem basim FE: Ideo communi spatio BFE additum est addendo triangulum BFI quantum ablatum est, auferendo triangulum FAE. Propter hoc erit adhuc æquale BAE, & BFI: Sed BAE est tertia pars totius trianguli, cum se habeat ad totum triangulum, vt basis EB, quæ est tertia pars ad basim BC. Ergo, & triangulum BFI erit totius trianguli tertia pars.

Idem dicendũ est de sinistro triangulo, vbi triãgulum CIA est commune, & triangulum IAE est æquale triangulo AIF. Vnde trapezium AICF erit æquale triangulo CAE. Quod si alia tertia pars desideretur; Ipsi AI ad V tertia parte ducatur parallela VS, & ab S ad I ducatur recta; eritque triangulum ISB æquale triangulo VAB, consequenter tertia pars totius trianguli CAB siquidem PSV est spatium commune, & SAV, & SVI æqualia ob eandem basim, & parallelas SV, AI.

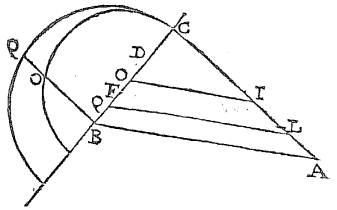
COROLLARIVM.

Quare deducitur, quòd si punctum I coniungatur cum vertice A, & lineæ connectenti IA ducantur parallelæ FE, & VS à partibus basis CE, & EV, & VB, & vbi secant latera angulum oppositum comprehendentia, ad ea puncta à puncto dato rectę ducantur, vt IS, IF, illæ diuident triangulum in tot partes, in quot basis diuisa est.

THEOR. V. PROPOS. XXVI.

Triangulum in partes assignatas secare lineis vni lateri parallelis.

Sit triangulum ABC diuidendum in tres partes per parellelas vni lateri V. g. lateri AB.



Diuidatur alterum latus CB in tres partes, & Inter quaslibet, & totam V. g. inter CD, & CB inueniatur media proportionalis BO, & rursus inter CF, & CB media proportionalis BQ, transferanturque à puncto C in latus CB, & sint CO, & CQ; à punctisque O, & Q parallelæ ad basim AB ducantur. Nam illæ secabunt totum triangulum in tres partes equales.

Probatur. Nam ex Cor. prop. 21. lib. 6. elem. poligonum ad polygonum simile est in duplicata ratione laterum homologorum, & ideo erit, vt CB ad CD; ita triangulum CAB ad triangulum ICO; siquidem, & CB ad CD habet duplicatam rationem eius, quàm BC, ad CO ex effect. sed CB habet proportionem ad CD, quam 3. ad 1. ex constructione. Quare CAB triangulum totum ad ICO triangulum se habebit, vt 3. ad 1. vnde triangulum ICO erit $\frac{1}{3}$ trianguli CAB.

Idem dicas de triangulo CLQ. Nam triangulum totum CAB ad CLQ duplicatam laterum CB ad CQ possidet rationem, quam quoque possidet CB ad CF; quare cum CB tota sit ad CF vt 3. ad 2. Triangulum quoque ACB totum erit ad triangulum LCQ, vt 3, ad 2. & ideo LCQ erit $\frac{1}{3}$ trianguli CAB. Ablato ergo ICO, de quo ostendimus esse tertam partem totius, residuum LOQI trapezium, erit tertia pars totius CAB.

EXPENSIO V.

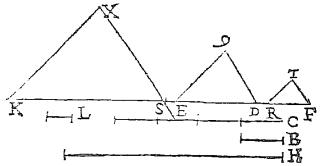
De quocumque rectilineo augendo, vel partiendo in plana rectilinea data similia.

TRiangula in diuersas partes diduximus modo vniuersaliùs est instituenda speculatio,& ad omnes figuras planas extendenda, ad quam additum aperuit ipsa triangulorum multiplicata partitio.

THEOR. I. PROPOS. XXVII.

Dato rectilineo construere rectilineum simile, & similiter positum maius, aut minus secundùm proportionem datam.

SIt rectilineum datum DQE, quòd debeat fieri quadruplo maius: sed tali modo, vt simile sit id quod componitur rectilineo præcedenti dato, & similiter positum.



Sit linea C quadruplo maior, quam B: lateri verò DF rectilinei dati DQE inueniatur quarta proportionalis maior, vel minor, prout volumus augere, vel minuere, ita quod si augendum sit, vt B est ad C, ita fiat DE, ad H, si minuere, vt C ad B, ita fiat DE ad L: deinde inter istas reperiantur mediæ proportionales KS,vel FR. Nam Triangulum SXK ex 23. lib.6. constitutum super SK simile similiterque positum, vt EQD erit triangulum quadruplo maius,& FTR constitutum super RF quadruplo minus.

Probatur. Quia ex Cor.pr. 22.l.6. ita est triangulum super KS ad triangulum super DE, vt H ad DF: cum vtrobique sit duplicata proportio. Sed H est ad DE ex effectione, vt C ad B, nempe quadrupla. Ergo & H ad DE quadrupla erit. Vnde triangulum super SK ad triangulum super DE quadruplum quoque habebit proportionem.

Idem asserendum de triangulo super RF, vt per se patet.

PROBL. II. PROPOS. XXVIII.

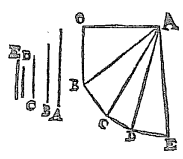
Datis pluribus rectilineis, ea in vnicum rectilineum conglobare:

SI rectilinea sint dissimilia, diuersæque positionis, ea redigantur in similia,similiterque posita triangula, quadrata, seu parallelogramma, vel ad quãcumq; aliam figuram eiusdem rationis, sed melius erit ad prædictas figuras facilitatis gratia.

Sint V.g. quinq; quadrata, quę super latera A,B, C,D,E sint cõstituta,vel quinq; parallelogrãma, vel triãgula quorũ latera homologa sint, sintq; primi latera A,& B angulũ rectũ O claudẽtia,subtẽdaturq; basis AB, iterumque super basim hanc BA erigatur ad rectos angulos C linea tertia à puncto B, & coniungatur basi secundâ AC angulo recto B subtensa. Sicque fiat rursus de linea D erigendo eam perpendiculariter super CA, & coniungendo basi tertia DA, & tandem idem fiat de linea E.

Dico quadratum,seu parallelogrammum ex EA simile, similiterque prædictis positum esse æquale omnibus alijs parallelogrammis similibus positis similiter, seu quadratis.

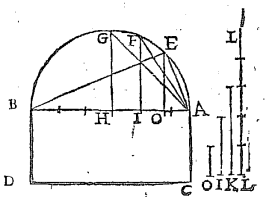
Probatur. Nam quoad quadrata ex 11.l.2.elem. quoad parallelogrãma, seu alias figuras ex 32. lib. 6. rectilineum factum ex BA basi est æquale duobus similibus,& similiter positis ex BO, & OA factis: huic vero ex AB, & ex BC est æquale rectilineum CA similiter positum, & simile prædictis, huic autem CA, & alteri CD est æquale rectilineum ex AD, & tandem huic postremo, & rectilineo DE est æquale rectilineum EA simile, similiterque positum. vnde rectilineum ex EA est æquale omnibus similibus, & similiter positis,ex E,D,C,B,A,siquidẽ equat rectilineum ex DA, quæ omnia comprehendit excepto rectilineo ex DE,& ipsum rectilineum ex DE.



PROBL. III. PROPOS. XXIX.

* *Vnicum rectilineum in plura rectilinea partiri, secundùm proportionẽm datam. manente eadem figura, & positione.*

SIt rectilineum ABCD,ex quo oporteat fieri plura V. g. tria rectilinea similia, similiterque posita; sed iuxta proportionem, quam habent K, I, & O lineæ, ita quòd vnum sit $\frac{1}{3}$ aliud $\frac{1}{3}$ aliud $\frac{1}{3}$ totius rectanguli, & se excedant inuicem,vt lineę K, I, & O. Ex lineis K, & O componatur vnica linea L, diuidaturque ex 10. lib.6. Elem. AB in easdem partes,ac L diuisa est,& sint HA similis lineę H linea AI simillis lineę I, & AO similis lineę O. Quo facto à diuisionibus erigantur perpendiculares ED, & IF, & HG; & connectantur super AB facto semicirculo pũcta,quibus secatur rectis AE,& AF, & AG. Dico rectilinea tria similia, similiterque posita super tres AE, AF, & AG æquare rectilineum ABCD.

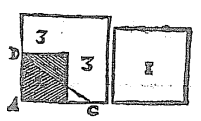


Probatur. Rectilineum ex AE ad illud ex EB habet

habet duplicatam suorum laterum proportionem nempe AE, & EB, sed hæc ob similitudinem triangulorum est eadem, quæ AO, ad EO. Vnde habebunt rectangula ex EA ad EB duplicatam proportionem AO ad OE. Sed hæc est duplicata proportionis AO ad OB,cum sint tres proportionales continuę AO, & OE, & OB ex propos. 16.lib.6. Elem. Ergo AO ad OB erit eadem, ac rectilinei super AE ad rectilineum super EB. Ergo *componendo* ita erit AO ad AO, & OB, vt AE rectilineum ad duo rectilinea simul AE, & EB, quæ sunt æqualia ex 32. lib.6. Elem rectilineo ABCD,quamobrem, cum AO sit ad AB; vt O ad L; nempe $\frac{1}{3}$ tale etiam erit rectilineum AE ad AD. Eadem ratio erit de rectilineo super AF, & de rectilineo super AG; sed AO, & AI, & AH; simul æquant lineam AB. Ergo, & tria rectilinea simul ex AE, ex AF, & ex AG æquabunt totum rectilineum ACED.

COROLLARIVM.

EX istis duabus propositionibus postremis eruitur,quomodo dato rectilineo addatur talis pars, quę libuerit, & tamen remaneat simile, similiterque positum, vt priùs, aut demat ipsi. Et si loquamur de additione detur quadratum 1, & quadratum 2. nigrum oporteatque quadrato 2. addere tantum, quod æquiualeat quadrato 1. Accipe mensuram lateris quadrati 1, & productum vnum ex lateribus quadrati 2. nigri sit æquale ipsi lateri quadrati 1 ab A vsque ad C, coniungeque DC nimirum ex duobus lateribus quadrati 1, & quadrati 2. fiat angulus rectus ad A, ducaturque basis DC. Nam quadratum,cuius latus DC quale est 2.3.3.est equale, vt patet ex 11. lib.2. quadrato nigro 2. & 1. quod idem erit de quocumque alio rectilineo ex prop.32. l.6. Si verò loquamur de ablatione,cum iam pr.23.l.6.notum sit quomodo fiat rectilineum simile, similiterque positum, quod æquale sit datæ parti alterius parallelogrammi, quale est parallelogrammum ex AE $\frac{1}{6}$ parallelogrammi ABED clarum est, quod parallelogrammum ex EB simile, similiterque positum, quod cum ipso ex AE est æquale ipsi ABCD,deficiet ab eo $\frac{1}{6}$ nempe parallelogrammo ex AE vt fig. præc. prop.

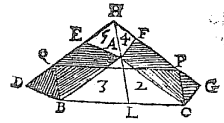


PROBL. V. PROPOS. XXX.

Dato parallelogrammo dissimili illud augere vel minuere addendo ei aliud parallelogrammum quodcumque:

SIt datum nigrum parallelogrammum CF, & aliud,cui addere oportet BE. Coniungantur eorum latera CA, & AB ad quemcumque angulum apud A, & producantur GF, & DE vsque dum conueniant in H, & per H, & A agatur HL, & terminet in CB lineam coniungentem latera CA, & AB, ipsi LH ducantur parallelæ CP, & BQ, & coniungantur P, & Q,& parallelogrammum PQ erit equale duobus CF, & BE nigris.

Probatur 1, quod sit parallelogrammum: Nam HA, & CP inter parallelas CA, & GH parallelæ ex 33. lib.1. erunt æquales, sic BQ, & AH parallelæ inter parallelas AB,& DH æquales erunt. Ergo etiã inter se erunt æquales,& parallelæ ex 33.l.1. quare ex 34. lib.1. BP erit parallelogrammum. Quod verò sit æquale parallelogrammis nigris, patet.

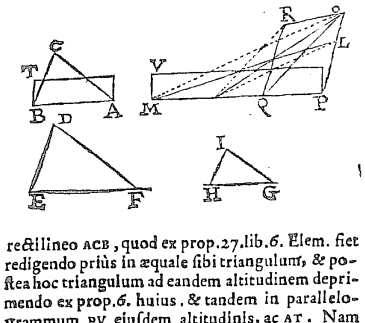


Nam ex 36. lib.1. LP, & CH parallelogrammi super eandem basim CP, interque parallelas CP, & LH sunt equalia, sic nigrum CF, & CPAH parallelogramma super basim CA, & inter parallelas GH, & CA æquantur, ergo nigrum parallelogrammum CF, & PL tertio CPAH æqualia inuicem æquabuntur. Sic parallelogrammũ LQ æquale est tertio BAHQ ob basim BQ eandem,& parallelas HL, & BQ, cui æquatur ob basim AB eandem,& parallelas AB, & DH nigrum BE: quare nigrum BE æquabitur ipsi LQ,vnde LP, & LQ, ideſt BP parallelogrammum æquabitur duobus nigris CF, & BE.

PROB. VI. PROPOS. XXXI.

Duobus datis rectilineis tertium proportionale inuenire simile, similiterque positum, sicut vnum ex datis.

SIt rectilineum OPQR,& rectilineum ACB,& illi OPQR inuenire oporteat planum tertium proportionale simile, similiterque positum, ac rectilineum ACB. Redigatur trapezium ORQP in æquale rectilineum, sed simile, similiterque positum



rectilineo ACB, quod ex prop.27.lib.6. Elem. fiet redigendo priùs in æquale sibi triangulum, & posteà hoc triangulum ad eandem altitudinem deprimendo ex prop.6. huius. & tandem in parallelogrammum PV eiusdem altitudinis, ac AT. Nam media proportionalis inter latera MV,& MP inuenta ex 16. lib.6. erit illa, super quam efficiendum est triangulum simile, similiterq; positum, ac ACB ex 27. lib.6. æquale trapezio ROPQ, quod triangulum erit DEF. Inueniatur itaque lateribus AB, & FE tertia proportionalis GH, & super eam constituatur rectilineum simile, similiterque positum, ac ACB ex 23. lib.6. & erit tertium proportioale duobus rectilineis trapezio, & triangulo simile, similiterque positum vni ex ipsis, nempe triangulo, & ita erit FED triangulum,vel PROQ equale tra-

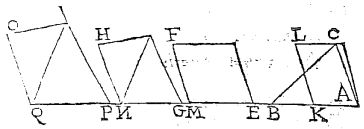
pezium ad ABC triangulum, vt idem ABC ad GHI simile ipsi ACB.

Probatur. Quia latera sunt proportionalia, & ita est FE ad AB, vt AB ad CH, ergo ex 26. lib. 6. El. ipsa quoque rectilinea erunt proportionalia cum sint similia, similiterque posita; sed trapezium est æquale triangulo DFE. Ergo trapezium quoque est prædictis triangulis proportionale.

PROBL. V. PROPOS. XXXII.

Tribus datis rectilineis quartum proportionale inuenire, quod sit simile, similiterque positum, si placet, vni ex datis rectilineis.

SInt data tria rectilinea, ABC triangulum, E parallelogrammum, & GH trapezium, & oporteat trapezio simile, similiterque positum quartum proportionale inuenire, ita quod sit vt triangulum ad parallelogrammum, ita trapezium ad aliud trapezium. Rectilineo ACB V.g. construatur æquale rectilineum, sed simile, similiterque positum, ac rectilineū EF ex 27. l. 6., quod sit AL. Deinde tribus lateribus AK, EM, & GN inueniatur quarta proportionalis PQ, superquam construatur trapezium simile, similiterque positum, ac rectilineum GH ex propos. 23 lib. 6. Elem. Dico ita esse rectilineum AL, seu ICA ad rectilineum EF, vt CH ad PO.



Probatur ex eadem propos. 26 lib. 6. Elem. Nam ita sunt rectilinea similia, similiterque posita, vt sunt latera inuicem. Quare cum AK sit ad EM, vt GN ad PQ, erit etiam AL rectilineum, vel æquale ACB ad F, vt GH ad PO trapezia.

PROBL. VI PROPOS. XXXIII.

Duobus datis rectilineis medium proportionale inuenire simile, similiterque positum, ac aliquod rectilineum ex datis.

SIt datum rectilineū HIG, & rectilineū QO super latus QP; oporteatque reperire medium proportionale inter hæc duo rectilinea; sed tale, vt sit simile, similiterque positum, ac rectilineum super HG, vt in schemate propos. 31. h.

Redigatur QO in EDF similem figurā, & similiter positam, ac rectilinei dati super HG; Sitque eius latus homologum ad GH latus FE; inter FE, & GH inueniatur ex 16. l. 6. media proportionalis BA, & super BA constituatur rectilineum simile, similiterque positum, ac illud positum super HG latus ex 23. lib. 6. Elem. & hoc erit medium proportionale inter HIG rectilineum, & rectilineum QO super QP.

Probatur ex literum proportione ex 26. lib. 6. Elem. Nam cum sit rectilinea simlia erunt ad inuicem, vt bases: sed basis EF ex effectione est ad BA proportionata vt BA ad HG. Vnde & rectilineum super FE, vel quod idem est, cum ei sit æquale, rectilineum QO ad rectilineum super BA erit in ea proportione, quā ipsum met super BA ad rectilineum super HG constitutum.

COROLLARIVM.

IStæ propositiones antecedentes intelliguntur etiam de circulis minuendis, & augendis in data proportione. Nam vt est polygonum ad polygonum in circulo inscriptum, ita, & circuli, & vt diameter ad diametrum ita ex prop. 41. lib. 6 Elem. sunt quoque inuicem circuli: quare si reperta proportionalis, vel tertia, vel media, vel quarta constituatur diameter circulorum, ipsi circuli iuxta datam proportionem augescent.

EXPENSIO VI.

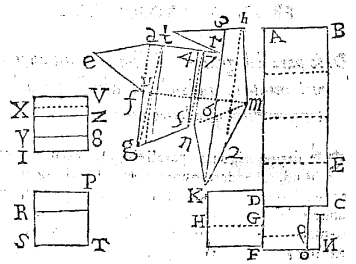
De rectilineo quocumque partiendo etiam in partes non similes per parallelas vni lateri.

VIdimus de augmento, & partitione fig. in plures similes figuras, modo de earum partitione; non quidem in plures figuras; sed quasi in eiusdē plures partes statuendo eas inuicē æquales, vel proportionales, sed nec similes, nec similiter positæ, duplex autem est ista designatio, vel per parallelas vni lateri, vel per discedentes lineas rectas ab vno puncto in dato latere.

PROBL. I. PROPOS. XXXIV.

Figuram rectilineam regularem in destinatas partes secare per parallelas dato lateri.

SIt figura irregularis rectilinea a e f g n l m b t, quæ debeat in quatuor partes V.g. partiri per parallelas lateri f g ex propos. 8. fiat rectangulum æquale, vel toti rectilineo, vel quod idem est singulis eius omninus partibus, & triangulis, quod sit ABCD, quod diuidatur in quatuor partes, & sit quarta pars DE, quæ erit etiam quarta pars dati rectilinei; oportet itaque hanc quartam partem signare in ipso rectilineo irregulari dato; sed per parallelam lateri f g.



Transmutetur hæc quarta pars in quadratum KF, & vt incipiamus à parte dextra videndū est; an triāgulum a f e adæquet quartam partem trasmutando

tando in rectangulum ex propos. 2. vel 7. huius, cuius latus sit quadrati DE, quod erit EH: Quare non implet totum quadratum KF, & ideo nec triangulum f a e adæquat rectilinei irregularis quartam portionem.

Ex triangulo itaque m a g, cuius vertex non cognoscitur ex documentis 23. prop. h. auferenda est pars æqualis rectangulo residuo DH: Trahendo parallelam lateri ra, vt fiat triangulum m f g, rectangulo verò DH æquale, inueniatur quadratum DO. Inuenta autem tertia proportionalis linēis a g, & g f sit N, & tribus g a, & N, & lateri FO quadrati OD quarta proportionalis sit QO, ex qua rectangulū OF fiat ad altitudinem OR, & sequendo operationem ex 23. prop. h fiat trapezium æquale g u, & ducta g t, & ex puncto t parallela lateri f g. Dico trapezium g t cum triangulo e f a esse quartam partem totius rectilinei irregularis.

Probatur ex ipsa effectione supposita doctrina tradita in 23. propos. huius; nam t g ex effectione est trapezium æquale quadrato DO: quod æquat rectangulum DH; rectangulum verò FH est æquale ex effectione triangulo a f e; quæ duo rectangula integrant quadratum KF, quod est ex effect. æquale rectangulo DE, quod est quarta pars parallelogrammi magni AC æqualis rectilineo irregulari; vnde etiam FK rectangulum erit quarta pars figuræ irregularis, & consequenter t g, & f e a erit quoque quarta pars figuræ irregularis.

Sit secundo ad sinistram partem per lineam parallelam eidem lateri g f abscindenda quoque quarta pars: Quia adest angulus a d h, videatur an parallela ducta ab eo angulo abscindat quartam partem rectanguli AC, & consequenter totius rectilinei irregularis, & facta operatione iuxta præscripta propos. 22. vel 23. erit triangulum h m z æquale rectangulo PR, cuius latus est quadrati PS æquantis rectangulum ED quartam partem totius magni AC, ideoque m h z non æquat quartam partem: Ducemus itaque ab angulo K rectam K 3, & transmutato trapezio h z K 3 in rectangulū RT iam æquat totum quadratum PS, & consequenter totum rectangulum ED, idest quartam partem rectanguli AC, & consequenter h 3 m K est quarta pars totius rectilinei irregularis.

Sed apud hanc partem alia quarta pars sit locanda: Quia adest triangulum 3 r t, quod eadem linea secari nequit V.g. 4 5, cùm discontinuum sit in eo situ; ideo placeat illud in hac etiam parte, quæ modo auferenda est, computare.

Redigetur itaque ad rectangulum VX in quadrato VI æquale quarte parti ED rectanguli AC magni, & quia adest angulus n trahemus lineam n 7, vt videamus, an adæquet trapezium r 7 K n reliquum XZI in quadrato VI: quare triangulum K 6 n redigetur in parallelogrammum XZ; & deinde trapezium 7 6 In rectangulum ZY, quod totum quadratum non æquat, ideo triangulo r 6 n 7, cuius vertex ignoratur, addendum est ad lineam 7 n trapezium 7 4 n 5 æquale rectangulo residuo ex prop. 23. huius; eritque figura 4 5 K 3 cum triangulo 3 r t quarta pars, & consequenter reliquum trapezium 5 t, erit quoque quarta pars. Vnde rectilineum totum irregulare in quatuor æquales partes diuisimus, vt patet.

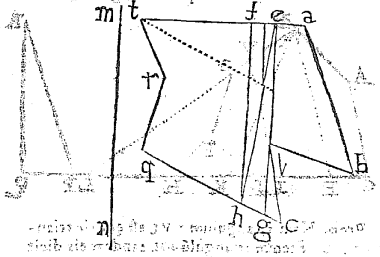
COROLLARIVM.

HInc potes quoque si placet diuidere per lineas, quæ nulli lateri parallelæ sint, sed quidam extra rectilineum, nam illa linea, quæ prima fortuitò trahitur ab aliquo angulo, vel alicui extra figuram parallela, potest constitui tamquam si esset latus figuræ, & videre, quid ipsa ex tota figura auferat, & cætera circa ipsam præstare, vt si esset latus figuræ, vt quilibet ex se experimento comprehendet.

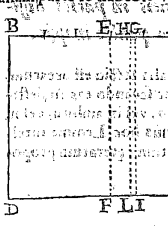
PROBL. II. PROPOS. XXXV.

Figuram irregularem rectilineam in proportionales partes secare per lineas parallelas lineæ extra figuram positæ.

POtest eodem modo in proportionales partes secari area quælibet, ac propos. anteced. V.g. si rectilinei AC vna quarta solum pars assumpta fuisset, & illa à rectilineo irregulari fuisset ablata, vt est n 3 K m, illa esset ad totum, vt 1. ad 4. idem dicas de quibuslibet alijs secundùm diuisionem, in quam rectangulum BADC diuisum fuisset.



Pro quo ostendendo sit fig. a b l c g r t, quæ diuidenda sit parallelis ad m n in duas partes proportionales, ita vt vna nempe sinistra se habeat alteri, vt 2. ad 3. constituatur rectangulum ABCP æquale dato rectilineo irregulari, & diuidatur eius basis in 5. partes. Ex prima lib. 6. rectangulum AECF erit $\frac{2}{5}$ respectu totius, & ad BDEF cōpartem se habebit, vt 2. ad 3. sicut basis CF ad basim FD se habet, vt 2. ad 3. Ad angulum itaque l ducatur linea parallela lineæ m n scilicet ad sinistram partem, videaturque quid ex AECF rectangulo absumat trapezium b a e l, & triangulum l c g, faciendo rectangulū AGCI super datum latus AC æquale trapezio a b l e, & GHIL æquale triangulo l c g; Cum ergo ista duo triangula sit minora, quam $\frac{2}{5}$ totius rectanguli AD, ex 23. propos. huius trianguli g e t q, cuius ignoratur vertex ad latus e g auferenda est pars e g h F equalis rectangulo HLEF, quæ complebit $\frac{2}{5}$ totius, & ad aliam partē se habebit vt 2. ad 3. per parallelā f h



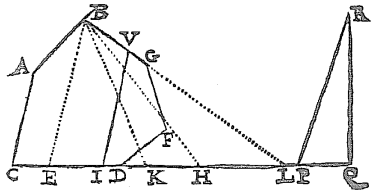
datę m n. Nam f g h e est ex constructione æquale trapezium rectangulo HELF, residua verò AHGL sunt æqualia ex construct. Trapezio b a e l, & triangulo l c g. Quare totum AECF rectangulum est æquale toti a f c h rectilineo sicut

totum rectangulum AD est æquale dato irregulari rectilineo abqt; Cum ergo sit AECF $\frac{1}{2}$ totius AD erit ah totius abqt $\frac{1}{2}$, & *diuidendo*, vt est rectangulum AECF ad rectangulum EFBD ita erit afch ad fh qt nempe, vt 3. ad 3.

PROBL. III. PROPOS. XXXVI.

A multilatero datam partem secare per parallelam dato lateri.

A Dato sexagono ABCDEG absumenda sit pars æqualis dato triangulo QPR, quod sit, aut fiat eiusdem altitudinis sexagoni ex propos. 6. huius. Agatur ex angulo B recta BE dato lateri CA parallela, & fiat triangulum BEH ex dictis prop. 8. h. æquale residuo rectilineo EDFGB continuenturque latera CH, & BG, & concurrant in L, Deinde mensuretur basis QP ab H, & sit HK; & ducta HD erunt æqualia ex 1. Cor. p. 39. l. 1. triangula KBH, & PRQ & inter LE, & LK reperiatur media proportionalis IL; & ducatur IV parallela ipsi CA. Dico IFGV multilaterum esse æquale triangulo QPR.



Prob. Nam triangulum IVL est æquale triangulo KBL. Etenim triangulũ EBL eandem eis dicit proportionem. Dicũt namque proportionem EBL, IVL duplicatam lateris LE ex 21. lib. 6. ad latus LI, sed ex effectione hæc est, quam EL habet ad LK; cùm sit IL media proportionalis inter LE, & LK: sed quam proportionem habet LB ad LK eam ex propos. 1. lib. 6. Elem. habet EBL ad KBL. Ergo idem triangulũ EBL eandem dicunt proportionem triangulis IVL, & KBL. Ergo ex 11. lib. 5. æqualia. Quamobrem æqualibus IVL, & BKL ablatis à triangulo EBL, remanebunt æquales EKB triangulum, & EBVI trapeziũ. Si ergo rursus auferantur hæ portiones æquales triangulum EBK à triangulo EBH, & trapezium à rectilineo BEDFG, quod triangulum EBH ex constructione æquat, remanebunt æqualia triangulum KBH, ideſt QRP, & pars assumpta VGFI.

EXPENSIO VII.

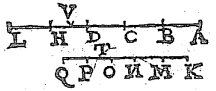
De figuris planis rectilineis in partes dissimiles secandis à dato puncto in ipsis.

NOn minus vtilis hęc alia sectio est arearum, quæ operi demandatur secando eas in destinatas partes à puncto aliquo, vel in ambitu, vel in meditulio dato, pro quo priùs hoc Lemma intelligendum est, vt fundamentum cęterarum propositionum: tale autem est.

LEMMA PROPOS. XXXVII.

Si magnitudo in quaslibet partes secetur, & alia in totidem illis proportionales eadem serie, & accipiantur quæ partes prioris magnitudinis hæ simul comparatæ ad residuas simul habebunt eandem proportionem, quæ totidem posterioris simul ad reliquas habens simul sumptas, & eodem ordine.

SIt AL prima magnitudo in quinque partes diuisa, & alia, etiam si sit diuersi generis KQ, pariter in quinque partes diuisa prioris magnitudinis partibus eodem ordine proportionales, & accipiantur duæ ex prima AB, & BC, & duæ de secunda secundùm eundem ordinem KM, & MN. Dico, quod AC ad reliquas simul CL habebunt eandem rationem, quam KN ad reliquas NQ.



Progr. 1. Probatur. Nam ex hypothesi, quam proportionem dicit AB ad BC eam dicit KM ad MN: Igitur *componendo* ea est proportio AB cum BC ad BC, quæ KM cum MN ad MN: Ex hypothesi quoque vt est BC ad CD, ita est MN ad NO: quamobrem ex *æqualitate* erit AB cum BC ad CD, vt KM cum MN ad NO in alia quantitate.

Prog. 2. Deinde cum sit HL ad HD, vt QP ad PO; erit quoque *componendo* LH cum DH ad LH, vt QP cum PO ad QP: sed ex hypothesi *conuertendo*, vt HD ad DC, ita PO ad ON. Ergo ex *æqualitate*, vt DH cum HL respicit in proportione DC, ita QP cum PO respicit ON, & *componendo*, vt CL est ad CD ita NQ ad NO: & *inuertendo* CD ad CL, vt NO ad NQ, sed respiciebat quoq; AC, CD, vt KN partem NO ex primo progr. Vnde erit AC ad CD, vt KN ad NO, & vt CD ad CL, ita NO ad NQ: vnde ex *æqualitate* ita erit AC duę simul ad CL reliquas simul, vt KN duæ simul alterius quantitatis ad NQ reliquas eiusdem.

COROLLARIVM.

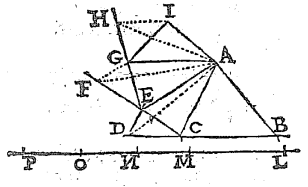
VNde si rursus aliqua pars, vt DH secetur in prima quantitate V. g. in V, & in T secunda pars correspondens OP in ordine, etiam proportionaliter secetur in similes portiones; totq; quoque quantitates erunt sectæ proportionaliter, & ita erit AV ad VL, vt KT ad TQ. Nam eadem probatio militat, cum ex hypothesi, vt primo factæ sint partes proportionales eodem ordine correspondentes, quare, & correspondenter erit AV ad LV, vt KT ad QT, vel eliam AV ad AL, vt KT ad KQ *componendo*.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. XXXVIII.

Diuiso rectilineo quolibet in triangula, rectas lineas eodem ordine, & proportione, quæ triangula exsistunt, præditas inuenire.

SIt figura diuisa in triangula BAC, CAE, EAG, & AIG; oporteatque lineas inuenire, quæ inuicem habeant eam proportionem, quam triangula. Producatur BC in D, & ducatur ED parallela lateri AC: Deinde ducatur AD, eritque triangulum ACD æquale triangulo CAE: sed eiusdem altitudinis, ac ECA, cum desinat in idem punctum A: Quare ex 1. lib. 6. erit BC ad CD, vt triangulum BCA ad triangulum CAD, vel ad æquale CAE, quas lineas transferemus pro primis inuentis in lineã LP, quæ erunt LM, & MN. Idem faciemus triangulis CAE, & collaterali EAG: nam ducta GF ab angulo G parallela lateri AE; & CE in P, ductaque AF erit triangulum AEF æquale triangulo AGE, & eiusdem altitudinis. Quare erit, vt triangulum ad triangulum, ita basis CE ad basim EF, quare lineis CE, EF, & MN inueniemus quartam proportionalem NO: quia ergo est CE ad EF, vt MN ad NO, erit etiam MN ad NO ex 16. lib. 5. vt CAE ad GAE:



Idem tandem faciemus de triangulis EAG, & AGI: eritque, vt triangulum AEG ad GAI, ita basis BE ad basim GH. Sit ergo etiam, vt basis BG ad basim GH, ita NO ad quartam OP; eritque tertia NO ad quartam OP, vt basis EG ad basim GH, & consequenter, vt triangulum EAG ad AGI.

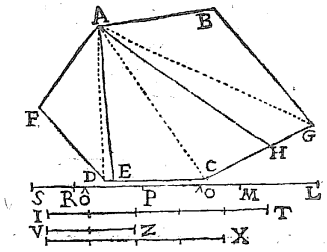
Verùm si aliqua figura adeo erit irregularis, vt nequeat in triangula diuidi ab vno puncto conuertantur singula triangula, in triangula æqualia, sed eiusdem altitudinis ex 8. prop. de conuer. figur. vel parallelogramma, & bases erunt inuicem, vt triangula æqualis altitudinis, & consequenter, vt triangula, in quæ figura irregularis diuisa est, vtcumque

PROBL. II. PROPOS. XXXIX.

Datum rectilineum in datas partes secare per rectas ab vno puncto in latere, vel in angulo discedentes, dummodo in triangula ab vno puncto diuidi possit.

SIt figura ABGCDF; quæ in triangula à dato puncto A diuisa sit; hanc in quaslibet partes, vel proportiones, nempe quam habet V ad TI $\frac{1}{2}$, & X ad TI $\frac{1}{4}$, volumusque proportionem V ad TI esse ad partem B.

Reperiatur ex propos. precedenti linea LS, quarum partes habeant eandem proportionem ad inuicem, vt triangula, & eodem ordine, ita quod LM sit ad MP, vt triangulum GBA ad triangulum GAC, & MP sit ad PR, vt triangulum GAC ad CAD, & PR sit ad RS, vt CAD ad DAF.



Tribus verò TI, & V datis, & LS reperta, inueniatur quarta proportionalis LO, ita quod vt TI ad V, ita sit LS ad LO, quæ inter P, & M cadit.

Diuidatur deinde; quia linea MP correspodet ex ordine basi CG ea basis GC secundùm proportionem MP ad MO, & sit quarta proportionalis GH. Dico trapezium ABGH esse ad totam figuram irregularem ABGCDF, vt V ad TI, ideſt $\frac{1}{2}$.

Probatur ex Coroll. propos. 37. Nam ita est quantitas LO ad OS; vt est quantitas BAGH ad quantitatem residuam AHCDF: sed illa LO ad OS, vt V ad TZ ex effect. & *inuertendo*, nempe vt 2. ad 3. Ergo etiam figura ABPH erit ad residuum, vt 2. ad 3. & consequenter ad totum erit vt 2. ad 5. & ABPH erit ad totam 2. ad 5. vt est V ad IT.

Placeat rursus diuidere ea proportione, quam X habet ad TI, ita quod antecedens proportionis X sit in figura irregulari versus B.

Tribus eodem modo inueniatur quarta proportionalis, vt TI ad X; ita LS ad LO; & quia hęc diuisio O cadit in tertiam PR. correspondentem tertiæ basi CD; Tribus rursus PR, & PO, & CD inueniatur quarta proportionalis CE. Nam ducta AE erit ABGCE ad totam figuram, vt X ad TI eadem ratione.

PROBL. III. PROPOS. XL.

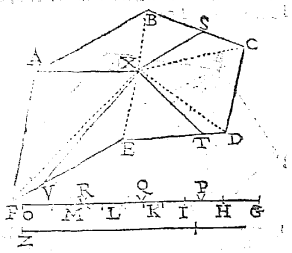
* *Figuram à dato in medio puncto in datas partes secare, dummodo ad angulos ab illo puncto rectæ duci possint.*

SIt in figura ABCDEF datum punctum X in medio vbicumque malueris, & sit diuidenda fig. in quatuor partes æquales (posset, & diuidi in proportionales, sed in præcedenti proportionalem diuisionem exemplo illustrauimus.)

Sit linea GO, cuius partes GH, & HI, & IK, & KL, & LM, & MO sint eodem ordine proportionales ex prop. 38. vt triangula ABX, BXC, CXD, DXE, EXF, FXA, quæ diuidatur in quatuor partes in P, Q, R. Quia ergo prima diuisio P cadit in secundam lineam erit latus BC secundi trianguli diuidendum, ita vt quemadmodum est MI ad MP, ita sit BC ad OS ducta XS erit XABS quarta pars. Sic quia Q cadit in parte KL, quæ correspondet basi quarti trianguli fiet, vt EL ad XQ, ita basis DE ad DT. Et

ducta

ducta XT erit SXT alia quarta pars, & sic de parte R, quæ posscit EF basim correspondentem dividendam esse, vt LM ad LR in V, vt sit alia quarta pars SXV.



Quod Probatur. Nam ita est ex Coroll. prop. 37. GP ad totam GO, vt XAES ad totum rectilineum; sed GP est quarta pars totius GO. Ergo, & portio XAES erit quarta pars totius rectilinei.

Iterum, vt est GQ ad GO; ita est ABCTX ad totum rectilineum: sed GQ est $\frac{3}{4}$ totius GO. Ergo etiam ABCTX erit $\frac{3}{4}$ totius rectilinei. Ablato ergo AXS, nempe $\frac{1}{4}$, vt ostendi erit SXT $\frac{1}{4}$ totius, & sic dicas de alijs; vt per se patet.

EXPENSIO VII.

De figuris per lineas, vtcumque ductas partiendis.

POscit ordo, & ratio, vt quemadmodum superficies per parallelas lineas, & etiam per lineas ab vno centro progredientes diuisimus, sic, & eas per lineas incertas, & vtcumque ductas partiri doceamus.

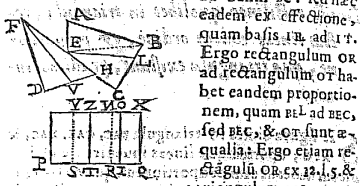
PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Rectilineum quodcumque partiri per lineas non parallelas, nec in vnum punctum conspirantes.

SIt Rectilineum ABCDE, quod oporteat secare in tres partes lineis; quæ nec sint parallelæ, nec sint in vnum punctum coeuntes; vel quia id nequeat, aut quia non placeat.

Fiat rectangulum QO æquale areæ trianguli BAE, & OT æquale areæ trianguli BEC, & tandem PZ æquale areæ trianguli CED. Diuidatur deinde Q latus in tres partes in R, & S. Et quia prima pars finit in basim IT parallelogrammi OT, æqualis secundo triangulo BEC; ideo tribus IT, IL, & EC inueniatur quarta proportionalis BL, vt sit IT ad IR, vt BC ad EL. Ducaturque FL. Dico BAEL esse tertiam partem totius rectilinei.

Probatur. Quoniam QO rectangulum est æquale triangulo BAE ex fig. ctione; rectangulum verò OR, quod complet tertiam partem totius parallelogrammi æqualis toti rectilineo est æquale triangulo EL. Ergo BAE, cùm BEL est tertia pars rectilinei; cum æqualium ad æqualia eadem sit proportio: Quod autem triangulum BEL sit æquale rectangulo OR; patet. Nam rectangulum OR est ad rectangulum OT, vt basis IR ad basim IT, & ita triangulum BEL ad triangulum BEC est vt basis EL ad basim BC: sed hæc eadem ex effectione, quam basis IR ad IT. Ergo rectangulum OR ad rectangulum OT habet eandem proportionem, quam BEL ad BEC, sed BEC, & OT sunt æqualia: Ergo etiam rectangulũ OR ex 12. l. 5. & triangulum BEL erunt æqualia. Eadem est probatio in trahenda linea FV: Siquidem secunda pars RS ex tribus finit in basem TP, in S parallelogrammi æqualis triangulo HED. Vnde basis HD secanda est proportionaliter, vt TP secta est in S, & trahẽda FV, & FELCV ex dicta ratione erit FOVELG remanentis rectilinei $\frac{1}{4}$.



EXPENSIO VIII.

De planis à puncto extrinseco partiendis.

SIcut plana ab vno puncto in eis electo in plures partes discepsimus, sic à puncto foris electo diuidemus, licet id sit minus necessariũ, & magis laborioſũ, & non semper in opus reducibile.

PROBL. I. PROPOS. XLII.

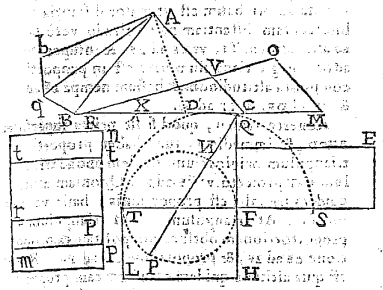
Datum Triangulum à dato extra ipsum puncto in datas partes secare.

SIt propositum triangulum ABC $\frac{1}{3}$ trianguli BAC, in quo ex O puncto extra ipsum dato sit auferenda data pars æqualis triangulo ACD.

Ex lateribus trianguli AC, & CD fiat rectangulum EF; linea verò parallela OM ex 25. lib. 1. Elem. applicetur rectangulum æquale ipsi EF rectangulo, & fiat FL rectangulum, cuius alterum latus inuentum sit FT, mensuretur itaque à puncto C latus FT, & sit CX, rectangulo autem CX, & MC, ideſt TF, & FS fiat æquale quadratum OF, & huic quadrato ex 37. lib. 2. æquale rectangulum ex NQ, & FQ, quod fit constituendo latus quadrati pro tangente, quæ tangat circulum, cuius diameter CN; vel TF æquet CX; ita enim rectangulum NQ, & FQ ex citat. propos. 37. lib. 3. Elem. æquabit quadratum CXFQ, & ideo ipsi æquale rectangulum CX CX, & MC, vel TF FS æqualibus; transferatur itaque NQ latus ab X in R, & ducatur à puncto dato O linea OR, & Dico CAD æquari triangulo VCR, & ideo per lineam OR auferri tertia pars trianguli BAC, vt fuit promissũ.

Probatur autem. Rectangulum ex CR, & XR, ideſt NQ, & FQ æqualibus æquatur quadrato tangentis FQ, ideoque rectangulo ex MC, & CX, ideóque latera CX 10. lib. 6. Eu. erunt reciprocè proportionalia, eritque CR ad MC, vt CX ad XR. Ideoque *componendo* erit GR cum MC, ideſt tota MR ad CR, vt CX cum XR, ideſt CR ad CX.

Verùm ob parallelas MO, & CV erit ex 4. lib. 6. MO ad CV, vt MR ad CR, quæ sunt in proportione, vt CR ad CX. Ideoque MO ex 16. lib. 5. erit ad CV, vt CR ad CX. Vnde ex 18. lib. 6. si ex extremis MO, & CX componatur rectangulum erit æquale rectangulo mediarum CV, & CR. At rectangulum ex MO, & CX ex effectione, idem, quod LF æquatur rectangulo EF, ex lateribus CA, & CD trianguli CAD. Quarè etiam eidem EF æquabitur rectangulum CV, & CR, & propter hoc latera erunt reciprocè proportionalia ex 10. lib. 6. El. & CR erit ad CA, vt CD ad CV, angulus verò C est idem. Vnde ex 11. lib. 6. triangula CAD, & CVR erunt æqualia.



Sit punctum datum O. Oporteatque rectangulum DABC in tres partes secare, diuidatur in tres partes, & sit tertia pars LA parallelogrammum, & reliquum LC duæ tertiæ partes erunt; diuidatur rursus per rectam FH, eritque HC tertia pars; secetur itaque FH bifariam in E. & ducatur OI. Dico trapezium VLCI esse tertiam partem.



Prob. Quia triangula nigra sunt æqualia cum sint rectangula, & anguli ad vertices E sint equales: quare tantùm additur in triangulo nigro apud V, quantum aufertur in triãgulo nigro apud H. Vnde figura IVHL erit æquale tertiæ parti CFHL.

PRORL. III. PROPOS. XLIV.

**Datum quodcumque rectilineum in partes destinatas per lineam à puncto extra ipsum ductam secare.*

SIt rectilineum Abqb, quod diuidatur in triangula, & fiat parallelogrammum m n æquale toti, & in eo parallelogramma singulis triangulis æqualia, vt in fig. propos. anteced.

Nimirum mp triangulo bqA sicut pr ipsi AQB, & r n vltimo BAC. Deinde diuide, quia punctum O est prope triangulum BAC rectang. r n in partẽ, quam voles, vel quæ tibi data fuerit n t, & quia non occupat totam partem r n ideo auferri poterit à triangulo BAC; quod si totam occuparet, vel maiorem: tunc triangula, in quæ diuisa est figura, essent alio pacto ordinanda, & ducenda essent à vertice C, vel partim à C partim ab A, & illis rectangula æqualia facienda in rectangulo m n, & videndum eodem modo, an pars data ab vno ex ipsis subduci posset. Nam eo pacto, & poterit à triangulo ipsi parallelogrammo æquali ea pars auferri per lineam à puncto dato protractam.

Quod cum obtinueris. Tunc illud rectangulum t n in triangulum æquale DAC parti in parallelogrammo ei correspondenti facta V. g. in parall. logrammo r n conuertendum est: Et deinde

ea omnia præstanda, quæ dixi prop. penultima antecedenti, & erit diuisum rectilineum datum in partem datam.

COROLLARIVM.

POterit etiam, & aliquando diuidi in plures partes datas; sed non semper; quia non omnia triangula, quæ in figura fient, poterunt habere aliquod latus puncto dato obuersum, vt AC ad quod linea duci possit: talis, quæ non secet latus alterius trianguli. Sed ipsa experientia docebit possibilitatem rei, de qua queritur.

EXPENSIO IX.

De planiciebus Musicis, & proiectis.

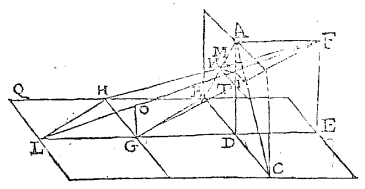
PLanities proiectæ sunt illæ, quæ nascuntur à lineis proiectorijs latera figurarum proijcientium ambentibus, vt descripsimus tract. 26. propos. 8. & quidem de illis, prout conus proiectorius directè in eas incidit, non agemus, vtpote quod de eis certum sit esse in duplicata ratione suorum laterum, cùm vt ibi ostendimus de circulo figuræ similes, sint itaque de eis agendũ cum radij proiectorij in planũ obliquè incidũt, & præcipuè hìc de eorum proportionibus agere in animo est.

THEOR. I. PROP. XLV.

Spatiorum originalium altitudines ad proiectorum altitudines obtinent eam proportionem, quæ distantia remotior ad altitudinem centri, si primæ sint; quod si secundæ etiam eam, quam distantia propinquior ad interceptam distantiam.

SIt spatium originale GHBD, cuius altitudo GD, distantia DE à centri F perpendiculari altitudine EF; altitudo verò huius plani proijciatur, & sit DT. Dico GD *altitudinem esse ad altitudinem* DT, vt GE *maior distantia, quam* DE, *ad* EF *altitudinem centri*.

Patet ex 4. lib. 6. Nam ob parallelissimum linearum, ita GD est ad DT, vt GE ad EF.



Deinde sit altera altitudo LG, quę non sit prima, & immediata, vt est GD. Dico quod proiectum TI habet proportionem, ne dum, quę est LE ad EF; sed insuper, quæ GE distantia propinquior ad DE interceptam; nempe compositam ex LE ad EF, & GE ad DE, vt si DE esset 3. GE 4. at EF 2. & LE 5. haberet LG ad TI proportionem, quam 20. ad 6. quæ

est

est composita ex 4. & 5. ad 2. & 3.

Probatur. Nam ducta CO parallela ipsi DA. Erit LG ad GO, vt LE remotior distantia ad FE altitudinem centri, sed GO est ad TI; vt GF ad TF, & CF est ad TF, vt GE propinquior distantia ad DE interceptam distantiam. Ergo LE erit ad TI, ne dum vt LE ad FE; sed etiam, vt GE ad DE. Vnde LG ad TI erit composita proportio EX LE ad EF, & GE ad DE, & sic dicas de alijs sequentibus.

THEOR. II. PROPOS. XLVI.

* *Omnes latitudines planorum originaliũ ad omnes planorum proiectorum eam habent rationem, quam distantia à centro ad interceptam distantiam.*

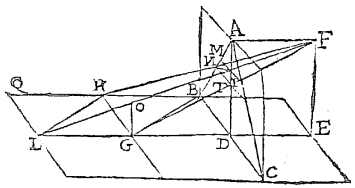
* LAtitudines originarias, vt GH eam dico *obtinere proportionem ad proiectas latitudines*, NT, quam distantia GE ad interceptam DE.

Probatur. Nam GH est ad NT, vt GF ad FT ex 4 lib.6. elem. at vt GF ad FT; sic est GE ad DE. Ergo vt GH ad NT, sic GE ad DE, & idem asseras de latitudine LQ, quæ se habet ad MI, vt LE ad DE.

THEOR. III. PROPOS. XLVII.

* *Superficies generans parallelis contenta, quæ sit diuisa diagonali in duo triangula, alterum quidem triangulum originarium ad proiectum eam habet proportionem duplicatam, quam distantia tota ad interceptam, & quam distantia remotior ad altitudinem centri radiosi; Alterum autem habet proportionem ex distantia minori ad interceptam, & distantia remotiori ad altitudinem centri radiosi.*

* DEtur superficies QLHG diuisa diagonali LH, quæ proijciatur, & proiecta sit in NITM. Dico superficiem LHG esse ad NIT primo, vt GE ad DE, secundò rursùs vt GE ad ED, & tertiò EX LE ad EF.



Probatur. Nam triangula quæcumque EX Cor. 3. prop.22. lib.6. ea habent proportionem, quę componitur EX altitudinibus, & basibus: sed basis GH habet proportionem ad basim NT, quam GE ad DE: rursùs altitudo LG habet proportionem ad TI altitudinẽ, vt LE ad EF, & GE ad DE. ex 45. h. Ergo proportio trianguli LHG ad triangulum NIT consequitur proportionẽ GE ad DE duplicatã, nempe distantię minoris ad interceptam distantiam, & insuper distantiæ maioris ad altitudinem centri.

* Probatur quoque de reliquo triangulo LQH ad triangulum NMI. Nam LQ latitudo, & basis, collata ad MI basim est, vt maior distantia LE ad interceptam distantiam DE: altitudo verò LG est ad altitudinem TI, vt LE ad EF, & insuper, vt GE ad DE. Ergo triangulum NMI est in proportione composita altitudinum, & basium nempe LE ad ED, & GE ad DE, & LE ad EF.

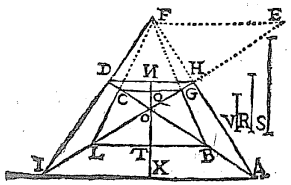
Aduerte tamen, quòd si sit prima superficies BHGD, & immediata, tunc habet proportionem triangulum originarium, quidem BDG ad triangulum GBT proiectũ, vt GE ad EF. Quoniam altitudo quidem DT talis est proportionis; basis verò BD eadem. At triangulum HGB ad triangulum BNT proportionem obtinet compositam ex proportione GE ad EF, & proportione GD ad DE. Ratio est quia altitudo quidem GD ad DT eam proportionem obtinet GE ad EF, at latitudo aliam proportionem GB ad DE.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

* *Superficies musicas augere, vel minuere secundum datam rationem.*

* SIt data superficies BGCL augenda secundum datam rationem V ad S. Inueniatur itaque media proportionalis R, & trahatur diagonalis LG, producaturq; in E, nempe vsque ad parallelam FE basi BL, & iterum prolungetur in I. Rursusq; ducatur diagonalis DA, quæ se secent in O; fiat deinde vt V ad R, sic LO ad IO, ducaturque ab I parallela AI basi LB, & duæ AF, & FI ab I, & A ducantur ad centrum F, quæ secabunt diagonales AD in D, & IE in H, perque punctum D ducatur HD parallela basi AI, & erit factum, quod imperatur. Nam BCLG planum est ad planum HDAI in proportione data V ad S.

* Nam ostendetur primo ADHI esse superficiem musicam, vel proiectam, quia EX propposit. 11. tract. 16. crura trianguli AFI, & BFL sunt secta proportionaliter parallelis AI, & HD musicè ob lineam IE in ea obliquè incidentem.



* Deinde basis LB ad basim AI est, vt V ad R. Nam ducta per O recta XN perpẽdiculari ad AI, linea LO est ad OI, vt OG ad OH in triangulis æquiangulis AOI, & ODH ob angulos ad verticem HOD, & AOI æquales, & angulos incidentis lineæ IE in parallelas HD, & GC, & BL, & AI, sed LO ad IO est vt V ad R, EX effectione: Ergo etiam OG ad OH: Cum itaque LO sit ad OI, vt OG ad OH, & ideo *permutando* LO ad OG, vt OI ad OH, hinc *componendo* LO cum OG, ideſt LG ad LO, vt OI cum OH ideſt IH ad OI: rursùsque *permutando* LG erit ad HI, vt LO ad IO, ideſt vt V ad R.

Sed vt LO ad IO, sic est basis BL ad AI in triangulis æquiangulis BOL, & AOI ob parallelas BL, & AI. Ergo erit LG ad HI, vt basis BL ad basim AI, scilicet, vt V ad R.

Et quia in triangulis OND, & OQC, ita est ob parallelismum linearum, OQ ad ON, vt OG ad OH erit OQ ad ON, vt V ad R, & sic OT erit ad OX, quia est in æquiangulis triangulis LOT, & IOX, sic quoque, vt OT ad OX, latus LO, & OI. Quadere erit OQ ad ON, vt OT ad OX, & *permutando* OQ ad OT, vt ON ad OX, & *componendo* OQ cum OT, ideſt QT ad OT, vt ON cũ OX, ideſt NX ad OX scilicet, vt V ad R.

Quia itaque triangula habent proportionem compositam ex proportione basium, & altitudinum ex propos. 22. Coroll. 2. lib. 6. altitudo verò trianguli BCL est TQ, & trianguli AID est XN; bases verò sunt BL, & AI. Ergo habebit proportionem compositam ex proportione eadem, quæ est basium, & altitudinum: quare ex p.1. tract. 9. expens. 5. erit proportio duplicata trianguli BCL ad triangulum ADI, quę basis BL ad basim AI, scilicet V ad R; proportio verò V ad S data est duplicata eius, quam habet V ad R. Ergo triangum BCL ad triangulum ADI habet proportionem, vt V ad S.

* Idem dicendum de triangulis BGC, & AHD; siquidem eadem altitudine gaudent XN, & QT, basis verò GC est ad basim HD in æquiangulis triangulis OGC, OHD, vt OG ad OH; sed iam ostensum est OG ad HO eam esse proportionem, quæ LO ad OI, ideſt EX effectione, quam V ad R. Ergo & basis GC erit basim HD, vt V ad R. Cùm itaque bases, & altitudines obtineant eandem proportionem, & proportio triangulorum sit composita EX altitudinibus, & basibus, quę est eadem, erit duplicata eius, quæ est V ad R, nempe erit, vt V ad S.

Si verò agatur de diminutione ductis diagonalibus AD, HI fiat vt S ad R, sic AO ad BO, quæ mensuretur ab O in B, & ducta parallela BL cætera perficiantur: vt priùs, & compleatur spatium BGCL, eritque spatium musicum AHDI ad spatium musicum BGCL, vt S ad V eadem prorsùs ratione, quam supra assignauimus.

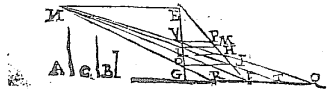
PROBL. II. PROPOS. XLIX.

Superficies iuxta datam proportionem Harmonicè se diminui incipientes constituere.

SIt data proportio A ad B$\frac{3}{5}$; oporteatque constituere superficies procedentes harmonicè iuxta datam proportionem; ita vt primus terminus sit $\frac{1}{3}$, secundus sit $\frac{1}{5}$, & reliqua progressio sequatur, vt exigit progressus harmonicus.

Reperiatur media proportionalis inter A, & B, & sit C: fiatque, vel exhibitum sit triangulum GFE, in quo harmonica proportio instituenda est, fiatque vt A ad C sic GE ad BF, & ducatur parallela HI. Deinde ducatur diagonalis FI, vsque dum occurrat ductæ à centro parallelæ EN basi FG in N, & diuisa FG per medium in R; ducatur NR, & vbi secat in O, ducatur parallela LO. Dico spatia Harmonica HO ad OF habere proportionem, quam A ad B.

Probatur. Nam ex propos. 1. tract. 16. part. 2. GE est diuisa harmonicè cum bases FE, & RG sint æquales; Vnde erit vt FE ad HE termini, sic differentia FL ad LH; sed vt FE ad HE termini, sic est A ad C, est autem A ad C proportio duplicata eius, quæ est A ad B, Ergo A ad B habebit proportionem duplicatam, quæ est FE ad HE terminos, & ideo, quę est trianguli FEG ad triangulum simile ex 20. l. 6. elem. HEI; sed ex Tract. 28. de propos. 11. vt est triangulum FEG ad triangulum HEI, sic est LG superficies scalena ad HO superficiem. Ergo vt est A ad B, sic est LG ad HO, nempe, vt $\frac{3}{5}$ ad $\frac{1}{3}$, & *inuertendo* HO ad LG, vt B ad A: quare si sequaris diminuendo harmonicè ducendo lineas QN, & FN à



partibus æqualibus QT, & TF partibus FR, & RG, successiuè harmonicè à data proportione decrescent termini, vt primus sit $\frac{1}{3}$, tertius sit $\frac{1}{5}$, quintus $\frac{1}{7}$, septimus $\frac{1}{9}$, & sic successiuè ex pr.3. Tr. 16. p.2. Siquidem ex tract. 28 de progr. prop. II. etiam spatia triangularia harmonicè proportionaliter decrescunt, vt ipsæ lineæ, quæ in primis terminis duplicatam FE ad HE obtinent proportionem, quæ est vt 2. ad 3. vel A ad B: lineæ verò illæ ex 3. tract. 16. part. 2. vt numeri $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ procederent: quare etiam triangulorum superficies, quæ duplicatam basium habet proportionem, ita successiuè propagabuntur. Differentiæ verò erunt, successiuè, vt primus ad tertium ponitur, nempe vt $\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{3}$ ideſt $\frac{3}{6}$ ad $\frac{2}{6}$ ex pr. 12. tract. 16. at termini scilicet triangula successiuè se habebunt harmonicè vt $\frac{6}{3}$ $\frac{6}{5}$ $\frac{6}{7}$ $\frac{6}{8}$ $\frac{6}{9}$, & cæt. ideoq; GL erit ad LI, vt $\frac{1}{3}$ ad $\frac{6}{8}$ sc. vt GEF ad HIE, at HO ad HI, vt $\frac{6}{8}$ ad $\frac{1}{3}$, nimirum, vt triangulum LEO ad triãgulum MIE, & IM ad MY, vt $\frac{6}{8}$ ad $\frac{2}{8}$, scilicet, vt triangulum HEI ad triangulum PEY, vnde differentiæ non successiuè se habebunt, nisi binæ, & binæ sumantur.

EXPENSIO X.

De planitiebus Isoperimetris constituendis.

AD perfectam cognitionem mathematicam iste tractatus necessarius est, cum aliquibus videri possit æquales figurarum ambitus æqualia quoque spatia continere, quòd verum non est, vt videbimus: Quia verò aliquando opus potest esse, quod aliquis requirat figuram eiusdem ambitus, & æqualis areæ, ideo id quoque docebimus præstare.

DEFINITIO I.

Isoperimetræ figuræ sunt, quæ æquales ambitus habent.

DEFINITIO II.

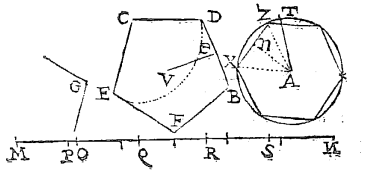
Area cuiuslibet figuræ est eius secundùm planum capacitas.

PROBL. I. PROPOS. L.

Figuram regularem alteri Isoperimetram constituere dato alterius figuræ constituendæ angulo.

SIt sexagonum A, cui figuram Isoperimetram V. g. Pentagonum oporteat constituere.

Latera sex sexagoni super lineam MN extendantur; quale vnum ex ipsis est MP. Hancque lineam diuide iuxta numerum angulorum ad centrum, seu quod idem est laterum fig. constituendę, nempe



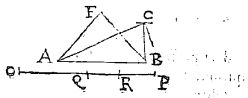
Pentagoni, vt est MO, & OQ, & QR, & RS, & SN: ex duabus verò MO, & OQ, fiat angulus C æqualis angulo pẽtagoni dato G, & idem fiat de reliquis tribus annectendo V. g BQ ad CE sub eodem angulo interno G, & fiet Pẽtagonum dato Isoperimetrum; vt patet ex ipsa constructione.

Eodemque modo quælibet alia figura regularis alteri Isoperimetra constituetur.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Dato angulo scaleno super eandem basim æquicrurum Isoperimetrum triangulum constituere.

SIt datum triangulum scalenum ABC, cui æquicrurum sit constituendum Isoperimetrum; Ducatur OP, & in illam transferantur latera AC, & CB, & sint OR, & RP, hæcque linea diuidatur bifariam in Q, & ex duabus æqualibus OQ, & QP super basim AB constituatur triangulum AFB. Nam illud erit Isoperimetrum alteri ACB.

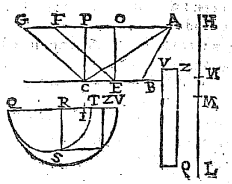


Probatur. Nam AC, & CB scaleni, sicut AF, FB crura æquicruris sunt æqualia lineæ OP; quare etiam inuicem; basis verò AB communis.

PROBL. III. PROPOS. LII.

Dato triangulo parallelogrammum æquale, & Isoperimetrum constituere.

SIt datum triangulum BAC, cui æquale, simulq; Isoperimetrum parallelogrammum sit constituendum: Latera BA, & AC in rectam HL transferantur, & sint HN, & NL, lineaque diuidatur bifariam in M sicut, & basis BC in E. Sumpto verò interuallo HM lineæ dimidio, centro E portio circuli ducatur, quæ secet parallelam AG in puncto F, ducaturque EF, & à C parallela EF lineę, quæ sit CG. Dico parallelogrammum EFGC esse triangulo CBA Isoperimetrum, & æquale.



Probatur de æqualitate ex 33. lib. 1. Quòd verò sit Isoperimetrum patet; Nam latera FG, & BC æqualia inuicem ob parallelismum sunt æqualia basi BC. Nam EC est medietas. Vnde basis æqualis FG erit etiam alteri medietati BE æqualis: Latera verò EF, CG sunt æqualia lateribus BA, & AC, quod sint simul æqualia lineæ HL.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Rectangulum parallelogrammo non rectangulo æquale, Isoperimetrum constituere.

SIt rectangulum OC in præc. fig. æquale parallelogrammo ECFG; sed non Isoperimetrum, oporteatque seruata æqualitate in Isoperimetrum transformare.

Inueniantur eius lateribus EO, & OP; media proportionalis RS, cuius quadratum ex 19. lib. 6. est rectangulo OC æquale. Deinde lateribus EC, & CG parallelogrammi non rectanguli redactis in rectam QV, quę sint QI, & IV; tota QV secetur ex tr. 35. propos. 16. vt SR inter segmenta OZ, & ZV sit media proportionalis; rectangulũq; QZV ex extremis QZ, & ZV erit æquale quadrato mediæ RS, & ideo rectangulo OC, & EG dato ex 19. lib. 6. Sed dico, quod etiam Isoperimetrum sit parallelogrammo EG eidem dato.

Probatur: Quia latera ZV, & ZQ sunt æqualia lineæ VQ, cui, & sunt æqualia ex effectione latera EG, & CG: quare etiam reliqua reliquis.

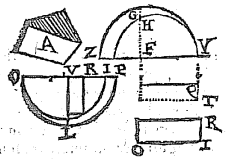
PROBL. V. PROP. LIV.

Dato rectilineo quocumque æquale, & Isoperimetrum rectangulum constituere, cùm fieri potest.

SIt datum multilaterum A rectilineum, cui æquale sit rectangulum FT, & linea PQ ęqualis dimidiato ambitui rectilinei A,

Inueniatur, vt in antecedenti figura, media proportionalis inter rectãguli FT latera YF, & FZ, & sit FG, quę si sit æqualis dimidio PV lineę PQ est ipsũ quadratũ ex FG, quod quæritur, si maior; vt hic, iam non potest secari PQ in duo segmenta, inter quæ FG sit media proportionalis: quia erecta normaliter

liter super PQ deberet contineri intra semicirculum PLQ, cui medietas VQ est semidiameter. Vnde LV, vel æqualis FG perpendicularis maior semidiametro esse nequit, non capiet in semicirculo QLP, quamobrem non poterit Problema exequi.



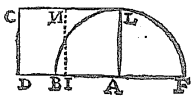
At si sit minor, vt si esset datum A sine triangulo nigro, cui æquale esset QR rectangulum, inter cuius latera media proportionalis esset FH; tunc YH esset minor medietate VI lineæ totius OI, quæ æqualis est dimidiato ambitui rectilinei dati A excluso nigro triãgulo. Quare IO posset ex 16. Tr. 15. 3ta secari in R, vt inter segmenta IR, & RO inuenta FH esset media proportionalis. Quamobrẽ rectangulũ sub segmentis RI, & RO clausum esset æquale quadrato ex FH, & consequenter rectilineo QF æquali ex 17. lib. 6. & tandem rectilineo A excluso triangulo nigro.

Est autem Isoperimetrum, quia RI, & RO medietas laterum sunt æqualia lineæ OI, quę est æqualis medietati laterum multilateri A exclusa triangulo nigro.

PROBL. VI. PROPOS. LV.

Rectangulum constituere æquale, & Isoperimetrum semicirculo, vel eius partibus.

IAm docuimus ex quadratrice, vel per numeros lineam peripheriæ æqualem inuenire, vel quasi æqualem, docebimus autem Tr. 30. rectangulũ ex semidiametro, & recta æquali semiperipheriæ esse æquale areę circuli. Vnde medietas CA erit æqualis medietati FLB quarta pars quartæ parti, & sexta sextę areę circuli erit æqualis.



Hoc autem rectangulum AC æquale dimidiato circulo est Isoperimetrum ipsi; siquidem duo latera AL, & CD sunt æqualia diametro BF latera verò AD, & LC sunt æqualia dimidio circumferentiæ, cùm vnum ex ipsis sit medietas lineæ æqualis dimidię circumferentię BLF, & cõsequenter quartę parti BL equalis. Vnde & AD, CL erit equalis circumferẽtię BLF; Sic dicas de medietate LI, & cęt. vt ex te met potes considerare.

EXPENSIO XI.

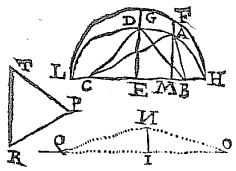
De proprietatibus figurarum Isoperimetrarum.

FIguræ Isoperimetræ id habent mirabile, quòd l. æquali ambitu cõclusę areas tamẽ inuicẽ continent inæquales, prout aut anguli, aut latera inæqualia sunt; ideoque ad arearum dignoscendas exactiùs proprietates, hęc cognitio hauriendа est.

THEOR. I. PROPOS. LVI.

Triangula Isoperimetra, quò latera magis ab æqualitate recedunt ambientia angulum verticalem, eo sunt minora, & quò magis anguli ad basim inuicem differunt.

*SInt duo triangula Isoperimetra BAC, & BDC habentia eandem basim BC. Dico primò, quòd BAC triangulũ erit minùs triangulo BDC, quia latera sunt inæqualia magis in BAC, quam in BDC.



Probatur. Quia triangula sunt Isoperimetra eadem HL mensurabit latus BA, & AC, & latus BD, & DC, quaderè ex propos. tr. 24. pr. 25. de conicis B, & C puncta foci erunt, & vertices H, A, D, I erunt in Ellipsi. Verùm in Ellipsi applicata MA, & ideo normalis est minor applicata, & normali DE; ergo altitudo MA est minor in triangulo BAC eiusdem basis, ac trianguli BDC altitudo ED, quæ est maior; quare ex I. lib. 6. Elem. Coroll. minus erit triangulum BAC, quam triangulum BDC. Quod verò altitudo MA sit minor, quàm ED, quæ sit maior.

Probatur. Quia ita est ex prop. 72. tract. 24. conic. in semicirculo HGL sinus FM ad applicatam AM, est vt sinus GE ad applicatam DE, ergo *permutando* FM ad EG erit, vt AM ad DE, quare ex 12 lib. 5. minor erit AM, quam DE; sicut minor est sinus MF, quam EG.

Probatur quoque secunda pars, quo latera opposita sunt magis inæqualia, eo anguli ad basim sunt magis inæquales, quia maiori angulo maius latus subtenditur ex 19. lib. 1. Elem. Sed iam ostensum est, quod quo latera magis inæqualia sunt, eò triãgula Isoperimetra esse minoris capacitatis. Ergo etiam quo magis anguli ad basim *sunt* inæquales; ideoque triangulum BAC erit *minus* triangulo BDC: quia anguli ABC, & ACB *sunt magis* inæquales, quam anguli DBC, & DCB, *quorum* latera subtensa minus inuicem inæquantur, quàm latera trianguli BAC. Quod, & confirmatur sequenti propos.

COROLLARIVM.

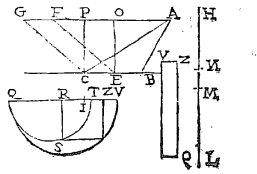
*HInc est triãgulum Isoscellũ isoperimetrum illu l esse minus, quod angulos ad basim habet magis inæquales alicui tertio; Nam accómodetur BC in Ellipsi, & sit CA, & ducatur BA: Triãgulum itaque BAC erit minoris capacitatis; quàm triangulum isoscelles, & illi isoperimetrum BDC: sed B, & A sunt æquales anguli inuicem ob æqualia crura CA, & CB, licet tertio minori C trianguli BAC maiorem proportionem dicant, & ideo magis ipsi inæquales, quam duo B, & Ç angulo D trianguli BDC. Ergo quò magis duo anguli trianguli isoperimetri sunt inæquales tertio, eò triangulum est minoris capacitatis.

Prob. etiam dę angulis, si sint acuti in isoscello triangulo, qui sc. dicunt minorem proportionem ad angulum verticalem suum, quam anguli alterius, quòd ideo minorem aream comprehendant. Nam BAC isoscelles diuidatur in duo à vertice Ç linea normali, & partes componantur secundùm latus b. cuius, vt fecimus in triangulo ONQ, cuius partes ONI, & NQI sunt triangulI BAC: Istud triangulum habebit angulos O, & Q ad basim dicentes minorem proportionem ad angulum verticalem N, quàm duo B, & C ad angulum D trianguli BDC: Et iam ostensũ est minus quo ad aream ipso triangulo BDC. Vnde colliges etiam TER. equiágulum isoperimetrum triangulo BDC, eo esse maius, & omnibus triangulis sibi isoperimetris non habentibus angulos æquales, aut latera æqualia.

THEOR. II. PROPOS. LV.

Eadem proportione figuris in Isoperimetris diminuuntur latera, qua & anguli.

PArcę. Nã eadem pars est totius ambitus sui latus pentagoni, quæ angulus pentagoni quatuor rectorum; sicut enim OM est 5. pars ambitus pentagoni MNex 50.h, sic angulus petagoni XAZ est quinta pars quatuor rectorum; Et sicut angulus exagoni est sexta pars quatuor rectorum angulorum; sic & latus figuræ præcedenti Isoperimetræ IM est sexta pars eiusdem ambitus MN.



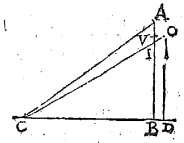
COROLLARIVM.

HInc verò deduces, & partem, quà latus malus superat minus, vt est OP, qua latus OM pentagoni superat latus PM; exagoni, habere eandem proportionem ad latus minus PM, quam angulus pentagoni superat exagoni angulum ad ipsum angulum exagoni XAZ, namque vt part. 3. Tract. 14. prop. 5. eadem pars quinta est residuum OP lateris PM; quæ est OM totius ambitus MN. Siquidem si auferas quinque sextas partes à quinque quintis residua, erunt quinque, quæ complebunt partem sextam: ideoque sicut OM est quinta pars totius MN: sic vnum residuum OP ex quinque remanentibus erit quinta pars vnius partis sextæ, & idem valet de angulis ob eandem proportionem ostensam in præced. vnde ZAT erit quinta pars anguli XAZ, & idem dicas, si medietatem tum residui ZAT, tum anguli XAZ assumas, vel si medietatem OP residui accipies, & medietatem lateris AP; eandem enim est proportio totius ad totum, quæ medietatis ad medietatem ex prop. 18. lib. 5.

THEOR. III. PROPOS. LVI.

In figuris Isoperimetris perpendicularis super vnum ex lateribus cadens, quò figura plures continet angulos, eò est maior.

*SIt latus hexagoni OD, & latus pentagoni AB Isoperimetri. Dico, quod perpẽdicularis CD est maior in exagono, quam CB in pengono. Nã si esset eiusdẽ lõgitudinis caderet in pũctũ B, & terminaret in punctum I latus exagoni Isoperimetri pentagono ad hoc, vt idem angulus ACO remaneret, quo differt angulus pentagoni ab exagoni angulo: sed id esse non potest. Nam prop 3. Tract. 19. segmentum AI habet maiorem proportionem



ad IB; quàm angulus ACO ad angulũ OCD, idest est maior AI, quam quod possit esse quinta pars lateris IB; sicut ACO est quinta pars anguli OCD; Latus verò DO Isoperimetrũ superatur à BA ex Cor. præc. vt angulus superat angulum; Nempe 5. parte ipsius DO, quæ est AV, ideoque maius erit latus BV exagoni, quàm BI. Quare, cùm non capiat à B puncto vsque ad I, debebit capere inter puncta magis remota à centro, quam B, & I V.g. inter D, & O, vbi litera anguli OCD magis dilatata sunt, & lineam longiorem OD, quam IB capere possunt. Vnde CD perpendicularis longior erit, quàm CB.

THEOR.

THEOR. IV. PROPOS. XVII.

Figurarum Isoperimetrarum ea capacior est, quæ plures angulos, & plura latera habet.

PRobatur vtendo schem. propos. 50. Ex dictis pr. 5. h. parallelogrammum factum ex dimidiato ambitu, & perpendiculari à centro super vnum latus cadente est æquale areę ipsius figuræ regularis; Quare dato eodem ambitu, & perpendiculari eadem, idem erit parallelogrammum; at si ambitus sit idem, at perpendicularis maior, erit quoque maius rectangulum, vtpote, quòd habeat latus maius: sed rectangulum factum ex dimidiato ambitu figurarum isoperimetrarum V, & A habet idem latus æquale dimidiato ambitui eiusdem longitudinis pentagoni V, & pẽtagoni A; At aliud æquale perpendiculari Ve exagoni maius, quam NA sexagoni ex præced. & ideo maius rectangulum sexagono æquale, quàm illud, quod est æquale pentagono, & consequenter maior area sexagoni A quàm pentagoni V.

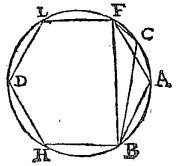
THEOR. V. PROPOS. LVIII.

Isoperimetrarum figurarum latera numero æqualia habentium maxima est æquilatera, & æquiangula.

DEtur figura ABHDLF maxima inter sibi isoperimetras. Dico eam esse æquilateram, & æquiangulam.

Prob. primò, quòd sit æquilatera. Nam si fieri potest, non sit æquilatera; sed latus BC sit maius, quàm CF, ducatur BF, & ex pr. 1. h. fiat super BF triangulũ BAF æquicrurũ, & isoperimetrũ; Illud erit maius ex prop. 1. h. Exp. triangulo BCF; addito igitur cõmuni polygono BHDLF erit figura BAFD maior, quã CFDB cõtrà pũpositũ, quòd repugnat; Ergo figura maxima inter isoperimetras sibi, & numero eodem laterũ costans erit etiam æquilatera.

Sic ostendes si exhibeantur alia latera, & dicantur non æqualia inuicem, vt BH, & HD, nam æqualia laterum semper spatia erũt maiora capacitate, quibus si addas spatium reliquum, seu latera sit numero disparia, seu paria semper conficietur spatium maius cum triangulis equicruribus maioribus, quàm cum ijs, quæ æqualia crura non possident.



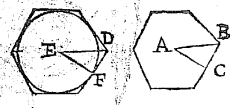
Prob. 2. pars. Nam sit aliqua figura BHLFA, in qua omnes anguli sint æquales isoperimetra alteri alicui CBHDLF, in qua sit tantũ angulus C inæqualis angulo A ducta BF; quia angulus BCF est minor angulo BAF trianguli verò BAF est isoperimetrum triangulo BCF; cum in cęteris consentiat, & figura figurę eadẽ sit; anguli ad basim erũt minores ex 17. l. 1. in triangulo BCF: quàm in triangulo BAF: quare ex Cor. prop. 54. erit triangulum BAF maioris areæ, quàm triangulum BCF. Vnde addita communi area BHDLF, erit maior figura æquiangula ABHDLF, quàm non æquiangula CBHDLF.

THEOR. VI. PROPOS. LIX.

Circulus omnibus figuris sibi Isoperimetris rectilineis maior est, sicut & quacumque Ellipsi sibi isoperimetra.

DAto circulo E, & data figura rectilinea isoperimetra A. Dico, quòd maior est circulus, quam figura data. Circumscribatur circulo figura similis totidem laterum, & ad aliquod latus ducta perpendiculari EF, & ad angulum ED constituatur rectangulũ triangulũ FDE, & idem fiat in figura A; sitque rectangulum triangulum, & illi simile ABC, vt patet, cùm figuræ sint similes, & ideo triangula æquiangula.

Probatur nunc propositio, nam figura circumscripta maior est circulo in ambitu suo, vt per se patet, ergo maior etiam est rectilineo isoperimetro A; quare recta BA erit minor, quàm DE: Sed ob similitudinem triangulorum ita est BA ad DE, vt CA ad FE, ergo minor erit CA, quàm FE. Ideoque rectangulum sub semicircumferentia circuli, & sub radio comprehensum æquale ex dicendis prop. 3. tract. 30. areę circuli maius erit, quàm quod sub semiambitu rectilinei A, & minori linea CA, quam EF, quod ex dictis propos. 4. huius est æquale areę rectilinei, ergo maior erit circulus E rectilineo A.



Probatur quoque de Ellipsi, nam Ellipsis non potest continere figuram æquiangulam, quę sit ei, quę in circulo inscribitur isoperimetra, & æqualium numero laterum.

Quapropter omnis figura circulo inscriptibilis erit maior, quam omnis figura ellipsi isoperimetrę inscriptibilis, cum sit illa æquiangula, hęc vero minimè, quapropter etiam circulus Ellipsi Isoperimetra maior erit.

COROLLARIVM I.

HInc est circulum omnibus figuris sibi isoperimetris maiorem esse, nam maior est omnibus, quę sint æquiangulę, & æquilaterę rectilineę, quę, & omnibus alijs Isoperimetris non æquiangulis, vel non laterum æqualium maiores sunt. Sic, etiam maior est circulus omni ellipsi sibi isoperimetra, ergo omnibus figuris sibi isoperimetris absolutè maior est.

CO-

COROLLARIVM II.

SEcundò colligitur ſpheram quoque capacioriem eſſe omnibus corporibus æqualis ſuperficiei tàm ſphæricis, quàm planis ſuperficiebus conſtantibus. Quandoquidem ſphæra componitur ex indefinitis circulis, aut ſaltem ex omni parte circuli trahi poſſunt. Cum ergo circuli omni figura plana iſoperimetra ſint capaciores, ſequitur quoque, quod ſolidum circulis intextum, vt ſphæra eſt, omni figura ſolida capacior ſit, Hęc autem confirmatio ſatis eſt in re per ſe admodum clara, licet ſciam Theonem, & antiquos exactiùs, & magis mathematicè probare, ſed eorum oſtenſio dependet à menſura corporum ſolidorum, quam nondum hauſimus.

TRAC-

TRACTATVS XXX.

De Transformatione Curuilineorum.

OMnia, quæ de Geodæſia plana conſiderauimus, de curuilineis quoque animaduertere oportet; quamuis eleuatior ſit contemplatio, & acrioris ingenij acumen expoſcat; neque omnino ſit perfecta; cum aliquæ, vt Hyperbola trasformari in rectilineas, vſque adhuc recuſauerint, imò nec quidem in curuilineas diuerſi generis deduci potuerint.

EXPENSIO I.

De quadratione Circuli Arithmetica.

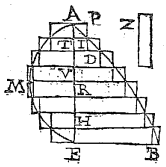
MVlti ne dum apud veteres; ſed recentiores etiam, vt teſtatur Hyeronimus Vitalis ex noſtris in ſuo Lexico mathematico in circuli Tetragoniſmum ſc. quadrationem totis viribus incubuere, & quidem apud antiquos Antiphon, Bryſo, Hyppocrates Chius. Inter Neotericos autẽ Orontius Finæus, Campanus, Nicolaus Cardinalis Cuſanus, deſudarũt. Sed ceteris ſublimus Ambroſius à S. Vincentio in inſigni opere, quod de Quadratura circuli inſcripſit totam penè ętatem conſumpſit. Sed licet multa conſequutus fuerit omnino admiratione digna; tamen ſcopum aſſequutus nõ eſt. Nam eius quadraturas (quatuor enim protulit l. 10. de quadratura circuli inſcripto) impugnat Vincentius Leutaudus præter multos alios, & euidentiùs deijcit, & licet Franciſcus Xauerius Ayſcon authorem propugnet. Id tamẽ libro Lugduni impreſſo anno 1663. nouę impugnationi eidem Leutaudo locum dedit. Vnde ſatiùs iudicaui antiquam quadraturam Archimedeam approximantem veritati proponere, quàm nouum tetragoniſmum, & laborioſiſſimum, & adhuc ſub lite verſantem producere.

THEOR. I. PROPOS. I.

Cuicumque figuræ curuilineæ, ſeu mixtilineæ poſſunt tot rectangula inſcribi, aut circumſcribi, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem.

SIt data figura plana ABE, quę ſit aut curuilinea, aut mixta. Dico tot rectangula poſſe, vel inſcribi, vel circumſcribi, vt, quod inter figuram curuilineam, vel mixtilineam, & rectangula ſuperficiei remanet, & intereipitur, ſit qualibet quantitate plana V. g. aſſignata Z minus.

Ducta AE hęc diuidatur taliter, vt maximum rectangulum, quod fit ex eius partibus, & maxima linea ei perpendiculariter inſiſtente, vt BE, vel RM ſit minus quantitate Z data, & cętera omnia rectangula ſimul ſumpta relinquẽt inter ſe, & figuram cui inſcribuntur, vel circumſcribuntur quantitatem data Z minorem.



Probatur, Relinquunt inſcripta paulò magis, quàm medietatẽ rectangulorum AI, & ID, & cęt. circũſcripta verò AI, & ID paulo minus ob lineam curuã, & globoſam (è contra de concaua eſſe aſſerendum) ſed omnia rectangula IA, ID, & cętera curuam intercipientia ęquant BH vt patet, ergo ſpatia, quę remanent, vt AIT, vel IAP, & cętera omnia triangula mixtilinea concluſa inter curuam, & rectangula inſcripta, quod ſint minus quaſi ſub duplo, quam rectangula AI, & ID curuam ſtipantia ęqualia rectangulo BH ęquanti planitiem Z ſunt minus, quam planities Z. Quod autem rectangula AI, & ID ſtipantia curuam AIB æquent rectangulum BH patet ex 3. lib. 2. Elem. cum TI, & cæterę ſint partes ipſius EB, & TA, & ID, & cæteræ ſint omnes æquales ex hypothe ipſi EH.

THEOR.

THEOR. II. PROPOS. II.

Figura quælibet circulo circumscripta maiorem obtinet ambitum, quàm circulus, sicut, & figura inscripta minorem.

LIcet pressiùs hanc propos. ostendat Archimedes lib. 1. de sphæra: nobis tamen ex communi conceptu eam probare satis erit. Circumscripta figura continet circulum. Ergo, cùm ex communi hominum sensu sit maius continens, quàm contentum, erit maior ambitus continentis multilateri, quàm contenti circuli.

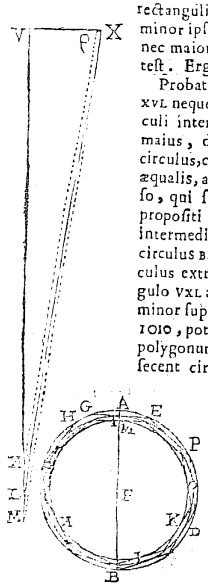
Probatur quoque secunda pars. Nam si circulus contineat multilaterum inscriptum ex eodem principio erit maior circulus, quàm inscripta figura.

THEOR. III. PROPOS. III.

Area cuiuslibet circuli æqualis est rectangulo triangulo ex linea recta æquali circumferentiæ, tamquam uno crure, & semidiametro tamquam altero crure confecto.

SIt circulus 1010 intermedius, & supponatur factum triangulum rectangulum XVL, cuius crus VL sit æquale ipsius circuli peripheriæ, & VX semidiametro. Dico hanc rectanguli aream esse æqualem areæ circuli 1010.

Probatur. Nam, si non est æqualis erit area rectanguli VXL, aut maior, aut minor ipsa circuli planitie: Sed nec maior, nec minor esse potest. Ergo erit æqualis.



Probatur. Quòd triangulum XVL nequeat esse maius area circuli intermedij. Nam, si est maius, dabitur itaque aliquis circulus, cuius area, aut illi erit æqualis, aut proximè minor ipso, qui superet aream circuli propositi 1010, & sit aliquid intermedium. Sit itaque iste circulus BDAH: Quia itaq; circulus extrinsecus BDAH rectángulo VXL æqualis, vel proximè minor superat circulum datum 1010, poterit in ipso inscribi polygonum, cuius latera non secent circuli Interioris 1010 peripheriam. Sed ad summùm tangãt. Quod fiet si ducto radio FI, tãgens ei erigatur in I, quæ sit EG; ductis enim ei æqualibus EP, &c. æquales circũferẽtias abscidẽt; ex 32. l. 3. donec aut minor circũferentia remaneat, aut æqualis HG; si æqualis tanget ducta linea HG; si minor saltem non tanget.

Confecto itaq; polygono HPDB; erit vt polygonum comprehendes maior eius ambitus, quàm circumferentia circuli 1010, quam claudit: Quãobrẽ, si fiat huic polygono triangulũ XYM rectãgulum æquale ex propos. 5. Trac. præc. linea YM omnibus cruribus polygoni HPDB æqualis, erit maior, quàm VL, equalis peripheriæ medij circuli 1010 Quare etiam triangulum YXM erit maius, quàm triangulum VXL. Verùm triangulum VXL est æquale; vel maius circulo exteriori BDA (siquidem cum dicerent aduersarij triãgulum VXL esse maius, quàm circuli planities 1010 circulũ BDA præsupposuimus triangulo illi VXL, aut æqualem, aut minorem) Cùm ergo triangulum VXL sit, vel æquale, vel maius circulo exteriori BDA; iste circulus exterior BDA, remaneret minor ipso triãgulo VX, quod etiam minus est triangulo VXM, vt ostensum est: at VXM factũ est æquale poligono HEPDB, ergo circulus exterior BDA esset minor, vel æqualis Polygono HEPDB; quod in se concludit, quòd est absurdum.

Probatur deinde. Quòd triangulum prædictum VXL non possit esse minus, quàm superficies circuli propositi 1010: Quoniam, si est minus, dabitur aliquis circulus intermedius, aut æqualis, aut maior prædicto rectangulo VXL. Sed tamen non excedens circulum datum 1010. Detur MKN, & illi circumscribatur polygonum; cuius latera in circulo dato 1010 comprehendantur, vt supra docuimus efficere, erit itaque area huius polygoni minor area circuli dati 0101 circumscribentis. Vnde si fiat rectangulum æquale ex NKM ambitu polygoni, vt supra prop. 5. prec. Tr. vt est QVN, hoc erit minus rectangulo triangulo VXL, vtpote crure minori VQ æquali perpendiculari FM, & VN ambitu polygoni inscripti. Cùm ergo triangulũ VXL maius sit triãgulo VQN, etiam circulus internus MKN, qui est maior ex aduersarijs, vel æqualis triãgulo VXL (siquidẽ cũ afferent VXL esse minus circulo 1010 circulũ XKN fecimus, aut maiorẽ proximè, aut æqualẽ ipsi triãgulo VXL) Circulus inquã internus MKN erit maior; quã Polygonũ, à quo circumscribitur, cũ polygono illi triãgulũ VQN si æquale, & minus triangulo VXL, qui internus prædictus circulus KNM, aut maior est, aut ipsi æqualis ex suppositione. Hoc autem esse nequit, nempe quod internus circulus comprehensus sit æqualis Polygono, à quo circumscribitur.

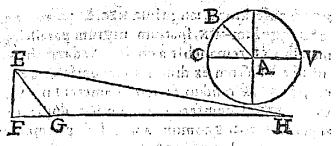
Cum ergo triangulum VXM, nec minus esse possit, nec maius circuli dati 0101 planitie, oportebit fateri; quòd illi æquetur.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si detur triangulum, cuius altitudo sit radius, & basis portioni peripheriæ æqualis subtendenti sectorem, hoc erit sectori æquale.

EXibeatur sector ABC, in circulo BCV & trianguli FEG crus FE radio AC æquetur, & basis FG æquetur arcui sectoris CB. Dico *triangulum* EFG *æquale esse sectori* ABC.

Probatur. Nam sit FH æqualis peripheriæ toti. Erit itaque, vt arcus CB ad circulum: sic basis FG ad basim FH cùm ex propos. 7. lib. 5. æqualium ad equales sit eadem proportio. Verùm ex prop. 39. lib. 6. vt arcus CB est ad peripheriam CBVC, ita sector ACB est ad superficiem totius circuli, & ex 1. lib. 6. vt basis GF ad basim FH, ita EFG triangulum



gulum eiusdem altitudinis FEG ad triangulum FEH. Ergo ex 16. lib 5. ita erit sectoris planities ACB ad planũ circulic BV, vt trianguli FEG ad planitiẽ trianguli EFH, *& permutando*. Ita erit ACB sector ad FEG triangulum, vt circulus CBV ad triangulũ EFH: sed circulus, & triangulum in præced. ostensa sunt æqualia: ergo etiam sector ACB, & triangulum FEG æquabuntur: quare, & rectangulum ex dimidio, vel radio, vel linea æquali dimidio arcui erit ex 39. æquale sectori ACB.

PROBL. I. PROPOS. V.

Aream circuli ex data diametro, & circumferentia proximè inuenire.

CVm ex ostensis propos. 3. Tract. 16. inuenerimus circumferentiam ad diametrum se habere vt 22. ad 7. quæ tamen verâ paulò maior est. Hinc si accipiamus 7. pro diametro, & 22. pro circumferentia, mutuâ horum numerorum multiplicatione efficiemus rectangulum, seu planum 154. cuius medietas 77. ex propos. 40. lib. 1. Elem. erit æqualis triangulo rectangulo XVL; de quo iam ostendimus prop. 1. areę circuli, æquale esse.

Si verò placeat aream rectanguli verâ circuli planitie minorem insensibiliter. Accipies diametro vere circumferentiam habentem minorem proportionem: quam 22. ad 7. nimirum eam, quam prop. 5. tract. 18. explicauimus, in qua posito diametro partium 71. circumferentia erit 223. nimirum in proportione tripla super decupartiente septuagesimas primas; idest comprehendet diametrum ter, & ferè septimam ipsius partem deficiente tantùm $\frac{1}{7}$ vnius vnitatis. Et ita vt priùs multiplicatus circulus KNM, aut maior est, aut ipsi æqualis ex suppositione. Hoc autem esse nequit, nempe quod internus circulus comprehensus sit æqualis Polygono, à quo circumscribitur.

Cum ergo triangulum VXM, nec minus esse possit, nec maius circuli dati 0101 planitie, oportebit fateri; quòd illi æquetur.

THEOR. IV. PROP. IV.

Si detur triangulum, cuius altitudo sit radius, & basis portioni peripheriæ æqualis subtendenti sectorem, hoc erit sectori æquale.

EXibeatur sector ABC, in circulo BCV & trianguli FEG crus FE radio AC æquetur, & basis FG æquetur arcui sectoris CB. Dico *triangulum* EFG *æquale esse sectori* ABC.

Probatur. Nam sit FH æqualis peripheriæ toti. Erit itaque, vt arcus CB ad circulum: sic basis FG ad basim FH cùm ex propos. 7. lib. 5. æqualium ad equales sit eadem proportio. Verùm ex prop. 39. lib. 6. vt arcus CB est ad peripheriam CBVC, ita sector ACB est ad superficiem totius circuli, & ex 1. lib. 6. vt basis GF ad basim FH, ita EFG triangulum eiusdem altitudinis FEG ad triangulum FEH. Ergo ex 16. lib 5. ita erit sectoris planities ACB ad planũ circulic BV, vt trianguli FEG ad planitiẽ trianguli EFH, *& permutando*. Ita erit ACB sector ad FEG triangulum, vt circulus CBV ad triangulũ EFH: sed circulus, & triangulum in præced. ostensa sunt æqualia: ergo etiam sector ACB, & triangulum FEG æquabuntur: quare, & rectangulum ex dimidio, vel radio, vel linea æquali dimidio arcui erit ex 39. æquale sectori ACB.

PROBL. I. PROPOS. V.

Aream circuli ex data diametro, & circumferentia proximè inuenire.

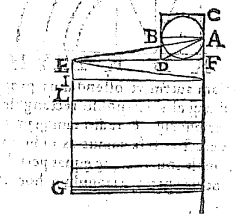
CVm ex ostensis propos. 3. Tract. 16. inuenerimus circumferentiam ad diametrum se habere vt 22. ad 7. quæ tamen verâ paulò maior est. Hinc si accipiamus 7. pro diametro, & 22. pro circumferentia, mutuâ horum numerorum multiplicatione efficiemus rectangulum, seu planum 154. cuius medietas 77. ex propos. 40. lib. 1. Elem. erit æqualis triangulo rectangulo XVL; de quo iam ostendimus prop. 1. areę circuli, æquale esse.

Si verò placeat aream rectanguli verâ circuli planitie minorem insensibiliter. Accipies diametro vere circumferentiam habentem minorem proportionem: quam 22. ad 7. nimirum eam, quam prop. 5. tract. 18. explicauimus, in qua posito diametro partium 71. circumferentia erit 223. nimirum in proportione tripla super decupartiente septuagesimas primas; idest comprehendet diametrum ter, & ferè septimam ipsius partem deficiente tantùm $\frac{1}{7}$ vnius vnitatis. Et ita vt priùs multiplicatus diameter 71. per circumferentiam 223. efficiet aream 15833. quę bifariam diuisa erit 7916. $\frac{1}{2}$ circuli planities.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Area circuli proportionem eam consequitur ad quadratum diametri, quam 11. ad 14. proximè.

SIt circulus, cuius diameter AB, eiusque quadratum CD. Dico aream circuli veluti 11. ad 14. ad quadratum diametri respondere.



* Dimidium quadrati CD erit AD, & quarta pars eius erit triangulum FAD. Prolungetur diameter FD in E, atque FE æqualis circumferentiæ præsupponatur, & ducatur AE. Itaque triangulum FAE erit eiusdem altitudinis, ac triangulum FAD, quod est quarta pars quadrati ex diametro. Quamobrem ita erit triangulum FAE ad triangulum FAD, nempe ad quartam partem quadrati CD, vt basis FE ad basim ED ex 1. lib. 6. Elem. quæ est proximè, vt 22. ad 7. Quare erit triangulum FAE, æquale areæ circuli ex 3. h. ad FAD æquale quartæ parti quadrati CD proximè, vt 22 ad 7. quare FAE triangulum ad quadratum totum quater maius CD erit vt 22. ad numerum quater maiorem 28. quę est eadem proportio, quæ 11. ad 14.

PROBL. II. PROPOS. VII.

Ex diametro noto aream circuli proximè inuenire.

SIt notus diameter Partium 84. quadretur hic numerus, & fit 7056. Vtendò itaque regula aurea fiat, vt 14. ad 11. sic 7056. ad aliud, & exeret area circuli 5544.

THEOR. VI. PROPOS. VIII.

Quadratum circumferentiæ se habet ad aream circuli, vt 88. ad 7.

*PRobatur. Nam posito FE part. 22 in figura prop. 6. antec. nempe æquali proximè ei cũferentiæ, & posito diametro partium 7. si fiat quadratum ex FE circumferentia continebit sex rectangula dupla AFE ex 3. lib 2. Elem. & insuper rectangulum nigrum ex septima parte confectum: Nam 22. continet ter diametrum partium 7. & ideo sexies semidiametrum partium 3 $\frac{1}{2}$, & addit insuper septimam partem diametri, nempe $\frac{1}{7}$ semidiametri: Quare rectangulum FI ex circumferentia FE, & semidiametro FA erectum, erit duplò maius, quàm triangulum FAE proximè æquale areæ circuli. Propterea quadratum FG ex circumferentia continebit duodecies aream circuli, & insuper parallelogrammum nigrum, quod est septima pars rectanguli EL sub toto diametro EL, & tota circumferentia FE comprehensi, at $\frac{1}{7}$ dimidij rectanguli FI, & ideo $\frac{1}{7}$ trianguli FAE: Si itaque ad vitandas fractiones efficiamus aream circuli, vel triangulum ei proximè æquale FAE esse partium 7. totum quadratum FG duodecies maius erit, cum quatuor septimis partibus, nempe cum rectangulo nigro part. 88. Nam 7 duodecies acceptus facit 84. & $\frac{4}{7}$ additi efficiunt 88. & ideo quadratum FG erit partium 88. posita area diametri partium 7.

PROBL. III. PROPOS. IX.

Aream circuli proximè inuenire.

FIat, vt 88. ad 7. ita quadratum circumferentiæ 254. ad aliud, & adhibita regula proportionum elicietur numerus 5544. pro area circuli quæsiti.

PROBL. IV. PROPOS. X.

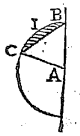
Datæ sectoris peripheria, & cruribus, eius aream adinuenire.

SIt, vt in pr.4. sector ABC, cuius AC crus totũ sit partium 25. pedum, & arcus BC 10. pedum, Ideoque ex prop. 4. huius triangulum rectangulum EFC, cuius crus FE sit 25. pedum, & basis FG 10. pedum erit ei æquale. Quaderè si mutua multiplicatione fiat rectangulum partium 250. & medietas sumatur partium 125. hęc erit sectoris arealis quæsita quantitas.

PROBL. VI. PROPOS. XI.

Cognito sectore, & chorda cognoscere aream segmenti circuli.

SIt segmentum circuli nigrum BIC, deturque chorda BC, & cognitus quoque sector BACI;

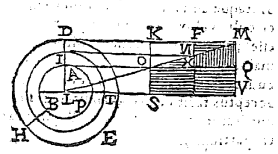


Debet priùs per ea, quæ prop.16. Tract.29. triangulum BAC cognosci. A sectore itaque subductum triangulum CBA relinquet segmentum nigrum ICB.

PROBL. VII. PROPOS. XII.

Annulum planum in quadratum redigere, & mensurare.

DEtur annulus DEHAPB planus, cuius notus sit circulus medius ITI, vt faciliter ex nota diametro inuenìri potest: multiplicetur hic circulus per residuum semidiametri AD subducto diametro minori LA, & productum erit area prædicti annuli DEHAPB.



* Prob. Nam fiant parallelogrãma LM, LN, & LO æqualia singulis circulis DEH, ITI, & BAP; quæ ob latera æqualia semicircumferentijs erunt similia, cùm sit ita radius vnius circuli ad radium alterius vt peripheria ad peripheriã ex pr.39 l.6. El. & ex 25 l.6. ideo triangula circa diametrum cõsistentia ex prop.35.lib.1. Elem. MOR, & MOQ, necnon, & complementa OD, & OV erunt æqualia: si autem spatio MXOQ auferatur triangulum NXO, & addatur æquale triangulum MFN, spatium nigrum parallelogrãmo albo XD remanebit æquale. Sed rectangulum istud est factum ex dimidia circumferẽtia circuli medij ITI, & residuo AD semidiametri ID. Quare ex integra circumferentia, cùm fiat duplo maius æquabitur toti gnomoni AMS: sed gnomon AMS æquatur annulo DEH, APB. Ergo etiam duplum rectangulum XD, quod fit ex peripheria ITI, & segmento AD æquabit annulum DEHABP.

Quod autem gnomon AMS æquet annulum patet. Nam rectangulum OAS æquat circulum BAP. Totum autem rectangulum LM æquat totum circulum DEH. Ergo subductus ab æqualibus rectangulum LO ab LM, & minimus circulus à toto circulo restabit annulus DEHPBA, & gnomon AMS residua æqualia.

COROLLARIVM.

HInc quoque agnosces partem annuli dimetiri. Nam sicut tota annuli media peripheria ITI cum residuo diametri AD multiplicata dat totum annulum; sic pars IT peripheriæ eiusdem mediæ cum eodem diametri residuo AD multiplicata partem annuli ADT, quem metitur, producet.

EXPENSIO II.

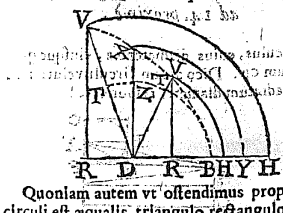
De Quadratione Circuli Geometrica.

FAciliori modo quadrationem circuli operi demandabimus mediante quadratrice, quam descripsimus tract.18. de flexis ex prop.14. vnde sit,

THEOR I. PROPOS. XIII.

Circuli areæ æquale triangulum parallelogrammumque, & quadratum constituere.

COrollario 1. propos.10. tract.18. cit. probauimus DB sagittam ad $\frac{1}{4}$ radium esse, vt radius ad quadrantem XY, si in quadrante XY circuli propositi quadrandi describamus quadratricem; obtinebimus quoque sagittam DB illius. Quamobrem, si sagittę inuentę DB, & radio XD tertiam proportionem inueniamus, hęc erit equalis quadranti XY, quam quadruplicabimus, & totum ambitum circuli, cuius radius XD æquabit.



Quoniam autem vt ostendimus prop.2.h. area circuli est æqualis triangulo rectangulo ex linea æquali peripherię, & radio tamquam ex duobus lateribus erecto: si faciamus ex radio DX, & tertia proportionali inuenta, quę æquat peripheriam circuli XY totius; patet triangulum hoc esse æquale areę

areę circuli, cuius quadrans DXY. Quod si ex dimidio prædictę lineę inuentę, quę æquat peripheriam constituatur rectangulum parallelogrammum, cùm hoc sit æquale triangulo prędicto, erit quoque æquale areę ipsius circuli; cum vt prediximus prop. 23 tract. preced. hoc modo triangulum in rectangulum æquale conuertatur.

Tandem parallelogrammum commutetur in æquale quadratum, vel ex prop.14.l.2. vel reperiendo inter eius latera mediam proportionalem. Nam quadratum ex hac media erectum cum sit æquale parallelogrammo consequenter etiam circulo æquabitur.

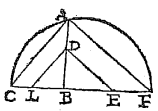
Vnus autem circulus in quadratum redactus multos alios similiter quadrabit. Quandoquidem si offeratur alius circulus similiter redigendus ad quadratum. Inueniatur quarta linea proportionalis istis tribus, nempe diametro circuli, & rectę equali eius circumferentię ex linea quadratrice iam notæ, & diametro circuli propositi ex propos. 12. lib.6. & inuenietur linea equalis peripherię circuli oblati; siquidem ex prop.33. lib.6. ita diameter est ad diametrum, vt peripheria cuiuscumq; circuli ad alius peripheriam. Si itaque hac quarta proportionali inuenta, & semidiametro circuli alterius propositi constituamus triangulum, hoc erit equale alterius circuli propositi areę, quod, & redigemus in rectangulum, & in quadratum equale, quę consequenter ipsa quoque aream circuli exequabunt.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Quadratum in circulum æqualem transfundere.

OPortet priùs inuenisse aliquod quadratum equale alicui circulo ex prop. preced. cuius circuli radius notus sit. Deinde inueniatur tribus quadrati lateri, & circuli ei equalis iam noti radio, & tandem lateri quadrati in circulum transfundendi quarta proportionalis ex prop.12.lib.6. & hęc erit diameter circuli equalis quadrati.

Detur itaque Ex. g. latus quadrati AB, & diameter notus circuli ei equalis BC, & latus quadrati trasmutandi BD. Ducta parallela DL. Linea D L erit diameter circuli trasmutandi, qui cõsequetur aream equalem quadrato ex BD.



Probatur. Nam sit nota BF semicircumferentię prehabiti noti circuli equalis, nempe tertia proportionatis duabus BC, & BA, talis enim prop.13. huius ostensa est, cum in fine illius fuit dictum, quòd latus quadrati circulo equalis sit medium proportionale inter lineam equalẽ semicircumferentię eius, & radium, cum sit æquale rectangulo ab illis extremis comprehenso, & ideo FB tertia proportionalis. Iungatur deinde FA, quę claudet cum AC, vt patet ex Coroll. prop.13.l.6. angulum rectum, cùm sit BC radius ad BA latus quadrati, vt BA ad BF semiperipheriã, deinde à puncto D ducatur DE parallela ipsi AF quibus positis.

Probatur prop. Nam quia est ob similitudinem triangulorum FB ad BA, vt EB ad BD, & vt BA ad BC ita DB ad BL; erit ex *æquo* eadem proportio FB ad BC, vt EB ad BL; quadere ex 43.l.6. DE erit equalis circuli semicircũferentię, cuius semidiameter sit BL. Sicut FB est equalis circuli semiperipherię, cuius radius BC. Et quia quadratum DB est equale rectangulo ex linea EB equali peripherię, & BL radio; Etiam BD quadratum erit equale circulo, cui radius BL, illi rectangulo ex BE, & BL equali.

PRORL. II. PROPOS. XV.

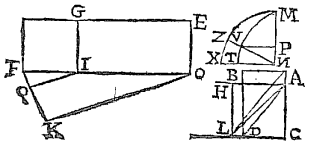
Dato sectori inuenire rectangulum æquale cognita proportione arcus subtensi ad circulum.

QVoniam ex propos. 4. huius. Rectangulum sub linea dimidio arcui æquali, & sub radio comprehensum est æquale sectori, si detur eius proportio ad circulum V.g. quòd octaua pars, accipietur octaua pars lineę rectę equalis peripheriæ inuentæ, & ex huius dimidio, & ex radio rectangulum constituetur. Nam dimidium octauæ partis lineæ æqualis peripherię erit æquale dimidio octauæ partis peripheriæ. Vnde rectangulum quoque erit equale sectori.

PROBL. III. PROPOS. XVI.

Dato rectangulo circulo æquale constituere eius sectorem æqualem dato rectangulo minori.

* DEtur rectangulũ EF, æquale areę circuli sub FO semiperipheria, & sub radio OE cõprehensum, & rectangulum ACBD, cõminus, cui queritur sector equalis. Si non est eiusdem altitudinis, ac EF, redigatur ad eandem altitudinem, ex prop.6. part. 1. huius, & sit CH. Mensuretur deinde eius latus CL in latere FI. & ducta CL, erit parallelogrammũ GF equale ipsi CH, & cõsequenter CB parallelogrammo. Deinde ex pr.10.l.6.Elem. secetur OE, vel FK diameter iuxta proportionem, quam habet FI ad OF, & sit eadem proportio FQ ad QK; Radio itaque FK sectum fiat quadrans MNX in quo inscribatur quadratrix MVT, qui quadrans erit quarta pars parallelogrammi EF, cum sit quarta pars circuli æqualis.



Translata itaque FQ in PN ducatur ad quadratricem MVT parallela PV basi NT, & & per V à centro N ducatur radius NZ. Dico quadruplum sectoris NXZ esse equale parallelogrammo ABCD.

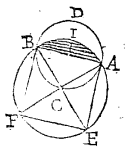
Prob. Nam vt sector NZX, est ad quadrantẽ MNX ita est arcus XZ ad quadrãtis ambitũ XZM ex 30.l.6 vt autẽ arcus XZ ad XZM quadrantem, sic portio NP ad radiũ NM ex 18. Tr.18. & FQ ad QK, & FI ad FO, ex effect. & rectangulũ cũ sit eiusdẽ altitudinis ex I.

lb.6. FG ad FE: Igitur ex 16. lib.5. Elem. vt est sector XZN ad quadrantem XNM, ita est rectangulum FG ad rectangulum FE; sed quadruplum quadrantis XZM, & rectangulum FE sunt æqualia. Ergo etiam ex prop.12. l.5. Elem. sectoris NZX quadruplum, & rectangulum FG erunt æqualia.

PROBL. IV. PROPOS. XVII.

Triangulum Lunulæ exhibere æquale.

Vit hic nixus, quò Hyppocrates Chyus ad quadrationem circuli peruenire putauit; fiat itaque circulus ACBD, & ducto diametro AB, & quadrati lateribus AC, & CB, alius circulus fiat radio CB, & relinquet in antedicti circulo ACBD lunulam AIDB, quam dico esse æqualem triangulo ACB.



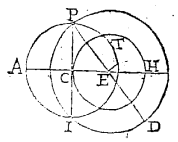
Probatur. Quoniam quadratum ex EB est duplum quadrati ex AB circulus quoque EABF erit duplus circuli ACBD ex prop.41.lib.6. & ex prop.39. semicirculus semicirculo, & quadrans quadrante duplus erit; Si ergo quadrans circuli minoris dupletur, & fiat semicirculus ADB, is erit æqualis quadranti ACB: Dempto igitur communi spatio nigro AIB inter vtrosq; interceptо, erit Lunula AIDB triangulo ACB æqualis.

PROBL. V. PROPOS. XVIII.

Dato circulo annulum planum æqualem exhibere, cuius magnitudinis placeat: Et data annuli latitudine, & diametro circulum annulo æqualem facere.

Sit datus circulus APTI cuius centrum C, & dato semidiametro annuli describendi EP, qui vt patet debet esse maior semidiametro PC dati circuli, à quo erigatur perpendicularis à centro C, quæ fit radius CA. & centro P ad interuallum dati diametri EP describatur arcus, qui secet AE in E; ibiq; facto centro describatur EP radio circulus, & eodem centro E interuallo EC alius circulus describatur, *quem aio includere annulum* CHDIP *æqualem circulo* APTI.

Probatur. Nam vt sunt quadrata ex diametris, ita circuli ex prop. 40. lib.6. Cum ergo ex 11. lib. 2. quadratum PE sit æquale duobus quadratis ex CP, & CE etiam erit æqualis circulus ex EP duobus circulis ex CP & CE. Ergo etiam circulus PD erit æqualis duobus circulis ex PE



diametro, & CH diametro, cùm sint dupla circulorũ super semidiametros CE, & CP, & circulus quoque PD duplus circuli ex PE semidiametro. Quare cum circulus ex PD, vt diametro æquet circulos ex IP; & CH diametris, ablato CH communi obtinebimus annulum CPHDI æqualem circulo APTI.

Quod si detur annulus CPHD, & desideres huic annulo adinuenire circulum æqualem primò ex propos.19.l.3. duces tangentem PCI interiori circulo CTH vsque dum secet extrinsecum PDI, quam bifariam diuides, & produces AE, factoque centro in puncto contactus C interuallo CP describes circulum; eritque circulus æqualis annulo dato CP HD, vt patet ex præc. ostensione.

COROLLARIVM.

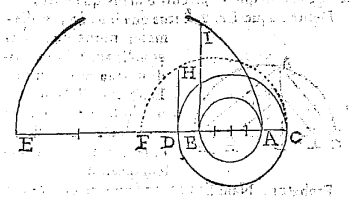
Hinc discs plurimos circulos in vnum aggregare. Siquidem ex preced. circulus PDI equatur circulis API, & CTH. Vnde sic eidem PID alium poteris aggregare; succedetque alios vsque dum placeat.

PROBL. XI. PROP. XIX.

Circulos proportionaliter augere, vel minuere.

Efficies quadratum ex prop.28. Tract.29. V.g. duplum, vel triplum alterius, describesque circulos super eorum latera, tamquam diametris, obtinebisque circulos in data proportione tripla V.g. maiores. Sit circulus AB augendus, ita vt ad circulum maiorem se habeat vt 1. ad 3. Sit rectangulum ex AB, & BE triplo maius, quam quadratum AB, quod fit assumendo latus BE triplò maius. Nam cum sint eiusdem altitudinis se referent, vt bases AB, & BE ex 1. lib.6. Deinde inter AB, & BE reperiatur media proportionalis BI, & quadratum ex BI æquabitur rectangulo AB, & BE triplo maiori; quam quadratum ex AB constituatur, ergo circulus ex IB, vel æquali CD, & erit intentum.

Si verò oporteat diminuere sit circulus CD minuendus, diuidaturq; latus CD in tres partes, & sit FD æqualis tertiæ partis ita vt se habeat rectangulum ex CD, & FD tertia parte ad quadratum FD, vt 3. ad 1. interque totam diametrũ CD, & tertiam partem DF sit media proportionalis DH, & circulus ex DH, tamquam diametro factus erit ⅓ circuli ex CD



Patet, quia circuli ita se habent in proportione, vt ex diametris quadrata ex 39. lib.6. ideoque se habebunt ad inuicem, vt quadratum ex CD ad quadratum ex AB; sed quadratum ex CD ad quadratum ex AB se habet, vt rectangulum AB, & BE ad quadratum AB ex constructione, nimirum, vt 3. ad 1. ergo etiam circuli ex 10. lib.6. se habebunt, vt 3. ad 1.

EXPEN-

EXPENSIO III.

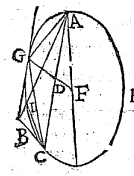
De Ellipsium tum inuicem, tum in alias figuras transmutatione.

Transformatio Ellipsium non minus vtilis; quam necessaria est, cum enim ipsius vsus sit apud homines communissimus ipsius quoque mensuratio multories, ne dum opportuna erit, sed & perneccssaria: iureque succedit circulo, cùm sit quoad figuram valdè ei proxima, & ferè in omnibus proprietatibus suis illum imitetur.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Triangulum maximum Ellipsi inscribere.

Sit Ellipsis ACE, & eius segmentum CGA, sitq; inscribendum maximum triangulum, quòd in eo inscribi queat. Ex centro F per medium D lineę CA ducatur diameter GF, & compleatur triangulum CAG, quod erit maximum.

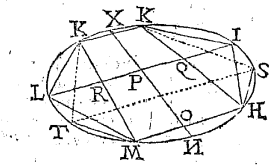


Probatur CD, & CA cum ex effectione sint æquales sunt applicatę, & GF diameter def.11. Tract.24. quare ducta BG contingente in G, hæc erit parallela lineæ CA ex prop. 28. & Tr.24 Si ergo CGA triangulum maximum non est, assignetur aliquod maius & sit CIA; producaturque IA in B ad contingentem BG, & ducatur CB. Erit igitur triangulum CBA æquale triangulo CAG ex propos.39.lib.1. Coroll. Ergo CIA erit minus, quàm CAG, quod ponebatur æquale. Ergo non dabitur triangulum maius, quàm CGA.

THEOR. I. PROPOS. XXI.

* *Omnia triangula, quę super bases nectętes diametrum aliquem cum applicatis, vel applicatas ad idem punctum, nec non, & vertices in applicatis similiter obtineant, inter se sunt æqualia.*

Sint HK, & KM nectętes verticem diametri X, vel applicatarum KK cùm applicatis OM, & OH ad idem punctum O, verticesque earum sint in applicatis PI, & PL ad idem punctum P. Dico hæc triangula HIK, & KLM esse æqualia.



Probatur. Nam PL, & PI applicatę sunt æquales; Quare subductis æqualibus QP, & PR, remanebunt bases æquales IQ, & RL: Quare triangula in eundem vertigem X, vel in parallelam KK desinentia IQX, & KKL erunt æqualia: Sic, & triangula IQH, & RML, vtpote inter parallelas HM, & IL. Vnde tota triãgula HIK, & KLM erunt æqualia.

Quod autem QP, & RR sint æquales, patet. Quia KK, & HM sunt parallelę; & ideo cum HO, & OM sint æquales, & KX, & KX ex prop 13.Cor. tract. 29. erunt etiam RP, & PQ æquales, vel si in eundem verticem terminent ex prop.4. Cor.2. lib.6.

COROLLARIVM.

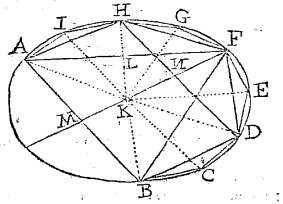
Hinc euenit, quòd si triangulum, & taliter affigoatis sit maximum, vt KLM, quòd etiam aliud HIK erit maximum. Nam si non est, sit puntactum triangulum maximum HSK, & ducatur ST parallela HM, & constituatur triangulum punctatum MKT, quod erit minus triangulo MLK: quod ponitur maximum: sed hoc est æquale triangulo HIK ex præced. Ergo triangulum HIK maius erit punctato KMT: quare contra hypothesim, & maius punctato HSK ipsi æquali ex preced. quod est absurdum cum SHK ab aduersarijs statuatur maximum, quod in segmento HIK capere possit.

THEOR. II. PROPOS. XXII.

Segmenta Ellipsium, in quibus capiant maxima triangula æqualia, inter se sunt æqualia.

Sint duo segmenta FHA, & FDB Ellipsis AF FB in quibus capiant triangula maxima æqualia FDB, & FHA. Dico ea esse æqualia.

* Probatur. Nam KH erit diameter, & LA, & LF applicatę, & bases FH, & HA nectentes diametrum HK; quæ bifariam diametris, KI, & KG diuisæ constituent triãgula maxima: ideoq; ex præc. FGH, & HIA erunt æqualia.



Sic si connectatur D, & H recta DH nectens erit parallela lineæ BA ex præced. quare HN, & ND erunt applicatæ. Vnde bases DF, & FH nectentes diametrum KF, & applicatas DN, & NH diuisæ bifariam diametris KG, & KE substernent triangula maxima, & ex præc. æqualia HGE, & FED. Sicque erũt quoq; æqualia triãgula BCD, & DEF; & sic probabis si alia triãgula in residuis rursùs inscribas in infinitum.

Si ergo inscribantur omnia triangula maxima in segmentis BDF, & FHA, quæ inscriptibilia sunt omne spatium occubabunt segmentorum ellipticorum FHA, & BDF; alioquin, si aliquid remaneret, non omnis triangulorum inscriptibilis multitudo inscripta fuisset: sed omnia triangula inscriptibilia remanent semper æqualia; Ergo & spatium

OMNE,

omne, quòd occupant, segmenti huius elliptici FHA æquatur alteri FDB ab æqualibus numero, & extensione triangulis occupato.

THEOR. III. PROP. XXII.

Sectores æqualibus segmentis Ellipticis insistentes inter se sunt æquales.

INspiciatur figura præcedens triangula MKA, & BKM: sicut, & BLM, & MAF sunt æqualia ob æquales bases BM, & MA, cum desinant in eundem verticem K, & F. Ablatis itaque triangulis BMK, & MKA erunt æqualia triangula BKF, & FKA; additis itaque æqualibus segmentis ex Thesi BDF, & FHA erunt æquales sectores FKAH, & KBDF.

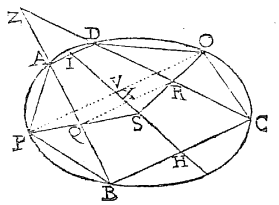
Vnde etiam ceteri erunt æquales sectores BKDC, & AKHI, vtpote dimidia æqualium, & sic de reliquis.

PROBL. II. PROPOS. XXIII.

Dato segmento abscindere aliam portionem ab Ellipsi æqualemquò quò versùm in ea placauerit.

SIt datum segmentum APB, & ducatur semidiameter SP. Dato deinde semidiametro SO sit auferendum prædicto APB segmento aliud æquale.

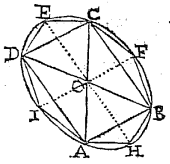
Ducatur OP, & vt SP ad QS, sic fiat OS ad RS, & ducatur QR, quæ ex prop.4. lib.6. Elem. erit parallela ipsi OP, & per R ducatur recta applicata CD, ex Cor.1. prop.32. tract. 24. eritque segmentum COD æquale segmento APB.



Prob. Nam productis CD, & BA in Z, & ductâ CB, & DA cùm sint CR, & RD æquales inuicem, vtpote applicatæ; sicut etiam AQ, & QB erit RD ad QA ex prop.7. lib.5. Eucl. vt CR. ad QB in triangulo CEZ: ideoque CB, & OP, & DA erunt parallelæ ex prop. 2. lib.6. Elem. quę diuisæ bifariam, erunt quoque applicatæ diametro HI. Vnde ex propos. 1. & 2. huius cum bases æquales CB, & BA nectant applicatas; & vertices sint in applicatis OV, & VP, necnõ, & in diametris SO, & SP substernẽt maximæ & æqualia triangula DOC, & APB, vnde, & ex 3. h. etiam segmẽta ellipsis, in quibus sunt COD, & DBA erunt æqualia. Possent etiam duci à punctis A, & B parallelæ lineę AD, & BC ipsi PO, & per C, & D extrema trahi CD. Nam CR, & RD erunt applicatæ, & hinc, vt priùs ostẽdetur propositio. Ratio est, quia productis CD, & BA in Z in triangulo CZB erit BQ ad QA, vt CR ad RD ex propos. 3. lib.6. Elem. sed QA, & QB sunt æquales; ergo CR, & RD ex 7. l.5.

COROLLARIVM.

HInc colliges modum, quo diuidas Ellipsim in partes subduplas V.g. in 2. in 4. in 8. in 16. Nam primo per quemcumque diametrum ex prop.32. Tr.24. bifariam secabis, deinde rursus aliam diametrum coniugatam duces, & diuides in 4. partes: exinde per eorũ extrema duces rectas, quæ bifariam diuidentur, & diametri per earum medietates ducti quatuor iam partes effectas bifariam diuident, & 8 efficient, & sic de reliquis.

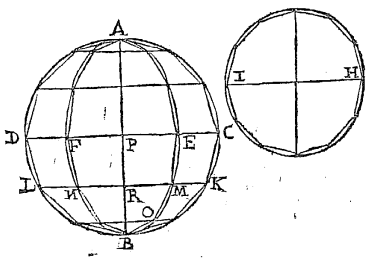


Patet; CDA, & CBA sunt triangula maxima; cùm BD applicata, simulque diameter eorum extrema nectat, ergo etiam segmenta CDA, & CBA erunt æqualia: triangulum verò COD est æquale triangulo COB ob bases æquales OB, & OD, & eumdem verticem C segmenta quoque æqualia CED, BFC ex dictis prop.21. huius sunt, & sic de alijs asserendum

THEOR. IV. PROPOS. XXIV.

Omne spatium ellipsis ea proportione respicit circulus maiori eius diametro descriptus, qua maior diameter minorem.

SIt Ellipsis AEFB. Dico ad eã proportionẽ habere circulũ ABCD maiori diametro descriptum, quam diameter maior CD ad minorem EF. Quod vt probetur; sit circulus HI, cui eã habeat proportionẽ circulus ADBC, quã CD ad EF; quod fiet ex 21. l.6. si inter CD, & EF media proportionalis inueniatur HI, & ea diametro circulus HI describatur. Deinde diuisis circulis in æquales numero partes inscribatur figura quælibet V. g. 12. laterum, in circulo verò CADB ducantur rectæ parallelæ diametro CD, vt sunt KL; puncta autem; in quibus secant ellipsim, vt E, M, & O rectis iungantur. Eritque in ipsa Ellipsi inscripta figura tot laterum, quot in circulo inscripta possidet.



Antequam autem propos. probetur, primò considerandum. Quod spatia plana á dictis lineis circuli comprehensa, vt est PRCK dicunt eam proportionem ad spatia Ellipsis inter easdem lineas clausa V. g. EPRM, vt CP ad PE, vel vt KR ad MR.

Ratio

Ratio est deducta à propos.72. Tract.24. Conic. Cum enim sit CP ad EP, vel KR. ad MR erit etiam eiusdem altitudinis spatium CKPR ad spatium EPMR, vt bases, quæ sunt eiusdem proportionis, vt propos 13. tract. preced. nimirum vel CP, ad EP, vel KR ad MR, & ita dicas de omnibus alijs spatijs. Quare figura inscripta in circulo ex prop.17. lib.5. Elem. ad figuram inscriptam in Ellipsi eam obtinebit proportionem, quam diameter Ellipsis maior CD habet ad minorem EF. Siquidem cùm singula spatia circularia singulis ellipticis sint in eadem proportione, quam CP ad CE, quę est eadem, quę KR ad MR, & sic de alijs lineis, quę omnes in eadem proportione sunt, etiam omnia spatia simul composita circularia ad omnia spatia simul composita Elliptica in eadem proportione erunt, vt CP ad CE, vel etiam CD ad EF.

Deinde aduertendum est quoque, quia fecimus circulum ACBD, se habentẽ ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum EF; quod etiam circulo maiori ACBD inscripta figura se habebit ad inscriptã circulo minori HI, vt CD ad EP ex pr.26. 39. lib.6. Quare figura inscripta Ellipsi, & figura inscripta circulo HI erunt æquales ex prop. 7. l.5. vtpote, quod illis dicat eandem proportionem CD ad EF figura circulo maiori ACDB inscripta.

Quo posito ostenditur propos. Spatium Ellipticum est æquale areæ circuli HI, sed circulus CADB, ita est ex effectione ad circulum HI, vt diameter CD ad diametrum Ellipsis EF. Ergo etiam spatium circuli maiori diametro descripti ACBD respiciet spatium Ellipticum, vt CD diameter, vel BA respicit minorem diametrum FE.

Probatur quòd spatium Ellipticum sit æquale circulo HI. Nam si non est æquale erit, aut maius, aut minus; sed neutrum dici potest. Ergo erit æquale. Nam si non est, Ellipsis æqualis circulo HI: Sit circulus HI maior. Describatur in circulo HI figura adeo multiplicatis lateribus, vt sit maior ipsa Ellipsi: siquidem in circuli maiori, quàm Ellipsis, maior figura ipsâ Ellipsi capere poterit. Similis autem figura circulo ADCB, & Ellipsi, vt docuimus, inscribatur, & erit figura multilatera circuli maioris ACBD ad multilateram Ellipsis in eadem proportione, vt ad multilateram circuli HI, & ideo æquales erũt circulo HI, ac Ellipsi figuræ inscriptę. Sed est maior figura circulo inscripta ex aduersarijs, ergo esset maior, simulque æqualis, quòd esse nequit.

Quod si asseratur circulus HI minor; quàm Ellipsis. Tunc in Ellipsi talis figura inscribatur adeo multiplicatis lateribus, vt docuimus, vt sit maior ipso circulo HI; Nam cum sit maior Ellipsis circulo HI adeo inscriptæ fig. latera multiplicari poterunt, vt cuadat circulo HI in aliquo maiori, siq; alia tot numero laterũ in circulo HI inscripta. Sed, vt ostendi, figura circulo HI inscripta est æqualis ipsi figuræ Ellipticæ, ergo figura in HI esset equalis, & vt volunt aduersarij minor, quam figura Elliptica; quod esse nequit.

COROLLARIVM.

HInc educitur Ellipsim ABEF ad circulum CD: AB consequi eam proportionem, quam rectangulum ex CD, & EF lateribus ad quadratum CD. Ratio est, quod cum quadratum, & rectangulum sint eiusdem altitudinis CP se habebunt inuicem, vt bases ER ad CD, quàm, & adipiscitur Ellipsis AEFB collata ad circulum ACBD.

THEOR. V. PROP. XXV.

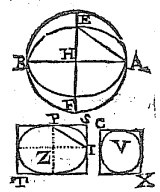
Si circulus fiat ex diametro, qui sit media proportionalis inter diametrum maiorem, & minorem Ellipticum, æqualis Ellipsi est.

PRobatur ex præced. Siquidem ostendimus talem circulum, nec posse esse Ellipsi minorem, nec maiorem. Quare æqualem esse concluſimus. Et hinc iam habes modum, quo circulum æqualem Ellipsi efficias; si inter CD, & EF mediam proportionalem inuenias HI, & ex eo circulum HI delinees.

THEOR. VI. PROPOS. XXVI.

Ellipsis quælibet ad circulum quemcumq; in proportione ea est, qua rectangulum ex diametris ad quadratum circuli dati.

SIt circulus V Ellipsis EAFB. Dictum est in Cor. Ellipsim EAFB ea proportione referri ad circulum maiori eius diametro descriptum AB; qua rectangulum ex eius diametris AB, & EF ad quadra-



tum AB; Sed circulus ex AB ad circulum V ea refertur proportione, qua quadratum AB ad quadratum XC ex propos.40. lib.6. Elem. Ergo ex æquo Ellipsis EAFD eam retinet proportionem ad circulum V, quam rectangulum ex AB, & EF diametris ad quadratum CX.

THEOR. VII. PROPOS. XXVII.

Ellipsis quæcumque ad quamcumque Ellipsim eam consequitur proportionem, quam rectangulum ex diametris primæ ad rectangulum ex diametris secundæ.

ELlipsis ABEF in fig. prop. anteced. eam adipiscitur proportionem ad circulum V; quam rectangulum ex diametris AB, & EF ad quadratum XC ex pr. antec. Sic circulus V ad Ellipsi alteram Z eam dicit proportionem ob eandem propos. quam quadratum CX ad rectangulum ST. Ergo ex æquo Ellipsis AEBF, ad Ellipsim Z eam dicit proportionem, quam rectangulum ex AB, & EF ad rectangulum ST.

CO-

COROLLARIVM I.

HInc deduces quomodo Ellipſes æquales deſcribantur, aut iuxta datam proportionem. Nam ſufficit efficere rectangula, quæ inuicem datam proportionem conſequantur ex prop. 27. Tr. 39. præced & ex illorum lateribus conſtituere duas Ellipſes, ex prop. 55. Tr. 24. quæ inuicem datam proportionem rectangulorum obſeruabunt.

COROLLARIVM II.

HInc quoque eſt, quod Ellipſis ſit ad Ellipſim, & ad circulum, vt triangulum ex diametris, vel ſemidiametris AHE Ellipſis AEBP præc. prop. 26. ad triangulum ex ijſdem IPZ in altera Ellipſi z, vel ex radijs in circulo: Patet quoniam triangula dimidia ſunt rectangulorum: ex ijſdem lateribus conſtantium: quare cum ſit totum ad totum, vt dimidium ad dimidium. Etiam triangulum erit in eadem proportione ad triangulum, vt rectangulum ad rectangulum, vel ad quadratum, & ideo, vt Ellipſis ad Ellipſim, vel ad circulum.

THEOR. VIII. PROP. XXVIII.

Segmentum circuli ſe habet ad totum circulum, vt ſegmentum Ellipſis ad totam Ellipſim, quæ ſint inter eaſdem parallelas concluſa.

SEgmentum aliquod Ellipticum exhibeatur CBIH, & aliud circulare ACGH inter parallelas AC, & GH. Dico, quod ſpatium ACGH eſt ad circulum LAK, vt ſpatium Ellipticum CBIH eſt ad totam Ellipſim LBK.

Probatur, vt eſt AC ad BC, ita eſt ſpatium ACGH Trapezij circulo inſcripti ad BCIH trapezium Ellipticum, & ita eſt ſpatium totum figuræ inſcriptæ circulo LMAGK ad figuram Ellipſi inſcriptam LNBIK, vt demonſtrauimus prop. huius 24. Initio. Diuidatur itaque trapezium circuli ACGH bifariam per eandem parallelam DF; dividetur quoque trapezium BCIH, ducanturq; IE, & EB, necnon, & AD, & DG; eritque trapezium EHDF ad trapezium EFIH, vt DF ad EF, & vt AC ad CB, & ſic trapezium DACB erit ad trapezium BCEF veluti AC reſpicit BC, & ideo, vt figura LMAGK ad figuram Ellipticam: Quare etiam ſimul duo trapezia circularia ACDF, & DFGH erunt ad duo Elliptica BECF, & FEIH ex propoſ. 17. lib. 5. vt figura circulo inſcripta ad figuram Ellipſi inſcriptam; Et ſic ſemper ſequetur, ſi diuidas in infinitum; Sit igitur facta in trapezio dato circuli ACGH omnis poſſibilis ſubdiuiſio, ſicut etiam in trapezio Elliptico; ambo ita diuiſa omne ſpatium, quod inter CA rectam, & curuam ADG, ſicut inter rectam BI, & ambitum BEI abſument: alioquin, ſi aliquid remaneret, omnis poſſibilis ſubdiuiſio facta nó eſſet; cùm minor figura rectilinea capere poſſet in circulo, & Ellipſi ex cuius latere ductæ lineæ trapezium minus conſtituerent. Cùm ergo facta omni poſſibili trapeziorum ſubdiuiſione ſemper ſit omnis congeries trapeziorum in ACGH factorum ad omnem multitudinem trapeziorum in BCIH factorum, vt figura LMGK ad figuram LNIK, & figura LMGK ad figuram LNIK ſit vt circulus ad Ellipſim. Etiam trapezium circulo inſcriptum omni poſſibili ſubdiuiſione multiplicatum erit ad trapezium CBIH, & ideo ſegmentum circulare CAGH ad ſegmentum Ellipticum CBIH, cui ita ſubdiuiſa æquantur, erit, vt circulus ad Ellipſim. Quadere *permutando* ſegmentum circulare CAGH erit ad totum circulum, vt ſegmentum Ellipticum CBIH ad totam Ellipſim.

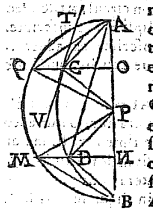
COROLLARIVM.

HInc, ſi habes circulum in quotcumque partes æquales parallelis ſectum, obtinebis quoque ellipſim ex eius diametro, vt axi maiori factam in partes æquales ſimiliter ſectam ab ijſdem parallelis, verùm in circulo vſque adhuc inuenta via non eſt tales partes efficiendi.

PROBL. III. PROPOS. XXIX.

Datam Ellipſim in quaſcumque partes æquales, in quas circulus diuidi poſſit, per ſectores partiri.

SVpra docuimus ſubduplam diuiſionem, hic autem omnem eam, quæ circulo deſcribi poſſit. Sit itaque data ſemiellipſis ACDB, & oporteat eam in tres æquales ſectores partiri, vt ſemicirculus diuiſus eſt AQMB. Demittatur perpendicularis QO à circuli ſexta parte AQ, & ducatur CP. Dico ACP ſectorem eſſe ſextam partem Ellipſis, vnde ſi ducta TV tangente, & parallela AD facias alium ſectorem æqualem erit CPD altera pars. & ſic de reliquis faciendo alios ſectores æquales ex prop. 21. huius.



Prob. ex 24. h. vt QO ad CO lineas, ſic QAO ſegmentum circuli ad ACO ſegmentum Ellipſis, & ita erit QOP in circulo triangulum ad triangulum COP in Ellipſi ob eandem altitudinem cum terminent in idem punctum P. Quare, ſi componantur, ita erit triangulum QOP cùm AQO ſegmento, ideſt ſector AQP in circulo ad triangulum COP cũ ſegmento ACO, ideſt ſectorem ACP in ſemiellipſi, vt QO ad CO: Sed vt QO ad CO, ita eſt ſemicirculus AQMB ad ſemiellipſim ACDB ex prop. 24. huius contextu. Erit itaque AQP ſector circuli ad ACP ſectorem Ellipticum, vt totus circulus ad Ellipſim: Quapropter *permutando* erit QAP ſector circuli ad circulum, vt ACP ſector Ellipticus ad Ellipſim: ſed ille ſector circuli eſt ſexta pars ipſius, & tertia eius dimidij: Ergo etiam ſector Ellipticus ſexta pars erit totius, & tertia eius dimidij. Quare ſi ducta tangente TV ducas ei parallelam AD, & facias ſegmentum AC æquale ſegmento CD ex huius 23. erunt etiã ACP ſector, & CPD inſiſtentes æqualibus ſegmentis æquales ex huius prop. 22. Propterea quæ CPD erit altera totius ſexta pars, & ſic de reliquis.

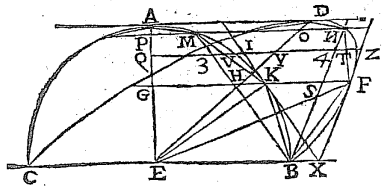
COROLLARIVM.

HInc noſces deſcribere figuras in Ellipſibus ſimiles illis; quæ ſunt in circulo, ſi fiant tales, quarum ſingula triangula ſe habeant in circulo ad totum circulum, vt ſingula triangula elliptice figuræ ad totam ellipſim, etiam ſi ſint triangula quæcumque, & irrationalia. Quia, & tota figura circuli inſcripta erit ad totum circulum, vt figura Ellipſi inſcripta, ad totam ellipſim. Nam ſi V.g BMQO figuræ circuli triangula BMP, & MQP, & QOP, erunt ad figuræ ellipticæ BDCO triangula BDP, & CPD, & PCO, vt OQ ad OC, vel æquales MN ad MD, ideſt, vt circulus ad Ellipſim; etiam tota figura circulo inſcripta ſe habebit ad figuram ellipticam, vt circulus ad Ellipſim: Propterea que *conuertendo* ita erit figura in circulo ad totum circulum, vt figura ellipſis ad totam ellipſim.

PROBL. IV. PROPOS. XXX.

Super datam circuli diametrum deſcribere Ellipſim circulo æqualem, cuius data ſit ſemidiameter, & applicata æqualis radio.

SIt BAC circulus, cuius centrum E, & data ſemidiameter ellipſis maior ſemidiametro circuli ED: ducta tangente AD inter parallelas AD, & & BC accommodetur ab B puncto data ED, & ductis parallelis, vt FG ſinguli ſinus, vt GK traſeantur à ſemidiametro ellipſis ED ſuper eandem lineam, vt ſunt HF, ſingulaque puncta flexa molli ductu vniantur, & ſemiellipſis BFDGC erit conſtituta; quam iuxta eaſdem menſuras perficies. Dico itaque hanc ſemiellipſim ſemicirculo eſſe æqualem.



Nam, quod ſit ellipſis patet ex ijs, quę diximus propoſ. 52. Cor. Tract. 24. Quod verò ſit æqualis ſemicirculo.

Probatur. Nam ducta PN vſquequo interſecet circulum, & ellipſim in M, & N parallela ad diametrum ellipſis productum, erunt eius partes MP & NO diametro ED, & EA applicatę in P, & O, & ideo æquales cum omnes alias applicatas tales effecerimus ex conſtructione. Ducantur deinde ſubtenſę BM, & BN ab interſectionibus N, & M, & erit ſegmentũ circuli MKB ellipſis NFB. In ſegmentis ergo circuli BKM maximũ triang. inſcribatur BKM, & ab K vertice ducatur parallela FG, ſi nó ſit ducta, & in L erit vertex maximi trianguli ellipſis ſegmento BFN inſcripti, vt infra oſtendendum. Erunt itaque cùm ſint triangula maxima pluſquam dimidia ſuorum ſegmentorum. Sunt autem etiam æqualia, & triangulum BFN æquatur triangulo BKM, ſicut & trapezium BNOE trapezio MPBE, & ſemitrianguIum maximum NDO ſemitriangulo maximo MAP, cum ſit dimidium maximorum: Et ſi in ſegmentis remanentibus rurſùs alia triangula inſcribantur, & multiplicentur vſque dum multiplicari poſſunt, ſemper idem ſuccedet, & ſemper multiplicata maxima triangula in circulo æquabuntur ellipticis æquè in ſucceſſiuè remanenti quolibet ſegmento multiplicatis: ſed maxima triangula in circulo multiplicata, vſquedum multiplicari queunt, æquant circulum; alioquin ſi remaneret aliquod ſegmentum, non eſſent multiplicata omni multiplicatione poſſibili, & ſic dicas de ellipſi. Ergo cum omnia triangula circuli æqualia circulo æquentur omnibus triangulis ellipticis æqualibus ellipſi; Ellipſis, & circulus erunt æquales.

Itaque oſtendendum remanet primo triangu- BFN, & omne ſimiliter inſcriptum eſſe maximum. Hoc autem oſtenditur. Nam ducta per F linea XF parallela ipſi BN tangens erit, & ideo ex dictis 1. propoſ. huius BFN erit maximum triangulum. Quod autem XF ſit tangens ducta XK parallela ipſi MB, tangente circuli K ſic oſtenditur. Quoniam omne punctum, quod in ipſa aſſignetur extra ellipſim eſt, ergo non ſecabit eam; ſed continget in F, ergo tangens erit, quod ſi ita non eſt. Aſſignetur punctum Z V.g. quod dicatur eſſe intra ellipſim, & oſtẽdetur de illo extra ellipſim reperiri. Ducta ZQ Trapezia NOBE, & BEMP ſunt æqualia ob æquales baſes ex conſtr. NO, & MP, & eandem EB ex propoſ. 72. Tract. 24. Vnde, & ex prop. 13. tract. 19. præc. SH, & HG æquabũtur ſicut, & ſin ZQ partes 4. Y, & 3Q. Sunt verò æquales ex conſtructione HF, & KG. Vnde, & reſidua FS, & HK erunt æqualia. Quamobrem cum ſint inter parallelas, & parallelæ Z 4, & 1 3. erunt æquales ex prop. 33. lib. 1. Elem. quæ additæ æqualibus, vt oſtendi 4 Y, & 3 4 remanebunt æquales ZY, & 1 Q. Sunt autem VQ, & TY ex conſtructione æquales, & QV eſt minor, quam 1Q. Ergo etiam TV, quæ finit in ambitu elliptico in T eſt minor, quam YZ: Vnde punctum Z remanebit extra ellipſim: quod cum poſſit demoſtrari de omni alio puncto excepto F in quo tangit, remanebit tota XZ extra ellipſis ambitum. Quamobrem ZX erit tangens, & ideo NFB maximum triangulum, quod in ſegmento NFB inſcribi poſſit ex prop. 1. h.

Deinde oſtendendum eſt triangula, ſeu trapezia Elliptica æquari circularibus. Nam primo trapezium BNOE æquatur trapezio BMPE ex prop. 13. tract. præc. quòd ſint inter parallelas, & æqualium baſium. Triangulum quoque BFN in ellipſi æquatur triangulo BKM in circulo; quod pars FSB ſit æqualis parti KBH, vtpote inter parallelas exiſtenti, & ſuper baſes æquales FS, & HK, vt ſupra oſtenſum eſt, & idem dicendum de triangulis HMK, & FSN; necnon, & de triangulis MAP, & NDO, & ſic de alijs, ſi inſcribantur. Verificatur itaque, quod omnia triangula in ellipſi ſint maxima, & ſint æqualia maximis, & inſcriptis in circulo, & ideo quòd in perpetuà minorum deſcriptione, tùm circuli, tùm ellipſis, cum triangula ſiat ſemper æqualia, circulus ellipſi æqualis erit.

COROLLARIVM.

HInc potes ne dum totam ellipſim alteri exhibere æqualem, ſeu circulo, ſeu ellipſi, ſed etiam ſingula eius ſegmenta, ita quod triangulum BFN ſit æquale triangulo BKM, cum in ipſis triangula, & in ſegmentis ſucceſſiuè remanentibus

semper æqualia inscribi possint, vt ex demonstratione patet: quin imò sector quoq; BKE æquabitur sectori BFE cum triangula BFE, & BKE ob æqualem basim, & altitudinem sint æqualia.

EXPENSIO VI.

De areis parabolarum quadrandis.

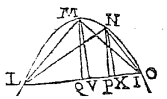
QVoniam aliquando superficies spatijs parabolicis, vel ferè talibus continentur, vt exactus Geodeta possit talia spatia exactissimè mensurare, etiam quadrationem parabolæ noscere debet, & eam in libitas partes diuidere.

PROBL. I. PROPOS. XXXI.

Datæ parabolæ terminatæ maximum inscribere triangulum.

SIt parabola, seu segmentum eius LMO, cui oporteat inscribere triangulum maximum. Subtendat itaque illum quælibet recta LO, quæ diuidatur bifariàm, & erigatur diameter QM, & coniungantur rectæ LM, & MO. Dicoque LMO esse maximum triangulum segmento parabolę O N M L inscriptum.

Probatur. Nam si triangulum LMO non est maximum, erit aliquod aliud V. g. LNO, de quo probo non esse maximum contra hypothesim, siquidem ita ex Coroll. propos. 50. tract. 24. est LQO rectangulum ad LPO rectangulum, vt QM ad PN: sed est maius rectangulum, LQO, quam LPO ex propos. 29 lib. 6. Quare etiam erit maior QM, quam PN. Vnde triangulum LMO erit maius triangulo LNO, siquidem ductis perpendicularibus MV, & NX, & ideo parallelis, cùm QM, & PN diametri sint in parabola paralleli quoque ex propos. 27 tract. 24. triangula QMV, & PNX erunt æquiangula, vnde erit QM ad PN, vt normalis VM ad normalem XN; sed maior ostensa est diameter QM, quàm NP. Ergo etiam maior VM; quam XN. Vnde cum triangulum LNO obtineat altitudinem minorem ex 1. lib. 6. Cor. erit minus.

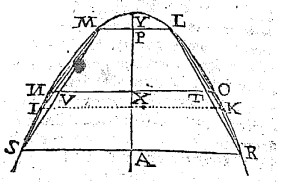


THEOR. I. PROPOS. XXXII.

Omnia triangula, quæ in applicatis obtinent vertices suos in parabola, inter se sunt æqualia.

SIt triangulum LOR, & MNS, quæ in applicatis LM, ON, & RS vertices M, N, S, & R, O, L habebãt. Dico ea esse in parabola SMLR æqualia.

Probatur. Ducto diametro XY, erunt XN, & OX æquales, & TX, & XV quoque ex prop. 13. Tract. 29. quia SM, & LR coniungunt æquales applicatas PM, & PL in æqualibus trapezijs RALP, & APMS; sicut etiam RA, & SA. Ablatis itaque æqualibus TX, & TV ab æqualibus OX, & XN, reliquæ erunt æquales OT, & VN: Quapropter triangula OTL, & VMN ex pr. 39. lib. 1. Cor. inter parallelas LM, & NO, & super æquales bases OT, & VN existentia erunt



æqualia; necnon ob eandem rationem triangula OTR, & VNS; quare tota triangula ROL, & MNS erunt æqualia.

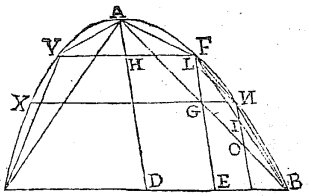
COROLLARIVM.

HInc educes, quòd si triangulum ORL sit maximum, etiam aliud NMS futurum esse maximum. Quoniam, si aliud maximum posset constitui in segmento MNS, cuius vertex I; Tunc ducta ab I parallela IK, si constitueretur triangulum RKL esset æquale triangulo maximo MIS, & ideo maius triangulo SNM non maximo ex aduersarijs: sed MNS æquatur triangulo ROL. Ergo etiam triangulum, quod constitueretur RKL esset maius triangulo ROL. Ergo triangulum ROL contra Thesim maximum non esset, quod inscriptum fuisset in segmento parabolico ROL.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Parabola est sesquitertia trianguli maximi in illa inscripti.

SIt parabola BFAYC, & triangulum maximum in ipsa BAC. Dico parabolam ei esse sesquitertiam; nempe triangulum continere, & insuper eius tertiam partem, vel esse ad illud, vt 4. ad 3. Ducatur itaque diameter AD; diuisaque bifariam semibasi BD in E ducatur AD diametro parallela EF vsque ad parabolam in F, & ducatur basi parallela FH.



Probatur. Nam ex propos. 2. de conicis Tr. 24. Quadratum BD est ad quadratum FH, vel ED, vt AD ad AH, sed quadratum BD ex propos. 6. lib. 2. Cor. est quadruplum quadrati EB. Ergo etiam diameter AD quadruplus est portionis HA, & per *diuisionem rationis* HD ipsius AH, vel EF æqualis sesquitertia. Linea verò EG subdupla est ipsius AD propter triangulorum similitudinem, cùm GE sit ad DA, vt BE ad BD, & ita quoque BG ad BA. Itaq; GE erit duplo maior ipsius GF equalis ipsi AH: Siquidem EF est $\frac{1}{4}$ ipsius AD, & EG $\frac{1}{4}$.

Quamobrem triangulum quoque GBE erit, duplum

plum trianguli BFG ex 1. lib. 6. eundem verticem habentis in B; & ideo eandem altitudinem, & quia BA est dupla ipsius BG, vt dixi; ideo triangulum BFA erit trianguli BFG duplum, & ideo æquale triangulo BGE, sed huic BGE est quadruplum triangulum BDA ex 21. lib. 6. siquidem duplicatam habet basim, & est similiter positum, & simile: vnde illi habebit proportionem, quem 4. ad 1. nempe duplicatam, quam 2. ad 1. idest basis DB ad basim EB.

Deinde sit parabolæ segmentum BFA. In eo GF parallela DA, ex BG æquali applicatæ AG puncto medio erecta, quæ erit diameter, & maximum triangulum in eo inscriptum BFA, ex propos. 1. h.

Diuidatur bifariam semibasis BG in O, & ducatur parallela ON ipsi FG, & NL basi BA. Et eodem prorsùs argumẽto ostendes ON esse sesquitertiã FG, eo q1 ex 5. Tr. 24 quadratũ BG quadruplũ quadrati BO, sit ad NL quadratũ, vt GF ad FL, idest 4. ad 1. & hinc residuum GL ad LF, vt 3. ad 1. & ideo NO æqualem ipsi GL esse $\frac{1}{4}$ ipsius GF, & OI ipsius GL dimidiam, quod ei eandem dicat proportionem; quam BO ad BG; ideoque OI ipsius GF $\frac{1}{8}$; idest duplam residuæ IO $\frac{1}{6}$, quę sublatis $\frac{1}{8}$ erit $\frac{1}{24}$, ideoque triangulum IOB duplo maius, quam BIN erit, quę ob eandem altitudinem B sunt inuicem, vt bases OI ad IN: ideoque addito æquali INF triangulum BIO æquabitur triangulo toti NBF; & ideo erit subquadruplus trianguli BFG, cum sit ille BFG supra duplo maiorẽ basim BF, & ideo, vt similis, similiterq; positus ex 21. lib. 6. habeat proportionem duplicatam nempe BIO, vel æqualis BNF subquadruplus erit trianguli BFG, & sic semper erit etiam, si diuidas in infinitum.

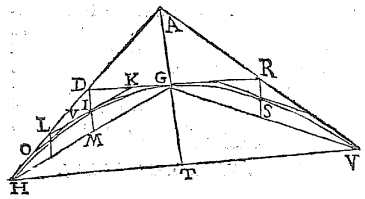
Si ergo inscripta sint in parabola BAC omnia triangula, quæ inscribi possunt, illa multitudo æquabit totam parabolam alioquin si aliquid parabolę restaret, non esset inscripta omnis inscriptibilis multitudo, cùm adhuc inscribendi spatium suppeteret, cùm itaque omnia triangula inscriptibilia se habeant successiuè, vt 1. ad 4. & sit illimitata progressio hæc successiua; ideo ex Cor. 3. pr. 26. Tract 16. part. 1. differentia secundi termini BFA à primo BAD erit ad BAD, vt BAD ad totam collectionem terminorum, scilicet triangulorum in seriem continuam proportionalium æquantium ipsam parabolam: sed ostẽsum est BFA esse ad BAD, vt 1. ad 4. & ideo differentia erit 3. Quapropter, vt 3. ad 4. ita erit triangulum BAD primus terminus ad totam collectionem triangulorum inscriptorum in seriem continuam proportionalium, idest ad parabolã BFDA; & ideo duplũ Trianguli BAC ad duplam parabolam BFAYC. Vel conuertendo parabola BFAYC erit ad triangulum BAC, vt 4. ad 3.

THEOR. III. PROPOS. XXXIV.

Si parabola contingentibus stringantur, & applicata terminetur, figura concaua, quæ restat, est ad triangulum exterius contingentium, vt 4. ad 3.

SIt Parabola VGH, & contingentibus VA, & AH, & RD stringatur, & applicata VH terminetur. Dico concauam figuram VAHG esse ad triangulum contingentium exterius RAD, vt 4. ad 3.

Probatur. Quia VA, & AH sunt contingentes ex propos. 12. Tract. 24. GT æquabitur GA, & quia RD ponitur contingens erit parallela VH applicatæex 27. tr. 24. & ideo triang. RAD erit super basim GA subduplã basi TA, vel AD ipsi AH, cumq; triangula TAH, & GAD sint simlia, similiterq; posita ex prop. 22. lib. 6. Elem. erunt inuicem in duplicata ratione laterum, & quia AD se habet ad AH, vt 1. ad 2. triangulum AGD erit ad triangulum ATH, vt 1. ad 4. nempe in proportione subquadrupla. Idem dicas de triangulo KDL, quia enim GD, & DH sunt tangentes, & GH applicata, ab eius puncto medio M educta parallela MD ipsi TG in contactũ tangentiũ cõuenier in D, vt diameter ex 11. tr. 24 & MD erit dupla IM, & KL, vtpote tangens erit parallela GH applicatę, & ideo erit KD dupla GD: quare KDL triangulum simile, similiterque positum super basim KD subduplam basi GD erit subquadruplum trianguli GDH, sed triangulum GDH est equale triangulo GDA ob æquales bases AD, & DH, & verticem eundem G, ergo KLD triangulum est ad triangulum GAD, vt 1. ad 4. scilicet in propositione subquadrupla, & sic in infinitum poteris sequi circumscribendo, qui semper erunt ad antecedentem vt 1. ad 4. Nam KDL triangulum est ad triangulum ADG dimidium trianguli circumscripti RAD, vt 1. ad 4. ita triangulum VLG est ad dimidium IDL trianguli circumscripti KDL, vt 1. ad 4. & sic procedendo.



Ponatur itaque parabolę VGH concluse tangentibus AH, & VH esse circumscripta omnia triãgula, quæ circumscribi possunt, omnia spatium AHIG tandem absorbebunt; alioquin, si remaneret spatium aliquod omnia triangula circumscriptibilia, non essent circumscripta contra Thesim, cùm adhuc aliquod spatium inscriptibile remaneret.

Verùm omnia illa in infinitum procedentia semper seruant eandem proportionem 1. ad 4. quà secundus respicit antecedentem, vel 4. ad 1. quà respicit primus terminus GAD secundum KDL: quare differentia minoris trianguli KDL, terminiq; secundi à primo GAD erit ad primum GAD, vt 3. ad 4. sed vt differentia secundi termini à primo ad ipsum primum, sic primus terminus GAD ad totam collectionem terminorum in infinitum procedentium in serie continua eiusdem proportionis ex Coroll. 3. prop. 26. Tract 16. de progr. Geom. Ergo GAD triangulum ad totam collectionem triangulorum circumscriptibilium figuræ concauæ GAHIG, & ideo ad ipsam figuram concauã ei collectioni æqualem se habebit, vt 3. ad 4. & ideo duplum trianguli RAD se habebit ad duplum collectionis seriei triangulorum in infinitum procedentis, & ideo figurę cõcauæ VAHGV, vt 3. ad 4. vel è contra figura VAHG ad triangulum RAD, vt 4. ad 3

COROLLARIVM.

HInc patet figuram concauam VAHG esse ad figuram conuexam VSGIH subduplam; Nam

figura conc aua est ad triangulum RAD, vt 4. ad 3. sic figura conuexa est ad inscriptũ VGH triangulũ, vt 4. ad 3. ex 44. h. ideoque figura concaua YAHG sic se habebit ad triangulũ RAD, vt conuexa VGH ad triangulum VGH; ideoque *permutando* figura concaua ad conuexam se habebit, vt triangulum RAD ad triangulum VGH; sed triangulum RAD est subduplum trianguli VGH ob subduplas altitudines GD, & GR respectu altitudinum TH, & TV ex Coroll prop 16 & æqualem basim GA, & GT. Quare etiam figura concaua erit ad conuexam in ratione subdupla sc. vt 1. ad 2.

THEOR. IV. PROPOS. XXXV.

Parabolica segmenta, in quibus capiuntur triangula maxima æqualia inuicem erunt æqualia.

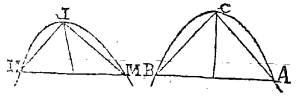
SIt fig. propos. 32 h. præced. in qua parabola BFAYC, & sint duo segmenta BFA, & AYC, in quibus capiat ex prop. 2. h. exp. triangula maxima, & æqualia. Dico ipsa segmenta esse equalia.

Prob BFA triangulum est æquale triangulo AYC, cùm sint inter parallelas eorum vertices, ita triangula FNB, & YXC ob eandem rationem, & sic continuè in infinitum, quare cum continua progressio infinita triangulorum absorbeat omne spatium segmentorum parabolicorum BFA, & AYC iuxta ostensa propos. 15. Tract. 16. part. 1. quod ostensum sit prop. 23 huius semper iuxta eandem proportionẽ procedere, quæ est 1. ad 4. etiam segmenta parabolica AFB, & AYC erunt æqualia, quod in eis omnia inscriptibilia triangula sint equalia.

PROBL. V. PROPOS. XXXVI.

Parabola ad parabolam, seu segmentum eius ad aliud segmentum obtinet eandem proportionem, quam triangulum maximum ad triangulum maximum, quæ in illis inscripta sunt.

SIt parabola ACB, vel segmentum, quam dico habere ad aliam parabolam, vel segmentum MLN eandem proportionem, quam triangulum ACB ad triangulum MLN, quæ maxima sint.



Probatur. Nam Parabola ACB est ad triangulum ACB, vt 4. ad 3. Sic etiam parabola MLN ad triangulum MLN, vt 4. ad 3. Quadere parabolæ ad sua triangula sunt in eadem proportione, ideoq; *permutando* ACB parabola erit ad parabolam MLN, vt triangulum ACB ad triangulum MLN.

COROLLARIVM.

HInc, si duæ parabolæ habeant æquales bases erunt inuicem, vt altitudines, & si obtineãt altitudines æquales erunt ad inuicem, vt bases.

COROLLARIVM II.

HInc quoque colligitur; quomodò describantur parabolæ æquales, vel iuxta datam proportionem. Nam factis triangulis ACB, & LMN, quæ datam proportionem consequantur circa illa describetur parabola iuxta dicta propos. 59. tract. 24. & quia ita est triangulum ad triangulum, vt parallelogrammum ad parallelogrammum inter easdem bases, & parallelas; hinc est; quòd factis duobus parallelogrammis iuxta datam proportionem, si ope illorum duæ parabolæ describantur ex propos. 69. tract. 24. illæ erunt quoque in data proportione.

PROBL. II. PROPOS. XXXVII.

Datæ parabolæ æquale triangulum exhibere.

MOdus exhibendi triangulum Parabolæ equale hic est, inscribatur parabolæ AC triangulum maximũ AIC, & deinde in tres partes secetur basis AC; nam si basi AC addatur tertia pars CD, & fiat AD, & ducatur ID hoc triangulum AID erit æquale parabolæ AIC.

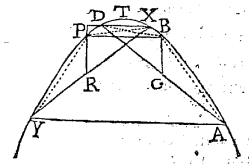


Prob. Parabola AIC est ad triangulum AIC, vt 4. ad 3. sed triangulum AID est ad idem triangulum AIC, vt basis AD ad ACbasim ex 1. l. 6. quę ex effectione est vt 4. ad 3. Ergo est in eadem proportione ad triangulũ AIC, ac parabola AIC ad idem triangulum AIC: quare ex prop. 9. lib. 5. erunt æqualia triangulum AID, & parabola AIC, cùm eidem triangulo AIC eandem proportionem dicant.

PROBL. III. PROPOS. XXXVIII.

E parabolæ dato puncto auferre segmentum alteri æquale dato diametro eiusdem.

DAta sit parabola ATY, & segmentum in ea ABTD; diameterque BC, & oporteat aliud segmentum dato æquale resecare, quod incipiat à puncto X. Iungatur punctũ X puncto D, & lineæ XD ducatur parallela AY, ducaturq; XY; nam segmẽtũ XPY erit, quod exoptatur æquale segmẽto ABD.



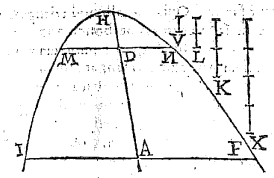
Probatur. Nam ducta BP erunt æqualia triangula ex prop. 32. huius ABD, & XPY cum habeant vertices in parallelis XD, & BP, & AY, triangulum verò

verò ABD est maximum ex propos. 11. huius. Ergo etiam triangulum XPY ex Cor. p. 23. h. Quadere, cùm maxima sint triangula ABD, & XPY, & æqualia; erunt quoque segmenta XPY, & ABD parabolæ æqualia ex prop. 35. huius.

THEOR. VI. PROPOS. XXXIX.

A parabola eadem auferre segmentum dato proportionale.

SIt parabola, seu segmentum FHI, & oporteat ab ea resecare aliud segmentum, quod se habeat, vt X ad V; Inter X, & V inueniantur duæ mediæ proportionales LK ex propos. 3. Tract. 15. fiatque vt X ad L, sic AH diameter ad HD, & ducatur parallela NM. Dico segmentum FHI esse ad segmentum NHM, vt X ad V.



Progr. 1. Probatur segmentum FHI ad segmentum parabolicum NHM est in ratione triplicata FI ad NM, & proportionis FI ad NM duplicata, vt dicã est Proportio AH ad HD, & AH ad HD, sic facta est, vt X ad L, & X ad L ex effect. est duplicata proportio X ad K. Ergo FI ad NM est, vt X ad K. Verùm segmentorum parabolicorum, vt dixi FHI ad MHN triplicata est proportio FI ad NM; quæ est, vt X ad K, & X ad V triplicatam possidet proportionem illius, quæ est X ad K. Ergo segmentum parabolicum FHI ad NHM segmentum est vt X ad V.

Remanet ostendendum proportionem parabolici segmenti FHI esse ad NHM in triplicata ratione FI ad NM.

Progr. 2. Ex 36. h. parabola FHI se habet ad parabolam NHM, vt triãgulum in maiori FHI inscriptum ad triangulum in minori designatum NHM; sed triangulorum proportio componitur ex proportione FI ad NM, & AH ad HD; sed proportionis FI ad NM est duplicata ratio AH ad HD; quod sit, vt quadratum FA ad ND, vel ex 6. lib. 2. quadruplum quadratum ex ½ I ad illud ex NM, sic AH ad HD ex 5. Tr. 24. ergo ex dupla proportione componitur AH ad HD, & ex simplici proportione quoq; FI ad NM. Ergo proportio segmenti parabolici FHI ad NHM est triplicata illius, quæ est FI ad NM.

COROLLARIVM.

HInc est, quòd si illud item segmentum NHM alibi in eadem parabola efficere desideres, poteris id facere ex propos. 37. huius detruncando alibi in eadem parabola segmentum æquale segmento NHM. Nam erit illi segmentum FHI, vt X ad V, cùm ad æquales eadem sit proportio.

PROBL. III. PROPOS. XL.

A Parabola data segmentum rescindere, quod sit æquale alterius parabolæ datæ segmento.

DEtur parabola ABC, & oporteat resecare à parabola FIG segmentũ æquale; Accõmodetur in parabola FIG linea GF æqualis lineæ AC, & ducatur diameter HI ex 36. tr. 24. Dico FIG esse æquale segmento ABC.

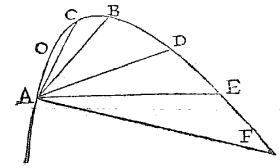


Probatur cum FH sit dimidia FG æquabitur ipsi AE. Sed vt AE ad EB, sic ob similitudinem omnium parabolarum ex prop. 51. tract. 24. est ex defin. similitudinis sectionum est FH ad HI, & *permutando* AE ad FH, vt EB ad HI. Sed FH, & AE sunt æquales; Ergo etiam tales erunt EB, & HI. Quare triangula ABC, & FIG erunt æqualia, vtpote æqualium altitudinum, & basium; sed etiam sunt triangula maxima, quia sunt ad diametros ex 31. h. Ideoque vt triangulum ABC ad triangulum FIG sibi æquale sic erit segmentum parabolicum ABC ad parabolicum segmentum FIG, ergò 12. lib. 5. erunt æqualia parabolica segmenta GBA, & FIC.

PROBL. IV. PROPOS. XLI.

Segmenta à parabola datâ detruncare, quæ sint in continua proportione.

SIt data proportio segmenti AOC ad segmentum ACB, & fiat ex propos. 14. lib. 6. vt subtensa AC ad AB subtensam, sic AB ad aliud AD, & sic succesſiuè vt AB ad AD, ita AD ad AE, & cæt. Deinde lineæ inuentæ à puncto A accommodentur in parabola, & ducantur AD, AE, AF, & cæt. Nam dico segmenta ACB, & ABD, & ADE, & AEF, esse in continua proportione.



Probatur ex ostensione pr. 39. progr. 2. vbi ostẽdimus segmenta ACB, & ACBD, & ABDE, & cæt. esse in triplicata proportione subtensarum AB, & AD, & AB, & cæt. sed illæ factæ sunt continuæ proportionales. Ergo ex propos. 1. tract. 28. etiam segmenta parabolica erunt continuæ proportionalia.

PROBL.

PROBL. V. PROP. XLII.

Parabolæ aream ad quamcumque figuram reducere.

QVoniam vt prop.36. huius oſtendimus, quod parabola in triangulum æquale commutari poteſt: hinc enaſcitur, quòd ſi triangulum illud æquale parabolæ conuertatur ex pr.3.tr.29. in rectangulum, & hoc in quadratum, & deinde in circulum ex pr.14.tr.30. & tandem in Ellipſim ex prop.30.h. quòd etiam parabola omnes iſtas tranſformationes ſit ſubitura, cum ſit conſequenter æqualis Ellipſi, circulo, quadrato, & rectangulo, quę triangulo, in quod primo conuerſa eſt æquantur.

EXPENSIO VI.

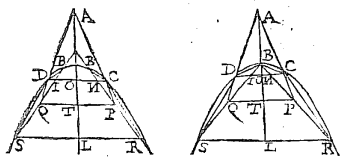
De partitione Hyperbolæ.

HYperbola vſque adhuc quadrationi ſubigi non potuit, & licet Ambroſius à S. Vincentio in id conetur, illius tamen quadratio adeo inuoluta eſt, vt omninò incomperta remaneat: Vnde ne inutiliter librum oneremus, ſatiùs erit certam tantùm eius Geodeſiam proponere.

THEOR. II. PROPOS. XLIII.

In Hyperbola triangula ſegmentorum, quorum vertices in parallelis ſunt, & applicatis, æqualia inuicem ſunt.

SInt triangula RCB, & BDS, quę ſint in ſegmentis hyperbolicis, & vertices eorum nectant parallelæ CD, RS, & vertices B, vel ſint in eodem puncto, vel aliqua V.g. BB prædictis RS, & CD parallela nectantur. Dico illa eſſe æqualia.

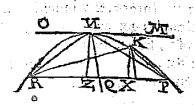


Prob. Cum RBL, & LBS ſint triangula ad eandem altitudinem ſuper baſes æquales, ideſt applicatas RL & LS ex pr.13. tr.29. æquales erunt NO, & OI, ſed CO, & OD ſunt quoque applicatæ: Ergo erunt æquales; Ablatis itaque æqualibus NO, & OI reliquæ erunt æquales CN, & ID; Quamobrem triangula CBN, & IBD erunt æqualia, vtpotè ſuper baſis æqualis, & inter parallelas; ſic triangula CNR, & IDS ob eandem rationem erunt æqualia. Vnde etiam triangula BDS, & RCB ex illis partialibus conſtituta erunt æqualia.

PROBL. I. PROPOS. XLIV.

Datæ Hyperbolæ terminatæ maximum triangulum inſcribere.

IN Hyperbolæ PNB ducta quacumque PR, & diuiſa bifariam in Q erigatur diameter QN ex propoſ. 30. Tract. 24. & ducatur contingens MO, quæ erit ex propoſ. 28. Tract. 24. de conicis parallela lineæ PR. Ducantur itaque à contactu N rectæ PN, & NR, & triangulum quod conſtituitur, PNR maximum erit.



Probatur facile. Quia, ſi aliquod triangulum aliud adſit in ſegmento Hyperbolico PNR, quod obtineat verticem alibi V. g. in K punctum K non erit in parallela MO, cum MO tangat tantum in N; ergo inferius erit, & minor erit altitudo KX, quam ZN, vt patet. Vnde cum minorem altitudinem triangulum PKR conſequeretur, eſſet minus, quam PNR. Quare PNR erit maximum cum maius, vel æquale nequeat aſſignari.

THEOR. II. PROP. XLV.

Triangula maxima inter parallelas exiſtentia in Hyperbola ſunt inuicem æqualia.

*SInt triangula maxima RCB in pr.43.h. & BDS. Dico illa eſſe æqualia. Nam ductis diametris PA, & QA, & linea DC per eorum vertices C, & D ea erit parallela applicatę RS, & ideo etiam vertices triangulorum maximorum RCB, BDS erũt in parallelis applicatiſque; quare ex 43. h. erunt æqualia.

*Prob. Nam ducatur PQ, & applicata CO, & diuiſa bifariam RS ducatur quoque diameter LA: Iſti itaque tres diametri ex prop.29. Tract. 24. Coroll. conuenient in idem punctum A, & quia in triangulo RBL eſt vt RL ad TP, ſic LB ad TB, & ſic in alio LS ad TQ, ideo erit RL ad PT, vt LS ad TQ, ideoq; *permutando* RL erit ad LS, vt PT ad TQ, ſed RL, & RS ſunt æquales, ergo etiam PT, & PQ. Ab o itaq; ducatur OD in verticem trianguli BDS, & hæc erit applicata quoque. Nam æquabitur ipſi OC. Probatur autem hoc. Nam TQ eſt ad OD, vt TA ad OA, & TA ad OA, vt PT ad CO. Ergo ex 16. lib.5. TQ erit ad DO, vt PT ad CO; ideoq; *permutando* TQ erit ad TP, vt OD ad CO; ſed PT, & TQ oſtenſæ ſunt æquales, ergo etiam CO, & OD ex 12. l.5. Ergo DO erit applicata, & ideo parallela ipſi RS. Quamobrem cum triangula BCB, & BDC maxima obtineant vertices in parallelis, & applicatis erunt æqualia.

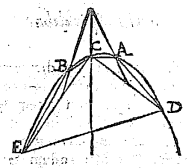


THEOR.

THEOR. III. PROPOS. XLVI.

Cuiuſcumque Hyperbolæ ſegmenta; in quibus capiant triangula æqualia maxima inuicem æqualia ſunt.

*SInt ſegmenta Hyperbolica, in quibus triangula maxima DAC, & CBE caplant. Dico etiam ipſa ſegmenta eſſe æqualia.



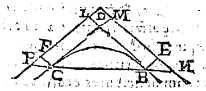
Probatur. Nam reliqua quoque ſegmenta capient triangula maxima, cum ſint inter parallelas DE, & AB ex theſi, & idem dicas de reſiduis, & ſic abſque fine: Inſcribantur itaque ſemper per æqualem numerum procedendo in vtroque ſegmento omnia triangula maxima, quæ inſcribi poſſunt; hęc infinita ſeries æquabit ipſa ſegmenta. Nam ſi non æquaret adhuc reſtaret aliquod ſpatium, in quo triangulum maximum poſſet inſcribi: ſed hęc triangula, vt vt multiplicentur ſemper æqualia perſeuerant, ergo etiam omni poſſibili multiplicatione præſtita æqualia erunt: Quadere ipſa quoque hyperbolica ſegmenta, quæ æquant ſeries poſſibili omni multiplicatione numeroſas erunt æqualia.

Quod verò ſemper multiplicentur æquali numero patet: nam relinquit quodlibet triangulum duo ſpatia, quę duobus triangulis poſſunt inſcribi, & hęc ſingula duo quoque, & ideo quatuor, & hæc octo, & ſic continuè duplicando.

PROB. IV. PROPOS. XLVII.

Si detur Hyperbola Aſymptotis incluſa, & applicatæ extremo ducantur Aſymptotis parallelæ, illa includent ſpatia æqualia.

EXponatur Hyperbola BC, & ab ea ſint duæ parallelæ ductæ BL, & CM à terminis applicatę BC, necnon BB, & CF Aſymptotis PD, & DN. Dico etiam EBDL, & MDCF eſſe æqualia quadrangula.



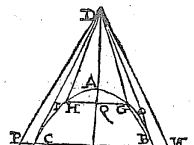
Prob. Producta BC ad aſymptotos in N, & P erũt NB, & CP æquales ex prop.46. vel 66. Tract. 24. de conicis, & ob paralleliſmum linearum EB, & MC, ita erit, NB ad NC, ideſt æquales CP, ad PB, vt BE ad CM. Verùm ob eandem rationem, vt CP ad PB, ſic CF ad BL. Ergo ob ſimilitudinem rationum vni tertiæ ex prop.16. lib.5. erit EB ad MC, vt CF ad BL reciprocè, quare rectangula EL, & FM æqualia ex prop.10. lib.6. Elem.

THEOR. IV. PROPOS. XLVIII.

Si detur Hyperbola aſymptotis ſtipata, & in ea duo ſegmenta conuexa perhibeantur æqualia, erunt etiam ſegmenta concaua æqualia.

SIt Hyperbola BGAHC Aſymptotis ſtipata PD, & ND, & dentur ſegmenta æqualia conuexa BDG, & HIC in ipſa BGAHC: Dico, quòd etiam ſegmenta concaua BDG, & HICD erunt æqualia.

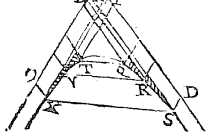
*Probatur. Nam primo triangula GDQ, & HDQ ob eandem altitudinem, & æquales baſes GQ, & QH erunt æqualia: Trapezia quoque QGTB, & CHTQ erunt æqualia ex propoſ.12. tract.29. ob eandem altitudinem cum ſint inter parallelas, & æquales baſes, quæ applicatæ GQ, & QH, & CT, & TB ſunt. Tandemq; idem aſſeras de triangulis BDT, & DTC ob eandem altitudinem DT, & æquales baſes CT, & TB. Ablatis itaq; triangulo DQG, & trapezio TQGB ab æquali toto BDT alteri TDC totſi, cui ſimiliter auferantur partialia prædictis æqualia triangulum HDQ, & trapezium HQCT reliqua remanebunt æqualia BGD, & HDC. A quibus ſi vtrinque auferantur ſegmenta conuexa ex 46.h. æqualia BOG, & HIC remanebunt quoque concaua BOGD, & HDIC æqualia.



THEOR. V. PROPOS. XLIX.

Si ſint ſegmenta in Hyperbola concaua, quæ æqualium parallelogrammorum lateribus contineantur, illa inter ſe erunt æqualia.

*SIt Hyperbola contenta aſymptotis ſuis, ſintque iuxta propoſ.47. huius expenſ. æqualia parallelogramma TA, & QA, necnon, & SA, & XA, relinquent mixtilinea nigra ſuper SQ, & XT.



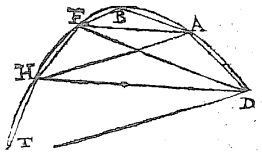
Ducta parallela BV erunt rurſùs parallelogramma VA, & RA æqualia; necnon, & parallelogramma TA, & QA ex eadem prop. & relinquent mixtilinea minora nigra, & ſi ſic ſemper ſubdiuidantur, ſemper ipſa parallelogramma remanebunt æqualia: ſed ſemper minus, & minus mixtilineum relinquent. Multiplicentur itaque vſquedum multiplicari queunt ſubdiuidendo, relinquent minus ſpatium mixtilineum omni poſſibili ſimili ſpatio; ſi enim adhuc ſupereſſet aliquod mixtilineum, tantò magis adeſſet ſpatium pro parallelogrammo mi-

minori constituendo. Quoniam parallelogrammũ quodlibet à mixtilineo deficit segmento concauo nigro. Cum itaque omnis possibilis multiplicatio parallelogrammorum omne spatium mixtilineum absumat, erunt illa parallelogramma æqualia toti segmento concauo OAFTX, sic etiã ex alla parte concauo segmento SDBAQ. Cum itaque series parallelogrammorũ SQAD sit secundum omnes suos terminos æqualis seriei parallelogrammorũ ATXO, & singulæ series æquent segmentum concauum suum, etiam ipsa segmenta concava SRQDAB, & TVXOAF erunt æqualia.

PROBL. III. PROPOS. L.

Dato Hyperbolæ segmento conuexo à dato puncto in ambitu illius ducere rectam, quæ æquale segmentum auferat.

DAtum sit segmentum Hyperbolæ linea AD abscisum, & punctum B in ambitu Hyperbolæ DAT. Ducatur ab A ad B punctum datum linea AB, & huic fiat parallela DF, & ducatur BF. Dico factum esse, quod petebatur, & segmenta lineis DA, & BA abscisa esse inter se æqualia.



Probatur. Quoniam cum sint inter parallelas DF, & AB in ipsis triangula maxima inscribi poterunt æqualia ex propos. 44. huius. Vnde ex prop. 46. huius ipsa segmenta conuexa erunt æqualia: Rursus si AF punctum coniungatur puncto A, & ducatur ipsi AE parallela DH, & FH; segmentum FH erit æquale opposito DA, & ideo segmento BF, & sic in infinitum.

PROBL. IV. PROPOS. LI.

Concauum segmentum alteri æquale exhibere in eadem Hyperbola suis Asymptotis stipata ab assignato puncto.

SIt in Hyperbola pr. 48. h. in asymptotis ND, & NP segmentum concauum BOG, & velit aliquis à puncto H abscindere segmentum, quod sit æquale dato BOG. Ducatur GH ad datum punctum H, & postea illi parallela BC, & coniungantur extrema H, & C vertici D, & erit factum, quòd postulatur.

Patet enim ex pr. 48. h. BDOG triangulũ concauũ æquari triang. cõcauo HICD, vel segmentum segmento.



Quod si cupias segmentum non contineri lineis in verticem D conuenientibus; sed parallelis alteri asymptotorum sit datum segmentum concauum CBPO clausum lineis CO, & BP, & ad destinatum punctum N æquale opor[illegible]at ponere aliud segmentum. Ducatur parallela ad datum punctum N recta BN, & ei parallela CX; deinde ducantur rectæ à punctis N, & X parallelæ asymptoto OA, & dico *segmentum* NMXR *æquari segmento* CPBO.

Probatur. Nam segmentum concauum BCOA æquatur segmento concauo NXRA ex propos. 49. h. Parallelogrammum quoque BAP parallelogrammo NMA, quibus ablatis BAP, & NMA relinquentur BPCO, & XRNM æqualia.

EXPENSIO VII.

De Spatijs Spiralibus.

SPatia spiralia sunt illa; quę diametro spiram generante, vt QA, & spira ipsa continentur, vt est spatium ACEHQA; Horum autem spatiorum proportiones ad spatium circuli inuestigandæ sunt vt ex illis innotescat eorum quadratio.

Præassumptum. Reminiscendum itaque sectores habere eam proportionem, quam rectãgula ex semiarcu subtenso, & radio, si sint diuersorum circulorum; dummodo arcus sint similes, quia eis sunt æqualia, vt diximus propos. 4. h. agentes de circulo. Quadere sectores diuersorum circulorum decrescentium, vel crescentium augmento arithmetico, vel decremento, quorum arcus sint similes; ipsi quoque decrescent, vel se augebunt eadem ratione, qua rectangula diametrorum, & arcuum.

V. g. sector BAQ erit in fig. prop. 53. maior sectore CPQ eodem incremento, quo augetur rectangulum ex dimidio arcu BA, & radio QA. Super rectangulũ ex dimidio arcu CP, & radio CQ. Siquidẽ arcus similes sunt inuicem, vt diametri ex 44. l. 6. Quare ita augebuntur arcus inuicem, & diametri, & ita semidiametri, & semiarcus, scilicet si QA sit 8. partium, & arcus BA octaua pars sui circuli ponatur 8. partium, diameter QL erit 7. partium, & PC arcus eius, octaua pars sui circuli, erit quoque 7. partium, & si MQ sit 6. erit arcus EM octaua pars sui circuli conflatus ex 6. partibus. Quare etiam rectangula ex semidiametro, & semiarcu æqualia sectoribus: se respicient, vt ea rectangula quorum latera arithmetico decremento continuo decrescunt, de quibus supra Tract. 28. Exp. 3. Siquidem deficiunt, horum quoque rectangulorum latera duplici decremento arithmetico. Quare se habebunt ad inuicẽ, vt rectangula AE, & EG, & cet. vsq; ad LK, vt fig. pr. 13. tr. 28. videre potes. Quę sunt facta ex lateribus arithmetico decremento deficientibus BA, & XG vsque ad CL. Ostensum autem ibi est prop. 16. Quòd hæc rectangula in seriem infinitam multiplicata, si simul ponantur ad rectangula integra, & maximo æqualia inuicem, & multitudine prędictis erunt, vt 2. ad 6. Rectangula igitur quoque sectoribus æqualia, quę deficiunt duplici decremento Arithmetico propter radium, & propter arcum deficientes erunt ad integra, vt 2. ad 6. si multiplicentur omni multiplicatione possibili, siquidem quoad vtrumque latus alterum æquale radio alterum æquale semiarcui deficiunt.

THEOR.

PROBL. I. PROPOS. LII.

Spiræ inscribere, vel circumscribere sectores tot, vt sint simul posita omnia spatia inter spiram, sectoremque conclusa minora qualibet data quantitate.

SIt data spira in fig. prop. sequent. ACEHQ, & debeãt circumscribi tot sectores, vt spatium quod relinquunt, vt CAL, sit minus quantitate Z. Redigatur quantitas Z in rectangulum ex tract. 19. prop. 3. & hoc fiat sector QBA primus minor, quod facile fiet. efficiendo triangulum circumscriptum ABQ illi rectangulo ex Z effecto æquale, & sector ipse BAQ minor triangulo erit minor quoque, quàm Z. Dico, quod si reliqui sectores æqualis anguli apud Q circumscribantur æquali defícientes diminutione AL, & CM, vt diximus tract. 18. prop. 9. posse fieri, relinquent ij sectores, vt BAQ, & cęt. quantitatem minorem, quam Z.

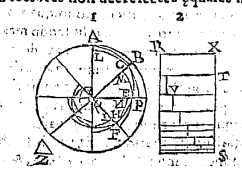
Probatur. Quia differentię BACL, & CPEM, & EFNH, & alię omnes æquant, vt patet BAQ sectorem minorem, quam Z. Ergo omnes simul differentię erunt minores, quam quantitas Z, & tantò minores, si sumamus differentias non quibus inuicem differunt, sed quibus differunt à spira, vt BAC, CPE, EFH exteriores, vel interiores ACL, CEM, EHN.

THEOR. I. PROPOS. LIII.

Spiræ primæ circumscripti sectores habent proportionem ad sectores circuli spiram comprehendentis maiorem; quàm 2. ad 6. & sectores spiræ inscripti habent minorem proportionem ad illos, quam 2. ad 6.

*SIt spira ACEH vsque ad Q, quæ est prima, & circulus illam complectens, cuius radius AQ. Sectores circuli sint octo; quorum vnus est BAQ. Sectores circumscripti sint BAQ, & CPQ, & EFQ, & cæt. Inscripti LCQ, & MQE, & NHQ, & cæt. Circumscriptique erunt 8. cum maximo, at inscripti, quia excludunt maximum, erunt septem. Itaque vt in præass. Arithmeticè decrescentes sectores sunt ad sectores non decrescẽtes æquales numero,

1 2



vt rectangula similiter decrescentia TR, TV ad numero æqualia sed non decrescentia rectangula, sed hæc decrescentia sunt magis, quàm 1 ad 3. incluso maximo, & minus eo excluso maximo ad tot rectangula non decrescentia æqualia. Ergo tales quoque erunt sectores, & omnes octo sectores decrescentes arithmeticè incluso maximo, vt BQA & CQP, & EQF, & cęt. erunt ad octo maximos, vt QBA æquales inuicem magis, quam 1 ad 3. at septem sectores CQL, MQE, & NHQ minus, quam 1. ad 3. ad octo maximos, & sic semper erit quocumque numero maiori sectorum electo, & sine vlla meta multiplicato.

THEOR. II. PROP. LIV.

Spatium à spira prima, & radio ad eius initium ducto conclusum est ad circulum suum, vt 1. ad 3.

SIt spatium ACEHQA spira ACEHQ, & radio QA clausum. Dico, quòd hoc spatium ad totam planitiem circuli est, vt 1. ad 3. vel quod idẽ 2. ad 6.

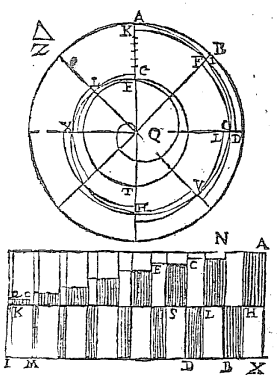
* Probatur. Nam spatium ACEHQA prædictum non est maius, aut minus, quam $\frac{1}{3}$ totius circuli. Ergo æquale erit. Primò enim si illud spatium est maius, sit minus quãtitate aliqua Z, & tot spiræ sectores inscribantur ex 1. h. donec spatiũ inter spiram arcũq; inscripti sectoris clausũ sit minus quãtitate proposita Z, qua spatium à spira, radioque conclusum ACL, & cętera omnia superant tertiã partẽ circuli. Cum itaque spatium radio, spiraque clausum sit maius tertia parte circuli consequenter spatium sectoribus contextum CLQ, & MEQ, & cæt. erit maius tertia parte circuli, cùm spatium inter spiram, sectoremque arcus interceptum quale vnum ex ipsis CAL sit minus eo spatio, quo spatium spira, radioquẽ clausum tertiam partem circuli superat. Quòd autem spatium sectorum inscriptorum, qui primo, & maximo excluso BAQ incipiunt à sectore CLQ habeat maiorem proportionem, quam 1. ad 3. ad circulum, ideſt tertia parte circuli sit maius, hoc est contra præcedentem demonstrationem, ideoque absurdè esset minus, & maius sectorum spatium tertia parte circuli. Si verò asseratur spira, radioque spatium conclusum esse minus, quam tertia pars circuli. Sit minus quantitate Z, & deinde tot sectores circumscribantur, & sit adeo numerosa multitudo sectorum, vt spatium arcubus sectorum, spiraque interceptum CBA, & PCE, & cęt. sit minus quantitate Z. Spatium itaque sectoribus clausum minus erit tertia pãrte circuli, cum illud spatium interceptum inter spiram, & sectorum arcus sit minus spatio Z, quo spirale spatium minus est tertia parte circuli: Sed supra ostensum est sectores circumscriptos cum includant maximum conficere spatium maius, quàm tertia pars circuli: Ergo esset maius. & minus, quod esse nequit.

THEOR. III. PROPOS. LV.

Sectores inscripti spiræ secundæ habent proportionem ad primum circulum minùs quàm 7. ad 3. & circumscripti ad eundem circulum maiorem proportionem obtinent, quàm 7. ad 3.

SIt spira in secunda sua reuolutione AFCVHXLE; & inscripti sectores FKQ, & FCQ, & cęt. Dico hos sectores habere proportionem ad sectores tot numero, vt EQF, seu ad circulum primæ reuolu-

tionis ET, cuius radius EQ, vt 7. ed 3. Sectores verò circumſcriptos, vt BAQ, & IDQ habere maiorem pr oportionem ad eundem circulum ET, quam 7. ad 3. Quod vt oſtendatur fiant rectangula illis inſcriptis æqualia BC, & DE, vſq; ad K necnon etiam circumſcripti s æqualia rectangula BA, & BC, & DE, quę deficient, vt ſectores arithmetico decremento, & primum AB æquabitur primo ſectori BAQ. Cum itaque hæc rectangula decreſcentia ſe habeant ad rectangula XH, & cęt. primi circuli ſectoribus æqualia magis, quàm, vt 7. ad 3. vt oſtenderur incluſo maximo, & minus, quàm 7. ad 3 eo excluſo, ſequitur, quòd etiam ſectores illis æquales incluſo maximo ſe habeant ad ſectores primi circuli magis, quàm 7. ad 3. & minus excluſo maximo, quàm 7. ad 3.



Oſtendendum itaque eſt rectangula AB, & BC, & cęt. decreſcentia ſe habere ad rectangula primi circuli ſectoribus æqualia magis, quam 7. ad 3. & rectangula BC, & DE, & cęt. excluſo maximo minus, quã 7. ad 3. Siquidem ſector BAQ maximus eſt ad ſectorẽ EQL circuli primi, vt circulus maior ad circulum minorem: ſed circulus ad circulũ eſt quadruplus cum ſit ſupra duplò maiorem diametrum. & ideo duplicatam diametrorum habeat rationem ex prop. 21. lib. 6. duplicata verò proportio 2. ad 1. eſt 4. ad 1. ſed etiam rectangulum AB ad HX ſe habet, vt 4. ad 1. Ergo cùm rectangulum AB æquetur ſectori BAQ ex conſtructione etiam rectangulum HX, ſeu HN æquabitur ſectori EQL circuli primi. Conſiderandum autem eſt, quòd in tota progreſſione decreſcente HX, BL, & DS, & cæt. vſque ad 1 perſeuerant integra. Deinde rectangula nigra AH, & LN, & ES, vel HB, LD, & cęt. perſeuerantia eiuſdem altitudinis ex pr. 12. Tr. 28. de progr. planitierum erunt dimidium rectangulorũ omnium æqualium BL, & DS, & allorum vſque ad 1. Sic eorum complementa nigra HA, & NL, & c., & aliorum vſque ad K ipſis æqualia ex prop. 35. lib. 1. quapropter erunt cum alijs rectangulis nigris, complementiſque ſuis æqualia rectangulis albis BL, & DS, & cęt. quæ æqualia perſeuerant; ſiquidem duo dimidia integrum æquant. Vnde ſi ſumamus omnia ſimul rectangula integra XH, & BL, & cęt. vſque ad 1, & complementa vtraque nigra decreſcentia HB, & LD, ſic AH, NL, & CS vſq; ad K erunt totę planities duplæ planitierũ XH, BL vſq; ad 1, quæ integræ perſeuerant, ſcilicet, vt 2. ad 1, vel vt 6. ad 3.

Quia verò HN, & LC, & SE, & cęt. vſque ad 1 duplici decremento arithmetico hinc, & inde quo ad vtrumq; latus deficiunt, & primum, maximumque HN demonſtratum eſt æquale maximo ſectori ELQ, & ideo maximo rectangulo ſibi æquali præc. propoſ. decrementa omnia ex Theſi ſunt æqualia decrementis rectangulorum præc. propoſ. rectangula LC vſquè ad KQ erunt ſingula ſingulis prædictis æqualia; Ideoque ad tot numero rectangula integra HN ex prop. 13. Tract. 28. ſe habebunt magis, quam 1. ad 3. incluſo maximo HN vtrinq; Propterea que cum rectangula, quę integra perſeuerant, & deficientia complementa ſe habeant ad integra tantum, vt 6. ad 3 ſi iſtis addes rectangula HN cum deficientibus LC vſque ad KQ erunt ad rectãgula integra tot numero HN, vel HX, BL, DS vſq; ad 1 magis, quam 7. ad 3 ex prop. 32. Tract. 28. de propor. rationũ. Verùm ſi demas ab vnaquaque ſerie maximum ſcilicet XH, & HA, & HB, & HN, ſeries LC vſque ad KQ deficiens ad ſeriem non deficientem BL, & DS conflata ex pari multitudine terminorum erit minus, quàm 1. ad 3. & ideo cum ſerie rectangulorum prædictorum æqualium BL, & complementorum nigrorum, ſcilicet tota rectangula BC, & DE, & cęt. ſe habebit ad ſeriem rectangulorum non deficientium XH, & aliorum minus, quàm 7. ad 3. quòd remanſerat oſtendendum.

COROLLARIVM.

HInc eſt, quod cum ex 41. lib. 6. circuli inter ſe ſint, vt ex diametris quadrata, quod ſi ponamus primum circulum 3. cuius radius EQ ſecundus erit 12. nempe vt quadratum EQ ad quadratum QA. Vnde rectangula circumſcripta ſpirę ſecundę ſe habebunt ad circulum eundem QA magis, quam 7. ad 12. & inſcripta minus, quam 7. ad 12.

THEOR. IV. PROPOS. LVI.

Circulus ſecundæ ſpiræ eſt ad ſpatium ab ipſa ſpira, ſemiradioque clauſum, vt 12. ad 7.

SIt ſpatium EA recta, & ſpira ſecunda ACHXE concluſum. Dico, *quòd circulus, cuius radius* AQ *ad hoc ſpatium ſe habet, vt 12. ad 7.*

* Probatur. Nam ſectores circumſcripti, & decreſcentes BAQ, & FCQ & cęt. vſque ad LEQ oſtenſi ſunt ex Coroll. præced. propoſ. in maiori proportione maximum BAQ includendo, quàm 7. ad 12. & inſcripti deficientes KQS excludendo maximum in minori proportione, quam 7. ad 12. demonſtrati ſunt ad ſectores maximos numero æquali multiplicatos. Si ergo ſpatium ſpiralę non ſit ad circulum, vt 7. ad 12. erit ad quid minus, aut maius. Malus itaque ſit primo, quam 7. partes, in quas circulus diuiſus eſt ſpatio Z. Et tot inſcribantur ſectores donec omne ſpatium, vt KFA, & FCI, & cęt. quòd inter arcus ſectorum, & ſpiram intercluditur ſit minus, quàm ſpatium Z. Ergo erunt omnes iſti ſectores maiores, quam 7. partes ex 12. in quas circulus diuiſus eſt: quia à ſpatio ſpirali maiori, quam partes 7. illarum, in quas circulus diuiſus eſt in ſpatio Z minus differunt, quam 7. quod eſt abſurdum; cum oſtenſum ſit ſectores inſcriptos

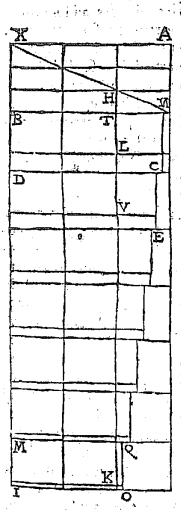
ſcriptos ad totum circulum ſe habere minori in proportione, quam 7. ad 12.

Si verò aliquis dicat eſſe minus ſpatium ſpirales quam partes 7. & ijs, in quas 12. circulus ſuus diuiſus eſt. Circumſcribantur tot ſectores donec omne ſpatium, quod arcu ſectorum, & ſpira claditur ſit minus, quàm ſpatium Z: tunc ſectores circumſcripti erunt minores. quàm 7. partes ex ijs 12. in quas circulus partitus eſt, cum minus differant à ſpatio ſpirali minori, quam partes 7. minori differentia, quam Z ſpatium, in quo ſpirale ſpatium partibus 7. minus euadit: Hoc autem eſſe nequit cùm ſectores circumſcripti oſtenſi ſint obtinere proportionem maiorem ad 12. quàm 7. ad 12. Ergo cum non poſſit eſſe, aut maius, aut minus ſpatium ſpirale ARCVMXEA; quam 7. partes ex partibus 12. circuli, erit ad circulum, vt 7. ad 12, *& conuertendo* circulus ad ſpirale ſpatium, vt 12. ad 7.

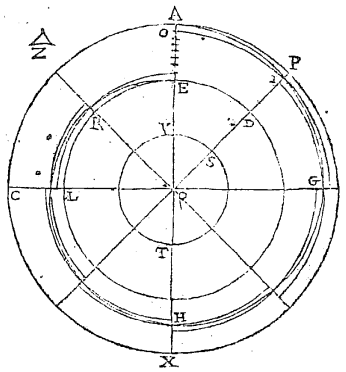
THEOR. V. PROPOS. LVII.

Sectores inſcripti tertiæ ſpiræ habent minorem proportionem ad primum circulum, quam 19. ad 3. & circumſcripti maiorem proportionem, quàm 19. ad 3.

SIt ſpira in tertia circumuolutione AIGH, vſque ad E, & dia meter circuli ſpiram comprehendentis QA triplus diametri primæ ſpirę TY; erunt circuli in ratione duplicata ſuorum diametrorum; Ideoque circulus tertiæ ſpirę QAX erit ad circulum primę ſpiræ TY, vt 9. ad 1. ex 41. lib 6. Quare ſinguli ſectores ſimiles eius ad ſectores circuli TY primæ ſpirę ſe habebunt, vt 9. ad 1. Fiant itaque rectangula AB, BC, & DE, & cęt. æqualia ſectori PAQ tertiæ ſpirę, & ſectoribus alijs deficientibus, & rectangulum primũ AB ſe habeat ad rectangulũ HN, vt 9. ad 1. eritque rectangulum HN æquale ſectori maximo ſimili circuli YQS primę ſpirę cumque ceteri LC, & VB, & cęt. deficiant æqualibus decrementis arithmeticis ſecundum vtrũque latus, ac rectangula primæ ſpirę, vt in fig. 2. pr. 53. hinc ſingula ſingulis erunt æqualia; Quamobrem ad rectangula æqualia, & non deficientia incluſo maximo vtrinque HN magis erunt, quam 1. ad 3. at excluſo maximo, minus quàm 1. ad 3.



Iſtis itaque rectangulis decreſcentibus adde pari numero rectangula, quę eadem perſeuerant XH, & BL vſque ad KM, & cęt. quæ ſe habent, ad HN, vt 4. ad 1. & inſuper rectangula BH, & LD, & alia, quæ decreſcunt ſecundum vnicum latus decremento arithmetico, quę etiam dupla ſunt rectanguli HN; & erunt ad integra NH, vt 1. ad 1.; ſiquidem ob decrementum arithmeticum pro dimidio deficiunt ex prop. 12. Tract 27. & ideo efficiuntur ei æqualia, quibus adde æqualia complementa, ſimiliterque deficientia HA, & cęt. vſque ad KQ, & cum prædictis erunt dupla ipſorum, ſcilicet, vt 2. ad 1. & cum rectangulis quadruplicibus XH vſq; ad MK erunt, vt 6. ad 1. ſeu, vt 18. ad 3. Adde itaque inſuper rectangula duplici arithmetico decremento deficientia HA, & LC, & cęt. vſque ad KO, quæ addito HN ſe habent magis, quam 1. ad 3.



Ideoque tota ſeries rectangulorum XN, & BC, & DE deficientia incluſo maximo XN, cuius ſinguli termini prædictis rectangulis partialibus conſtant, erit ad rectangula HN æquali numero ſumpta non deficientia magis, quàm 19. ad 3. At ſi à ſingulis ſeriebus excludas maximum, & ideo rectangulum XN, erit tota ſeries rectangulorum BC, & DE vſque ad MO ad totam ſeriem rectangulorum æqualium inuicem, & multitudine prędictis HN minùs, quàm 19. ad 3. Cum itaque ſectores circumſcripti ſinguli ſint æquales ſingulis rectangulis; ſiquidem ita deficit rectangulum, vt ſector quilibet circumſcriptus ex hypotheſi, & æqualibus decrementis, & ſectores circumſcripti includant maximum PAQ, ſectoreſque circuli primæ ſpiræ SVQ, omnes ſint æquales oſtenſi rectangulis HN æqualibus inuicem; Sequitur, quod ſectores PAQ, & cæteri circũſcripti deficientes ſe habeant ad ſectores circuli YSQ primę ſpirę magis, quã 19. ad 3. Sectores verò inſcripti OIQ, & cæt æquales rectangulis BC, & DE. & cęt. maximũ excludentes minus, quam 19. ad 3. ad ſectores circuli primę ſpirę SVQ, & cęteris æqualibus, & qui numero ſectoribus deficientibus reſpõdeãt.

COROLLARIVM.

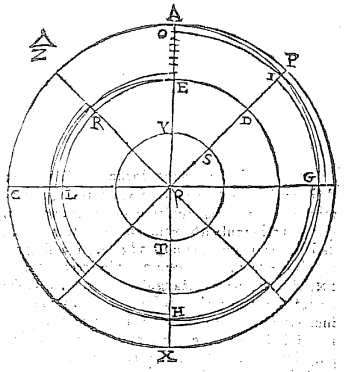
CIrculus tertiam ſpiram comprehendens iuxtà Coroll. prop. 21. lib. 6. eſt ad circulum primæ ſpiræ, vt 27. ad 3. cum ad illum obtineat diametri proportionẽ duplicatã 9. ad 3. Quamobrem cum rectangula æqualia ſectoribus circumſcriptis tertiæ ſpiræ ſint ad rectangula omnia æqualia ſectoribus primi circuli, vt 19. ad 3 erunt ad ſectores æquales tertij circuli, & ideo ad ipſum circu-

lum, vt 19. ad 27. & paulò ampliùs, quia includunt maximum. At inscriptis sectoribus æqualia rectangula ad rectangula æqualia sectoribus primi circuli, quia sunt minùs, quàm 19. ad 3. & ideo quoque sectores inscripti sectoribus circuli primi æqualibus sint minùs, quam 19. ad 3. erunt ad sectores omnes tertij circuli, & ideo ad ipsum tertium circulum minùs, quam 19. ad 27.

THEOR. VI. PROPOS. LVIII.

Spiræ tertiæ spatium comprehensum est ad circulum eam claudentem, vt 19. ad 27.

*PRobatur eodem modo ex propos. 54. h. Nam spatium spira conclusum AGHLEA non est maius, aut minus, quàm 19. partes, quarum circulus eam comprehendens continet 27. Ergo erit ad circulum vt 19. ad 27. Nam si potest esse maius sit maius quantitate z, & sectores inscripti adeò multiplicentur, vt propos. 52. Tract. h. vt spatium AIC, & alia omnia inter spiram, arcumque sectoris internum conclusa simul sumpta sint minora,



quantitate z. Quia itaq; ex aduersarijs spatiũ ipsũ spirale est maius partibus 19. erit etiam multitudo sectorũ maior, quã partes 19. ex 27. circuli partibus, cum sectores differant minùs à spatio spirali, quã quod ipsum spatium spirale differt à partibus circuli 19. Hoc autem esse nequit; cum inscripti sectores sint minùs, quàm 19. partes circuli maximi partibus 27. constantis, vt propos. præced.*

Si verò affirmetur, quòd spatium spirale sit minùs, quàm partes 19. quarum circulus includens est 27. Sit defectus spatiũ z, & tot circũscribãtur sectores, vt spatia omnia, vt IPA inter spiram, arcusq; sectorum ambietiũ intercepta simul sumpta sint minus, quam spatium z, tunc sectores, qui minus differunt à spirali spatio minori partibus 19. quàm partes 19. differant ab ipso spatio spirali erunt minora, quàm partes 19. vnde se habebunt ad circulum claudentem minus, quàm 19. ad 27. contra ostensa propos. 57. h. Cum itaque spirale spatium, nec maius esse possit, nec minus, quam 19. ad 27. eam proportionem consequetur quam 19. ad 27. quod demonstrandum erat.

THEOR. VII. PROPOS. LIX.

Spira prima ad secundam est, vt 1. ad 6. & secuda verò ad tertiam se habet, vt 1. ad 2. & sic tertia ad quartam, &c.

PRobatur. Nam repetita figura propos. 55. h. sit spatium primum spirale QE, & secundum ACHXEA. Dico itaque, quod primum spatium spirale ad secundum se habet, vt 1. ad 6.

** Probatur. Nam prima spira est ad suum circulum, vt 1. ad 3. hic verò ad circulum secundum, vt 3. ad 12. Quare prima spira se habebit ad circulum secundum, vt 1. ad 12. secunda spira est ad circulum suum, vt 7. ad 12. Propterea quæ cum istæ proportiones habeant eosdem terminos ex prop. 7. de propor. Tract. 17. se habebunt ad inuicem, vt fundamenta 1. ad 7. Sed spatium spirale 7. comprehẽdit ipsam spiram minorem cum suo circulo; clauditur enim spira ACHXE, & portione radij EA, ideoq; subducta spira prima EQ, remanebit secunda 6. Vnde prima spira se habebit ad secũdã, vt 1. ad 6.*

Probatur etiam secunda pars. Nam tertia spira habet proportionẽm ad suum circulum, quam 19. ad 27. & circulus iste ad primum est, vt 27. ad 3. & circulus primus ad spiram, quam claudit est, vt 3. ad 1. ideo ex æquo spira tertia ad primam erit vt 19. ad 1. Cum ergo tertia spira cum secunda, & prima sit 19. ablata prima erit 18. & secunda, quæ est 7. remanebit 12. Quare habebit secunda spira ad tertiam proportionem, quam 6. ad 12. nempe subduplam.

Quòd verò reliquæ spiræ minores ad immediatè maiores subduplam proportionem seruent, patet. Nam iuxta modũ probandi adhibitũ antecedentibus propositionibus quarta spira se habebit ad suum circulum, vt 48. ad 48. ablata verò prima secunda, & tertia spira, quod spatium est 19. partium remanebit spira quarta 24. ad tertiam spiram quæ est 12. nempe 2. ad 1. vel conuertendo tertia ad quartam, vt 1. ad 2. & sic de reliquis.

COROLLARIVM I.

VNde cum noueris circulum, in quo prima spira describitur, facilè inuenies aream cuiuslibet spiralis quantitatem. Nam V.g. sit quinta spira, & circulus primæ reuolutionis sit 35. partium. Inuenietur primo proportio reuolutionis quintæ ad primum circulum, qui ponatur 3. Itaq; iuxta tradita, quia ita est sector ad sectorem, vt circulus ad circulum, & rectangula sectoribus æqualia, & pariter progressiones eorum; ideo rectangulum æquale sectori spiræ quintæ ad rectangulũ æquale sectori spiræ primæ se habebit, vt 25. ad 1. vel vt 75. ad 3. cum latera se habeant, vt 5. ad 1. Ideoq; si in fig. 1. pr. 57. ponas latus XB esse 5. partiũ rectãgulũ AB æquale sectori quinti circuli erit partiũ 25. ad 1. vel 75. ad 3. rectãgulum verò XH, cuius latus erit, minus vnica parte erit, vt 16. ad 1. ideoque triplatum erit vt 48. ad 3. rectangula verò HB, & HA deficientia pro suo dimidio se habebunt, vt bases, nempe quodlibet, vt 4. ad 1. & simũl, vt 8. ad 1. & quia deficiunt pro dimidio rursus, vt 4. ad 1. & ideo, vt 12. ad 3. & cũ non deficientibus AB, vt 60. ad 3. si verò addas rectãgula HN, quæ deficiunt circuli sui $\frac{1}{7}$: ideo omnia simul se habebunt ad circulum primæ spiræ, qui ponitur 3. vt 61. ad 3. Et erit inuenta

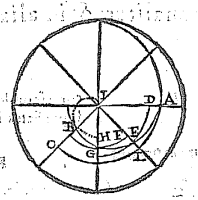
uenta pr oportio primi circuli ad quintam spiram. Quã ob tentã dices adhibendo regulam proportionum, si 3. dant 61. quid 35. ideoque calculus prodet 711/3 pro quintæ reuolutionis spatio posito primo circulo partium 35.

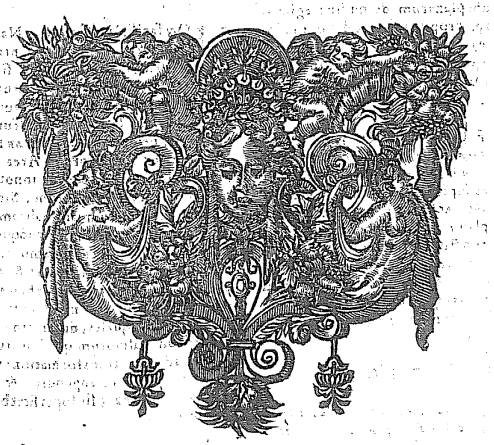
THEOR. VIII. PROPOS. LX.

Spiralis spatij sectio est ad suum sectorem maximum circuli maximi comprehendentem eam sectionem, vt rectangulum ex lineis eam terminantibus simul, & triens quadrati ex earundem differentia ad quadratum diametri circuli prædicti maximi comprehendentis.

SIt datum segmentum spirale AGB, quod cõcludat spatium IAB. Dico, quod hoc spatium ad sectorem comprehendentem ALC habet eam proportionem, quam rectangulum ex IB, & AI, vel IC æquali vnà cum quadrato ex differentia BC ad quadratum ex diametro IA, vel IC.

Probatur. Nam si fiant rectangula deficientia æqualia sectoribus singulis inscriptis, & deficientibus omni possibili multiplicatone multiplicatis AIL, DEI, EGI, & HIB, & cæt. hæc rectangula erunt ad rectangula æqualia quantitate sectoribus non deficientibus, & inuicem, at numero prædictis deficientibus ex prop. 19. tract. 23. Cor. vt rectangulum ex maximo, à quo incipit, & minimo latere, ad quem peruenit propressio cum triente quadrati ex differentia eorundẽ laterum ad rectangulum totum maximum. Ergo etiam sectores ipsi similiter multiplicati, & ijsdem rectangulis singuli singulis æquales arithmetico decremento deficientes, sed non vsque ad vltimum sui ab A vsque ad B, & ob omnem eorum multiplicationem omnimodam possibilem, spiram æquantes, habebunt ad sectores integros æquales numero prædicto, & quantitate inuicem eandem proportionem, eruntque, vt rectangulum ex AI, & IB maximo, ad quem terminat cum triente quadrati ex BC differentiæ ad rectangulum ex AI, & IC hoc est quadratum AI.





TRACTATVS XXXI.

De Tranformatione ſuperficierum corpora circumueſtientium.

SVperficies, quæ corpora circundant aliæ ſunt curuæ, aliæ planæ, de planis ſupra ſatis eſt actum. Vnde breuiter ab hoc nos expediemus negotio. Curuarum ingenioſior difficiliorque ſpeculatio. Quapropter in ea magis immorabimur datorum corporum regularium, rotundorum, vel ſemirotundorum ſuperficiebus planas æquialentes, ſeu proportionales indigitando, & quibus modis poſsint, & partiri, & augeri, & minui proportionaliter; & in alias operationes mathematicas cogi.

EXPENSIO I.

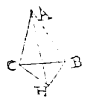
De transformatione ſuperficierum corporum planis contentorum.

TRansformatio ſuperficierum planarum, quæ corpora ambiunt, non differt à transformatione ſuperficierum planarum de quibus egimus expenſ. 1. tract. 19. propterea que ſufficiet eas indigitaſſe: ſed vt ea, quæ dicentur expeditiùs capiantur accipe corporum regularium planis contentorum ex 11. lib. Euclid. definitiones, quæ nondum hauſtæ ſunt.

DEFINITIO I.

PYramis eſt figura ſolida, quæ planis continetur ab vno puncto ad idem planum terminantia.

Videlicet ſi tres ſuperficies, vt in fig. prop. 2. BAC, ACH, & BAH conueniant à plano BCH, quod eſt baſis in punctum A hoc corpus pyramis dicetur, quæ poteſt obtinere, nedum tres ſuperficies, quæ in vnũ punctum A conſpirent: ſed etiam quatuor, & quinque, prout baſis BHC latera multiplicat.



DEFINITIO II.

PRiſma eſt figura ſolida planis ſuperficiebus parallelis contenta, quarum duæ, quæ bajes vocantur, ſunt æquales, & ſimiles.

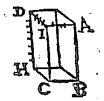
Itaque Priſma eſt velut figura ſequentis prop. ED, cuius baſes AD, & EH ſunt æquales, & ſimiles; poteſt verò Priſma obtinere præter baſes tres, aut quatuor, aut quinque ſuperficies, prout altera baſium multiplicat latera, ex quibus ſuperficies laterales conſurgunt. Quia verò latera baſium correſpondentia ſunt æqualia, & parallela, patet, ſuperficies laterales parallelogrammas eſſe.

PROBL. I. PROPOS. I.

Omnes Priſmatis ſuperficies menſurare, & in vnicam planam ſuperficiem redigere.

HOc facilitèr efficitur. Nam quoad menſurationem, cùm omne priſma ſuperficiebus parallelogrammis conſtet, ſingulæ iuxta dicta tract. 29. ex prop. 3. per mutuum laterum eas ambientium ductum inuenientur; Propter quod cognitis tribus lateribus cuiuſcumque ſuperficiei priſmatis, nempe altitudinem AB 10. palmorum, & latitudinẽ AI 3. palmorum, Area AC multiplicatis inuicem lateribus 3. per 10. innoteſcet, quæ erit 30. palmorum quadratorum; Sic cognito latere DI 4. palmorum cum iam habeamus notum latus AB, ſeu CI, obtinebimus quoque aream DC 40. palmorum ex mutua eorum multiplicatione: Area verò DA ex notis lateribus DI, & AI 12. palmorum prodibit: Itaque tres ſuperficies ſimul erunt 82. palmorum quadratorum, & quia aliæ tres reſtant iſtis ſingulæ æquales, duplicato numero 82. erunt omnes 164. palmorum quadratorum.

Quoad verò transformationem facilè fiet ex Expenſ. quarta de augendis, & minuendis fig. tract. 29. Si vni ex ipſis ſuperficiebus cæterę omnes addantur.



PROBL.

PROBL. II. PROPOS. II.

Pyramidis areas inuenire ex notis lateribus, & in vnicam planam ſuperficiem componere.

FAcilis quoque euadit menſuratio arearum alicuius pyramidis, ex notis lateribus. Nam cum ſingulæ laterales ſuperficies V. g. BAC ſint triangula; baſes verò ſint ſuperficies planæ vt BCH vel triangulares, vel pluribus lateribus conſtantes ex dict. prop. 17. & 19. Tr. 29. Planimetrici, earum menſuratio dignoſcitur, ſi ſingula triangula, ſeu ſcalena, ſeu iſoſcelia ad menſuram redigantur, vt ibi docemus, & ſi baſis ſit polygona inuenietur eius area iuxta dicta propoſ. 29. Tract. 20. eiuſdem. Quaderè collectis tandem in vnam ſummam omnibus areis, tum triangulorum lateralium, tum baſis ſubtenſæ, conficient menſuram areæ totam Pyramidem ambientis.

Ad ſecundam propoſ. partem operi conſignandam videatur expenſ. 4. Tract. 29. de augment. & diminutione fig. Ibi enim docemus modum reuocandi plurima triangula diuerſę altitudinis in vnicum triangulum. Quapropter ſi omnia triangula Pyramidis datæ in vnicum transferantur, & baſis quoq; multilatera in triangulum iuxta dicta pr. 20 tract. 29. de transformatione fig. transfundatur, & hoc triangulum quoque cum alijs in vnam ſuperficiem reſtituatur, hęc ſuperficies, ſeu triangularis ea ſit, ſeu quadrata erit æqualis ſuperficiei pyramidem circumueſtientis.

PROBL. III. PROPOS. III.

Omnium corporum regularium dato vno latere areas inuenire.

QVoniam quodcumque corpus regulare conſtat ſuperficiebus vnius tantum generis V. g. triangulis quatuor, vt pyramis, aut octo, vt octaedrum, aut viginti, vt Icoſaedrum, vel ſex quadratis, vt cubus, vel duodecim pentagonis, vt duodecaedrum; Ideo cognito vnico latere, per ea, quæ dicta ſunt prop. 19. Tract. 20. tota ſuperficies vnius trianguli, vel quadrati, vel pentagoni agnoſcitur, & cum omnes vnius cuiuſcumque generis ſint inuicem æquales, ideo cognita vna, omnes alię patebunt. Quare per numerum ſuperficierum V. g. ſi ſit pyramis per quatuor, ſi cubus per ſex, & cęt. totam ſummam ſuperficierum corpus regulare circundantium component. Vt verò latera harum figurarum inueniantur, ſi fortè aliunde non pateant, docebimus, cùm de ſolidis agemus.

COROLLARIVM.

IDem tandem præſtandum in omni corpore, cuiuſcumque generis, & irregulari, dummodo ſingulorum planorum, quibus conſtat latera noueris; eadem enim eſt ratio de omnibus.

COROLLARIVM II.

SI verò cupias ſuperficies illas iuxta datam proportionem augere, vel minuere, idem agendum in ſingulis, quod, & de ſuperficiebus planis prop. 23. tract. 19. Et deinde omnibus ſimul conglobatis, & in corporis ambitum redactis, ſeu factis ſuperficiebus alicuius corporis illis adauctis æqualibus obtinebimus corpus; quod ſuperficies conſequetur iuxta datam proportionem maiores, vt autem conſtituatur corpus regulare, id ſuo loco reſeruamus, cum de corporibus.

EXPENSIO II.

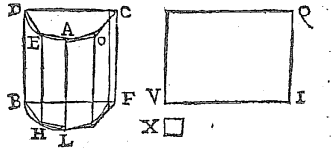
De ſuperficie Cylindrica.

CYlindri ſuperficies eſt radix, primaque origo, ob quam cętere ſuperficies rotundæ tetragoniſmo ſubijciantur, & ad aliquam figuram planam reuocentur, Ideo hìc in primis de ea agendum, vt eſt ſuperficies cylindri circularis.

THEOR I. PROPOS. IV.

* *Superficies Cylindri recti eſt æqualis ex axe, & peripheriæ lineæ æquali conſtituto rectangulo.*

SIt Cylindrus CDFB: Dico, quod, ſi fiat rectangulum, cuius altitudo IQ, æquet altitudinem DB, & latus IV peripheriam CAD; hoc inquam rectangulum ſuperficiei Cylindricę æquabitur. Quod ſi ab aliquo negetur; & ſuperficies FLBCAD



Cylindrica non æquat rectangulum QV; erit, aut maior, aut minor ipſo rectangulo QV. Sit ergo primo maior, differentiaq; ſit quantitas x, quam ſi non haberet eſſet rectangulo QV æqualis, ideo diceret rectangulo FD eandem proportionem, quam eidem dicit rectangulum QV ex prop. 7. lib. 5. Inſcribãtur itaque tot rectangula BE, & HA, & cęt. donec ſit minor differentia inter ipſa, & ſuperficiem cylindricam, quam quantitas x, dicent itaq; ad quadratum FBCD maiorem proportionem, quam rectangulum QV, quia minus differunt, à ſuperficie maiori cylindrica.

Verùm etiam dicerent minorem proportionem omnia rectangula inſcripta DH, & EL, & cęt. ad rectangulum CB, quam QV, ergo dicerent maiorem, & minorem proportionem ad FD rectangula inſcripta, quam QV, vnde ex prop. 8. lib 5. eſſent maiora, & minora ipſo rectangulo QV, quod eſt abſurdum.

Id autem oſtenditur, nam rectangula inſcripta DH, & EL

& EL, & cęt. cum ſint eiuſdem altitudinis, ac rectang QV ſe habebunt ad inuicem, vt baſes ex 16. ſed baſes, vtpote inſcriptę ſunt minores peripheria, & ideo æquali peripheriæ latere IV. Ergo etiam rectangula inſcripta HE, & EL, & cęt. erunt minora, quàm QV. Vnde ad CB rectangulum minorem proportionem dicerent. Itaque diceret proportionẽ ad rectangulũ CB ſimul, & maiorẽ, & minorẽ. & eſt impoſſibile. Quod ſi dicatur Cylindrica ſuperficies minor rectangulo QV ſit differentia quantitas X. Circumſcribanturque rectangula FO adeo multiplicata, vt differat eorũ ſuperficies à ſuperficie Cylindrica minùs, quàm quantitas X; ideo quia eſt minor Cylindrica ſuperficies rectangulo QV ex aduerſarijs, minor quoque differentia ab ipſa, dicent minorem proportionem ad rectangulum BFCD, quàm rectangulum QV; quia minùs differunt à minori ſuperficie cylindrica, ſed hæ rectangularum circumſcriptorũ baſes, vt OC, vtpote circumſcriptę ſimul sũt maiores peripheria Cylindrica, & ideo latere IV, quare cum rectangula OF obtineant eandem altitudinem erũt ſimul maiora rectangulo QV, cũ ſe referant vt baſes; quare ad rectangulũ FBCD dicent maiorẽ proportionem. Ideſt maiorem ſimul, & minorẽ, quod impoſſibile eſt. Cum ergo ſuperficies Cylindrica non poſſit eſſe, aut maior, aut minor rectangulo QV; erit æqualis, quod vult propoſ.

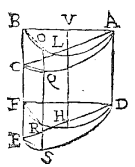
THEOR II. PROP. V.

* *Cylindri etiam obliqui ſuperficies dummodò baſes parallelas habeat, eſt æqualis parallelogrammo eiuſdem altitudinis, ac eius axis, & cuius alterum latus ſit æquale circumferentiæ alicuius planiſecantis, ad axem recti.*

SIt Cylindrus ACDE obliquus quoad baſes AQC, & DSE: Sitque circulus DRP rectus axi LH. Dico *eius ſuperficiem eſſe æqualem* rectangulo altitudinis HL, & cuius alterum latus æquet peripheriam DRF plani ad axem recti ſecantis cylindrum.

Prolungetur cylindrus in B, ſitque linea CB æqualis lineæ EF, quà planum obliquum maximè à recto elongatur. Nam dico in primis ſuperficiem DBFESD eſſe æqualem ſuperficiei AOBCQA.

Ad quod oſtandendum, inſcribantur rectangula in æqualibus arcubus RF, & OB, & cæt. vt ſunt OBQC, & cæt. ; iſta erunt æqualia, & ſi inſcribantur donec inſcribi poſſunt ſucceſſiuè, quę inſcripta ſunt in AOBCQ ſemper erũt æqualia ijs, quæ in DRFES inſcribuntur.



Sed omnia rectangula, quæ inſcribi poſſunt æquant totam ſuperficiem, & ſi adhuc daretur locus non omnis poſſibilis multitudo eſſet inſcripta. Ergo ſuperficies AOFCQ æquatur ſuperficiei DSBFR.

Quod verò rectangula inſcripta ſemper perſeuerent æqualia, dummodò æqualibus arcubus planorum, rectorum, ſecantium inſcripta.

Probatur linea OR ob paralleliſmum ex Theſi planorum æquatur lineæ AD, & pariter linea QS ob idem paralleliſmum æquatur lineæ AD, cùm ergo vni tertiæ AD lineæ OL, & QS æquentur; inuicem quoque erunt æquales, & ſic dicas de lineis BF, & CE; Quare quadrangula QCSE, & OBRF inter eaſdem parallelas, & ſuper æquales baſes erunt æqualia: Ablato itaque communi QRF; reſtabunt æqualia trapezia inſcripta OBQC, & RFSE, & idem dicas de alijs quibuſcumq; inſcriptis: Vnde patet etiam ſuperficies cylindricas omnem multitudinem inſcriptorum rectangulorum æquantes, eſſe inuicem æquales.

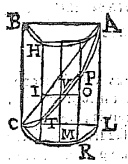
Quadropter ſi cylindrus obliquus DEAC differt à recto DFAB æquali ſuperficie, ita quòd quantùm addit ſuperfigies DFB tantùm deficiat alteri parti ACB, erit itaque ſuperficies cylindri recti ABDF æqualis obliqui ſuperficiei ACDE. Sed illa oſtenſa eſt æqualis rectangulo ex altitudine AD, & peripheria AOB. Ergo, & cylindrus obliquus talis rationis erit. Linea autem AD æquatur axi HL.

THEOR. III. PROPOS. VI.

* *Fruſti Cylindri acuta ſuperficies eſt æqualis ſuperficiei dimidiæ recti Cylindri.*

SIt acuta ſuperficies, & Cylindri ſegmentum à baſi obliqua ad axem, & altera recta, vt eſt ALC factum, & perficiatur cylindrus rectus AHB, LMC. Dico ſuperficiem acutam ALC eſſe dimidium ſuperficiei AHB, LMC.

Inſcribatur rectangulum ABLR, & BHTC ſuper æquales arcus HE, & LR baſis ad axem rectæ. Aſſero in primis hæc rectangula, & quecumque alia ſimiliter inſcripta eſſe inuicem æqualia. Agatur planum HR per latera RP, & TH, ſecabitque planum APTC, & ſectio erit linea TP; quæ diuiſa per medium in V ducatur OI per V parallela baſibus.



Erunt itaque triangula PVO, & VFT æquiangula in plano HR: ſiquidem anguli apud I, & O recti ſunt, & apud V ſunt anguli ad verticem: quare cum ſint æquiangula ex 17. lib. 1. Elem. & baſis VP baſi VT ſit æqualis reliqua latera ex 4. lib. 6. erunt in eadem proportione, ac qualitatis: Quare PO æquabitur lineę OF. Et quia OR æquatur lineę IH, quod punctum V medium ſit inter MI, & R additis æqualibus TI, & OP remanebunt æquales RP, & TH. Quare etiam rectangula trapezia æqualibus lateribus, & eiuſdem altitudinis contenta erunt æqualia. Siquidem HB, & LR æquales, lineis BO, & LA ſunt rectangulę. Cum ergo omnia trapezia, quæ ſucceſſiuè inſcribi poſſunt in ſuperficiebus acutis cylindri ALCB ſint æqualia, & illa omnia poſſibili multiplicatione multiplicata æquent ſuperficiem cylindricam; etiam cylindricę ſuperficies acutę inuicè erunt æquales. Vnde totius LACB ſuperficies cylindrica LAC dimidiũ erit.

COROLLARIVM.

ELlicitur fruſti Cylindrici acutam ſuperficiem eſſe æqualem rectangulo ſub dimidia CB æqualis axi, & circumferentia AHB, vel dimidia circumferentia AHB, & tota perpendiculari BC cylindri recti, in quo eſt. Ratio eſt, quia hæc ſunt æqualia dimidio rectanguli ex altitudine, & peripheria

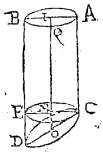
pheriæ lineæ æquali comprehenſi toti ſuperficiei cylindri recti æquali.

THEOR. IV. PROPOS. VII.

Cylindri ſuperficies ſine baſibus, cuius baſes non ſint parallelæ, ſed altera ſit circulus, eſt æqualis parallelogrammo, cuius vnum latus ſit æquale circulari ambitui; alterum verò ipſius axi.

SIt Cylindrus ABCD, cuius baſes nequaquam ſint parallelæ. Dico eius ſuperficiem eſſe æqualem rectangulo ſub axe OQ, comprehenſo, latere alio ex linea æquali circumferentiæ facto.

Probatur. Nam ducta CE parallela baſi AB erit ſuperficies cylindri CABE ſine baſibus æqualis rectangulo comprehenſo ſub axe MI, & circumferentia AQBA, ex propoſ. 1. h. Item ex Coroll. præced. CED portio erit æqualis rectangulo eiuſdem longitudinis, quæ eſt ambitus. Sed ſub dimidia ED, ſc. ſub axe MO comprehenſo. Ergo tota ſuperficies excluſis baſibus cylindri ABCD, erit æqualis rectangulo longitudine æquali peripherię baſis AQBA, & axi ID contento.



COROLLARIVM I.

HInc ergo obtines modum menſurandi omnes cylindros; quorum baſes ſint circuli, ſiue ille ſint baſibus parallelis, ſiue non. Nam multiplicata peripheria cum axe dabit rectangulum ſuperficiei cylindricę excluſis baſibus equale. Quadratio verò baſium eſt eadem, ac circulorum, quam docuimus ſupra prop. 2. tract. 30.

COROLLARIVM II.

HInc etiam euenit omnem ſuperficiem cylindricam eſſe æqualem quadrato, quod ſit à media proportionali inter lineam æqualem peripherię, & axem ipſius. Nam ex propoſ. 17. lib. 6. quadratum tale eſt æquale rectangulo QIV fig. propoſ. 4. cuius latus VI æquat peripheriam, & IQ axem.

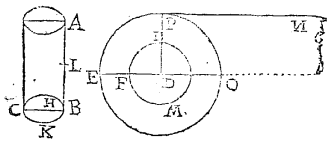
COROLLARIVM III.

HInc etiam eſt: Quòd ſi cylindrus ſecetur per axem, rectangulum à diametro, & axe comprehenſum, vt FBCD in fig. prop 4. h. in quocumque cylindro, etiam baſium non æquidiſtantium dicat eam proportionem ad ſuperficiem cylindricam ſine baſibus; quam diameter ad circumferentiam, quia rectangulum QIV æquale cylindricę ſuperficiei habet æqualem baſim QI, cum ſit eadem, ac axis, aut CF latus. Vnde ſe habebunt inuicem, vt altitudines ex propoſ. 1. lib. 6. Cor. ſed altitudo rectanguli QV, nempe IV eſt æqualis peripherię, & rectanguli FD diametro. Ergo erit FD rectangulum ad QV rectangulum æquale ſuperficiei cylindricę, vt diameter CD ad circumferentiam, ſeu ei æqualem lineam IV.

THEOR. V. PROP. VIII.

Superficies Cylindri recti ſine baſibus æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter ſit media proportionalis inter axem, & diametrum baſis.

SIt Cylindrus, cuius latus axi æquale AB, & diameter baſis BC, inueniaturque media proportionalis DE inter AB, & BC: ſuperque eam, vt ſemidiametro fiat circulus. Dico hunc circulum eſſe æqualem ſuperficiei cylindricę ſine baſibus.



Probatur. Nam, cùm ſit AB latus ad DE ſemidiametrum circuli confecti, vt ipſe ſemidiameter DE ad diametrum baſis BC ex effectione. Erit quoque medietas LB lateris ad medietatem FE radij DE, vt ipſa medietas FE ad radiũ baſis medietatem BH. Et vt medietas DF ad BH, ita gyrus FIM ad gyrũ baſis BKCB ex prop. 43. lib. 6. Et ideo ex 16. lib. 5. El. latus integrum BA erit ad ſemidiametrum ED, vt circumferentia FIM ad circumferentiam BKCB. Si ergo ex circumferentia FIM, & diametro DE, fiat rectangulum DN, & circumferentia BKCB, & latere AB fiat item rectangulum hæc rectangula erunt æqualia ex prop. 43. lib. 6. Eucl. Nam cum ſint quatuor proportionales rectangulum comprehenſum ſub medijs DE, & FIM æquale erit ei, quod comprehenditur ſub extremis AB latere, & BKCB circumferentia cylindrica.

Rectangulum verò DN ex circumferentia FIM, & DE factum eſt æquale circulo, cuius diameter EO: Quia huic circulo eſt æquale rectangulum factum ex ſemidiametro DE, & eius circumferentia: Tota verò circumferentia MFI eſt æqualis dimidię circumferentię EPO; quod ſit facti ſuper ſemidiametrum DE tamquam ex diametro. Vnde quia ita eſt circumferentia ad circumferentiam, vt diameter ad diametrum ex prop. 43. lib. 6. quia DE eſt dimidius diameter circumferentia etiam FMI erit dimidia circumferentia totius EPOE. Cum ergo circulus EPO æquetur rectangulo DN, & huic æquetur rectangulum ſub AB latere, ſeu axi, & BKCB circumferentia, quod oſtenſum eſt æquale ſupra prop. 4. h. ſuperficiei Cylindricę, etiam circulus EPO factus ex radio DE media proportionali inter BA, & BC æquabitur ſuperficiei cylindricę.

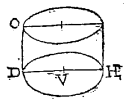
COROLLARIVM.

HInc verò emanat, quòd ſi ex diametro, & axe fiat rectangulum, & ex eo extrahatur radix quadrata, quòd hæc erit diameter prædicti circuli, cuius area iuxta dicta de planorum curuilineorum menſura conquiſita offeret circulum æqualem cylindricę ſuperficiei.

THEOR. VI. PROPOS. VIII I.

Superficies Cylindrica eſt dupla ſuæ baſis, ſi habeat Cylindrus eandem altitudinem ac ſemidiametr.

SIt Cylindrus HQ, cuius latus DO ſit æquale radio PV. Dico eius ſuperficiem eſſe duplam baſis.



Probatur. Rectangulum ſub dimidia peripheria, & ſemidiametro comprehenſum eſt æquale ipſi circulo ex prop. 3. Tract. 30. Ergo rectangulum ſub tota circumferentia, & ſemidiametro comprehenſum eſt duplum ſui circuli: Sed talis eſt ſuperficies cylindri HO, quæ eſt eiuſdem altitudinis DO, ac ſemidiametri, vt patet ex prop. 4. h. ergo erit dupla ſuæ baſis.

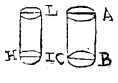
COROLLARIVM.

HInc eſt, quod ita ſit ſuperficies cylindrica, quæ ſit eiuſdem altitudinis, ac radius ad ſuam baſim, vt diameter ad radium, quia ſicut ſuperficies cylindrica eſt dupla ſuæ baſis, ſic diameter eſt duplus radij. Vnde etiam ſi ſit cylindrus eius altitudinis, ac diameter, ſuperficies eius eandem rationem ad duplum ſuę baſis, quam altitudo ad radium ex prop. 18. lib. 5. conſequetur.

THEOR. VI. PROPOS. X.

Superficies Cylindricæ, ſine baſibus eiuſdem altitudinis ſunt inuicem, vt peripheriæ, vel diametri baſium, vel ſi baſes ſint eædem, erunt, vt æltitudines.

PRobatur. Nam ſuperficies cylindri AC eſt ad ſuperficiem cylindri LH, vt rectangulum æquale cylindricæ ſuperficiei AC ad rectangulum æquale cylindricę ſuperficiei LH: ſed illa rectangula habent eandem altitudinem, ac cylindri AC, & LH eiuſdem altitudinis; ergo etiam inuicem eiuſdem altitudinis ſunt; quare



erunt inuicem ex 1. lib. 6. vt baſes; baſes autem rectangulorum illorū ſunt æquales peripherijs, ergo dicent inuicem eandem rationem: quam peripherię cylindricę, & peripherię eam, quam diametri. Vnde, & ſuperficies cylindri AC erit ad ſuperficiem cylindri LH, vt diameter CB ad diametrum IH.

Pr. 2. pars eadem ratione, quod æqualia ſuperficiei cylindricę rectangula æquentur inuicem baſi, quia æquatur peripherijs cylindrorum, & ideo ſe referant inuicem, vt altitudines, ex 1. lib. 6.

THEOR. VII. PROPOS. XI.

Superficies Cylindricæ ſine baſibus ſimilium Cylindrorum ad inuicem dicunt proportionem duplicatam peripheriarum, ſeu altitudinum.

CYlindri ſimiles ſunt illi; quorum rectangula per axem AC, & LH ſunt æquiangula, & habent circa æquales angulos latera proportionalia V.g. AB ad BC, vt LH ad HI: quæ eſt eadem ac proportio axis coni ad diametrum, aut radium, vel ad circumferentiam.

* Prob. vt rectangulum per axem AC ad ſuperficiem cylindri AC, ſic BC diameter ad peripheriam ex BC ex prop. 7. Coroll. 3. h. Vt autem



diameter BC ad peripheriam ex BC: ſic diameter HI ad peripheriam ex HI ex 43. lib. 6. vt autem HI diameter ad peripheriam ex HI ſic ex propoſ. 7. h. Coroll. 3. rectangulum per axem LI ad ſuperficiem cylindri LI, ergo ex 16. lib. 5. vt rectangulum per axem AC, ad ſuperficiem cylindri AC, ſic rectangulum LI ad ſuperficiem cylindri LI. Ideo permutando rectangulum AC ad rectangulum LI erit, vt ſuperficies cylindri AC ad ſuperficiem cylindri LI, ſed rectangulum AC ad rectangulū LI duplicatam habet proportionem laterum AB, ad LH vel BC ad HI ex 21. l. 6. ergo, & cylindri AC ſuperficies ad ſuperficiem cylindri LI habebit duplicatam proportionem lateris AB ad latus LH ideoq; altitudinis ad altitudinem, vel diametri BC ad diametrum HI, & ideo ex 43. lib. 6. peripheriæ ex BC ad peripheriam ex HI.

THEOR. VIII. PROPOS. XII.

Superficies Cylindricæ ſine baſibus, & diuerſæ altitudinis, quorum baſes parallelæ, & rectangula per axem ducta æquiangula habent proportionem compoſitam, ex altitudine, & peripheria.

SInt Cylindri CA, & IL, quorum rectangula per axem CA, & IL ſint æquiangula. Dico eorum ſuperficies habere rationem compoſitam ex altitudine HL ad BA altitudinem, & peripheria IH ad peripheriam CB. Probatur. Quia talia ſunt rectangula illis æqualia, quorum laterum alterum altitudinem exæquet alterum peripheriam. Ideoque ſicut illa rectangula ex prop. 23. lib. 6. Elem.



proportionem inuicem compoſitam dicunt, laterum nempe ex altitudinibus, & baſibus, quæ peripherias æquant: Sic cylindricæ ſuperficies ſine baſibus compoſitam conſequuntur proportionem ex altitudine, & peripheria.

COROLLARIVM.

HInc educes, quod licet cylindri ſint obliqui, & baſibus non parallelis, adhuc tamen prop. verificatur,

verificatur, nam oſtenſum eſt prop. 7. h. ſuperficiem horum cylindrorum eſſe æqualem rectangulum, cuius vnum latus ſit æquale peripheriæ circuli ad axem recti, & alterum ipſi axi, quare ſi axi in iſtis cylindris altitudinem menſuremus, & peripheriam circuli ad axem recti pro baſi ſumamus vera de ipſis euadet proportio.

EXPENSIO II.

De quadratione ſuperficiei vngulæ cylindricæ.

QVadratione vngulæ cylindricæ adinuenit inter inſignia eius opera Ambroſius à Sancto Vincentio, quæ licet non admodum veniat in vſum; quia tamen ſingulari ingenio excogitata eſt hic eam tradere viſum eſt.

DEFINITIO.

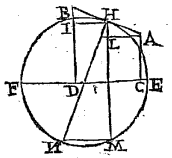
VNgula cylindrica eſt portio cylindri recta à plano aliquo abſciſa ſemicirculo ſemiellipſi, & parte ſuperficiei cylindricæ contenta.

Sic in fig. pr. 15. ABM dicitur vngula cylindrica, quia continetur ſemicirculo ACB ſemiellipſi ADMLB, & parte ſuperficiei cylindricę ACBMA.

THEOR. I. PROP. XIII.

Rectangulum ex contingente, & chorda à puncto contactus perpendiculariter in diametrum cadente æquatur rectangulo ex diametro, & eius portione intercepta à perpendicularibus extremo tangentis deductis.

SIt AB tangens, & duę perpendiculares AC, BD intercipiant portionem diametri CD, quæ ab extremis tangentis A, & B, deſcendunt, ſitque chorda HM à puncto contactus perpendiculariter in diametrum EF cadens. Dico *rectangulum ex* AB, & HM *æquale eſſe rectangulo ex diametro* EF, & *portione* CD *eſt Pappi in collect. Math. lib. 5.*



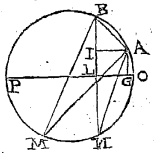
Quod vt oſtendatur, ducatur diameter HN, & coniungatur MN. Erit triangulum HMN rectangulum, quòd ſit in ſemicirculo ex propoſ. 28. lib. 3. Ducanturque ad angulos rectos chordæ MH, ab H recta HI, & AL; angulus itaque BHN, vtpote diametri, & tangentis ex propoſ. 21. lib. 3. eſt rectus; Rectus quoque ex effectione angulus IHM. Ergo ablata communi portione IHN ab æqualibus rectis remanebunt triangula HBI, & HMN æquiangula, ideoque erit HB ad HN, vt HI ad HM ex 4. l. 6. Quare rectangulum compoſitum ex extremis HB, & HM æquabitur rectangulo confecto ex medijs HN, & HI. Et idem dicas de triangulo AHL equiangulo triangulo HNM eidem. Ideoque ob proportionalla latera rectangulum ex AH, & HM æquabitur rectangulo ex AL, & HN. Proptereaque duo rectangula ex AL, & HN, & aliud ex HN. & HI ſimul, ideſt rectangulum ex FE, & DC æquabuntur duobus ex AH, & HM, & ex HB, & HM; ideſt rectangulo ex chorda HM, & contingente BA.

THEOR. II. PROPOS. XIV.

Rectangulum ex duobus ſinubus, vt vno crure, & chorda interpoſita, æquatur rectangulo ex chorda ſemicirculum complente, & portione diametri ſinubus intercepta.

SInt duo ſinus AG, & BL, inter quos ſit chorda AB, ſitque portio GL diametri à ſinubus AG, & BL intercepta. Dico, quod ſi ſinus in vnum latus componantur, & adhibeatur chorda pro alio latere rectangulum conſtitutum æquabitur rectangulo ex chorda AM complente ſemicirculum BAM, & diametri intercepta portione GL.

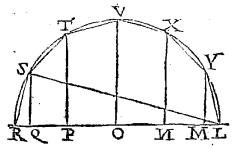
Quod vt oſtendatur normalis AI, ducatur, & diameter BM, & coniungantur puncta AN, & AM; eritque ABM rectangulum triangulum, & æquiangulum rectangulo AIM; quia anguli M, & N ſuper eundem arcum AB inſiſtentes ſunt æquales.



Quamobrem ex lib. 6. Elem. prop. 4. AM erit ad IN, vt AB ad AI. Sed IM æquatur ſinui BL, & AG, ſiquidem NL, & LB ſicut IL, & AG æquantur, & AI ipſi GL: Ergo, vt AM ad BL, & AG, vt vna linea, ſic AB ad GL. Vnde rectangulum ex AM, & GL æquabitur rectangulo ex BL, & AG ſimul, & ex AB.

COROLLARIVM.

HInc enaſcitur rectangulum ex RL, & LS ſubtendente arcum reſiduum LVS, qui cum arcu SR efficit ſemicirculum, hoc inquam rectangulum ex LR, & LS æquari rectangulis omnibus ſimul nempe QR, & SR, & rectangulo ex RS, &



ſinubus SQ, TP, vt vno latere, & etiam OV, & PT, vt vno, & SR pro alio, & NX, & QV pro vno latere SR alio exiſtente, & MY, & NX pariter, vt vno latere, & alio eodem SR, dummodo omnes chordæ TS, & VT, & cæt. æquentur chordæ SR. Nam primo triangula LSQ, & QRS ſunt proportionalia, eſtque LS ad SR, vt SQ ad QR, & ideo rectangulum ex extremis LS, & QR æquatur rectangulo ex QS, & SR medijs. Idem eſt de rectang. YM, & YL æquante rect. SL, ML. Sic in præced. rectangulum ex LS, & PQ

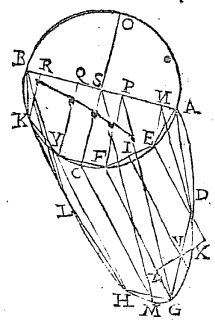
æquatur rectangulo ex PT, & QS, vt VNO, & TS, ideſt SR æquali pro alio, & rectangulum ex LS, & OP rectangulo pariter ex OV, & TP pro VNO, VT pro alio deſeruiente, ideſt RS; quòd LS chordæ VT ſit complementum vſque ad ſemicirculum ſicut eſt complementum chordæ SR, & ſic de alijs vſque ad L cum omnes TS, VT, XV, & cæt. ſint æquales ipſi SR. Quare ſingula rectangula ex ſinubus, & chorda SR æquabuntur ſingulis ex chorda LS, & interceptis diametri portionibus QR, PQ, & cæt. ſed hæc rectangula cum habeant idem latus LS ex 4 lib. 2. Elem. æquant rectangulum ex LS, & LR. Ergo omnia rectangula ex ſinubus duobus pro vno latere, & chorda pro alio æquabuntur cùm duobus ex SQ, SR, & MY, SR rectãgulo ex LS, & LR.

THEOR. III. PROP. XV.

Vngulæ ſupra definitæ eiuſdem altitudinis, ac diametri plana inſcripta ſimul ſumpta erunt æqualia rectangulo à tota diametro, & chorda omnes arcus inſcriptos ſubtendente dempto vltimo.

SIt circulus AOBC baſis cylindri, & vngulæ ſuperficies AMB, inſcribanturque plana AED, & DEFG, & GFYH, & cæt. Dico hæc omnia plana æquari rectangulo, quod fit ex diametro, & EB; quę ſubtendit omnes arcus ſimul, qui planorum inſcriptorum lateribus, vt BK, & cæteris ſubtenduntur vſque ad EX excludendo EA vltimum arcum.

Progreſſ. 1. Itaque oſtendendum eſt primò omnia latera ED, & FG eſſe dupla ſinuum: quibus perpendiculariter inſiſtunt prout, & ipſa ſuperficies vngulæ, ex def. inſiſtit normaliter baſi AOBC. Nam cum omnia plana triangulorum SCM, & NED, & cæt. ſint recta ſectioni AB Ellipſis, & circuli



vngulam claudentis, erunt omnes anguli æquales, vtpote inclinationis planorum, & ex propoſ. 6. trãſt. 22. quia coniungunt perpendiculares CM, & ED, CS verò, & EN ſunt normales, etiam ND, & MS erunt normales diametro AB, ideoque parallelæ cum ergo triangula SCM, & NED parallelis conſtent erunt æquiangula, ideoque ex lib. 6. prop. 4. conſtabunt cruribus proportionalibus, ideoq; MC erit ad CS, vt DE ad EN; ſed MC ex Theſi eſt dupla ſinus, CS, vt æqualis diametro. Ergo etiam DE eſt dupla ſinus EN, & ſic dicas de alijs GF reſpectu FP, & cæt. licet triangula HYQ, & cæt. non ſint delineata ad vitandam confuſionem.

Progreſſ. 2. Hinc verò oſtendetur triangulum AED eſſe æquale rectangulo ſub AE chorda, & EN ſinu: nam cum DE ſit baſis normalis ipſi AE altitudo trianguli erit AE, & cum ſit dupla lateris, & ſinus NE rectangulumque habeat pro alio latere altitudinem AE; triangulum, vtpote duplæ baſis, & eiuſdem altitudinis ex prop. 41. lib. 1. Elem. æquabitur rectangulo ex AE, & NE, & idem dicas de alio triangulo B K, quod æquet rectangulum ei KB, & KR.

Progreſſ. 3. Oſtendendum eſt, deinde trapezia DEFG æqualia eſſe rectangulis ex ſinubus NE, & PF, vt vno latere, & chorda EF conſtitutis.

Itaque DEFG trapezium eſt rectangulum ob angulos apud E, & F rectos ex Theſi, vnde diuisâ chorda EF in I bifariam, & ducta IV. necnon, & per V chordæ EF parallela XZ erit XDV triangulum rectangulum æquale ob angulos ad V verticem æquales triangulo VZG. Vnde ſuplente VZG defectum trianguli XDV trapezium GDEF æquabitur rectangulo XZFE. Ideoque ſubduplum erit rectanguli ex DE, & FG tanquam vno latere, & EF pro alio conſtituti; ſiquidem latus excedens GF ſuplet deficiens latus DE æquali linea GZ ipſi XD. Sed etiam rectangulum ex ſinibus ex NE, & PF, vt vno latere, & EF eodem pro alio, eſt ſubduplum rectanguli ex DE, & FG pro vno, & EF pro alio, quod DE, & FG oſtenſæ ſint in 1. progr. duplæ ſinuum EN, & FP. Ergo trapezium rectangulum DEFG eſt æquale rectangulo ex ſinubus EN, & FP ſimul, & EF, & ſic diſcurras de alijs trapezijs reſpectu aliorum rectangulorum ex ſinubus, & chordis.

Progr. 4. Modo oſtendetur principaliter prop.

Cum enim ex Coroll. præc. omnia rectangula ex ſinubus, & chordis ſint æqualia rectangulo ex diametro AB, & chorda BE ex prop. 14. h. Cor. Conſequenter omnia trapezia prædictis rectangulis ex ſinubus, & chordis æqualia erunt quoque rectangulo conſtituto ex diametro AB, & chorda BE, quæ omnes arcus ſubtendat excepto arcu AE.

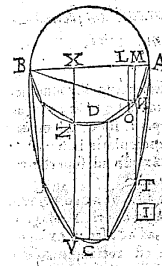
THEOR. IV. PROPOS. XVI.

Quadratum ex diametro non poteſt eſſe maius Vngulæ ſuperficie, cuius altitudo æquet diametrum circuli baſeos, cui recta eſt.

SIt Cylindricæ vngulæ ſuperficies ACB, quæ inſiſtat perpendiculariter circulo AOB, & cuius altitudo DC æquet diametrum AB. Dico *hanc ſuperficiem quadrato diametri non poſſe eſſe minorem.*

Nam ſi eſt vngula BAC minor, quam quadratum ex BA, aſſignetur aliqua quantitas I, in qua quadratum ex diametro vngulam excedat. Fiatque ex 2. Elem. prop. 16. rectangulum ex diametro, & linea AL V. g. quod ſit æquale quadrato I; & conſequenter rectangulum ex AB, & AL erit exceſſus, quò quadratum diametri ſuperficiem vngulæ ſuperat; ex L itaque puncto excitetur normalis LO, & deinde inſcribatur aliquod polygonum regulare circulo, cuius vnum latus AN ſit minus, quam chorda ſubtendens arcum AO, & deinde vngulæ trapezia, vt in præced. propoſ. inſcribantur, vt ANT, & cæt.

Cum ergo rectangulum ex AL, & AB, & ex LB, & AB integrent quadratum ex AB ex 4. propoſ lib. 2. Elem. Et rectangulum ex AL, AB ſit æquale ex effectione ſuperficiei, quà ponitur quadratum ex AB diametri ſuperare vngulę ſuperficiem; erit itaque reſiduum rectangulum ex AB, & BL æquale ſuperficiei vngulæ; Ideoque rectangulum AB, & BM maius erit vngulæ ſuperficie, & tanto magis rectangulum ex AB, & BN: ſed rectangulum ex AB, & BN æquat omnia trapezia inſcripta ex præced. Ergo omnia trapezia inſcripta eſſent maiora ſuperficie vngulæ, quæ ea ambit, quod eſt abſurdum. Non ergo quadratum ex AB diametro ſuperat vngulæ ſuperficiem.



COROLLARIVM.

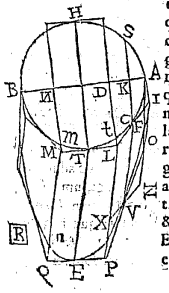
IDem dicendum de parte rectangulorum inſcriptorum, ideſt rectangulis ATCVZ, & rectangulo AB, & AX. Nam rectangulum ſub BN, & AX eſt æquale omnibus planis vngulæ inſcriptis AZV, cùm ſingula inſcripta in vngulari ſuperficie AZV oſtenſa ſint æqualia ſingulis rectangulis ex ſinubus, & chordis intermedijs ex Cor. prop. 14. h. quæ ex 4. lib. 2. æquantur rectangulo ex BN, & AX cum ſint eiuſdem altitudinis NB ex partibus alterius lateris AX; Vnde ſingula plana inſcripta AZV æquabunt rectangulum ex AX, & NB facta. Ergo præced. conſtructione, idem valebit argumentum, & oſtendetur Rectangulum ex AB, & AX non eſſe maius ſuperficie vngulari AZV.

THEOR. V. PROPOS. XVII.

Omnia plana Vngulam vt ſupra, circumueſtientia ſunt æqualia quadrato ex diametro exceptis vltimis duobus triangulis.

SIt Vngula AEB, circumueſtiantque eam plana AIO, & IOLP, & LMPQ, & cæt. rectangula ipſi baſi circulari vngulæ, quę ſit eiuſdem altitudinis TE, ac diameter AB. Dico hęc omnia rectangulatia trapezia æquari quadrato diametri AB excludendo extrema duo triangula apud A, & B, vt vnum ex ipſis eſt AIO.

Probatur, & Progr. 1. Oſtendendo planum OILP rectangulo ILXZ æquari; ſiquidem cum plana circumſcripta ſint rectangula trapezium apud I, & L rectos angulos conſequetur, vnde à puncto V medio ducta parallela XZ lateri IL figura ILZX erit rectangulum, & in triangulis ZOV, & VXP erunt anguli X, Z recti, & ad verticem V æquales; Vnde, & triangula ex 17. lib. 1. Elem. Coroll. æquiangula erunt, & æqualia latera ZO, & XP. Quare triangulo VXP, quo trapezium ILOP abundat pro triangulo VZO, quo deficit à rectangulo XZLI repoſito æquabuntur inuicem LIPO, & LIXZ, & idem dicas de alijs trapezijs.



Progr. 2. Deinde oſtendendum eſt rectangulum ZILX æquari rectangulo ex CS, & IL. Nam in pr. 15 demonſtratum eſt VC, vel XL eſſe duplam KC, & ideo æqualis erit duplæ CS; ergo rectangulum ex IL, & XL æquabitur rectangulo ex CS, & IL.

Progr. 3. Rectangulum verò hoc ex IL, & CS oſtenſum eſt prop. 13. h. æquari rectangulo ex AB, & AD. Ergo etiam trapezium IOPL æquabitur rectangulo BA, & AD; Et ſic dicas de rectangulo LMPQ, quod æquetur rectangulo ex LM, & TH; & ideo rectangulo ex AB, & DN, & ſic de alijs.

Progr. 4. Hæc autem omnia rectangula ex 4. lib. 2. ex AB, & DN, ſicut, & ex AB, & AD æquantur quadrato ex AB, ſiquidem habent idem latus AB, & alterum ſunt ſegmenta eiuſdem. Ergo etiam plana circumſcripta vngulæ æquantur quadrato AB, & remanent duo triangula, vt AIO, & aliud apud B, quæ cum nulla rectangula habeant correſpondentia, quibus æquentur, abundant ſuper quadratum AB.

THEOR. VI. PROPOS. XVIII.

Quadratum ex diametro non poteſt eſſe minus ſuperficie vngulæ cylindricæ prædictæ.

PRobatur. Nam, ſi poteſt eſſe minus ſit minus in præced. fig. quantitate R, totque plana vngulæ circumſcribantur, donec triangula lateralia ſint minora quantitate R: ſiquidem id tandem contingat, cum multiplicatis planis circumſcriptis in infinitum ſemper minora efficiantur. Igitur quadratum AB vna cum duobus triangulis erit minus ſuperficie vngulari, ſed AB quadratum æquatur omnibus planis circumſcriptis ex præced demptis triangulis: Ergo etiam illa vnà cum triangulis erunt minora ſuperficie vngulari, quam cingunt, quod eſt abſurdum. Igitur ſuperficies vngularis non erit minor quadrato AB.

COROLLARIVM.

HInc deduces idem intelligendum de parte ſuperficiei vngularis NVAM: Nam omnia plana circumſcripta vngulæ ſunt æqualia oſtenſa ſingula ſingulis rectangulis ex chorda V. g CS, & latere polygoni circumſcripti IL; hæc autem æquant ſingula rectangula ſub AB, & ſegmentis diametri, quæ æquant ex 4. lib. 2. Elem. rectangulum ex AN, ideſt ex omnibus ſegmentis AD, & DN ſimul pro vno latere, & AB pro alio. Vnde plana vngulæ parti A m n circumſcripta ſimul æquabunt rectangulum ex AB, & AN dempto triangulo AIO. Fiat ergo, vt præc. propoſ. docuimus, & oſtendetur rectangulum ex diametro, & ſegmento AN non poſſe eſſe minus ſuperficie vngulæ A m n eodem argumento, quò vſi ſumus anteced. propoſ.

THEOR. VII. PROPOS. XIX.

Superficies vngularis prædicta æquat quadratum diametri, & eius assignatæ portiones æquant rectangulum sub diametro, & segmento diametri, quod sinu portionem diuidente intercipitur.

PRobatur prima pars: Nam in prop. 16. ostensum est non posse esse maius, & prop. 18. huius non posse esse minus quadratum diametri ipsa vngulari superficie. Ergo illam æquabit.

Pro ostendenda secunda parte sit assignata portio vngulæ AMN, quæ determinetur in præced. fig. à sinu NM. Dico vngulæ portionis AMN superficiem esse æqualem rectangulo AB, & AN.

Probatur. Nam ex Coroll. prop. 16. non potest esse minus prædicta vngulæ superficie AMN, & ex pr. 18 Cor. non potest esse maius: Ergo ei erit æquale rectangulum ex AB, AN,

COROLLARIVM I.

HInc verò elicitur primo rectangulo ex AB, & DN æquale esse superficiem vngularem MTNX; Eo quia superficies ANM sit æqualis rectangulo AB, AN, & ideo etiam superficies ATX sit equalis rectangulo sub AB, & AD: Ablatis ergo æqualibus superficie vngulari ATX à superficie vngulari AMN. & rectangulum sub AB, & AD à rectangulo sub AB, & AN contento residuum TMNX vngulare restabit æquale residuo rectangulo sub AE, & DN contento.

COROLLARIVM II.

OMnia plana vngulam ambientia IOPL, & cet. triangulis lateralibus demptis in fig. pr. 17. æquari superficiei vngulari. Nam illa prop. 18. huius ostensa sunt æqualia quadrato AB sine triangulis accepta: sed etiam vngularis superficies ostensa est æqualis quadrato AB; Ergo erunt superficies vngularis, & plana ambientia demptis triangulis æqualia.

COROLLARIVM III.

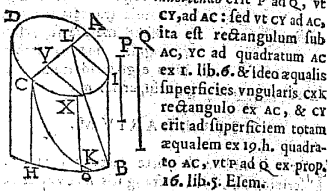
ET idem dicendum esse etiam de partibus, tum superficiei Cylindricæ, tum planorum contingentium V. g. planum contingens ILOP esse æquale superficiei vngulari, quam tangit ITEX, & pariter LMPQ æquari superficiei, quam contingit TMXN: eo quia superficies vngularis V. g. TMXN ostensa sit æqualis rectangulo sub AB, & DN contento, & eidem rectangulo ostensum sit æquale planum contingens eam LMPQ, quare æquabuntur inuicem superficies TMXN contacta, & planum contingens LMPQ.

PROBL. I. PROPOS. XX.

Vngularem superficiem prædictam secundùm datam rationem partiri.

SIt data vngularis superficies ABC diuidenda secundùm datam rationem P ad Q; fiat, vt Q ad P; ita AC ad aliud CY. ex prop. 15. lib. 6. Elem. ducaturque sinus YX, & perpendicularis basi XK: & dico superficiem vngulæ CXK esse ad superficiem vngularem totam ABC, vt P ad Q.

Probatur. Factum est Q ad P, vt AC ad YC, ideo *inuertendo* erit P ad Q, vt CY, ad AC: sed vt CY ad AC, ita est rectangulum sub AC, YC ad quadratum AC ex 1. lib. 6. & ideo æqualis superficies vngularis CXK rectangulo ex AC, & CY erit ad superficiem totam æqualem ex 19. h. quadrato AC, vt P ad Q ex prop. 16. lib. 5. Elem.



COROLLARIVM.

VNde patet superficierum vngularium segmenta esse ad inuicem in ea proportione, quâ diametri baseos segmenta, cum ostensum sit YC esse ad CA, vt superficies vngularis portio XCK ad totam superficiem, & CL ad CA, vt portio ICKB superficiei vngularis ad totam, & ideo AC diameter erit ad CL segmentum *inuertendo*; vt tota superficies ABC ad portionem superficiei CB: quare ex æquo YC erit ad CL, vt superficiei portio CKX ad portionem IBC.

COROLLARIVM II.

HInc etiam patet: Vngularem superficiem, cuius altitudo sit diameter eam obtinere rationem ad superficiem cylindri eiusdem altitudinis, quam diameter circuli ad perimetrum.

Nam superficies cylindrica est æqualis rectangulo ex diametro CA, & peripheria CIAD, at superficies vngularis est æqualis quadrato diametri CA, sed hæc duo rectangula cum sint eiusdem altitudinis diametri habent eandem proportionem, quam bases: Ergo habent eandem proportionem, quam diameter basis quadrati æquantis vngulæ superficiem ad peripheriam basim rectanguli cylindricam superficiem æquantis.

Insuper, & partes vngularis superficiei cylindricæ eodem arcu contentæ V.g. CXK ad CXOH habent eandem proportionem; quam portio diametri CY ad portionem peripheriæ CX. Nam ita est superficies CXK vngularis ad totam vngularem superficiem, vt rectangulum ex YC, & CA, cui pars æquatur ex dictis prop. 19. h. & Coroll. ad quadratum AC, cui tota æquatur.

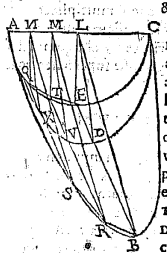
Tota verò vngularis superficies est ad cylindricam superficiem, vt quadratum AC ad peripheriæ DAIC, diametrique AC rectangulum: Cylindrica verò superficies est ad portionem Cylindricam CXOH, vt peripheriæ, diametrique rectangulum est ad rectangulum ex arcu XC, & diametro CH, vel CA; Quare ex *æquo* ita erit superficies XKC ad

ad portionem cylindricam CXOH, vt rectangulum ex AC, & CY ad rectangulum ex arcu CX, & diametro CA; quæ est eadem ob eandem rectangulorum altitudinem, quam AC segmenti diametralis ad arcum CX, qui superficiem cylindricam, & vngularem subtendit.

THEOR. VIII. PROPOS. XXI.

Superficies vngularis, cuius altitudo diameter ad superficiem vngularem quamcumque (dummodò rectangula basi circulari) est vt altitudo ad altitudinem.

DEtur vngula ABC, cuius altitudo eadem, ac diametri CA rectangula basi, & alia, quæcumque ADC similiter rectangula, dico ABC superficiem esse ad superficiē ADC, vt altitudo EB ad altitudinē ED: Quod vt ostendatur, ducantur ad diametrum normales LE, & MT, & QN, & cæt. quibus aliæ normales per superficies vngulares ducantur EB, & TB, & QS, & aliæ si placet. Iungantur puncta LB, & MR, & NS, Sicut etiam puncta LD, & MV, & XC. Erunt itaque omnia triangula LBE, & MVR, & MQS æquiangula inter se ex 17. lib. 1. cum anguli apud E, T, Q recti sint, & anguli L, & M, & N sint inclinationis planorum ABC, AEC æquales ex prop. 18. tract. 22. Idem dicas de triangulis LED, & MTV, & NQX ob eandem



rationem. Quadere, vt EB ad TR, sic EL ad MT, vt autem EL ad MT; ita est ED ad TV. Ergo ob prop. 16. lib. 5. ob eandem proportionem, quam dicunt eidem tertiæ EB erit ad TR, vt ED ad TV. Ideoq; etiam planum subtendens BETR erit ad planum superficiē TVED subtendens, vt BD ad DE ex propos. 14. tract. 29. cum sit trapezium eiusdem altitudinis, & sic dicas de omnibus alijs. Quapropter cum singula plana maiora inscripta ad singula minora sint vt basis maior ad minorem V.g. vt SQ ad XQ, quæ est eadem, ac BE ad DE; etiam omnia maiora ad omnia minora simul ex prop. 12. lib. 5. eandem obtinebunt proportionem, licet multiplicentur secundùm quamcumque multiplicationem possibilem, idest proportione basis BE, ad DE basim se respicient. At illa plana multiplicata, vt vt possunt, superficies vngulares implent, & æquant, ergo etiam superficies vngularis BAE erit ad vngularem superficiem ABD, vt altitudo BE ad DE.

COROLLARIVM.

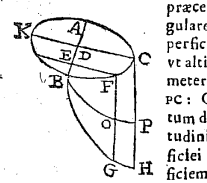
HOc autem, quod dicitur de tota eodem argumento concludit de partibus: cum ATR parti vngulę plana omnia inscriptibilia ad parti ATV inscriptibilia plana eandem obtineant proportionem, vt RT ad TV ob rationem prædictam, idest, vt BE ad DE.

THEOR. III. PROPOS. XXXIV.

Qualiscumque superficies vngularis æqualis est rectangulo sub diametro basis circularis, & eius superficiei altitudine contento.

SIt superficies vngularis ACPB habens basim circulum BCAK. Dico eam esse æqualem rectangulo ex diametro BA, & altitudine CP.

Fiat enim superficies vngularis CAHB, cuius altitudo sit eadem ac diametri; Iam ostensum est in præced. superficiem vngularem CBHA esse ad superficiem vngularē CPBA, vt altitudo HC, idest diameter BA ad altitudinem PC: Quare etiam quadratum diametri BA, seu altitudinis HC æquale superficiei ACBH erit ad superficiem vngularem BPCA, vt HC altitudo ad PC altitudinem; sed vt HC ad PC, ita est quadratum HC ad rectangulum ex HC, & PC ob eandem altitudinem ex 1. lib. 6. Ergo quadratum HC ad superficiem vngularem BPCA, & ad rectangulum sub CP, & BA eandem habet rationem altitudinis HC ad altitudinem PC: Ergo ex prop. 9. lib. 5. æquantur inuicem superficies BPCA, & rectangulum sub CP, & BA contentum,



COROLLARIVM.

HInc etiam est, quòd si detur portio vngularis superficiei FOB, hæc sit æqualis rectangulo quod sub BE segmento diametri, & PC altitudine cōtinetur; sicut superficies APC æquatur rectangulo sub CP altitudine, & totobasis diametro AB. Nam posita superficie vngulæ æqualis altitudinis, ac diametri, erit superficies FBG æqualis rectangulo sub AB, & BE ex propos. 19. huius Cor. 1. hoc itaq; rectangulum AB, & BE erit ad superficiem FOB, vt superficies GFB æqualis illi rect. ad superficiem eandem FOB; ideſt ex præced. huius Coroll vt HC ad CP, vel æqualis AB ad CP; nimirum, vt rectangulum BE, AB ad rectangulum eiusdem altitudinis PC, BE; quæ est eadem, ac basium AB vel HC ad PC, quę est eadem ac superficierum GFB ad OFB: Rectigulum itaque idem BE, & AB ad rectangulum PC, & BE, & ad superficiem FOB eadem ratione referetur, vt HC ad PC. Quare ex 11. lib. 5. Elem. quòd idem ad vtrumq; eandem rationem dicat, quam HC ad PC superficies vngularis FOB, & rectangulum sub BE, & PC erunt æqualia.

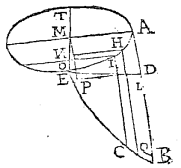
PROBL.

PROBL. II. PROPOS. XXIII.

Data superficie vngulari, cuius cylindri basis, sit circulus, & altitudo æqualis diametro, & data in ea aliqua portione; illi portioni æqualem in alia aliqua superficie vngulari inuenire.

SIt data vngula, vt vult propositio AEB, & in ea segmentum EIC, & oporteat super arcum AH portionem efficere alicuius superficiei vngularis, quæ datæ portioni EIC æquetur.

Ex arcu dato AH, & arcu portionis datæ EI duæ normales HN, IO ad diametrum TE agantur. Fiat deinde rectangulum ex MN æquale rectangulo ex EO, TE ex prop.45.lib.1. Elem. & alterum latus eius eueniat MP. Ducaturque parallela ipsi MA, perque punctum D, & diametrum TE agatur planum exhibens ellipsim DE. Ex H itaque deducatur HL parallela ipsi AD, & superficies ADHL equabitur superficiei IEC.



Probatur. Et primo, quod rectangulum ex MN, & AD æquale sit superficiei ADHL. Superficies EQA^H est ad superficiem AHDL ex prop.21.h. Cor. vt AE ad AD, hoc est ob eandem altitudinem, vt rectangulum BA, & MN ad rectangulum ex MN, & PM, sed superficies BQHA est æqualis rectangulo ex PA, & MN ex 18. huius Coroll. Ergo etiam superficies ex prop.12. lib.5. Elem. DAHL æquatur rectangulo ex MN, & PM.

Progr. 2. Cùm verò rectangulum MN, & PM ex constructione æquetur rectangulo TE, & OE, & hoc ex prop.18 huius Coroll superficiei datæ CIE; sequitur, quòd superficies AHDL æquetur superficiei IEC.

EXPENSIO III.

De superficiebus conuexis, quæ conum ambiunt.

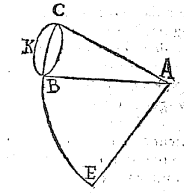
COni superficies deseruit ad inueniendas quoque alias superficies, vt sphæræ, & sphæroidis Elliptici, & cætera. Vnde operæ pretium erit eas diligentius inuestigare.

THEOR. I. PROPOS. XXIV.

Superficies conica recti coni circularis, (quod semper intelligitur) sine basibus, est æqualis sectori circuli, cuius radius sit coni latus, & arcus, sit æqualis circumferentiæ basis.

SIt conus ABC, cuius basis CKB. Dico *huius superficiem esse æqualem sectori circuli* ACE, cuius radius sit AC latus coni, & circumferentia CBE sit æqualis circumferentiæ basis conicę CKBC.

Probatur. Nam circumferentia CBE est æqualis ex hypothesi circumferentiæ CKBC, sunt autem tum vnius, tum alterius perpetuò facta qualibet diuisione æqualia latera AC, & AE, cùm ergo latera tum coni superficiem diuidentia omni diuisione possibil, tum sectoris, & ipsæ subtensæ æquali numero diuisionum affectæ semper sint æquales, etiam omnia plana inscriptibilia, vel circumscriptibilia æqualia erunt. Sed hęc adeo multiplicata non excedunt, aut minus sunt superficie conuexa coni, vel superficie plana sectoris ABC, alioquin adhuc multiplicari possent; Ergo ipsæ superficies æquabuntur inuicem.



COROLLARIVM.

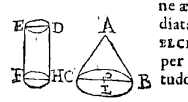
HInc educitur, quod si fiat triangulum rectilineum sectori CAB æquale ex prop. 4. tract. 3. nempe quod basim consequatur dimidio circumferentiæ CBK æqualem, & latera lateri AC, hoc erit æquale etiam superficiei conicæ: Item si fiat rectangulum dimidio peripheriæ CE sectoris CAE, & altitudinis AC hoc item erit æquale superficiei conicę. Cum æquale sectori ACE existat ex prop. 4. tract. 30.

THEOR. II. PROPOS. XXV.

Superficies conica recti coni est æqualis superficiei recti Cylindri, qui habeat eandem altitudinem, ac latus coni, & semidiametrum basis conicæ pro diametro suæ basis.

SIt conus ABC rectus, & detur Cylindrus DEFH rectus, qui habeat prò diametro DB semidiametrum OC, & altitudinem EF æqualem lateri CA. Dico superficiem coni BAC esse equalem superficiei cylindri HFDE.

Probatur. Nam ex Coroll. 2. Conus rectus in sua superficie est æqualis rectangulo facto ex latere æquali dimidiatæ circumferentiæ, & altitudine æquali lateri CA. Dimidiata verò peripheria circuli ELCB est peripheria facta super diametrum DE, & altitudo æqualis lateri CA est EF ex con-



x constructione. Ergo superficies conica BCA erit æqualis rectangulo facto ex latere æquali peripheriæ DE, & altitudine EF; sed huic ex prop.4. huius superficies cylindrica HFDE æquatur, ergo superficies cylindrica cylindri DFEH est equalis conicæ ABC.

THEOR. III. PROPOS. XXVI.

Superficies coni recti sine basi est æqualis circulo, cuius semidiameter sit media proportionalis inter semidiametrum basis, & eius latus.

PRobatur. Cylindri superficies HFDE in præc. fig. est æqualis circulo, cuius diameter sit media proportionalis inter diametrum DE, & altitudinem EF ex prop.8. huius: Sed altitudo EE est æqualis lateri CA, & diameter DE ex effectione est æqualis semidiametro OC, superficies verò cylindri recti DEHF est æqualis superficiei coni recti BAC. Ergo circulus cuius diameter sit media proportionalis inter HF, vel OC semidiametrum, & inter altitudinem EF, vel latus CA æqualis superficiei cylindri erit etiam æqualis superficiei coni ABC.

COROLLARIVM.

HInc patet quomodo superficies coni recti in circulum, & superficiem cylindricam transformetur, vel quomodo circulus, vel cylindrica superficies in superficiem conicam trasfundi possit.

Nam si superficies coni recti sit in circulum transferenda media proportionalis inuenta ex propos.16. lib.6. inter radium, & latus coni; circuli quæsiti diametrum dabit.

Si verò in cylindri superficiem sit mutanda superficies coni semidiametro OC tamquam diametro fiat circulus, & cylindrus eiusdem altitudinis, ac latus coni in eo circulo pro basi situs habebit superficiem æqualem superficiei conicæ.

At è contrà fiet, si cylindri superficies in coni superficiem sit mutanda assumendo semidiametrũ pro diametro, & axem pro latere, quòd, & intelligitur de obliquis cum ostensum sit æquari cylindros rectis eiusdem circuli, & altitudinis.

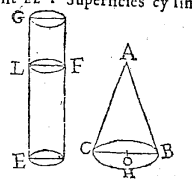
Quod si circulus in conicam, vel cylindricam superficiem sit trasferendus, tunc semidiametro eius duæ extremę proportionales inuenientur ex prop.16. Tract.16. & ex ijs fiat altitudo, & diameter cylindri, vel altitudo, & radius coni, & huius cylindri; siue coni superficies erunt circulo æquales.

THEOR IV. PROPOS. XXVII.

* *Coni recti circularis superficies ad superficiem cylindricam rectam, cuius basis diameter æquetur radio baseos coni, eam consequitur proportionem, quam latus coni ad eius axem, seu altitudinem.*

SIt conus ABC, & cylindrus FG, cuius basis FL, in quà diameter FL sit dimidiũ BO diametri: CB Dico ita esse superficiem coni ABC ad superficiem circompositam cylindro FG, vt latus CA ad altitudinem LG.

Fiat enim æqualis altitudo cylindri lateri CA, & sit EL. Superficies cylindri FG ad superficiem cylindri LE est, vt altitudo LG ad altitudinẽ EL, vt colligitur ex 10. h. sed superficies cylindri FE est æqualis superficiei conicę BAHC ex dictis prop.25 h. & altitudo EL ex effectione æquatur lateri coni CA. Ergo, vt est altitudo LG cylindri ad latur coni CA. Sic superficies cylindrica FG ad conicam BAHC.

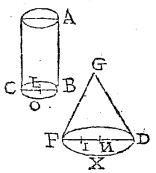


THEOR. V. PROP. XXVIII.

Superficies coni recti habentis latus æquale diametro, est duplo suæ basis æquale.

SIt conus rectus FGDX habens latus FG equale diametro FD. Dico *eius superficiem esse duplam suæ basis.*

Probatur superficies coni FGDX est equalis ex prop.25. huius superficiei cylindricę CA equalis altitudinis AB, ac latus FG, & super basim radium NF basis conicę pro diametro CB habentem: sed hęc est octupla suę basis COB; quia cum eadem altitudo, ac semidiametri BC faciet duplam ex dictis propos.9. h. altitudo, totius diametri faciet quadruplam. Vnde BA diametro coni equalis, & dupla BC faciet octuplam: basis verò coni FXD est quadrupla basis BC; cum sit in duplicata proportione diametrorum FD ad BC: Ergo erit subdupla superficiei cylindricę CA: Sed hęc superficies ex propos.25.h. equatur superficiei conicę cum sit super dimidium diametri, & eandem altitudinem, ac lateris coni consequatur. Ergo etiã basis conicaFXD erit subdupla superficiei conicę FGDX, & sic superficies conica erit ipsius dupla.



THEOR. VI. PROPOS. XXIX.

Superficies prædicti Coni se habet ad suam basim, vt latus ad radium basis.

*SIt in fig. præc. cõnus DGF, cuius latus GF trianguli per axem sit equale diametro DF cylindrusq; AC, qui habeat lateri GF altitudinem equalem, & ideo diametro DF, & radiũ NF basis conicæ pro diametro basis suę BC, erituque superficies cylindrica COBA æqualis superficiei coni DGF conuexę ex prop.27.h. illaque conica superficies DGF habebit proportionem ad duplum basis cylindri COB, quam altitudo BA cylindri ad radium cylindri BL. Siquidem supra ostensum est in Coroll. propos.9.h. Cylindri superficiem, quæ sit eiusdem altitudinis, ac diameter dicere eam proportionem

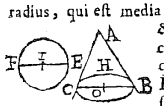
ad duplum ſuæ baſis, quam altitudo, ſeu axis ad radium, & ideo ſuperficies coni æqualis cylindri ſuperficiei eam proportionem dicet ad duplum baſis cylindri, quã altitudo cylindri, ſeu latus coni ad radiũ, ſed radius huius LB eſt NI ſemiradius baſis coni ex dictis, & baſis ipſa cylindri eſt ſubquadrupla baſis coni ex prop. 33. lib. 6. Elem. Ideoque duplum illius baſis COD eſt æqualis dimidiæ baſis coni DXF. Quare ita erit latus coni FG diametro DF æquale ad radium BL cylindri, vel ſemiradium baſis coni IFI: vt ſuperficies coni DGF ad dimidiam baſim DXF ipſius coni: Et ideo erit latus CF coni ad radium NF, vt ſuperficies coni eiuſdem ad totam baſim ſuam DXF.

THEOR. VI. PROPOS. XXX.

** Superficies coni recti ad ſuum circulum habet proportionem, quam latus ipſius coni ad radium ipſius circuli.*

SIt conus ABC, & circulus quicumque EF. Dico, quod ita ſit ſuperficies conuexa coni ab circulum BF, vt eſt latus AC ad OB radium.

Probatur, Habet enim ſuperficies coni BAC ad circulum ſuæ baſis BOC eam proportionem, quam latus AC ad radium OC ſuæ baſis ex pr. 26. h. Quia radius, qui eſt media proportionalis inter latus, & radium baſis coni facit circulum ſuperficiei coni æqualẽ ex 26. h. ergo ex 21. Euc. Cor. circulus æqualis ſuperficiei: erit ad circulum baſis, vtpote figuræ ſimiles, vt CA latus ad CO radium ſc. in duplicata ratione ſuorum diametrorũ.



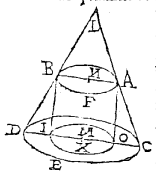
COROLLARIVM.

HInc q; eſt, quod ſuperficies coni CAB ſit ad quemcumque circulum FE, vt quad. ex media inter CA, & CO ad quadratum diametri FE, quod circulus ex media æquans ſuperficiem coni CAB, ita ſit ex 41. lib. 6. ad circulum FE.

THEOR VII. PROP. XXXI.

** Superficies fruſti conici eam habet proportionem ad annulum planum, cui inſiſtit; quam ſegmentum lateris eam menſurantis ad ſegmentum annuli illum menſurantis.*

SIt ſuperficies fruſti conici AFBCED, quæ menſuretur ſegmento lateris AC, & annulus, cui inſiſtit ſit CEDOXI, & ſegmentum diametri illud menſurantis ſit CO: Dico ita eſſe in proportione, vt CA ad CO, ita ſuperficies fruſti conici AFBCED ad annulum planum CEDOXI.



* Progr. 1. Probatur. Ita eſt eſt totius coni ſuperficies CEDL ad totam ſuam baſim CED, vt eſt ſuperficies coni ALFB fruſti coni ablata ad ſuam baſim AFB ablatam. Ergo & propoſ. 22. lib. 5. reliqua quoq; ſuperficies AFB CED erit ad reliquum annulum CED, OIX, vt conica ſuperficies tota LCD ad totam baſim CED, vel: vt ALB ſuperficies conica ablata ad baſim ablatã AFB.

Progr. 2. Quod verò ſit tota ſuperficies conica CELD ad baſim CED, vt ſuperficies conica ALFB ad baſim AFB.

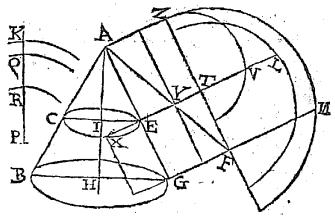
Probatur. Quia ita eſt latus AL ad radium AN, vt LC latus ab radiũ CM, quæ eſt eadem proportio ob parallelas ex 4. lib. 6. propterea erit ex 16. lib. 5. eadem proportio ſuperficiei CELD ad baſim AED, quam ſuperficiei ALFB ad baſim AFB, cum ſit eadem vni tertiæ proportioni AL ad AN, vel CL ad CM, 30. h.

Progr. 3. Cum itaque LECD ſuperficies ſit ad CED baſim, vt CL ad CM, & hæc ſit, vt AL ad AN erit etiam, vt reliquum CA ex CL ſublato AL ad reliquum CO ex CM ſublato AN. Verùm iam oſtenſum eſt progr. 1. quòd, vt LCED ſuperficies ad CED ſuperficiem; ita eſt reſidua fruſti coni ſuperficies AFBCED ad annulum CEDOXI. Ergo ex 16. lib. 5. vt ſuperficies fruſti conici AFBCED ad annulum CEDOXI ita eſt CA ſegmentum lateris menſurantis ad CO fruſtum diametri.

THEOR. VIII. PROPOS. XXXII.

Superficies conica fruſti coni recti æqualis eſt circulo, cuius ſemidiameter ſit media proportionalis inter ſemidiametros baſium infimæ, & ſupremæ tamquam vna linea, & latus fruſti coni.

SIt conus ABG, in quo baſis infima GB, & ſuprema CE conſtituant fruſtum coni CEBG. Ex IE, & HG radijs vna linea fiat, & inter illas, & GE media proportionalis ſit inuenta TL. Dico, quod ſi hoc radio deſcribatur circulus FQ: hunc eſſe fruſti ſuperficiei conicæ CEGB æqualem.



Probatur, & Progr. 1. Nam ſi inter AG latus, & HG ſemidiametrum media proportionalis inuenitur NF ex hac FN velut ſemidiametro conſtitutus circulus PK æquabit ſuperficiem coni BAG ex prop. 16. h.

Progr. 2. Fiat deinde rectangulum ex EI, & EA, quod ſit AY, & aliud ex GH, & EG, quod ſit EF, & tandem aliud ex EG, & EI, quod ſit XG, vel GY, quod erit æquale complemento YZ ex propoſ. 43. lib. 1. Elem. Ideoque tria rectangula AY, & EF, & GX, ideſt YZ æquabunt rectangulum AP conſtitutum ex AG, & GH, vel æquali GF. Et Gnomon ZFGEY æquabit rectangulum FX nimirum duo rectangula alterum ex EG, & GH, & alterum ex EG, & EI, quod rectangulum GX æquetur rectangulo GY, ideſt complemento YZ.

Progr.

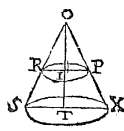
Progr. 3. Inueniatur autẽ media proportionalis inter ZT, & TY linea TV; & quadratum ex TV æquabitur rectangulo YZ, ſic inuenietur media proportionalis TL inter FG, & TX nempe inter latus EG, & inter duos radios EI, & HG, & quadratum ex TL æquabit rectangulum FX, nempe ex dictis progr. 2. gnomonem illi rectangulo æqualem EFYZ. Ideoque duo quadrata TV, & TL æquabunt quadratum ex FN æquale rectangulo AF ex latere coni toto AG, & radio GH. Ratio eſt, quia illa duo quadrata ex TV, & TL æquant rectangulum AF quadratum quidem TV rectangulum YA, at quadratum TL gnomonem reliquum EFYZ, & quadratum FN eſt æquale rectangulo AF.

Progr. 4. Cum itaque ſit circulus ad circulum, vt quadratum ad quadratum ex diametris, ſeu ex ſemidiametris ex prop. 41. lib. 6. Elem. Ideo ſi duo quadrata TV, & TL æquant quadratum FN, etiam circuli ex illis conſtituti TV, & TL quales ſunt PR, & PQ, circuli æquabunt circulum FN, vel PK. Cum ergo circulus ex PK occupet totam ſuperficiem coni GAB; circulus autem ex PR ſuperficiem coni CAE, reliquus quoque circulus PQ æquabit reliquam ſuperficiem fruſti coni CBEG. Quandoquidem circulus PR, & PQ æquant, vt ſupradictum eſt circulum KP, qui totam ſuperficiem coni ſua planitie exequat.

THEOR. IX. PROP. XXXIII.

Similium conorum rectorum ſuperficies ſine baſibus ſunt in duplicata proportione altitudinum, & peripheriarum, ſeu diametrorum, aut radiorum.

PRobatur. Nam ſimiles coni ſunt illi, qui æqualibus angulis ad verticem continentur, vt OPR, & OXS. Quare cum triangula ad axem rectangula OIR, & OTS ſint ſimilia, erit OI ad IR, vt OT ad TS, & *permutando* OI ad OT, vt IR ad TS, & ideo vt OR ad OS, aut PR ad XS, & pariter, vt peripheria ex IR ad peripheriam ex TS ex 43. l. 6. ſed coni ſuperficies æqualis eſt rectangulo ſub vno latere, & dimidia circumferentia cõprehenſo, & rectãgula ſimilia ſunt in duplicata ratione laterum homologorum Ergo etiam conicæ ſuperficies erunt in duplicata ratione ſemicircumferentiarum, & laterum; ſed ita eſt ſemicircumferentia ad ſemicircumferentiam, vt tota ad totam, & tota circumferentia ad totam circumferentiam, vt diameter ad diametrum ex propoſ. 43. lib. 6. & vt ſemidiameter ad ſemidiametrum, & perpendicularis axis ad axẽ. Quare duplicata proportio, ſeu laterum, ſeu axium, ſeu diametrorum, ſeu radiorum, ſeu circumferentiarum eſt illa, quam vnius coni ſuperficies habet ad aliã ſuperficiem alterius coni ſimilis.



COROLLARIVM.

HInc eſt conos æqualium baſium referri, vt altitudines. quòd cylindri æquales ipſis, qui habẽt pro altitudine latus coni, & pro diametro radium, & ideo æqualium baſium referantur, vt rectangula ſibi æqualia, ex peripheria, & altitudine ipſorum, ideſt cum ſint æquales peripheriæ, vt altudi nes.

THEOR. X. PROPOS. XXXIV.

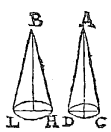
Conicæ ſuperficies conorum rectorum ſimilium habent proportionem compoſitam ex lateribus, & ſemiperipheria.

PRobatur. Quoniam talem proportionem etiam cylindricæ æquales eis ſuperficies inter ſe gerunt, nempe compoſitam, ex proportione altitudinum, & peripheriarum; altitudo verò cylindricæ ſuperficiei, quæ æquet conicam eſt æqualis lateri coni, ſicut peripheria ſemiperipheriæ ex propoſ. 24. huius. Quare etiam conicæ ſuperficies habebunt laterum coni, & ſemiperipheriarum compoſitam proportionem.

THEOR. XI. PROPOS. XXXV.

Superficies conorum rectorum eandem altitudinem habentium ſe habent ad inuicem, vt peripheriæ, aut diametri.

SInt duo coni eiuſdem altitudinis ACD. & BHL, erit triangulum per axem CAD ad triangulum per axem HBL, vt baſis CD ad baſim HL, ſed baſis CD diameter ad HL diametrum eſt vt ſemiperipheria ex CD ad ſemiperipheriam ex HL, & ideo, vt latus æquale ſemiperipheriæ ex CD rectanguli, cuius alterũ latus, & altitudo ſit AD ad ſemiperipheriæ ex HL æquale latus eius rectãguli, cuius altitudo LB eadem, quæ AD. Sed rectangulum ex latere æquali ſemiperipheriæ CD ad rectangulum ex latere æquali ſemiperipheriæ HL eiuſdem altitudinis eſt, vt baſis ad baſim, ideſt vt ſemiperipheria ad ſemiperipheriam, vel vt peripheria ad peripheriam, vel ex 43. lib. 6. vt radius ad radium, vel diameter ad diametrum, ergo erit etiam ſuperficies coni CAD ad ſuperficiem coni HBL eiuſdem altitudinis, vt radius ad radium, vel vt diameter ad diametrum, vel vt peripheria ad peripheriam baſium, vel vt medietas ad ipſarum medietatem.



EXPENSIO IV.

De ſuperficie Sphæroidis Elliptici.

QVamuis, quod viderim apud authores, nondum hæc ſuperficies tetragoniſmo ſubacta fuerit, curabimus tamen pro noſtris viribus eam ad planam ſuperficiem redigere.

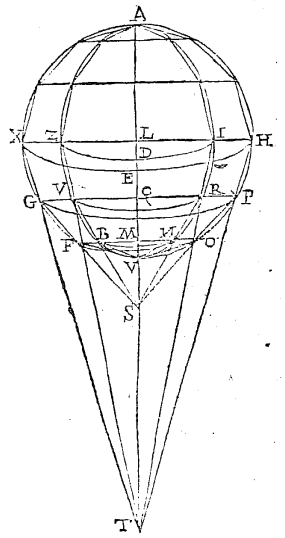
THEOR. I. PROPOS. XXXVI.

** Sphæroidis Elliptici ſuperficies ad ſuperficiem ſphæræ ſe habet, vt ſuperficies Ellipſis ad ſuperficiem circuli.*

SIt ſphæra AHVX, & circulus maximus in ea, &

sphæroides in eo AIVZ, quæ, & exprimat Ellipsim sphæroidem generantem. Dico, quod vt superficies ellipsis AIVZ est ad superficiem circuli AHVX; sic sit superficies sphæroidis ad superficiem sphæræ.

Diuidatur AHVX circulus in sphæra maximus in partes æquales, & rectæ ducantur normales ad diametrum AV, & sint HL, & PQ, & OM, quæ secabunt ellipsim in I, R, N; eruntque applicatæ in ellipsi IL. QR, & NM. Per partes ergo circuli HP, & ellipsis IR. ducantur rectæ, quæ ex ostensis propos. 72. Tract. 24. conuenient in T diametro maiori producto,



Sic si ducantur rectæ PO, & RN, conuenient in diametrum productum maiorem, & tandem OV, & NV in V, sic dicas de alia parte. Itaque omnia erunt triangula æquicrura HTX, & ITZ æqualis altitudinis, sicut, & PSG, & RYS, & cæt. quę si intelligantur circumuolui in sphæra, & in sphæroide inscribent segmenta conorum in sphæra quidem HEXPG, & cæt. in sphæroide verò IDZRY, & cæt.

Probandũ itaque est in primis horum segmentorum sphæroide inscriptorum, & cæt. superficiem 2DRIY esse ad superficiem conicorũ segmentorum inscriptorum sphæra XEHPG, vt superficies IRZY ad superficiem PHXG segmẽtorũ, quæ circulo, ellipsiq; inscripta sunt. Spatia IQRL semiellipsis sunt ad spatia semicirculi LQPH, sicut RQNM ad PQRM, & cæt. vt semidiameter IL ad semidiametrum LH ex prop. 14. Tract. 29. Ideoque dupla ipsorum IZRY ad HPXG erunt, vt diameter IZ ad diametrum HX. Vt autem diameter IZ ad diametrum XH; sic est circulus IDZ ad circulum XEH ex prop. 33. lib. 6. Elem. ita circulus ex RY ad PG circulum cum radij applicatarum ellipsi QR. & MN, & cæt. vt propos. 72. eadem cit. conic. sint ad radios circuli sinus PQ, & OM in eadem proportione, ac semiaxis IL ad semidiametrum LH. Vt autem circulus IDZ ad circulum HEX, sic est coni superficies eiusdem altitudinis IDZT ad coni superficiem HEXT ob eandem altitudinem ex prop. 35. li. & vt circulus ex RY ad circulum ex PG, sic est superficies coni RYT ad coni superficiem PGT ob eandem altitudinem, ergo vt superficies IZT coni ad superficiem coni HTX. Ideoque ablata superficies coni RTY erit ad superficiem coni PTG ablatam, vt superficies coni totius ITZ ad totam superficiem coni HTX, & ideo etiam reliquum superficies IRDZY erit ad superficiem HEXGE, vt tota ad totam, ideoque vt spatium planum IZYR ad spatium planum HXPG, cum etiam spatiorum, vt dictum est sit eadem ratio, quę IZ ad HX. Idem ostendes, & eodem prorsus argumento de segmentis RYNB, & POFG, quorum superficies circulares erunt in ea proportione, quod conueniant in eundem verticem, qua bases circulares, & ideo, qua diametri circulorũ, & ideo, qua spatia diametris contenta YBNB ad PGFO, &c.

Cum ergo singulæ segmentorum conicorum superficies sphæroide inscriptorum; sint ad singulas superficies segmentorum conicorum sphæra inscriptorum, vt singulæ superficies planæ ellipsi generanti figurę inscriptæ ad singulas superficies figurę inscriptę circulo, omnes quoque ex propos. 17. l. 5. erunt ad omnes in eadem proportione sc. conicæ superficies sphæroide inscriptæ ad omnes superficies conicas sphæra inscriptas, vt omnes planæ superficies ellipsis ad omnes planas superficies circuli.

Quò posito inscribantur tot superficies conicę circulo, & sphæroide elliptica, quod possũt inscribi multiplicatis lateribus figurę, & ellipsi, & circulo inscriptæ, quousque postunt multiplicari, hæc inscriptio omne spatium, quod inter curuam, & rectam est, occupabit alioquin si adesset locus, adhuc noua inscriptio posset institui contra hypothesim; Quamobrem cum omnis possibilis multitudo conicarum superficierum sphæra, sphæroideque inscriptarum æquent ipsam sphęræ sphæroidisque superficiem. Sicut, & possibilis multitudo laterum in multilatero circulo, ellipsique inscripto æquant ipsos circulum, & ellipsim: Erit spatium ellipsis ipsa ad circulum, vt superficies sphæroidis, æquęam generat, ad superficiem circuli: quod erat ostendendum.

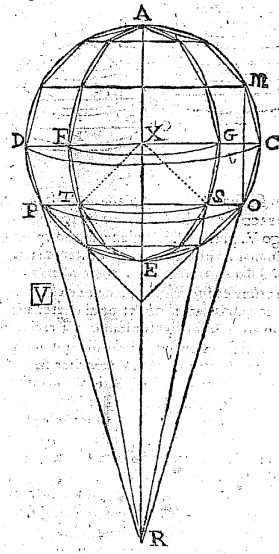
THEOR. II. PROPOS. XXXVII.

* *Superficies spharoidis Elliptici est æqualis superficiei sphæræ, cuius radius media proportionalis sit inter axes maiorem, & minorem.*

SIt sphæra ACED, & sphæroides ellipticam AFGE. Et inscribantur in eo corpora ex segmentis conorum conflata, vt in anteced. factum est, & figura solida sphæroide inscripta ad figuram solidam sphæra inscriptam, vt diameter GF ad diametrum CD, vel vt spatium Ellipticum AGFE ad circulare spatium CAED, quoad superficiem referetur.

Rursus supra ostensum est cum ageremus de planis superficiebus ex propos. 25. tract. 30. superficię figuræ circulo HIKL inscriptę esse æqualem figurę tantundem laterum Ellipsi AGFE inscriptę eo quod HI diameter sit media proportionalis inter GF, & CD. Modo ante omnia oportet ostendere, quòd superficies quoque

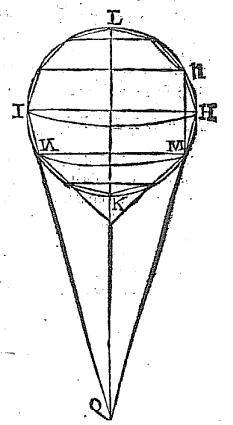
quoque ex segmento conico HIMN, & cęt. quod conuexum intellĩgas refertur ad CDOP segmentum conicum, vtpote, quod conuexum intelligendum sit, vt HIMN superficies plana ad CDOP superficiem planam, & sic de singulis alijs.



Nam HIQ conus habebit proportionem duplicatam ad conum CDR, quoad superficiem suæ basis ambitus HI ad basis ambitum CD, siquidem sunt coni similes recti, eo quod angulus HMN æqualis angulo HQL ob parallelas MN, & QL sit equalis angulo CON, idest ob eandẽ rationẽ angulo CBA, quod subtendat similem arcum HN, & CM cum ergo superficies faciant cum axe eundem angulum apud Q, vt apud B. erunt similes coni CDR, & HIQ. Quod cum ita sit superficies coni CDR, & HIQ, vtpote in duplicata ex prop. 33. huius, ratione suarum circularium basium, & ideo diametrorum, dicent ad inuicem eam proportionem, quam GF, ad CD, siquidem ex effectione GF, HI, & CD sunt tres continuæ proportionales, idest quam spatium Ellipticum GFST ad spatium circuli CDOP, & ideo quam superficies globosa frusti conici GFST ad superficiem rotundam frusti conici sphæra inscripti CODP ex præced. propos. 36.

Coni quoque superficies MNQ erit ad coni OPR in duplicata ratione chordę NM ad chordam OP, quę est eadem ex 35. lib 6. ac HI diametri ad CD diametrum, & ideo habebit proportionem, quam GF ad CD, & quam cum sit eadem ex propos. 72. tract. 24. ST ad OP. Cum ergo sit totus conus HIQ ad totum CDR, vt ablatus MNQ ad ablatum OPR quoad superficiem, erit etiam residuum frustum conicum HI MN ad frustum conicum CDOP in superficie, vt tota HIQ ad totam CDR superficiem, & ideo in duplicata ratione HI ad CD, quę est GF ad CD, & quo vt dictum est superficiei frusti conici GFST ad superficiem frusti conici CDOP: Et ita argumentaberis de alijs segmentis conicis, vt vt multiplicatis.

Quadere cum singulæ frustorum conicorum superficies sphæra LHKI inscriptorum se habeant ad singulas superficies conorũ sphæra ACED inscriptorũ, vt conicę superficies sphæroidi iscriptę ad eadem conicas superficies sphæra inscriptas, etiam omnes ex prop. 17. lib. 5. Elem. taliter erunt ad omnes. Quamobrem tota superficies frustorum conicorum sphæra LHKI inscriptorum se habebit ad totam superficiem figurę solidę conorum segmentis constitæ sphæra ACED inscriptę, vt superficies figurę solidę ex frustis conicis in sphæroide Elliptica inscriptę ad eandem superficiem figurę solidę ACDE. Quare ex prop. 17. lib. 5. superficies figurę sphæra LHKI inscriptę equabitur figurę in sphæroide inscriptæ AGFE: cum eidem eandem obtineat proportionem: quam GF ad CD, vel quàm superficies Elliptica AGFE ad circuli superficiem ACDE.



Quod cum ita sit modo ostendendum est superficiem quoque sphęrę HKIL esse equalem superficiei sphæroidicę ACEF. Id autem ostenditur. Non enim est maior, aut minor superficies sphęrę LHKI superficie sphæroidali. Ergo æquabitur. Namq; sit maior superficies LKHI sphęrę. Tunc superficies LKHI dicet ad superficiem sphęrę ACED maiorem proportionem, quam superficies sphæroidis Elliptici AGFE; sit itaque V superficies illa, in qua dicit maiorem proportionem; ita quod si illa à superficie sphęrę LHKI abscinderetur; tunc eandem proportionem diceret ad superficiem sphęrę ACED quàm superficies sphæroidis Elliptici AGEF. Inscribantur itaque tot segmenta conica in sphæra LHKI; donec differentia, quę inter superficiem sphæræ mediat, & inscriptam figuram sit minor quantitate V. Igitur figura inscripta sphęrę LHKI dicet maiorẽ proportionem ad superficiem sphęricam ACED, quam superficies sphæroidis elliptici AGEF, cum ad hoc, vt diceret eandẽ tota differentia V ipsi figurę inscriptę superficiei debuisset deficere. Quare tantò maiorem proportionem dicet superficiei inscriptę figurę conicę ADCB, & tantò dicet maiorem proportionem, quam figura inscripta sphęroidi, quę superficie sphęroidis minor est. Sed supra ostensum est dicere eandem. Ergo diceret eandem proportionem, & maiorem ad eandem figurę conicę inscriptę sphęrę ACED superficiem, quod est absurdum.

Quod

Quod ſi dicatur ad ſphæricam ſuperficiem ACED ſuperficies LHKI minori in proportione, quàm ſphæroidalis ſuperficies AGEF ſit aſſignata differentia V, quę ſi deficeret ſphæroidali ſuperficiei, tunc diceret eandem proportionem. Inſcribantur itaque in ſphæroide tot ſegmenta conica, donec differentia, quę intermediat inter ſphæroidis ſuperficiem, & ſuperficiem conicorum ſegmentorum inſcriptorum ſit minor ſuperficie V. Igitur figura Elliptice ſphæroidi inſcripta dicet maiorem proportionem ad ſuperficiem ſphęrę ACED quàm ſuperficies ſphęrę LHKI, cum vt diceret eandem deberet illi deficere tota differentia V. Ergo multò maiorem dicet ad figurę coniceę inſcriptę eidem ſphæręę ACED, quę minor eſt, & multò maiorem, quàm figurę ex ſegmentis conicis conflatę ſphęrę LHKI inſcriptę ſuperficies, quę minor eſt. Sed ſupra oſtenſum eſt, quod dicebat eandem figura ſphæroidi inſcripta ad figurę coniceę ſuperficiem inſcriptę ſphęra ACED, quam coniceę figurę ſuperficies ſphęrę LHKI inſcriptę. Ergo diceret eandem, & maiorem, quod eſt impoſſibile.

COROLLARIVM.

EX hoc doctrina clarè deducitur Idem dicendę de ſegmentis ſphæroidalibus V. g. de ſegmento STE, nempe quod eius ſuperficies ſit æqualis ſegmenti ſphærici NMK ſuperficiei, cuius ſubtenſa MN ſit media proportionalis inter ſubtenſam ſeu applicatam ST, & chordam OP: Eadem enim prorſus demonſtratio valet, vnde eam non replicabimus. Igitur cognoſces ſectoris ſphæroidalis ſuperficiem XSETX, ſiquidem illa conſtat ſuperficie conica SXT, & ſuperficie ſegmenti ſphæroidalis STE nempe æqualis ſuperficiei ſegmenti MNK, ſphæræ. Hic verò etiam deduces ſphæroidalem ſuperficiem AGEF, eſſe quadruplam circuli LHIK talis eſt enim ſuperficies ſphęræ HKIL, cui æquatur reſpectu ſui circuli, cęteraſque ſimiles proportiones ex tuo ingenio venaberis.

EXPENSIO V.

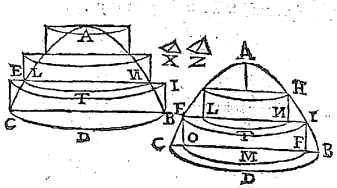
De ſuperficie cuiuſcumque corporis circularis ad axem ſuum recti.

CVm multa dentur corpora, quę neque conoidem paraboli cum aut ellipticum imitantur, ſed videntur omnino irregularia, videndum tamen eſt an illorum aliquo modo area inueniri poſſit, loquor autem de illis, qui axe ſuper ſuam baſim directè, normaliterque inſiſtunt.

THEOR. I. PROPOS. XXXVIII.

* *Omne corpus, quod ex plano axem circa ſuum circumuoluto formatur, habet planum per axem ad ſuperficiem conuexam in ea proportione, qua baſis diameter ad peripheriam baſis.*

SIt corpus ex parabola conſtans rectum ad axẽ cuius ſuperficiei plani per axem duci nota ſit quantitas. Dico, quod ex hac inueniri poterit etiam quantitas eius ſuperficiei conuexæ. Nam planum per axem ita ſe habet ad ſuperficiem conuexam, vt diameter BC ad peripheriam BCD.



Nam ſic ſuperficies BAC plana non eſt ad conuexam BACD, vt BC diameter ad BDC peripheriam. Erit ergo V. g. ſuperficies plana BAC ad conuexam BACD in maiori proportione quantitate Z; tali modo, quòd ſi quantitas Z à ſuperficie plana BAC tolleretur; tunc ea ſuperficies plana BAC eſſet ad conuexam corporis dati BACD, vt BC diameter ad peripheriam BDC: Inſcribantur itaque tot rectangula donec ſuperficies eorum minùs differat à ſuperficie plani per axem ABC, quam quantitas Z ex prop. 1. Tr. 30. & ſit hæc minor differentia quantitas X. Ergo quia rectangulorũ EF, & EH, & cæt. inſcriptorum ſeries minus differt à ſuperficie plani per axem BAC, habebunt maiorem proportionem ad ſuperficiem conuexam corporis dati BACD, quàm diameter DC ad peripheriam BDC: Verùm, vt BC diameter ad peripheriã BDC, ita eſt FO diameter ad peripheriam FMO, & ita eſt rectangulum inſcriptum EF ad ſuperficiem frusti cylindrici OMFE cum ſint ſuperficies eiuſdem altitudinis, at vt FO rectangulum ad MOFE ſuperficiem cylindricam, ita eſt HL rectangulum ad NLH ſuperficiem cylindricam ex prop. 1. lib. 6. cum ſit eiuſdem altitudinis rectangulum illi ſuperficiei æquale ex pr. 4. tr. h. Quare ex prop. 17. lib. 5. tota ſeries rectangulorum ad totam ſeriem ſuperficierum conorum conuexam erit, vt diameter aliquis V. g. FO, vel BC ad peripheriam aliquam puta FMO, vel BDC. Sed rectangulorum inſcriptorum omnium ſuperficies ponitur habere maiorem proportionem ad ſuperficiem conuexam corporis dati BADC; quàm diameter BC ad peripheriam BDC. Et ſuperficies eadem rectangulorum inſcriptorum habet eandem proportionem ad ſuperficiem ipſorum cylindrorum conuexam, quam BC diameter ad BDC peripheriam. Ergo cùm eadem planorum ſuperficies rectangulorum inſcriptorum ad conuexam corporis dati BADC habebat maiorem proportionem, quam ad cylindrorum conuexam ſuperficiem ex 12. lib. 5. erit maior cylindrorum ſuperficies, quam continentis corporis BADC, quod eſt abſurdum.

Quod ſi ponas obtinere ſuperficiẽ per axem BAC planã ad ſuperficiem conuexam corporis dati BADC minorem proportionem: ſit differentia quãtitas Z, quæ ſi adeſſet, addita ſuperficiei planæ: tunc eſſet vt diameter BC ad peripheriam BDC; Tunc circumſcribantur rectangula adeò multiplicata, vt differentia X ſit minor, quàm Z, quam obtinent à ſuperficie plana BAC plani per axem ducti, & erit adhuc minor proportio rectangulorum circumſcriptorum ad conuexam ſuperficiem BADC corporis dati: quam BC ad BCD: Flant ita, vt priùs frufta cylindrica circa rectangula. Rectangulaque ad illorum omnium ſuperficiem erunt, vt BC ad BDC. Cum itaque eadem rectangulorum ſuperficies ad ſuperficiem cylindrorum habeat eandem proportionem BC ad BDC, & ad ſuperficiem BADC corporis dati minorem, quam BC ad BDC erit maior ex 12. lib. 6. ſuperficies corporis dati BADC licet inſcripta ſuperficie circumſcripta rectangulorum; quod eſt abſurdũ. Cũ ergo ſuperficies plani per axẽ dicat, nec maiorẽ proportionem, nec minorem proportionem ad conuexam ſuperficiem, quam diameter BC ad peripheriam BDC; Dicet itaque eandem proportionem: quod erat oſtendendum.

COROLLARIVM.

ITaque cum nota ſit dictis pr. 33. Tract 30. ſuperficies plani ducti per axem conoidis parabolici, quæ eſt parabola, etiam ſuperficies eius conuexa patebit ſine baſi conſiderata. Nam ita ſe parabola per axem ducta in conoide parabolico ſe habebit ad ſuperficiem conuexam ipſius, vt diameter, ſeu applicata axi ad peripheriam circuli, quæ eo ſemidiametro deducitur.

EXPENSIO VI.

De ſuperficie ſphæræ menſuranda.

ARchimedes, dum ſolliditatem ſphæræ perquireret, hoc nobis indigne problema reliquit, quo ſphæricam ſuperficiem ſumma facilitate menſurare poſſemus, quod cum apud ipſum obſcurè omninò tradatur, nos clariùs, quàm fieri poſſit explanare curabimus.

THEOR. I. PROPOS. XXXIX.

Chordæ parallelæ coniungentes latera æqualia figuræ circulo inſcriptæ parium numero laterum, omnes ſimul tamquam vna ad diametrum eam habent proportionem, quam chorda vnum latus diametro coniungens ad ipſum latus.

SIt pr. 40. fig. duodecim V. g. laterum circulo inſcripta. Dico, quòd chordæ BC, EF, HG, IT, ML coniungentes latera, & parallelæ eam habent proportionem ad diametrum AD, acceptæ tamquam vna linea, quam habet chorda CD ſubtenſa omnibus arcubus ſemicirculi vno dempto ad ipſum latus CA ſubtendens arcum reliquum; quod vt oſtendatur ducantur rectæ de vna ad aliam EC, HF, IG, & LI, quæ erunt parallelæ, vtpote æqualia latera coniungentes, & ideo omnia triangula AOB, OCD, PEQ, QFR, & cæt. erunt æquiangula, vnde ex El. l. 6. prop. 41. Cor. habebunt latera circa æquales angulos proportionalia, eritque vt BO ad OA, ſic CO ad OP, & ita EQ ad QP, & ſic FQ ad QR. Sic quoque CS ad SN, & IK ad KN, & cæt. Quare ſicut vna ad vnam, ſic omnes ad omnes ex prop. 17. lib. 5. Ideo linea HY omnibus chordis BC, EF, GH, TI, ML extenſa, ita erit ad totam diametrum AD, vt vna V. g. OR, vel OC ad vnam OA; Sed vt eſt OC ad OA, ita eſt CD coniungens latus diametro AC latus ex prop. 8. lib. 6. ob rectangulorum ſimilitudinem. Ergo quam proportionem omnes CB, FE, & cęt. ennumeratæ quinque, velut vna V. g. YH ad diametrum, hanc habet CD chorda prædicta ad latus CA.

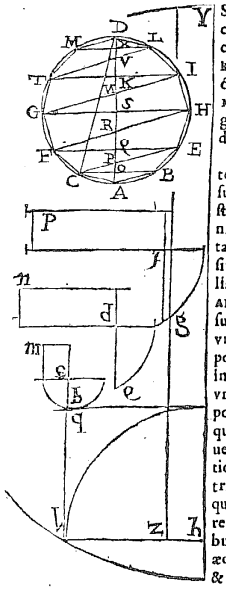
COROLLARIVM.

COllige ita, eſſe latus ex aliquibus chordis cum dimidia compactum V. g. CB FE, & dimidia HS ad diametrum interceptum AS, vt CD ad CA ratio eſt, quia dicunt eandem proportionem ex preced. propoſitione, quam OB ad AO, & eandem dicit ſimiliter CD ad CA.

THEOR. II. PROPOS. XL.

Corporis ex portionibus conicarum ſuperficierum conſtantis in ſphæra inſcripti ſuperficies æqualis eſt circulo; cuius ſemidiameter poſſit quadratum æquale rectangulo, cuius vnum latus omnes fruſtorum conicorum diametros æquet, & alterum latus ipſorum.

SIt figura præcedens, ſed intelligatur globoſa, & ſit LMD apex coni, cuius circulus baſis ML diametro conſtet; Sic ILTM fruſtum coni, cuius baſis circulus diametrum KI, poſſideat, & ſectio, item circulus ML diametro LM gaudeat, & ſic effare de alijs.



Inueniantur autem circuli æquales ſuperficiebus fruſtorum horum conicorum iuxta dicta propoſ. 32. huius; ſitque proportionalis a b Inuenta inter AB BO: inter OB ruſus, & QB tamquam vna, & BE media proportionalis d e. Sic in EQ, & SH tamquã vna, & EH media proportionalis f g reliquę quoque tres inueniantur proportionales, quæ erunt tribus prędictis æquales, ſicut ipſa tria rectangula, ex quibus prodeunt erunt æqualia, vt a m, d n, & f p. Rectangula autem ex quibus mediæ proportionales inuentæ, ſi in vnum rectangulum

gulum ex 4. lib. 2. Elem. componantur. Quia primum ex OB efficitur pro vno latere secundum ex OB eodem, & EQ tertium ex EQ eodem, & SH, pro alio semper BA deseruiente cum BA, BE, EN, & cæt. ex Thesi æquentur semper, ideo dum singuli sinus replicantur linea h y ex omnibus sinubus duplicatis extensa æquabitur omnibus chordis BC, FE EF, HG, & cæt. Et ideo omnia rectangula sub eadē altitudine lateris AB erunt æqualia rectangulo ex AB pro vno latere, & quinque lineis chordisq; BC, & EF, & cæt. tamquam alio latere compacto, vt est ZY ex 4. lib. 6. si ergo inueniatur media proportionalis inter Z h, & h y, quæ est l h, hæc quadratum constituet æquale ZI, & consequenter omnibus rectangulis sex, quorum duo sunt a m duo d n, & duo f p, & ideo etiā quadratis æqualibus quibus ex d e; a b, & f g. Quamobrem, si ex inuenta proportionali h l tamquam radio constituatur circulus, hic circulus erit quoque æqualis omnibus sex circulis de duobus radijs æqualibus duobus lineę a b duobus lineę d e, & duobus lineæ fg; sed illi sex circuli ex pr. 32. h. sunt æquales superficiebus fructorū conicorū, omniū quæ figurā solidam in sphæra inscriptam componunt: Ergo, & circulus ex semidiametro h l, cuius quadrantē cōtinet quadratum h q illam superficiem æquabit.

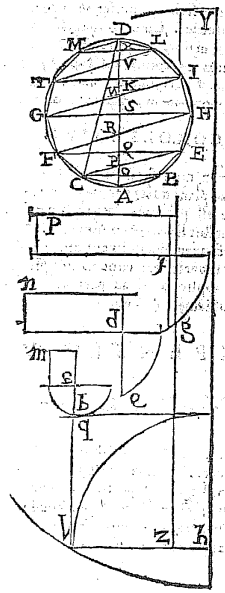
COROLLARIVM.

QVia ex Cor pr. 39. est CD ad CA, vt aliquę chordæ V.g. CB, & EF cum dimidia HS ad AS; quia probatum est in ipsa ita esse prædictas duas cum dimidia ad AS, vt BO ad OA, & ideo rectangulo ex BC, EF. & dimidia HS tamquam vno latere & ex AB pro alio latere quadratum æquale habebit latus quod assumptum pro diametro describet circulum æquale superficiei corporis conici AHG inscripti portioni alicuius sphæræ.

THEOR. III. PROPOS. XLII.

Superficies figuræ solidæ in sphæra inscriptæ est minor quadruplo circuli maximi eiusdem.

SIt figura duodecim laterum, vel talium, quæ quaternario numerentur in sphæra AHGD inscripta, datusque sit circulus eius superficiei equalis descriptus diametro l h ex præced. & quia demonstratum est primo pr. ita esse h y compacta ex omnibus quinque chordis CB FE, & cæt. ad diametrum, vt est CD chorda ad CA latus; Si constituatur ex medijs nimirum AD, & CD rectangulum hoc erit æquale rectangulo ex extremis constituto AC, & h y ex propos. 17. lib. 6. Elem. vt duod. propos. huius Cor. ideoque quadratum hq ex h l æquale prædicto rectangulo Z Y erit etiam æquale rectangulo ex AC, & CD constituto; sed hoc est minus, quam quadratum ex AD. Ergo quadratum l h est minus quam quadratum diametri. Quare, & quadruplum ex h l quale est quadratum ambiens circulū, cuius radius h l, quod æquatur figuræ inscriptæ solidæ superficiei ex 40. h. erit minus, quā quadruplum quadrati ex AD; sed sicut se habet quadratum ad quadratum, ita circulus ad circulum, ideoq; circulus quoque, cuius quadrans in h q æquans superficiē figuræ sphæra inscriptæ minus erit quadruplo circuli maximi, veluti est AHGD,

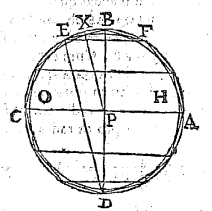


THEOR. IV. PROPOS. XLII.

Figuræ solidæ circa sphæram descriptæ superficies maior est, quam quadruplum maximi sphæræ circuli.

SIt sphæra ABCD circa quam fit duodecim laterum circumscripta figura solida ex frustis conorum, vt præcedens integrata quamobrem rectangulum ex chorda ED, BD diametro confectum æquabitur rectangulo ex EB latere, & linea æquali omnibus quinque chordis simul, quarum vna est EF, cui, & æqualis quadrati latus tamquam radio facit circulum æqualem superficiei figuræ solidæ sphęra inscripte ex 41. h. sed hoc rectangulū ex DE, DB est maius, quā quadratum ex diametro sphærę comprehensę OH in fig. conica; quia habet latus BD maius; latus verò ED est æquale diametro OH, quòd ob parallelismum DE, Px sit duplum radij PX. Ergo rectangulum ex DE DB compactum erit maius quadrato ex diametro sphæræ compræhensæ OH. Quapropter, & si fiat quadratū æquale rectangulo à DE, & DB lateribus comprehenso erit quoque maius, quam quadratum ex diametro

metro OH, consequenterque quadruplum eius erit maius quā l h uplo quadrati ex diemetro OH sphęre. Circulusque in eo inscriptus circulo quadruplo maximi circuli sphæræ, sed ille circulus maior quadruplo maximi sphæræ circuli est æqualis superficiei figuræ solidæ sphæra circumscriptæ, & in maiori sphæra inscriptæ, quia est æqualis quarta eius pars rectangulo ex DE EB, quòd æquatur rectangulo pro vno latere ex chordis quinque compacto, & pro alio ex EB, cuius quadrati latus



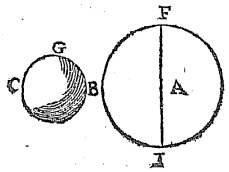
Pro radio vsurpatum circulum facit illius figuræ solidi circumscripti sphæræ superficiei æquale quale latus in præced. fig. est h l, quòd quadratū, quia æquale est rectangulo ex quinque chordis pro vno latere, & pro alio ex EB, quod æquatur DE, & DB rectangulo maius quadrato ex OH diametro, si quadruplicetur, erit quoque maius quadruplo quadrati ex OH, & ideo circulus in eo quadrato quadruplo maiori inscriptus, erit quoque maior circulo quadruplo maiori, quàm circulus ex OH.

Vnde, & fig. conicę circumscripte superficies est maior quadruplo maximi sphęrę circuli ex OH.

THEOR. V. PROPOS. XLIII.

Quæcumque sphæræ superficies quadrupla est circuli, qui in ea maximus habetur.

SIt circulus BIF sphæræ maximo circulo BGC quadruplex. Dico, quod is circulus est equalis superficiei sphæræ. Nam si talis non est, erit, aut maior, aut minor, sed nec maior, nec minor esse potest: ergo æqualis.



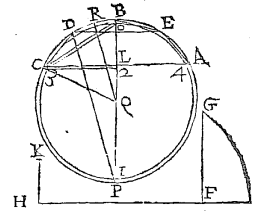
Nam si est maior, erit aliquis circulus alius æqualis superficiei figuræ solidæ circulo circumscriptæ, qui vel æquabit prædictum circulū, vel eo erit minor: si quidem si VIB affirmetur maior superficie sphæræ, & superficies omnis circumscripta sphæræ corporis solidi, sic quoque maior; dabitur aliqua superficies solidi corporis inter infinitas, quæ erit quidem maior superficie sphæræ, sed minor prædicto circulo IFB, si enim V. g. superficies corporis solidi 12. laterum est nimia, potest assumi 24. laterum, aut 48. aut 96. & sic in infinitum donec decrescat vsque quo fit minor, vel equalis circulo IFB, cum ergo quælibet superficies corporis solidi sphæra circumscripti sit maior ex 42. h. quadruplo circuli maximi, foret etiam maior circulo prędicto IFB, quod esse nequit, cùm minor electa sit.

Sit rursus supecficies sphæræ minor, IBF quadruplum circuli maximi BGC ipsius sphæræ. Dabitur itaque eodem modo circulus maior, quàm IBFB, qui æquabit aliquam superficiem corporis solidi in sphæra inscripti, siquidem si maiorem non det fig. 12. laterum potest assumi 24. laterum aut 48. aut 92. & sic infinitum donec fiat maior, quàm circulus IBF minor superficie sphæræ. Sed hic circulus est minor quadruplo maximi circuli sphæræ ex 41. h. ergo est maior, & minor circulo FIB, quod est absurdum, cum itaq; nec maior, nec minor esse possit, erit ei æqualis, & ideo superficies sphærę quadrupla erit circuli CGB.

THEOR. VI. PROP. XLIV.

Portionis figuræ conicę superscriptæ sphæræ superficies est maior circulo, cuius radius sit chorda à vertice portionis ad basim eius ducta.

SIt portio sphæræ O34. cuius vertex O basis 34. chorda à vertice ad basim educta 03. circa quā portionem sit descripta figura solida conica æquilatera AEBDC, & circa eam circulus ABCP. Deinde esto circulus, cuius semidiameter sit latus quadrati æquale rectangulo sub latere BD, & omnibus chordis latera figuræ coniungentibus, & dimidia basi contento, vt est latus FG, cuius quadratum æquat parallelogrammum FH, HK, cuius latus BH æquat ED chordam latera figuræ coniungentem, & CL semibasim, & alterum latus FH æquat BD, & ideo superficies corporis conici inscripti AEBDC.



Probandum est ergo, q quadratum ex FG sit maius quadrato 03. & consequenter circulus, cui pro radio deseruit maior circulo, cui radius est 03. Quia ergo ex Cor. propos. 41. h constat, quod FH sit ad LB, PD ad BD, ideo rectāgulum sub medijs LB, PD erit æquale ei, quod ab extremis comprehenditur rectāgulo FH, & BD, idest rectangulum ex FH, HK. Rectangulum verò hoc LB, PD est maius rectangulo ex 10 02. vt demonstrabo, cui rectangulo 10. 02. quadratum 03. est æquale, vt pariter infra ostendam, cum ergo rectangulum PD, & LB æquale quadrato GF, & ideo rectāgulo ex HF, HK sit maius rectāgulo 10 02. & quadrato 03. patet propositum, nimirum quod circulus ex FG radio factus æqualis superficiei figurę circumscriptæ portionis sphæræ ex Coroll. prop. 40. h. erit maior, quā circulus ductus ex 03. chorda à vertice O. ad basim 23. deducta, & ideo circūscripta superficies.

Duo itaque remanent ostendenda primo quā-

dratum 03. esse æquale rectangulo 10. & 02. lateribus clauso; secundò rectangulum BL, PD esse maius rectangulo prædicto ex 10. & 02. & consequenter etiam quadrato 03.

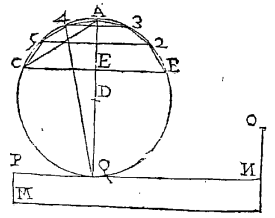
Primum sic ostendo ex pr. 35. l. 3. Quadratum 23. est æquale rectangulo 12. & 20. cui si addas quadratum ex 20. fiet totum rectangulum 10. 02. æquale duobus quadratis ex 20. & 23. sed istis est æquale quadr. 03. ex. 11. l. 2. ergo hoc quadr. erit æquale etiam rectangulo 10. & 02. & ecce primum.

Secundum verò, quod hoc rectangulum 10 02. sit minus rectangulo LB, PD, sic demonstro linea LB est maior, quam 02. cum triangula BCL, & 023. sint æquiangula, & minor sit 23. quam LC, & 30. quam BC, & ideo etiam 02. minor erit, quam LB, alterum verò latus PD est æquale 10. lateri. Quia enim BR est medietas lineæ BD, & QI medietas diametri IB, ideo erit BR ad BD, vt BQ ad BI, & ideo etiam erit ita QR ad PD; quare PD erit etiam dupla lineæ QR, quæ est semidiameter minoris sphæræ, & ideo PD eius diameter, & æqualis 10. quare rectangulum PD, BL æquale in latere PD maius in latere LB, rectangulo 10 02. erit ipso 10 02. absolutè maius, quod est secundum.

THEOR. VII. PROPOS. XLV.

Portionis figuræ conicæ solidæ sphæræ inscriptæ superficies est minor circulo, cuius semidiameter sit linea à vertice portionis ad basim eius deducta.

SIt superficies portionis sphæræ BAC linea à vertice ducta ad basim BC sit AC: corporis conici inscripti sint æqualia latera B 2. & 23. 3 A, & cæt. quę rectis coniungantur 25. 34. Fiat rectangulum latere constans omnibus chordis, & radio basis æquale, nimirum rectis 2. 5. 3. 4. & EC. & pro latere habeat A 4. & sit MN, quibus lateribus inueniatur media proportionalis, & sit NO circulus, itaque radio NO erit æqualis toti superficiei illius corporis solidi sphæra inscripti ex Cor. prop. 40. huius. Quia verò ex propos. 39. Cor. eadem proportio est omnium chordarum in portione existentium cum dimidia, vt est PN ad EA segmentum diametri interceptum, quam Q 4. ad latus 4A ideo rectangulum ex medijs Q 4, & EA erit æquale rectangulo MN ex extremis ex pr 17. l 6. El. nempe A 4, & omnibus chordis cum dimidia, quæ linea est PN, hoc autem rectangulum est minus quadrato AC, vt ostendam, ideoque etiam MN, & ideo quoque quadratum ex NO, cum hæc tria inuicem sint



æqualia; & ideo, si ex AC fiat circulus, tamquàm radio erit maior, quam circulus factus ex radio NO, qui æquatur superficiei fig. conicę inscriptę ex Cor. pr. 40.

Sic verò demonstro quadratum AC esse maius rectangulo ex Q 4. & EA lateribus extructo. Nam est æquale rectangulo ex QA, & AE confecto; Sed hoc rectangulum est maius rectangulo Q 4. EA, quod habeat latus QA maius, quàm Q 4: Ergo etiam quadratum ex AC rectangulo illi maiori QA, AE æquale erit maius rectangulo Q 4. AE; quod autem quadratum AC sit rectangulo QA, AE æquale, patet. Nam est æquale ex pr. 11. l. 2 quadratis EA, & EC: at quadratum EC est æquale rectangulo QE, EA ex 45. lib. 3. cui si addas quadratum EA fiet vnicum rectangulum QA, AE ob eandem altitudinem EA æquale duobus quadratis ex EA, & EC, & consequenter quadrato AC; Cum ergo quadratum AC sit æquale rectangulo ex QA AE; erit maius rectangulo Q 4. AE, & rectangulo MN, & quadrato ex NO; Vnde, & circulus illo radio AC descriptus erit maior circulo descripto ex radio NO.

THEOR. VIII. PROPOS. XLVI.

Superficies cuiuscumque portionis sphæræ minor dimidia est æqualis circulo, cuius radius est chorda à vertice portionis ad basim deducta.

SIt eadem fig. quæ superioris propos. BACQ, & portio eius BAC minor dimidia sphæra. Sitq; chorda à vertice sphęræ deducta AC, ex qua tamquam radio fiat circulus. Dico hunc circulum esse æqualem sphærę portionis BAC superficiei.

Probatur. Nam si non erit equalis, erit aut maior, aut minor; sed nec vnum, nec aliud esse potest. Ergo erit equalis circulus ex AB superficiei sphęrę

Probatur, quod maior esse nequeat. Nam si maior est, circumscribatur ipsi portioni conicum corpus, vt propos. 44. huius factum est, adeo multiplicatis lateribus, vt eius superficies sit quidem maior sphęra, vt semper est, sed tamen minor circulo ex AC, qui maior ea superficie sphęrica prędicatur; tunc; circulus AC descriptus contra ostensa propos. 44. huius erit maior superficie conici corporis circumscripti, quod est absurdum.

Probatur quoque, quod non possit esse minor; tunc enim poterit describi in sphęra corpus conicum adeo lateribus multiplicatis, vt sit minor quidem eius superficies superficię portionis sphęrę; sed maior circulo ex AC, qui superficie portionis sphærę minor dicitur, & ita sequetur contra ostensa in præc. propos. quod superficies circuli AC possit esse minor, quam corporis inscripti conici superficies, quod absurdum item est.

Cum ergo circulus ex AC radio, nec maior, nec minor esse possit superficie segmenti sphętici BAC, ipsi erit æqualis, vt asserit propositio.

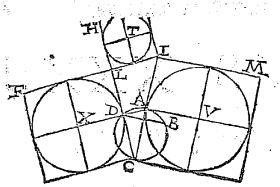
THEOR. IX. PROPOS. XLVII.

Superficies cuiuscumque portionis sphæræ maior dimidia est æqualis circulo, cuius radius est chorda à vertice portionis ad basim deducta.

SIt sphęra ABCD, eius portio maior dimidia sit BCD. Ducatur diameter AC perpendicularis sectioni BD; deinde duæ chordę AD, DC. Fiatque ex diametro CA, tamquã semidiametro circulus; ex v

hic

hic enim erit quater maior circulo maximo sphæræ datæ, qui est ABCD; quia etiam quadratum, in quo concluditur est quadruplo maius, vt patet in quadrato CM, cum habeat proportionem lateris

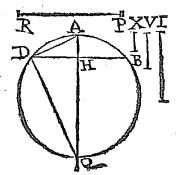


duplicatam, eritque æquale duobus circulis ex AD radio, & DC radio confectis. Nam est quadratum CM æquale duobus quadratis IH, CF: quare, & circulis ex centro T, & centro X inscriptis in illis ex centro V descriptus circulus erit æqualis. Circulus autem IH est æqualis superficiei portionis sphęrę BAD, vtpote chorda AD, tamquam semiradio descriptus cum IL sit dupla AD ex 4. l. 6. ob duplam CI ipsius CA. Ergo circulus X æqualis, cum T, circulo alteri V, & ideo toti superficiei sphęrę, erit æqualis se solùm residuę superficiei portionis sphęrę BCDA.

PROBL. I. PROPOS. XLVIII.

** Datam sphæram, sic secare plana superficie, vt portionum superficies similem cuicumque portioni datæ retineant proportionem.*

***SIt sphęra data BADQ, & semidiameter AQ; sitque proportio data, quam vnum ad duo scilicet x ad 1. Inueniatur duabus x, 1 media proportionalis V, diuidaturque diameter AQ ex Cor. 1. prop. 13. lib. 6. iuxta proportionem, quam habet x ad 1, & ducatur à puncto diuisionis H normalis HD, & per H agatur planum BD. Dico sphęræ superficiem esse diuisam in proportiones datas.



Probatur. Nam ducta AD, QD ex præced. pr. 46. & 47. superficies portionis BAD est æqualis circulo cuius radius est AD: item superficies sphæricæ portionis BQD est æqualis circulo, cuius radius est QD. Quia itaque triangula sunt æquiangula ADH, HDQ erit AH ad AD, vt HD ad DQ, & *permutando* erit AH in proportione ad HD, vt AD ad DQ, vt autem AH ad HD, sic est HD ad HQ ex Cor. prop. 16. lib. 6. quare erit AH ad HD, sic X ad V, quia etiam V est media proportionalis inter X, & 1, sicut HD est media proportionalis inter AH, & HQ, quę ex constructione sunt in eadem proportione, vt X ad 1, & ideo, vt X ad V lineas, sic erit AH ad HD, & AD ad DQ, & ideo vt AH ad tertiam HQ, vel x ad 1 ita ex 21. lib. 6. Cor. quadr. AD adquadr. DQ, vt autę quadr. AD ad quadr. DQ; sic circulus inscriptus ad circulum inscriptum; vt autem circulus inscriptus in quadrato AD ad circulum inscriptum in quadrato DQ, sic quadruplum circuli AD ad quadruplum circuli DQ: Sed quadrulum circuli inscripti quadrato AD est æqualis superficiei portionis sphæricæ BAD, & quadruplum circuli QD quadrato inscripti est equalis superficiei portionis sphæricæ BQD. Ergo ex 16. lib 6. vt x ad 1, sic sphęricæ portionis superficies BAC ad sphæricæ portionis BQD superficiem.

PROBL. II. PROPOS. XLIX.

** A sphæræ superficie portionem abscindere æqualem superficiei circuli dati; dummodo semidiameter circuli diametro sphæræ sit minor.*

***SIt datus in fig. propos. præced. semidiameter circuli PR, & ex propos. 1. Elem. 4. accommodetur in data sphæra maximo circulo BADQ ducto priùs diametro AQ à puncto Q, & sit V. g. QD, ducatur deinde DB planum normale ad AQ dico BQD esse portionem sphæræ, quæ habet superficiem æqualem circulo, cuius semidiameter PR.

Probatur. Quia PR effecta est chorda QD: chorda vero QD vsurpata pro radio describit circulum æqualem circulo ex PR. quod sit ei æqualis, & item æqualem superficiei portionis sphęræ, DQE quam secat BD basis, vt supra ostensum est.



TRACTATVS XXXII.

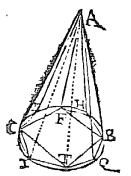
De superficiebus corporum in planum redigentis.

PRoiectio superficierum corporearum, quę in planum extenduntur, aliquibus videbitur forte non omninò Mathematica, cùm per puncta, per quæ habili manu lineæ flexæ ducuntur superficies eiusdem rationis, & quantitatis, ac illæ, quæ circumambiunt corpora describantur: Verùm si illæ consideret, quod & Ellipticæ, Parabolicæ, Hyperbolicæque superficies, ita delineantur, sicut, & Quadratrices, & Asymptoticæ lineæ sic descriptæ in præcedentibus furere: non infitiabitur rigorosàm esse hanc superficierum corporearum in planum extensionem, maximè, quia fundatur omnino in Orthographia, quæ certè Mathematica descriptio est. Verum tamen est, quod singulis proiectionibus ostensiones non adferemus cùm eas supra tract. 25. satis produxerimus.

EXPENSIO I.

De superficiebus cylindricis in planum extendendis.

PRæsumo tamquam euidens, quo magis multiplicantur inscripta plana, eorum superficiem magis accedere ad superficiem corporis conuexi, in quo inscribuntur: Siquidem in Cono recto BAI si sit inscriptum triangulum BAF, elus superficies erit breuissima ex def. 7. tract 3. quæ inter eius lineas terminatrices interiaceat, ergo erit breuior, quam BHF superficies coni, & idem dicas de alijs æqualibus inscriptis: Si verò in segmẽto FBA coni; duo alia triãgula inscribãtur BAH, & AFH hæc simul erunt maiora, quã BAF, siquidem BH, & FH triãguli BFA latera sunt maiora



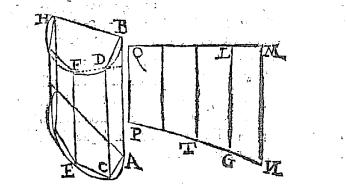
simul, quam BF, triangula verò BAH; & AFH sunt maiora, quam BAF, quòd sint æqualia, & terminent in maiorem altitudinẽ, quam BAF. Quare simul dicent maiorem proportionem ad BHAF superficiẽ coni, quàm triangulum BFA ex 8.1.5. & idem dicas de alijs BAQ, AQT, & cæt. æqualibus. Sed adhuc erunt minora superficie coni cum superficies triangulares inscriptæ, vtpote planæ sint breuissimæ inter lineas BA, & AQ V. g. non autem conicæ, globosæ inter easdem lineas BA, & AQ, & alias concluſæ. Quare semper magis fit accessus ad æqualitatem, quò magis multilaterum inscriptum facies multiplicat, cum semper maiorem proportionem globosæ superficiei, cui inscribitur dicat.

THEOR. I. PROP. I.

Si sint trapezia tot plana, quæ altitudinem trapeziorum cylindro inscriptorum æquent, & latera eiusdem longitudinis obtineant, quam inscripta cylindro: hæc omnia simul æquabunt superficiem multilateri corpori cylindro inscripti.

PRobatur. Nam ex propos. 13. tract. 29. trapezia æqualis altitudinis, & basium æqualium sunt inuicem æqualia. Cum itaque trapezia DA DE, & cæt. inscripta Cylindro sint æqualis altitudinis, & basis ex thesi, ac MG; LT, & cæt. trapezia plano extensa. Consequenter singula singulis erunt æqualia. Propterea que ex 18. lib. 5. omnia simul trapezia Cylindro inscripta, ideſt superficies multilateri in ABEFEH æquabitur superficiei extensæ MNQP.

PROBL.



PRORL. I. PROPOS. II.

Cylindri concaui ab alto cylindro secti rectangulè superficiem, parteſque eius proiicere, & deinde illam in planam extendere.

SIt datus Cylindrus concauus, cuius basis, seu annuli dimidiũ sit CABDFH sectus à duabus superficiebus cylindricis, quæ proiectæ ex 9. prop. tract. 26. sint KMN, & OPQ, inter quas interceptus in sectione AB in figura III videre licet, cylindrus intelligatur. Et primò partes cylindri intercepti sint proiiciendæ, atque adeo tota eius superficies. Ducatur circulus medius, & vtcumq; diuiso aliquo eorum V. g. in part. 6. ducantur radij, seu radiorum portiones FLA, I 2 3, & à punctis, in quibus circulos secant, demittantur perpendiculares ad BC, quas distinctionis gratia ab extrinseco semicirculo profectas trahemus continuas, vt 3 4, & à medio punctatas, vt 2 5. ab interno interruptas 16. & sic ab alijs punctis quoq; 10 11. 12. & B, G, D, & vlterius producemus vsque ad 7. 8. 9. nempe vsque dum secent duos circulos KMN, & OPQ, quibus cylindri secantis insistunt superficies, inter quas, superficies cylindri secti intercluditur. Et KONQ erit cylindri superficies proiecta, tum quoad totum, tum quoad singulas partes.

Probatur. Nam KMN, & OPQ sunt cylindri ad planum recti superficies proiectæ, quoniam ex pr. 8. tract. 26. superficies omnis perpendicularis plano in lineam transit, cum sit eadem, ac superficies proiectrix, & ideo in plano sit sectio superficiei proiectricis. Talis est autem superficies cylindri secantis, cùm ponatur orthogonalis plano. Vnde in lineam transibit. Sectio verò eius cum plano circulus est aut ellipsis; ergo proiectio eius talis erit Rursus si in cylindrica superficie secta partes lineis parallelis axi distinctę intelligantur, cùm axis plano orthographo parallelus sit omnes erunt parallelæ ex propos. 6. & æquales ex 5. prop. tract. 26. distantiæ verò earum ad inuicem mensurentur arcu normali, & sint I F, 10 1, & cæt. ideoque distantiæ eorum proiectæ ex prop. 8. tract. 26. erunt partes diametri 22 19, & aliæ. Vnde PM 6 9. & alię erunt partes proiectæ quoad latitudinẽ, & distãtiã ab inuicẽ. Sed etiã quoad longitudinem. Nam cum sint parallelæ plano orthographo æquales erunt illis, quas KMN, & OPQ secantes cylindricę superficies detrũcant à superficie cylindrica originaria secta DFH. Siquidem, vt diximus KMN, & OPQ proiectricium superficierum sectiones sunt. Vnde 6 MP 9 erit superficies cylindri DFH proiecta, & sic de alijs partibus dicas, vnde totus p partes tali modo proiicietur, & iam apparatus erit completus necessarius ad superficiem quæsitam inueniendam.

Quare seorsim ducatur recta RT, & in ipsa circuli interni, (si superficies interna desideretur) partibus FI, I 10. & 10. D partes æquales assumãtur, vel certè ipsa linea ST per quadratricem, vel per computum, vt supra docuimus, vel practicè minimas partes arcus FI, I 10 & 10 D trãsferendo, & deinde in tot numerò partes, quot arcus G, 10. I F, diuisus est, diuidatur, ducanturque perpendiculares 13 15. 14 16. R 17. T 18. deinde assumatur interuallum 19. M, & transferatur à linea TR, & sit T 23. & 22 6; sit 13. 24. sic 27. 28. mensuret 14. 25. & tandem D 29. distantiam donet R 26. perque hæc puncta flexa ducatur 26. 25. 24. 23.

Idem fiat de alijs punctis in arcu OQ repertis. Nam assumptis interuallis 19. P transferatur in T 18. sic 22. 9. in 13. 15. sicque alia interualla 27. 30. in 14. 16. & D 31. in R 17. perque puncta reperta flexa ducatur 17. 16. 15. 18. quæ terminabit superficiem internam 26. 23. 17. 18. quadrantis cylindri D 10 I F, & idem fiet de superficie externa assumendo distantias à linea BC ad arcum KM, & ad arcum OP, sed in lineis continuis à punctis extrinsecis A 3 12 proficiscentibus.

PROBL. II. PROPOS. III.

Superficies coniunctiuas eiusdem Cylindri perquirere.

SI annulus solidus esset diuersis segmentis compositus, vt solent portarum arcus lapidei, quæritur, quænam esset superficies ea, qua coniungeretur lapis ad lapidem.

Sit igitur exquirenda superficies, secundum quam segmentum 31 FA, segmento 3 I 12 10. coniungitur, quia 13. 15. pertinet originatiuè ad punctum I. Ideo illi lineæ deberet applicari. Nam illa dat longitudinem illius interuam 24. 15. Ab hac ergo linea 13. 15. mensuretur interuallum I. 2. & sit 13. 37. & interuallum 2 3. & sit 37 36. ducanturque perpendiculares 37 35. & 36 34. ad lineam RT. Mensuretur exinde distantia 21. 5. à puncto 37. vsque ad 33. & 20 4. à puncto 35 in 32. & ducatur flexa portio Ellipsis 32. 33. 24. Rursusque accipiatur interuallum 21. 8. & 20. 7. & transferatur in 37 35. & 36 34. & per puncta 34. 35. 15. flexa ducatur, quæ erit portio Ellipsis, & erit superficies 32. 24 34. 15. quæ quæritur, nempe ea, secundum quam segmentum A 3 I F coniungitur cum segmento 3 I 12 10.

Probatur verò primo propositio antecedens. Nam altitudo TR ex effectione est equalis arcui normali D 10. I F; latitudo verò T 18. & cæteræ mensuratę linea T 18. & cæteris vsque ad R 17. est æqualis latitudinis 19. P vsq; ad D 31. erit superficies 23. 18. 26. 17 altitudine quidẽ equalis quadrãti DF, latitudine verò superficiei 19 P D 31. Vnde ex prop. 1. h. equabitur multilatero superficiei Cylindri inscripti inter superficies, alteram cuius sectio B 19 alteram cuius sectio OP intercepti.

Ita dicas de superficie RT 26 23. Nã altitudine quidẽ normali equat quadrãtẽ D 01 I F latitudine verò latitudinem D 29 M 19. Quare equabitur multilateri superficiei inter superficies planam,

cuius

cuius sectio D 19. & curuam cuius sectio KM. Quare si hęc minor RT 23. 26. subducatur ab illa RT 17. 18 remanebit superficies inter media æqualis superficiei intermediæ inter superficies cylindricas, conuexas MNQ, KPO intercepte multilateri Cylindro inscripti: vnde iam multilaterum, si sit adeo multiplicatis lateribus inscriptum, vt superficies eius sensibiliter non differat à superficie cylindri etiam superficies 26. 23. 17. 18. à cylindrica superficie, quę sic fit in arcum DE; continetur verò inter circulos, vel inter superficies, perpendiculares arcubus OFQ; KMN, æqualis erit.

Secundò idem probatur de superficie coniunctiua. Nam altitudo quidem 13. 36. est eadem, quæ 1. 3. longitudo, verò inter arcus KN, & OQ, contineri debet eo in situ; quo lineæ 5. 8. & 4. 7. per illa puncta transeuntes intercipiuntur inter prædictos arcus; tales verò sunt ex effectione 34. 32. & 35. 33.

PROBL. III. PROPOS. IV.

Cylindri concaui superficiem internam inuenire à superficie angulari secti rectangulè.

SIt idem, qui superiùs Cylindrus concauus, seu cylindri quadrans BAFD, diuisus, vt supra, & lineæ similiter ductæ 1 40 44. & 2 41 43. & cæt. quę facient lineas angulares VPX, & ZYm, superquas, superficies erectę intelligantur perpendiculariter ad axem cylindri, & erit portio cylindri protecta præced. Etiam apparatus erit adornatus, vt ex eo excidio superficiei cylindricæ, quæ intercipitur inter latus VPX, ZYm, & superficiem concauâ quadrantis cylindri D 1 10 F texit, diduci queat.

Sit linea RTS, quæ exprimat sectionem BC Sitque portio I. F quadrantis extensa super eam, & sit T 13. at 1. 10. æquet 13. 14. & cæt. perpendicularesque ad RS, vt superiùs ductæ sint, vt 3. 46. 49 sic T 18. 50. & cæt.

Deinde sumatur distantia 19. P, & sit translata in T 18. rursùs 22. 40. & sit 13. 46. Ita 27 51. & æquet 14 47. & tandem D 52. & æquet R 3. quibus punctis repertis ducatur flexa per illa 53. 47. 46 18. Idem fiat de alijs interuallis alteriùs angularis lineæ ZYm, nempe de interuallo 19. Y, qui erit T 50. & 22. 44. & erit 13. 49. itaque si per puncta 54. 48 49 50. ducatur flexa, erit vndique terminata superficies 53. 18. 54. 50. quæ erit ea, quæ cylindri quadrantem interius texet.

Probatur verò, vt supra. Siquidem altitudo est TR, quæ est eadem ex effectione, quæ lineæ circularis F1 10. D, at latitudo superficiei RT 18. 53. eadem, quæ D 19. P 52. Rursùsq; latitudo RT 54. 50. eadē, quæ D 19. Y 95. ablata itaque prima longitudine, ab hac postrema remanebit 53. 18. 54. 50. equalis longitudini 52 P 95 Y; quę intercipitur inter lineas angulares, cum autē superficies interna cylindri quadrantis sit latitudine quidem æqualis 52 P 95. superficiei, cum inter superficies VP, ZY curuis insistentes intercipiatur, longitudine verò quadranti FD, erit quoque æqualis longitudine, & altitudine superficiei 18. 53. 54. 50.

At si quis vellet superficies coniunctiuas eodem modo operabitur; latitudines enim erunt eędē 13. 37. 36. à quibus ducendæ parallelæ 56. 58. & 57. 59. & deinde distantia 21. 42 transportanda in 37. 56. sicut, & 20. 41. in 36. 57. & deinde ducenda est recta 46. 56. 57. Sic translatis interuallis 21. 43. in 37. 58. & 20. 45. in 36. 59. ducenda est recta 59. 58. 49. & sic habebimus superficiem coniunctiuā 59. 57. 46. 49. æqualis superficiei, cuius altitudo 3 2 1, longitudo verò inter parallelas 40. 44. & 41. 45. intercipitur. De qua eadem ratio, quæ superius militat.

PROBL. IV. PROPOS. V.

Cylindri circularis concaui superficiem internam inuenire à superficie gemina cylindrica secti plano perpendiculariter insistentis, sed non ad axem recti.

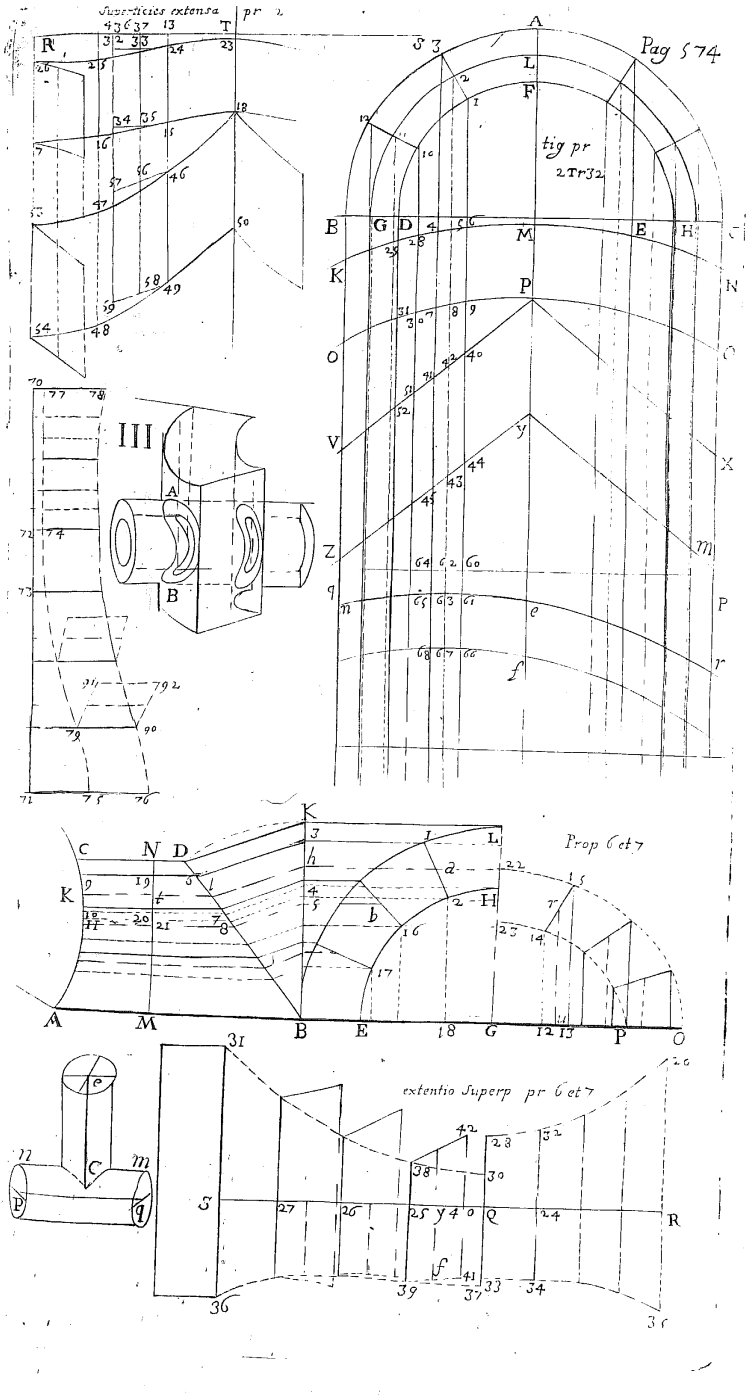
SIt superficies sectionis, vt supra cylindri secti BAFD non rectangula ad axem, ita quod axis AE non incurrat in axem cylindri secantis. Deduces, vt supra normales à dato quadrante EDAF à punctis 1 2 3. & cęteris, vt supra deductæ, vltrà rectam p q planę superficiei cylindrum secantis seu eius vestigiū, nempe sectionis BACEFD, quam seorsim in linea 70. 71. extendes cum singulis eius partibus 1F, quæ sit 73. 72. & cæt. accepta postmodum distantia 96. 61. transferes in 72. & 74 & sic de cęteris partibus originarijs ab F 1, 1 10. & 10 D arcus FD efficies, & hæc regula in cęteris omnibus extendendis planis superficiebus, tum interna circulari, tum coniunctiua seruabitur, vt ex ipso exemplo potes percipere, & ita superficiem 77. 78. 75. 76. obtinebis; sicut & coniunctiuas, quarum vna est superficies 79. 90. 91. 92.

PROBL. V. PROPOS. VI.

Cylindri Elliptici concaui internam superficiem hinc obliquè à superficie plana secti inde rectangulè à cylindrica, in planum proiecre.

SIt semicylindrus Oualis, seu Ellipticus ABCD, cuius oporteat superficiem in planum proijcere, & quia cylindrus Ellipticus potest secari à plana superficie tali modo, vt sectio sit circulus, hęc talis sit, & circuli interni sit datus quadrans EH, & externi BL, semidiameterque totus ab externa superficie pertingens DB æquali semidiametro GL, vel GB. Sit verò ab alia parte detruncatus à superficie cylindrica, cuius sectio sit ad axem cylindri perpendicularis, vt est videre seorsum in cylindro e c, qui superficie cylindrica m n detruncatur, ita quòd axis p q sit orthogonalis axi eius e c; superficies verò e licet rotunda non sit, tamen ipsi axi e c ad angulos rectos est.

Diuidatur itaque circulus, seu exterior PL, seu interior EH, & trahantur portiones radiorum LH 1 2. & cęt. & ab illis punctis L, 1. & 2. H, & alijs ducantur parallelę vsque ad BK parallelam radio GL vt sunt LK, 1 3. & alię continuę ab extrinseco ambitu, & punctis eius L, & 1. & alię parallelę pūctatę à punctis intrinseci ambitus, vt sunt H 4 25. & cęt.



& cęt. A rectâ deinde DK centro B, interuallo BK, ducatur arcus, qui occurrat lineę CD altitudinis dati cylindri elliptici G 22. in D, & trahatur DB, quę erit æqualis BK, vtpote radius, & ideo radio LG; & deinde ducatur DK, & à cęteris punctis 3.4.5. & alijs parallelę prędictæ DK educãtur vt sunt coniuge 3.6. & cęt. & punctate 4. 7. 8 5. &c. & tandem ab istis punctis ducantur parallelę lineę DC, vt sunt 6. 9. 7. 10. 11 8. & cætereę, quę erunt lineę in superficie coni existentes: sed proiectę in plano CADB, & ideo cylindrus erit proiectus, cuius basis ad axem rectangula erit 23. 22. P o proiecta in lineam NM ex propos. 8. Tract. 26. & obliqua BLEH proiecta in DB, & cylindri secantis superficies in lineam curuam A 11 C, quia omnes istę, vtpotè normales plano orthographo ACDB in lineas transeunt ex 8. prop. aut 16. tract. 26. prop. 1. Lineę verò, quę in superficie conica distinguntur partes lineis parallelis interceptis exprimentur, vt ex demonstratione prop. 1. colligere potes, vel ex 6. tract. 26.

Postmodum ducatur GO perpendicularis ad MN, vel GL, quę erit semidiameter maior sit constitutus, & positus, vt BG, vel GL.

Interuallo itaque perpendiculari H 2. & LI super diametrum GO erigantur perpendiculares 12 14, & 13 15, & cęt. quę distent à GH, vt est distantia perpendicularis H 2. vel I L, & sic fiat de cęteris punctis internis 16.17. & eciam externis correspondentibus, & habebimus semidiametrum maiorem ellipsis GO similiter truncatum, & diuisum, prout est diuisus BG à perpendicularibus, quarum vna est 18 2. Transferantur itaque altituditudines externę superficiei MN in G 22. & M 19. in 13 15. & cętere, tum internę M 20. in G 23. & M 21 in 12 14. & cęterę punctatis, & parallelis interceptę super punctatas perpendiculares correspondentes 12 14. & cęt. per puncta verò 23 14. & cętera in illis existentia deducatur æquabili manu curua, nam hęc erit ellipsis interna, quę cylindli axi rectangula est. Deinde per puncta extrema in lineis continuis reperta vt 22. 15. & cęt. ducatur rursùs æquabili manu linea curua. Nam hęc ellipsis extrinseca erit, quę axi cylindri item rectangula est.

Quod ostenditur, aut ex propos. 13. tract. 26. quia ibi asseruimus proiectionem ellipsis ellipsim esse, vel ex propos. 72. tract. 24. de conicis. Nam perpendiculares sinus, vt 18 2. & cæteri deuecti in lineam BK redacti fuere per parallelas ad eius diuisionibus similiter sectum minorem semidiametrum MN externum, M 20 internum; Quare G 23. 12 14. interni, sicut, & externi G 22. & cęt. quilibet suę portioni in MN correspondenti æquales lineę erunt similes sinubus originarijs 23 G ipsi GH vt 12. 14. ipsi 18. 2. Quare isti sinus 12. 14. G 22. erunt applicatæ ad partes eadem diametri GO, vel GB; & ideo per eorum extrema transibit ellipsis, cui G 23. minor diameter est.

Itaque habemus iam. In Cylindro ACBD ambitũ axi orthogonalem: tum intrinsecum 23. 14. P tũ extrinsecum 22. 15. O: Quare si per minimas particulas in lineam rectam vtrumque ambitum proiciamus; ita vt QR sit æqualis intrinsecę 23 14 P, & QS sit æqualis lineę 22 15 O extrinsecę elipticę habebimus longitudinem ambitus cylindri in planum extensam, saltem quàm proximè, faciemusque singulas partes singulis; quam proximè æquales Q 24 flexę 23 14. & cętereę cęteris; sicut, & Q 25. flexę Elipticę 22. 15. & alię vsque ad 5 alijs æquales, vt sunt 25 26. 26 27. & 75 5 perque singula diuisionum puncta perpendiculares ducantur 28 Q, & 29 R, & cętereę interme-dię, sicut, & 5 31. Q 30. & cętereę interpositę; quas singulas singulis correspondentibus in cylindro CDAB faciemus æquales tali modo. Quia QR est ambitus 23 14 P, cuius diameter M 20, & quęlibet latitudo eius, vt Q 24 correspondet cuilibet ambitus 23 14 P V. g. portioni 23 14 linea quoque Q 28 erit ea, quę secundùm longitudinem tranſit per punctum 23. quę est 20 7. linea in cylindro ACBD. Vnde 20 7. longitudo transferetur in lineam Q 28 à linea QR puncto que Q vsque ad 28. & sic de alia punctata fiat; assumpta enim eius longitudine 2 1.8 transferatur in 24 32 & sic succesſiuè de alijs. Deinde longitudo residua punctata 20 10. transferatur in Q 33. & 21. 31. in 24 34. & sic de alijs, perque extrema puncta 28 32. & cęteris vsque ad 29. ducatur æquabili manu flexa 28 32 29. sicut, & per puncta 33 34. & alia vsque ad 35 flexa ducetur, & erit superficies interna extensa 28 29 33 35. Cylindri prędicti CDAB, cuius ambitus interior 23 14 P radius maior GB minor M 20. axis AB, patet verò quòd cętera pars semicilindri eiusdem ab hac, quæ est quarta pars non differet.

Eodem modo superficies externa extendetur. Nam ND transferetur in Q 30. at 19 6. in 25 38. & sic de alijs. Pariter 19 9. in 26 39. & NC in Q 37. & sic de alijs notatis. Ergo omnibus punctis normalium, tùm hinc, tùm inde lineę QS coniunctis flexa 30 38 31. sicut & alijs 37 39 36. habebimus superficiem extrinsecã pro sui parte dimidia semicylindri CDAB, cuius sectio plana cognita BLHB expressa per lineam DB, & ad aliam partem, cuius sectio est cylindrica expressa per arcum AC, & ambitur exterior plani ad axẽ recti 22 15 O.

Probatur verò, quod talis sit. Nam eiusdem altitudinem, nempe quartam partem ambitus per lineam QS expressimus, & lineę flexę longitudinem terminantes V.g. 30 38 31. & 37 39 36. per datas lõgitudines duximus, nẽpe per 30 Q equalis longitudini ND, & Q 37 equalis longitudini 19 9. & sic dicas de alijs: quare ex ostensis prop. 2. deductis à prop. 1. superficies 28 29 23 35 equabitur superficiei cylindricę internę prędictis superficiebus intercepte, sicut etiam superficies 30 31 36 37 erit æqualis externę prędictis superficiebus absciſę.

PROBL. VI. PROPOS. VII.

Superficies coniunctuas eiusdem semicylindri plano distendere.

QVia Cylindrum prędictum concauum fingimus, diuersisque quasi doliorum asseribus coagmentatum, ideo si quis etiam ipsarum iunctarum superficiem vellet agnoscere, id faciliter fiet.

Nam earum superficierum crassitudines, seu latitudines habemus expressas in lineis 22 23. 14 15. & alijs, quę vtramque ellipsim intrinsecam, & extrinsecam connectunt, longitudinemque tum intrinsecam, tum extrinsecam in superficiebus nuper inuentis. Sit ergo inuenienda superficies iunctuę 14 15, hęc erit longitudinis extrinsecę 38 39. quare à puncto 25. super lineam SQ ver-sus,

ſus, quam volueris partem transferes interuallum 14 15. quod erit 25 40: ductaque linea 41 42. habebis quoque terminum extrinſecum, nempe longitudinem 24 32. vel 21 8. quod interuallum transferes in 40 42. ducesque 38 42. & erit terminata ab hac parte ſuperficies quæſita. Rurſus transferes 24 34. vel æqualẽ 21 11. in 40 41. At quia ſuperficies iſta quatenus terminat in cylindrũ CA nũ facit ſectionẽ lineã rectã, ideo terminus huius ſuperficiei coniunctiuæ, quã præſtare volumus linea recta non erit; ideoque aliud punctum medium, per quòd linea flexa ducatur inueniendum erit: Ideo diuiſa linea 2 1 in a ducatur parallela, alijs lineolis continuata a h, deinde h l, deinde l K: habebimuſque longitudinem t K. Deinde diſtantia pũcti a 22. à linea LG aſſumpta trasferemus à G in u, & ducta perpendiculari u r deſit punctum r, diſtantiam ergo iſtam 14 r transferemus in 25 y, ductaque y f transferemus diſtantiam t K nuper inuentam in y f, habebimuſque tria puncta 39 f 41. per quæ ducta linea curua terminabit ſuperficiem coniunctiuam 38 42 39 41. Et ſic ages in alijs ſimilibus.

Ratio verò, & euidentia operationis ex ratione prop. 1. huius ſatis innoteſcit; patet vero ex propi 22. tract. 25. lineam curuam 39 f 41. ellipſis non eſſe portionem.

PROBL. VII. PROPOS. VIII.

Semicylindri concaui, & rotundi ſuperficiem hinc obliquè à ſuperficie plano ſecti, inde à Cylindro item axi obliquo, in planum extendere, & repreſentare,

SIt datus Cylindrus ABCD, qui ſecetur, vt oſtenditur ſeorſim, nempe à ſuperficie plana a b, & à cylindri f e ſuperficie, quæ ambe obliquè ad axem c d ſecent, ſeu æquidiſtanter, ſeu non, verſùs tamen eaſdem partes, ita, vt linea a b maximè declinationis ſuperficiei planę ſit in eodem plano ac axis f e, & detur eius ambitus ad axem rectus, cognitus nempe circulus, cuius diameter exterior ſit XE, & interior ſit XF.

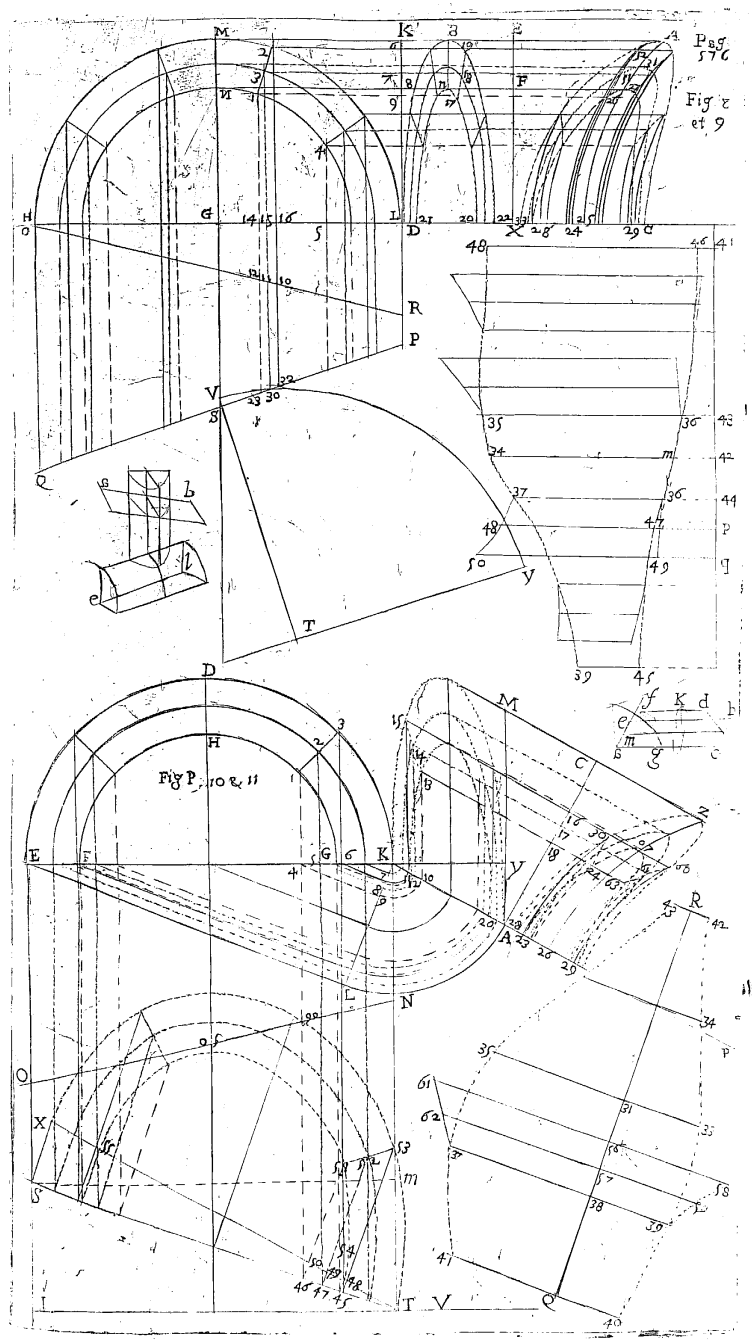
Diametro itaque XF fiat circulus LMH, & diametro interiori XF alius eodem centro G, inſuperque addatur alius circulus intermedius, vt placet, diuiſoque altero eorum in quotlibet ſegmenta, ducantur radij M N, 2 1, & alij, & à punctis, in quibus circulos ſecant ducantur parallelæ, tùm diametro LH, tùm diametro GM, à punctis quidem intrinſeci gyri propter diſtinctionem continuę, vt M B & 2 10 à medio punctatæ, vt 3 11. 4 5. & 3 7 ab interno lineolis continuatæ, vt 1 12, 1 9, & producantur, quantùm ſat eſt.

In plano deinde LHPQ, ducatur OR, quæ repreſentet maximam obliquitatem planæ ſuperficiei, cum axe OS, & rurſùm PQ, quæ item repreſentet obliquitatem ſuperficiei cylindricæ ſecantis, cuius cylindri ſemidiameter ſit TS.

Diſtantiæ itaque, vt 14 12 intrinſeca, 15 11 media, 16 10. extrinſeca aſſumantur, & ſuper parallelas in iiſdem lineis, quibus oriuntur lineæ aſſumptarum diſtantiarum transferantur: nimirum 14 12 in lineolis diſtinctam 1 9 17. à pũcto 9 vſque ad 17. diſtantia 15 11. in lineam punctatam 3 7 18. à puncto 7. vſque ad 18. & ſic 16 10. in lineam continuam extrinſecam 2 6 10. à puncto 6 vſque ad 19. & ita agatur de cæteris, quibus omnibus tranſlatis per puncta in ſingulis parallelis ſignata, quę intrinſeco ſemicirculo naſcuntur duces flexã 20 n. 17 21. quę erit dimidiata ellipſis: Deinde aliam per puncta ſignata in parallelis à medio gyro profectis punctatis, & tandem omnibus maiorem D B 22 per puncta ſignata in parallelis à gyro extrinſeco exortis, quę erit extrinſeca Ellipſis. Coniunges deinde tres ellipſes lineis curuis per puncta tria vnum in lineolis deductis alterum in punctatis tertium in continuis reperta 17 18 19. quę imitabuntur, & ſtabunt loco ſegmenti radij 2 3 1. Quod autem prædictæ circumferentiæ ſint ellipſes, patet ex tr. 25. pr. 22. vbi ſectionẽ cylindri obliquam ellipſim eſſe oſtendimus, & pr. 13. tr. 26. par. 1. Et etiam, quòd longitudines 16 10. & 15 11. & cæt. tranſlatæ ſint proportionales ob earum paralleliſmum in triangulo LOHR non completo; quare vt eſt HL ad H 14. ita eſt OL ad 14 12. deducta diſtantia HR ab vtraque, & ſic de alijs, vnde ex prop. 72. tract. 24. Coroll. deſcripta erit ſemiellipſis; & projectus ſemicirculus LMH; & alij interiores.

Sed modo vertamus opus ad deſcribendas orbitas; quas cum cylindri ſuperficie obliquè ſecti facit ſemicylindrus propoſitus: Sciendumque eſt quaſlibet ſuperficies parallelas axi in obliquo cylindro ex TS rad. non efficere ſectiones circulos licet cylindrus ſit circularis, ſed ellipſes ex prop. 22. tract. 25 Et quia omnes eundem angulum faciunt cum axe cylindri ſecantis omnes erunt equales ex eiuſdem prop. Coroll. ideoque oportebit priùs dato diametro cylindri ſecantis inuenire ſaltem quartam ellipſis, cuius ſemidiameter minor eſt TS, vel TY, nempe ſemidiameter circuli, qui cylindro ſecanti baſis eſt, & alter TV, prout TV parallela axi SM cylindri ſecti tranſeundo obliquè per centrum T augeſcit. Qua ellipſi deſcripta ex repertis axibus TS, & TV. Fiat modulus ex papyro, ſeu aliqua alia materia, vt non tibi ſint deſcribendæ tot ellipſes æquales, quot opus ſunt. Deinde aſſumpta diſtantia 14 23. & alijs linearum parallelarum deductarum, menſuretur ab L verſus Z ſuper lineã LZ, & ſit L 24. Sic O S ſit L 25. applicato dein modulo TVY, ita vt linea VT cõgruat lineæ ZL, & punctum V puncto 24. deducatur ellipſis 26 24. ſic applicato rurſùs modulo ſuper eandem lineam eodem modo, ſed ita, quod punctum V congruat puncto 25. deducatur portio ellipſis 25 A, & ita fiat de cæteris, & vbi protractæ ellipſes ſecant parallelas lineolis ductas 27 N, & 26 I, & cęteras à ſemicirculo intrinſeco deuectas ea puncta notentur, & per ea deducatur orbita 28 27 26 29. Sic fiat de lineis punctatis deſumendo diſtantias 15 30. & 05, & cęteras, at tranſferendo illas ob L verſus Z, & deinde ſingulis punctis eodem modulo elliptico applicato alię portiones ellipſium trahantur, & per puncta quibus parallelas, vt 4 31. flexa ducatur: Iterumque idem fiat de diſtantijs in lineis continuis deſumptis 32 16. quod interuallum cum cæteris in lineis eiuſdem generis deſumptis transferatur ab L verſus Z. Et applicato eodem modo modulo TVY portiones elliptice ducantur, & vbi ſecant parallelas continuas, vt MA per ea puncta, vt per A orbita ducatur quę erit 33 A C. Et tandem ipſæ orbitæ, & puncta per quæ deducta ſunt lineis, vt 27 31 A, & 26 51 52. quę etiam flexæ erunt, coniungantur.

Itaque portiones ellipſium, vt 24 26. & aliæ diſce-



discedentes à distantijs 14 23. eadem quę L 24. in plano parallelo axi 30 eodem 9 qui L 25. proiectę occurrunt lineis L 26. & alijs, & puncta; quibus ille L 26. & similes occurrunt superficiei cylindricę decerpunt. Vnde, & longitudines exhibent 14 23. non quidem in plano, sed in sua naturali eleuatione, quę est lineę 9 26.

Iam verò omnis apparatus concinnatus ad superficiem, tum extrinsecam, tum intrinsecam extendendam.

Ducatur linea recta 40 41. & singulę partes circuli interni per eam extendantur, vt IN equalis lineę 42 43. cęterę cęteris partibus, & ab ijs punctis erigantur perpendiculares, vt 42 34. 43 35. & alię. Deinde sumatur distantia à linea LK ad quodlibet punctum in lineolis parallelis repertum, vt 9 17. & transferatur à puncto 44. in 36. & punctum 9 26. in eadem lineolis contexta, & transferatur super eādē 44 37. & sic fiat de omnibus alijs punctis in ijsdē parallelis discontinuis repertis. Et iam in perpēdicularibus 44 37. 42 34. & 43 35. & alijs hinc vsq; ad 46 38. inde vsq; ad 45 39. cōsequemur puncta, per quę ducta flexa 46 36 45. & 39 34 48. dabit superficiem concauam internam cylindri propositi 46 45 48 39.

Si verò superficies externa in planum proicienda sit, id non alio modo peragemus, sed puncta in lineis continuis, quę proueniunt à semicirculo extrinseco quęrenda V.g. in linea MA, vt BK, 6 19. & alijs eiusdem generis.

Patet verò assignatam superficiem esse intrinsecam cylindri, quia altitudines, vt 42 44. sunt semicirculi intrinseci in partes octo equales diuisi, cuius vna pars IN, à perpendicularibus 44 37. & alijs, in quas distincta est superficies prędicta. Longitudines verò patet esse V. g. lineę 14 12 23. sed cum additamento, quòd elliptica curuitas cylindri secantis superaddit. Hę curuitates ellipticę ab ellipsi deductę V. g. curuitas 24 26. à puncto L distans, vt 14 à 23. proiecta vsq; ad altitudinē 26. superaddit aliquid, & fit longior linea 9 26. quam 24 L, & consequenter, quàm 14 23. Ideoque desumpta longitudo 27 8. dabit longitudinem superficialem, eo in puncto 42 34. à quā detracta longitudo 42 m equalis longitudini 8 n relinquit longitudinem cylindricę superficiei eo in puncto m 34. equalem longitudini n 8. & sic de alijs punctis.

PROBL. VIII. PROPOS. IX.

Superficies coniunctiuas eiusdem semicylindri plano extendere.

SIt iunctura 1. 2. 3. plano extendenda; quia 36 37. superficiei intrinsecę extensa ad eam ex ordine pertinet, hanc superficiem coniunctiuam ei addemus; Sumpto itaque interuallo 1 3. & 3 2. transferatur, & eodē interuallo parallelę eidē 36 37 ducantur 47 48. & 49 50. Deinde sumatur interuallum 7 18. in punctata, & 19 6 in continuata, transferaturque 19 6. in q 49. & 7 18. in p 47. ducaturque linea, quę flexa per tria puncta transeat 36 47 49. Deinde assumptis distantijs 7 51 transferatur in p 48. & 6 52. in q 50. & per tria puncta ducatur flexa 37 48 50. eritque iunctura 36 49 37 50. quę per 1 3 2. transit. Eodem autem pacto propositio ostenditur, ac præcedens.

PROBL. IX. PROPOS. X.

Superficiem semicylindri inuenire, dato eius ambitu ad axem recto, qui secetur à superficie plana, nec axi, nec plano per axem, & per diametrum ducto rectangula; ab alia autem parte conica superficie secetur, cuius coni axis ipsius axi rectangulus sit.

DIffert hæc propositio ab antecedenti. Nam plana superficies secans erat plano per axem cylindri secantis ad rectos angulos; at verò hęc superficies plana nequaquam, vt est videre seorsùm: nam cylindrus a e c d b secatur à cono g a e f, & planum secans c b d plano g b per axem u m cylindri transeunti non est perpendiculare, vt est l i K, quod præsupponitur cognitum, nempe esse circulum (posset verò, & esse ellipsis, vt, & in præced. propos. etiam poterat esse ellipsis) AXis tamē coni g f est ad angulos rectos axi m u. Sit ergo circuli cylindri interni semidiameter AB, & externi AC, ex quibus interuallis duo circuli ducantur KDE, & GHF diametro extrinseco AC intrinseco AB, aliusquemedius.

Diuisisque, vt supra illis circulis KDE, vel GHF radijs 1 2 3 deducantur perpēdiculares 1 4 lineolis 2 5 punctis 6 3 continua deductæ. Dato verò quod ad alteram partem magis distet à KE recta ad axem superficies quantùm est MT ad punctum K ducatur æqualis LK, & à punctis 6 5 4, & omnibus alijs à perpendicularibus 1 4. & cæt. notatis in diametro KE ducantur parallelæ, & ei normales 6 7. 5 8. 4 9. & cæterę. Deinde ducta AK; vtcumque fiat angulus CAM: quo planum num secans obliquè AM declinat à plano CA secante axem rectè, & facto centrò in K lineæ arcubus 9 10. 8 12. 7 11. deducantur ad AK, & à punctis quibus secant 10 12. & 11. & alijs erigantur parallele ad AM, vt sunt 10 13. 12 14. 11 15.

Assumptis verò altitudinibus 1. 4. & alijs transferantur super AC ab A, & 1 4. sit A 18. & 5 2. sit A 17. & 6 3. sit A 16. & sic agatur de omnibus alijs altitudinibus, seu sinubus, & per puncta signata parallelæ ducantur 15 16. 14 17. & 13 18. & cęterę, occurrent enim primò ductis punctatæ punctatis, continuę continuis, & interruptæ lineolis interruptis: Per puncta itaque vbi se continuæ secant ducatur ellipsis A 15 K, & per puncta vbi punctatæ se tangunt, ducatur ellipsis 20 14 22. & per puncta vbi interruptæ se secant vltima, minorque ellipsis ducatur 19 13 21. Erunt autem hę flexę dimidiæ ellipses ex 22. tract. 25. quia planum secans obliquè ad axem cylindrum facit sectionem ellipsim. Coniunganturq; tandem puncta 13. 14. 15. & similia, & iam erit parata constructio, quæ ad sectionem planam spectat.

Sit deinde axis coni IV, cuius basis circulus, & superficiei secantis vestigium NO: A singulis punctis V.g. 90. assumantur rectangulè distantię ab axe IV, & facto centro in P, ducatur arcus 23 24. sicque fiat de cæteris punctis V. g. assumpta puncti 95. distantia rectangulè ab axe IV cum NO eodem centro P ducatur circuli arcus 26 27. &c.

Puncta vero pertinentia ad idem genus linea-

rum nectantur flexis, vt ducta est 29 27 24 23. nectanturque puncta 24. 30. flexa, quæ portiones ellipsium erunt ex 6. tr. 23. siquidem sunt plana secantia cylindrum per axem 3. 2. 1. secundum eam sectionem, quam secando conum in eius superficie reliquunt. Iamque est proiectus cylindrus in KMZ 29 A, & portio coni, quæ ab ipso secatur in 28 30. 2 60 29. Et obliqua superficies secans obliquè in K 15. A, vt ex 12. tract. 25. par. 1. colligi potest.

Hoc apparatu præstito, iam superficies interna eodem modo, ac superior in planum distenditur. In Linea seorsim ducta QR circuli intrinseci partes transferantur, quarum vna est IH translata in 31 38. & per puncta diuisionum rectæ perpendiculares ducantur 33 35. 39 37. & cæt. Assumpta deinde distantia à linea AC ad quodlibet punctum pertinens ad superficiem intrinsecam linearũ discontinuarum vt 18 13. transferatur in 38 37. deinde assumpta distantia 18 63. transferatur in 38 39. & sic agatur de alijs ad ellipsim intrinsecam 19 13 10, & orbitam alteram 29. 27 24. pertinentibus. Habebimusque puncta 40 39 33 34 42. & cætera, per quæ flexa æquabili manu trahenda; sic & habebimus puncta 41 35 43. & alia, per quæ similiter flexa ducta totam superficiem extrinsecam cylindri propositi exhibebit 40 41 42 43. Extrinseca verò eodem pacto fiet assumendo puncta ad extrinsecam orbitam, & ellipsim spectantia.

Sed si quis ipsam sectionem, & semiellipsim; qua planum secat cylindrum datum in sua naturali magnitudine exoptet; id consequetur hoc modo. Ad ST à punctis 6. 4. 5. & cæteris perpendiculares ad KE ducatur, nempe 4. 46. 5 47. 6 45. & cæt. ab istis verò punctis ad sectionis lineam ST perpendiculares rursùs ducantur, vt 45 48. 47. 49. 46 50. & quantum sufficit ad aliquatenus maiorem altitudinem, quàm AM: assumpto deinde interuallo AY transferatur in SX ad eam partem, quà magis sectio ST accedit ad KE, & ducatur XT. Deinde altitudines 10 13. 12 14. 11 15. transferantur quælibet in lineam eiusdem generis, & correspondentis, & sint 48 53. 49 52. 50 51. Sicque fiat de alijs, & per puncta in lineis eiusdem generis æquabili manu ellipsis ducatur V. g. per puncta pertinentia ad lineas continuas ducatur ellipsis X 53 T, & aliæ per alia, vt melius vides, & habebis superficiem X 53 T 54 51 55. ortam à sectione obliqua cylindri, & est ellipsis: sed cuius diameter XT est ex coniungatis non à generatione, quod autem talis sit, patet quod ST partes proportionales KE lineæ partibus, obtineat, & applicatas item vt 50 51. etiam proportionales ob parallelas 15 16. & cæteras, quibus detruncatur, & terminatur, vnde ex prop. 72. Coroll. tract. 24. ellipsis erit, quod, & potest ostendi ex prop. 22. tract. 25.

PROBL. X. PROPOS. XI.

Superficies coniunctiuas eiusdem Cylindri reperire.

HOc fit eodem modo, ac superiori. Nam ducuntur parallelæ per puncta 56. 57. ad interuallum à linea 39 37. quæ est 1. & 2. rursusque inter 2. & 3.

Sic verò terminabuntur interuallum 15 15. transportabitur in 56 51. & 17 14. in 57 62. & per puncta 37. 62. 61. ducatur flexa 37 62 61. Sicque præstabitur ad aliam partem; nam interuallum 16 60. transferetur in 58 56. sicut, & 17 61. in 57 59. & per tria puncta flexa ducetur 59 58 39. & erit superficies coniunctiua 58 59 37 61. idemque ages in alijs.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Semicylindri superficiem à perpendiculari eiusdem rationis, sed Cylindro secti, & data sectione plana declinante, & inclinata, alio modo in planum proijcere.

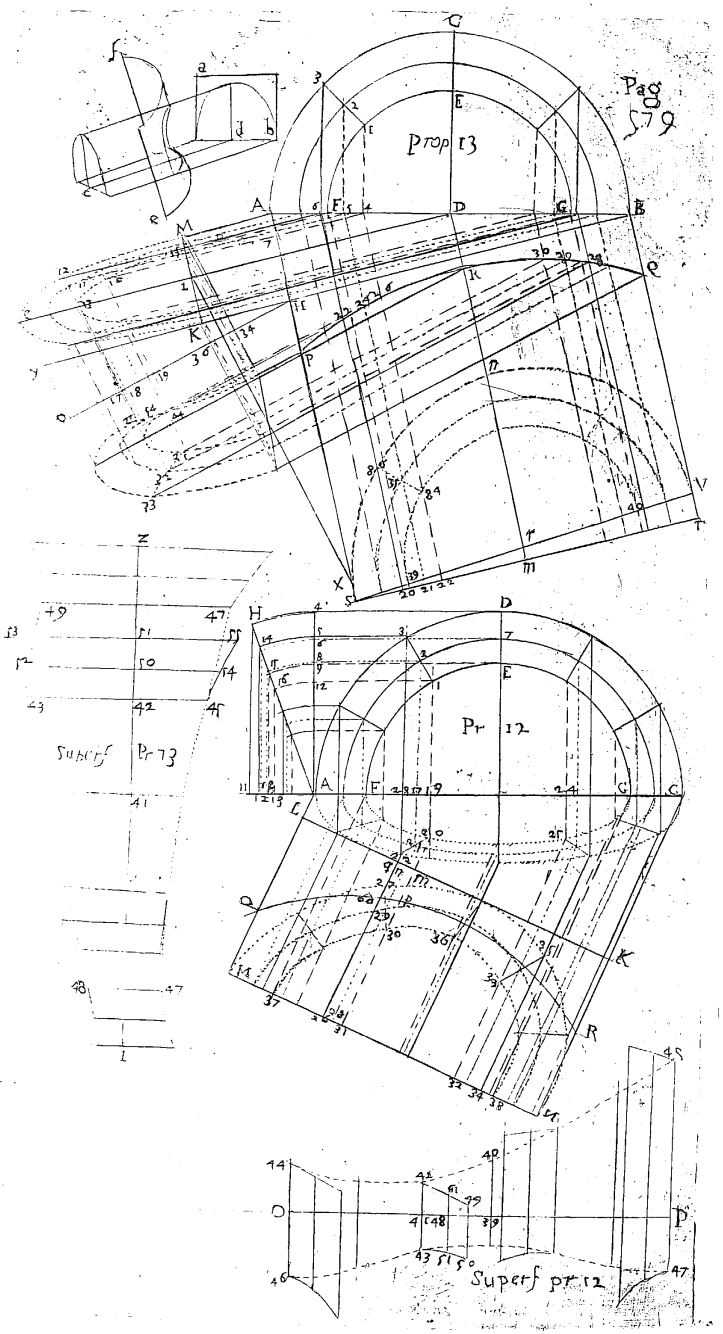
IN præced. pr. Cylindri ambitus circularis axi rectus præsupponebatur cognitus; hic autem ipsa sectio plana præsupponitur cognita, at verò ambitus cylindri, seu semicylindri conquirendus est, & posset quidem eodem modo exquiri, ac præcedens, sicut, & præcedens probl. hoc modo in opus deduci, sed doctrinæ abundatioris gratia.

Sit data sectio conica plana circularis ABCEF, & inclinatio ad planũ per axem ductum ex prima tur per lineam AH inclinata ad AC, declinatio verò per LK ad AC non æquidistantem.

Per puncta 1. 2. 3. quibus radij de more ducendi secant tres circulos, (vt in alijs factum) ducantur parallelæ ad diametrũ AC, vt sunt 4. 7 6. 3. 5. 2 8. & cætera vsq; ad A 4. & facto centro in A, iterum deducantur arcubus ad AH, vt linea AH representans sectionem sit æqualis secundum omnes diuisiones lineæ A 4. & ab omnibus punctis, in quibus secatur ab arcubus prædictis perpendiculares, vt sunt continuæ 11. & 9 12. puncta 13 18. & lineoli producta 16 13. & aliæ cadant.

Deducantur rursùs ab ijsdem punctis 3. 2. 1. & alijs similibus perpendiculares ad AC, quæ & producantur vlteriùs 1 19 20. 2 21. & 3 22. Assumpta verò distantia A 13. interruptæ perpendicularis 16 13. à puncto A, transferatur à puncto 19. vsque ad 20. & 24. vsque ad 25. sic distantia A 18. In 17 21. & ad aliam partem quoque, & distantia A 13. in 23 22. & sic de cæteris distantijs hinc inde illas transferendo, vt in prima factum est: Per puncta verò pertinentia ad eiusdem generis lineas, vt per F 20. 25 G, & alia, flexa, curuetur, & erit proiecta ex tract. 24. pr. 72. vel ex 16. prop. 16. tract. 26. par. 1. semiellipsis, sicut, & per cætera puncta aliæ ellipses ducentur, deinde quælibet tria puncta, vt 20. 21. 22. nectantur rectis.

Ab istis verò punctis omnibus perpendiculares ad sectionem obliquam declinantem LK agantur, & producatur quantùm sufficit, deinde assumpta distantia 12 14. originata à puncto 3 transferatur super lineam habentem eandem originem à linea MN, & sit 26 27. & sic ad aliam partem 34 35. sic altitudo 18 15. prouenies à 2. transferatur super lineam 21 28. habentem eandem originem, & sit 28 29. Idem fiat de altitudine 13 16. & transferatur in 31 30. lineam originatam ab 1. & idem fiat ad aliam partem qualis est 32 33. & sic de omnibus alijs fiat eandem distantiam hinc inde transferendo, perque puncta pertinentia ad idem genus linearum flexæ ducantur, quæ, & erunt ellipses, vt constat ex Corpll. 2. propos. 72. tract. 24. quia



quia tum LK secta proportionaliter est, vt AC ob parallelas; sicut, & altitudines EI H, & cæteræ sunt altitudinibus BD, & cæteris proportionales: quare erunt descriptę tres ellipses, quæ expriment Ellipses axi rectangulas existentes, quod requiritur, vt superficies expetita in planum distendi possit.

Ducta itaque seorsim linea OP, sit superficies interior extendenda. Semiellipsis 37 30 36 33 38. cum suis omnibus partibus in lineam ipsam OP extendatur, quo facto per puncta ad illam perpendiculares ducantur, vt 39 40. 41 42 43. Sumatur deinde interuallum m 20. & transferatur in 41 42. deinde interuallum m P, & transferatur in 41 43. & sic fiat de cæteris omnibus interuallis linearum interruptarum, quæ pertinent ad intrinsecum circulum FEG, & ab illius punctis originem trahunt intercluſis inter ellipses F. 20. 25. G. & KL, sicut, & inter QPR cylindrum prolectum, & eandem LK, & inuenies perpendicularium 43 41 42. & cæterarum longitudines. Quamobrem per puncta extrema 44 42 40 45. ducta flexa, & alia simili linea per puncta 46. 43. 47. & cætera, istę duæ terminabunt superficiem cylindri internam 44 45 46 47. quæ exquiritur.

De superficiebus verò coniunctiuis non multa dicenda cum latitudo 30 27. vt est 41 48. altitudo verò q 22. det altitudinem 49 48. & q 60. det altitudinem 48 50. Vnde ducta per puncta 42 49. recta, & flexa 43 51 50. dabit superficiem coniunctiuam 42 49 43 50.

PROBL. XI. PROP. XIII.

Semicylindri superficiem in planum proijcere, cuius sectio plana declinans, & inclinata nota sit, seceturque Cylindro ad aliam partem rectangulo ad axem.

SIt semicylindri nota sectio plana effecta, quæ sit circulus, seu annulus planus ACBGEF: Sitque linea declinationis BH, at inclinationis LX, vel angulus DLX. A portionibus radiorum 1. 2. 3 & cæteris ducantur perpendiculares; ab extrinseco quidem circulo continuę, à medio punctatæ ab intimo interruptæ, vsque ad AB, vt 1 4. 2 5. 3 6. & à punctis, in quæ incidunt, ducantur perpendiculares lineæ AH, vt sunt 4 7. 5 8. 6 9. & producătur vsque dum sufficit. Ducta deinde parallela KM, ipsi AH assumantur altitudo 4 1. & feratur in 7 10. sicut, & 5 2. & collocetur in 8 11. & 6 3. & transportetur in 9 12. & sic fiat de cæteris alijs interuallis, transferendo ea super illas lineas, quę originem ducunt ab ijs punctis, quæ interualla transferenda terminant, vt ED in L 13. Per hæc autem puncta, quæ ad idem genus linearum pertinent V. g. interruptarum ducatur orbita 14 13 10 7. & sic per alia puncta reperta, tum in punctatis; tum in continuis, vt extrinseca KE 12. M; quæ erunt semiellipses, quod AH proportionaliter diuisa sit, vt constat ex Coroll. 4. propos. 72. conicorum tract. 24.

Ducta verò NO perpendiculari ad lineam inclinationis LX ad illam perpendiculares ducantur ab ellipsibus, iam descriptis, & à singulis earum punctis ab ijs, quæ in continuis sunt continuę, & ab ijs, quæ in punctatis punctatæ, & tandem ab illis, quæ in interruptis sunt interruptæ, quales sũt 10 19. 11 18. 12 17. & producatur quantùm sat est.

Deinde ab ijsdem punctis, quę sunt in diametro AB perpendiculares ad BH producantur 6 20. 5 21. & 4 22. & cęterę omnes, seruata earum differentia ob confusionem vitandam, quę transibunt per arcum PRQ cylindri perpendiculariter erecti ex thesi super LNX. A pũctis igitur, per quę transibunt, duces perpendiculares ad LX, vt sunt 26 27. vel 28 33. 29 32. 30 31. & vbi occurrunt lineis parallelis ad LX, notentur puncta, prout quælibet lineam eiusdem generis inuenit, ita 31. punctum pertinet ad interruptas 31 30. & punctum 32. ad punctatas 32 29. sicut, & 33 pertinet ad continuas 33 28. Per puncta itaque, quæ in lineis eiusdem speciei inueniuntur flexę ducantur orbitæ, quæ ellipses non erunt, cum non sit secans superficies, cuius vestigium PRQ, plana.

Tandem deducendæ sunt ellipses, quæ cylindri axi perpendiculares sunt, ad quod in opus deducẽdum ducta recta ST assumatur interuallũ 34 36. & sit VT, ducaturq; SV, nam si AB ponatur orizontalis, vel eius vicaria KM linea BH, cuius loco stat SV, se eleuabit magis à plano versùs B, quàm versùs H, quantum est spatium VT: A puncto autem 34. versùs O assumantur omnium linearum parallelarum interualla, & transferantur in lineas correspondentes ab ijsdem punctis primitiui arcus originatas, tum extrinseci, tum medij, tum intimi. Sic interuallum 34 O à D prouenientis p lineas e O, de, transferatur in lineã ab eodẽ puncto profectam D, & sit m n. Sic 34 19 in lineam 22 84. prouenientem à 4. sic 34 18 in lineam 21 35. profectam à 5. & tandem 34 17. originatam à puncto 6. in lineam 20 86. ab eodem puncto 6. ab initio propagatam, & idem agendum de cæteris, & tandem per pũcta ad idem genus linearum pertinentia ducatur Ellipsis 39 84 40. & per alia puncta extima S 86. n. V, & cætera ellipsis extima 5 86. n, V, & ita fiat in ducenda media, deinde tria singula puncta rectis copulentur, vt 36 35 84. eritque totus apparatus ad superficiem extendendam necessarius confectus.

Quod autem 39 84 40. & cæteræ sint ellipses patet. Nã diametro 39 40. sunt applicatæ, cũsit 39 40. diameter proportionaliter sectus, ex 13. l. 6. vt AB, & ipsæ altitudines, sint quoque proportionales altitudinibus primitiuis, qualis vna est 7 10. æqualis 4 1 ob parallelas per HO deductas, vnde HO secta est, vt YH in triangulo HOY.

Istis itaque omnibus præparatis, vt superficies interna dati cylindri in planum distendatur, trahatur linea ZI, & super eam quælibet pars semiellipsis 39 84 40. extendatur, vel potius subtensæ rectæ ipsi minimę, quàm fieri possit 39 84 & cæterę cæteris, perque puncta 41 42. & per cętera perpendiculares ad ZI ducantur, quorum terminationes exquirendæ sunt. Quia ergo pertinet ad intrinsecam superficiem à linea HO assumatur distantia 19 10. & sit 42 43. translata, iterumq; 19 44. & sit 42 45. sicque in alijs fiat distantias à linea HO ad ellipsim intrinsecam 15 10 14. & ad orbitã intrinsecã 44 31 91. & p pũcta inuenta 49. 43. 48. & cęt. flexę ducantur. Nam constituent superficiem intrinsecam 49 48 47 45. Quòd ostenditur eodem argumento, ac prop. 2. h. ex principijs propos. 1. huius.

Si verò superficies coniunctiuas exoptemus distantia 86 35. & 35 84. à linea 45 43. mensuretur, & sit 42 50. & 50 51. perque puncta 50 51

perpendiculares ducantur, quæ terminabuntur transferendo distantiam 18 11. in 50 52. & 17 12. in 51 53. ducendoque rectam 53 52 43.

Rursùsque transferendo interualla 18 54. & in 50 54. & 17 27. in 51 55. ductaque flexa 55 54 45. habebimus exoptatam superficiem 53 43 55 45.

Nota, quòd, si cylindrus circularis secans sit iacens non perpendicularis plano, cui insistit datæ sectiones V. g. 28 33. erunt rectæ, quod si iaceat, & eius curuitas secto cylindro obsiciatur rectangulè erunt circuli æquales à linea PX ducendi: si obliquus, tunc ellipses eædem omnes equales ducendæ sunt ex prop.22. tract.25. quod si non sit circularis, at ellipticus omnes erunt ellipses equales ex prop.22. Coroll. Tract.25. quod si non sit cylindrus: sed conus iacens, tunc circuli omnes erunt diuersi; at si obliquè iaceat, tunc omnes erunt ellipses diuersæ, sed similes ex prop.4. tract. 25. Si verò conus sit perpendicularis, vt in hac propositione supposuimus cylindrum, tunc sequenti modo agendum est.

PROBL. XII. PROPOS. XIIII.

Cylindri superficiem, qui à cono, cuius axis sit ad eius axem normalis, secetur superficiebus intrinseca, & intrinseca parallelis inuenire.

SIt conus, cuius vertex A, & trianguli per axem latus AB, cuius basis circulus, qui faciet cylindrum, cuius sectionem planam faciat annuli quadrans DEIF; Coni verò crassitudo sit CB eadem; quæ HV circulorum centro X ductorum, radij XV, & XH equalibus MC, & MB. Diuiso itaque triplici quadrante IF. & ED, & cæt vt in alijs factum est in quaslibet partes V.g. in tres ducantur radij 1 2. 3. & cæteri, ab istisque punctis parallelæ ducantur diametro HD, ideſt 1 4. 2 5. & 3 6. & cæt. sicut, & aliæ parallelæ radio HE, quæ sint 3 7. & 2 8. & 1 9. & alias ab extimi quidem circuli diuisionibus continuę, à medio punctatæ ab intimis interruptę distinctionis gratia, quarum postremarum longitudines à linea A mensumantur, vt 10 7. & interuallo 10 7. centro X arcus ducatur 13 6. vsque dum occurrat lineę 6 3. quę ab eodem puncto 3. natalis ducit, ita de linea 11 8. quo interuallo centro X ducatur 14 5. & cæt.

Per singula ergo puncta, quibus fiunt intersectiones illæ arcuum istorum, vt 13 6. & parallelarum 3 6. quæ ab eodem arcu originem trahunt flexa ducatur 15 6 16 17. & erit in planum subiacens, & in basim ipsam coni proiecta, extrinseca orbita, quam cylindri superficies occurrendo superficiei coni efficit, sic 13 5 18. erit proiecta orbita intermedia, flexa autem 14 4 19. orbita intima ab ambitu FII. superficiei cum superficie coni causata. Quæ regula etiam obseruanda est in proiciendo gyro, qui in superficie coni interna imprimitur, sumendo interualla normalia inter lineam MA, & singula puncta in CL reperta, vt sunt 10 20. & centro X ducendo arcus 21. & 22.

Patet autem hæc proiectio, nam circulus ille, qui transiret per 10 7. parallelus basi est: quare ex prop.9 tract.26. in circulum cuius arcus 13 6 æqualem proijcietur. Distat verò à sectione ipsa per axem coni ducta, & cylindri quantum est subtensa 10, 3. vel distantia inter axem DH, & parallelam 36. ergo 6. erit punctum 3. commune vtrique superficiei coni, & cylindri proiectum, quæ se in arcum D 3 E curuat, & ita fare de alijs.

Nunc sit proicienda quoq; superficies illa, quæ coni intercipitur inter superficiem extimam, & intimam cylindri. Accipiatur interuallum AB, & centro M ducatur arcus NO. Sic interuallo A 7. centro M arcus trahatur 23 24. & fiat eiusdem longitudinis, ac arcus 13 6. quod potest fieri ducendo parallelam ad eandem distantiam PN à diametro HD, qua ducta est 3 6. absq; sensibili errore, sed exactiùs assumẽdo singulas partes 13 6. & transferendo illas in arcum 23 24. & idem fiat de omnibus alijs punctis. Rursusque interuallo A 8. à centro M ducetur arcus 26 17. & eadem mensura determinabitur, & ita habebimus singulorum orbitarum conica superficie factarum proiectionem, nempe extimæ quidem D 3 E superficiei proiectionem P 24 O intermediæ 23 27 31, Intimæ verò EI proiectio erit 28 29 30. & consequenter totius superficiei conicę inter vtramque superficiem cylindricam intercepta proiectio erit superficies P O 30 28.

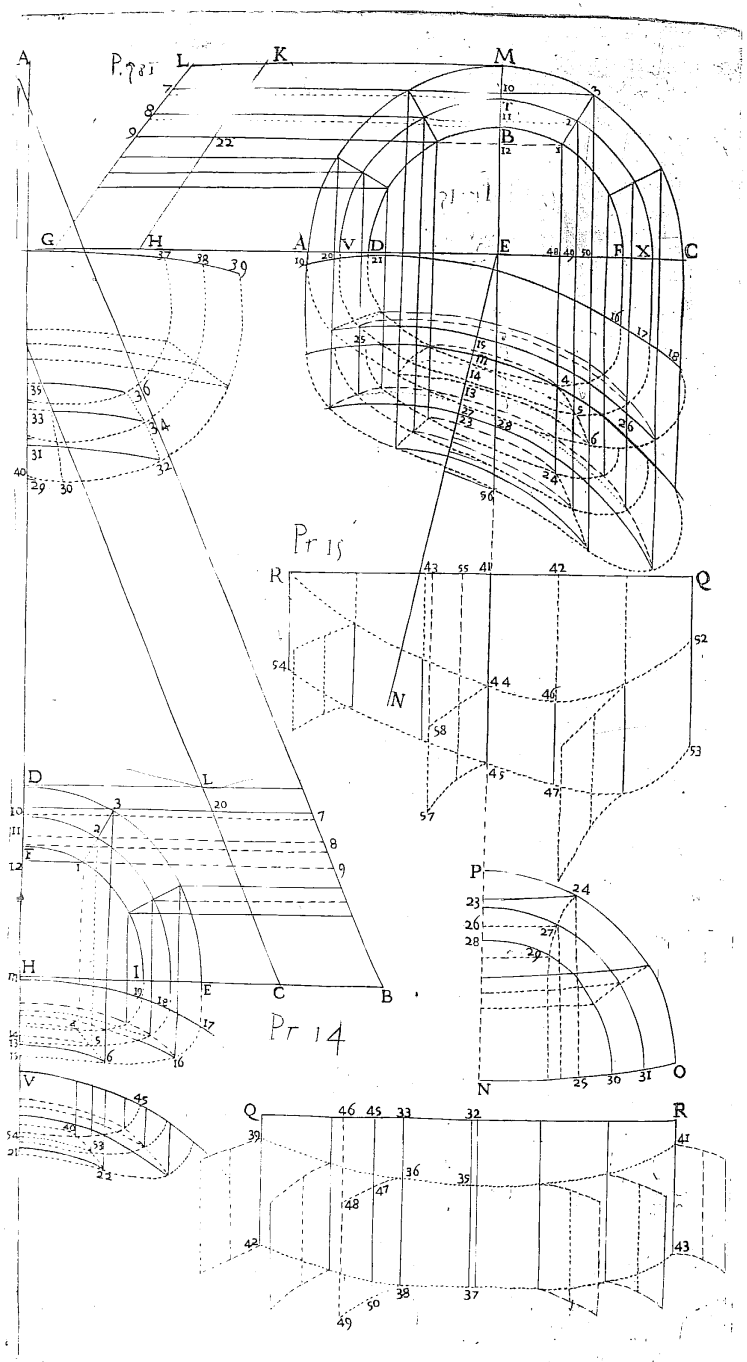
Probatur ex prop.23. tract.31. Nam arcus à vertice coni ductus, & eiusdem longitudinis, ac arcus basis, vt est arcus 23 34. subtendit superficiem æqualem superficiei coni, qui arcu basis eiusdem mensuræ 3 6 determinatur, quare cum arcus 13 6. decernat in basi punctum 6. proiectum decernet etiam in superficie conica punctum, 24. quod circulus D 3 E cylindri se intersecando cum circulo coni, cuius diameter 10 7. parallelo basis imprimit in ipso cono, & sic de alijs: cum ergo habeamus plurima puncta in superficie coni à conicis circulis effecta, dum secant circulos extimos cylindri DEI, semper vbicumque secet cylindrũ, sibi ipsis æquales ipsum gyrum impressum in superficie coni P 24 O delineare poterimus, & sic alios quoque intermedium, & intimum, qui superficiem illam concludunt, vnde eam habebimus in plano extensam P O 30 28.

Oporteat postea delineare superficiem cylindri inter superficies conicas extimam AB, intimam CL interceptam. Ducatur itaque linea RQ, quæ rapresentet sectionem HE, in ea quæ extendatur circulus FII. intimus, cuius superficiem delineare volumus intercluſam inter CL, & DA, singuliq; eius arcus pariter transportẽtur V.g. FI in 32 33. ducatur postea à singulis punctis 32. 33. & cæt. normales 32 37. & 33 38. & aliæ. Inque eas à linea QR distantię transferantur H 14. in 32. & 35. & H 42. in eãdem in 32 37. sic 34 4. trasiimigret in 33 36. & 34 40. in 33. 38. & sic de alijs. Deinde puncta à flexa 14.4 19. desumpta flexa vniciat 39 35 41. & à flexa 42 40 45. desumpta pũcta, alia curua vniat 42 38 37. & habebimus superficiem 39 41 42 43. extensam, quam exoptamus.

Patet probatio ex cæteris modis, quos supra declarauimus, cũ eodẽ modo, prsùs operati fuerimus.

Si tandem, superficies coniunctiuas quis exoptet, quarum sectio est 1. 2. 3. interceptas inter superficiem extimam, & intimam coni eodem modo operabitur, ac in cæteris. Translatis n. distantis 1 2. & 2 3 in 33 puncti 1 rapresentatiuo in 45. & à 45. in 46. deducatur normales 45 50. & 46 49. deinde à punctis 45. in 47. transeat interuallum 51 5. & 46. in 48. interuallum 52 6. rursùsque ab ijsdem punctis 46

&



& 46. transportetur distantia 51 53. & 52 22. & sunt 45 50 & 45 49. punctaque flexis nectantur & habebimus superficiem 36 48 49 38 coniunctium pertinentem ad coniunctionem 1 2 3. & sic operare in alijs, omnesque consequeris.

THEOR. II. PROPOS. XV.

Cylindri superficiem inuenire, qui à conigemina superficie non parallela secetur ad eius axem perpendicularis, & axis coni axi Cylindri non occurrat.

DIffert hæc propos. à præced. quia ibi fingebatur axem coni super axem cylindri insistere normaliter: hìc autem nequaquam, sed extra cadere licet normaliter plano per axem cylindri occurrat.

Sit semiannulus cylindri AMC, DBF is qui coni secetur gemina superficie externa GL interna HK, cuius basis circularis, diameter EN, vel EG, & distincta sectionum superficierum coni in basi n m: & axis cylindri ME axi coni super N insistenti non occurrat.

Primo proiciemus superficies cõi à cylindro interceptas; Quod vt efficiamus iuxta morem diuidemus semicirculum DBF in partes libitas; & ducemus normales 1 4. 2 5. & 3 6. diametro AC, & ei parallelas 7 3. 8 2. & 1 9. & alias similes ab alijs intersectionum punctis. Distantiæ verò singulæ ab axe EM coni ad superficiem LG accipiantur nempe 10 7. & eo interuallo ab N centro ducatur arcus 3 6. donec occurrat normali 6 3. ab eodem puncto 3, interualli 3 7. nascenti. Sic interuallũ 8 11. dabit arcum 14 5. & 9 12. interuallum 15 4. sic ML dabit arcum 27. & 28. sumitatis 28. punctum, & si id agatur de omnibus alijs punctis obtinebimus singula puncta arcuum DBF, & AMC, & intermedijs ipsorum proiecta, per quæ ducta flexa 21 4 16. repræsentabit coni sectionẽ cũ extima cylindri superficie, cuius sectio AMC, proiectã.

Sic 19 6 18. eiusdem conicæ superficiei cum intera cylindri, cuius vestigium DBF, & 20 5 17. eiusdem cum media. Eodem modo, quoque traslatis iuteruallis 12 22. & cæteris, quæ inter axem EM, & superficiem coni internam intercipiuntur centro N describemus arcum 23 24. donec secet normalem 1 24. & dabit punctum 24. alieque distantiæ eiusdem rationis parient arcus alios punctorum aliorum indices, quorum qui pertinet originatiuè ad infimum circulum flexa vinciantur 25 24 26. erit intersectio cylindri superficiei cum intima coni proiecta.

Libeat itaque nunc exprimere superficiem coni inter geminas superficies extimam & intimam cylindri intercluſam. A vertice coni, qui vertex in fig. expressus non est ob angustiam paginæ singula interualla accipiantur vsque ad singula puncta à parallelis 3 7. 2 8. & alijs imposterum qualia sunt 7 8 9. & cet. ducemusq; ijs singulis interuallis centrò primò arcum 29 30. in quẽ cranſlatus arcus 27 28 exhibebit punctũ sumitatis. Ita arcus 13 6 transportetur in arcum 31 32. & 14 5. in arcum 33 34. sic arcus 15 4. in arcum 35 36. & sic de alijs, habebimusque puncta, per quæ flexæ ducantur, nempe per eam, quorum mensuræ sumptæ sunt ab arcubus intrinsecis, vt 15 4. quæ faciunt flexam 21 4 16. ducatur flexa 35 36 37. & aliæ flexæ per alia correspondentia puncta consequemur, superficiem 35 37 39 40. coni interclusam inter superficies cylindri intimam, & extimam, quod promissum fuit.

Sit rursus exhibenda superficies illa intima cylindri, quæ intercluſa est inter superficiem extimam GL, & intimam HK, cuius semiambitus est DBF arcus. Ducatur recta RQ, in eaque circulus DBF extendatur ita quod singulæ partes singulis correspondeant V. g. B 1 parti 41 42. & aliæ æquentur alijs, à singulisque punctis perpendiculares ducantur 41 45. & 43 57 & reliquas, inque singulas à linea RQ singulæ intercapedines transferantur, quæ inter CA lineam, & singula orbitarum 21 4 16. & aliarum proiecta puncta intersunt V. g. 48 4. transeat in 41 46. & E 51 in 41 44. & sic de alijs, perque puncta R 44 46 52. & alia ducatur flexa. Item 48. 24 transportetur in 42 47. & per inuenta puncta omnia 54. 45. 47. 53. & cætera alia flexa ducatur, & erit tota superficies quæsita R 54 52 53.

Si verò cupias coniunctiuas superficies V. g. radij BTM interualla BT, & TM transferes in QR, & erunt 41 55. & 55. 43. à quibus duces normales, & sicut E 51 exhibet distantiam 41 44. sic E 56. dabit 43 57. aliæque à singulis orbitis, alias quibus coniunctiuam superficiem obtinebit 57 58 44 45 pertinentem ad iuncturam MB.

EXPENSIO II.

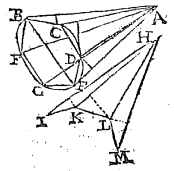
De superficiebus conorum diuersimodè sectis in planum extendendis.

EGimus satis de Cylindri superficiebus nunc ad Conorum paulò difficiliores superficies stylus conuertendus.

THEOR. I. PROP. XVI.

Si sint tot triangula plana, quæ altitudinem triangulorum quocumque cono inscriptorum æquent, & basim eiusdem longitudinis consequantur hæc omnia simul æquabunt multilateram figuram cono inscriptam.

SIt conus ABCE, in quo sit inscripta Pyramis multilatera, cuius latera sint ACB, & ACD, &



ADE.

ADE. Dico, quod hæc figura inscripta ABCDE æquabitur figuræ planæ HIM sit conflata tot triangulis, quot sût in ipsa figura inscripta cono ABCDB, & quę sint æqualis altitudinis, & basis, vel habeant latera singula singulis æqualia.

Patet: Nam singula singulis erunt æqualia ex Cor. pr. 40. vel ex 23. l. 1. vnde ex 18. l. 5. erût quoq; tota ex illis triangulis conflata nempe figura plana HMLKI, & ABCDE inscripta inuicem æqualia.

THEOR. I. PROPOS. XVI.

Coni concaui superficiem externam, & internam inuenire, cuius basis data rectangula axi, atque circularis sit.

SIt quadrans coni, seu annuli eius ABCD data basis, Coni verò internũ triangulum sit GFC, & externum GED: crassitudoque eius corporis, & soliditas sit FCDE; quę animo concipiatur insistere annulo ABCD, oporteatque superficiem internam; externamque inuenire, quam proximè.

Diuidatur arcus BD in quotcumque partes V. g. in quinq; & ducantur radij G 13. & G 12. G D, & alij.

Interuallo FC, super lineam 1. 2. ducatur arcus 3. 4. fiatque 2 3. æqualis arcui 5 6. sicut, & 2 4. æqualis arcui C 5. ducanturq; lineę 1 3. & 1 4. Hęcque erit superficies interna, quæ radijs continetur G 6, & GC, nimirum quinta pars semiconi. Ducta deinde perpendiculari C 7. ad latus FC, sumatur 7 D, & transferatur in 2 8. sumpto deinde interuallo DE transferatur ab 8 in 9. & centro 9. ducatur portio arcus 10. 11. quæ sit æqualis arcui D 12 13. ducanturque lineæ 9 11. & 9 10. erit-que superficies 9 11 10. extrinseca, & ea quę continetur radijs G 13 & GD; nimirumquinta pars extrinsecæ superficiei semiconi, vel decima totius coni. Superficies verò coniunctiuæ erunt omnes eædem FCDE, at verò sectio eadem, quæ annulus planus ABCD.

Quod verò res ita proximè se habeat, demonstrabitur de superficie externa 1. 3. 4. & eadem ratio erit de interna. Nam cum conus sit rectus, ex hypothesi, omnes lineæ ductæ ab apice ad basim erunt æquales lineæ FC, vt sunt ex effectione 13. 1 2. 1 4. latitudo verò est effecta eadem, quam arcus C 6. ergo cum superficies dimidij coni sit æqualis sectori, qui diametro latere FC conficitur ex prop. 24 tract. 21. & arcu æquali licet ex maiori semidiametro FC ductus circumferętiæ A 6 C. & arcus 3 4. sit factus æqualis quintæ parti semicirculi A 6 C, etiam superficies 1 3 4 erit proximè æqualis quintę parti superficiei conicę.

PROBL. II. PROPOS. XVII.

Dato dimidio arcu in superficie angulari datæ altitudinis, coni ad illum terminantis superficiem inuenire.

SIt data altitudo coni BA, eiusq; semitriangulũ CBA, qui secetur angulata superficie super planum CDHA perpendiculariter insistentis in lineis CD, & DH. Arcus verò datus sit CE, seu annulus GCFE, & oporteat reperire superficiem coni in illum arcum CE terminantis.

Diuiso annulo GCEF, in quot libuerit partes, & ductis lineis diuisionum 2. 1. & cæteræ demittantur parallele ad BD continua 1 3. ab intrinseco circulo, & 2 4. punctata ab extrinseco; deinde iungantur DA 3. & A 4. & cætera omnia puncta à perpendicularibus notata ijsdem distinctionibus adhibitis linearum diuersimodè ductarum.

Facto deinde centro in D ducatur arcus A 5. ita posito pede circini in 3. ab eodem puncto A ducatur A 6. sic in 4. posito circino ducendus arcus A 7 & sic de cæteris, quæ puncta coniungenda sunt rursus primis suis punctis; vnde profecta fuere; sic punctum 5. puncto E iungetur, at 6. puncto 1; punctum verò 7. puncto 23. quod sit exortum à 4. pũcto à circulo extrinseco prouenięte, & sic alia vt est punctum 7. rursus ad eiusdem circuli punctum eodem ordine restituantur. Iamq; præparatum erit, id quod requiritur ad superficiem requisitam conficiendam.

Seorsùm ergo ducatur LM, & in ea notetur interuallum 5 E, & sit LM: deinde sumpto interuallo EI centro M ducatur arcus; rursusque sumpto interuallo 61. centro L ducatur arcus ad easdem partes. Nam punctum 8. in quo se intersecant erit illud, per quod ducenda est linea L 8.

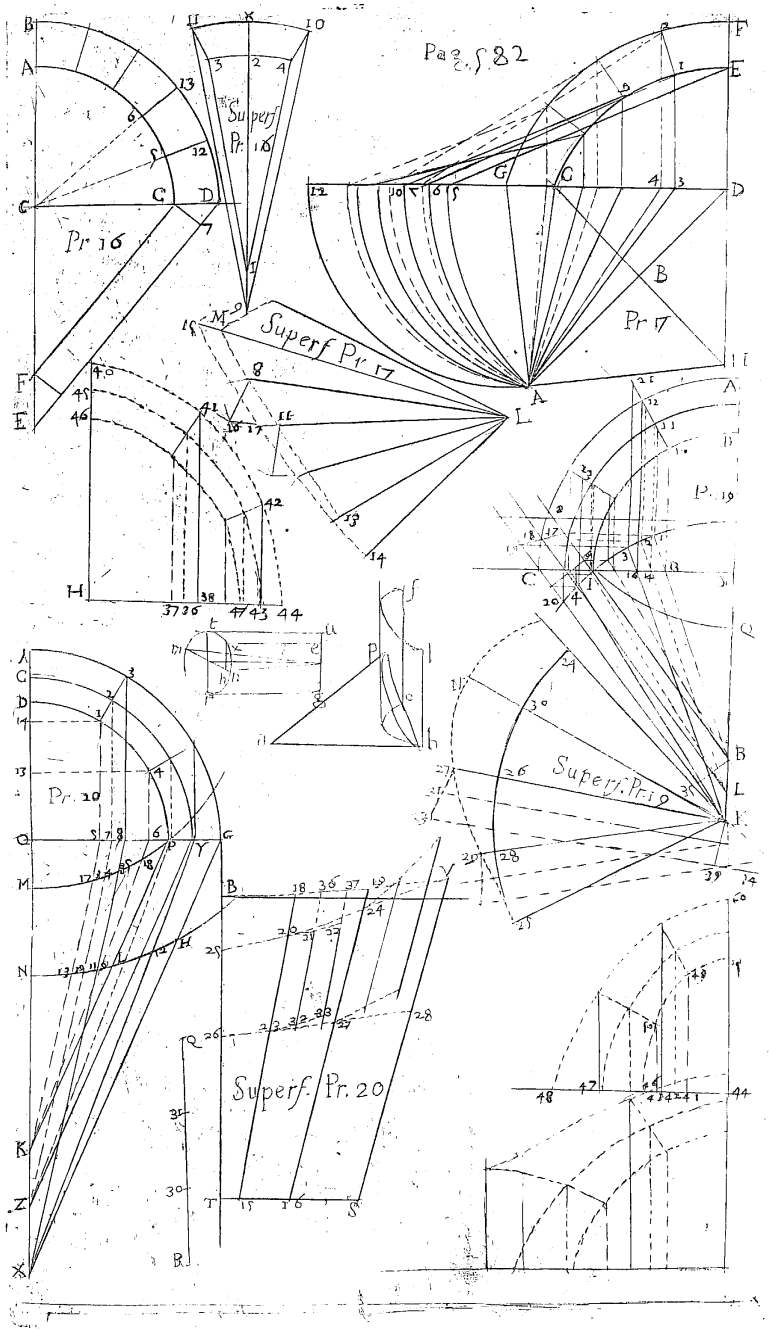
Rursus sumpto interuallo 1 9. posito pede circini in 8. ducatur arcus, deinde sumpto interuallo 10 9. posito pede circini in L ducatur ad easdem partes arcus, & vbi secat præcedentem in puncto 11. ducatur L 11. & sic de cęteris fiat vsque ad C 12. quæ transferetur in L 13. eodem modo, ac cæteræ. Deinde per hæc puncta M 8 11 13. ducatur parumper flexa; hæc enim terminabit superficiem L M 13. intrinsecam coni, qui in arcum CE finit.

Superficies verò L 15. 14. est extrinseca eadem arte delineata.

Probatur. Quia latitudinem quintæ partis superficiei datam 1E habet, quæ est M 8. deinde longitudinem consequitur, quam Hypotenusa haberet in superficie coni interna deducta à vertice vsque ad 1: siquidem est illa, quæ subtendit, tùm lineam altitudinis 13, tùm longitudinis 3 A, qualis ex effectione est 61 æqualis L 8. & ita dicas de linea 5 E; Cum ergo L M 8 triangulum habeat, sua latera eiusdem longitudinis velut, quam triangulum in superficie coni interna descriptum, erit id æquale quartæ parti superficiei ipsius saltem proximè, & ideo ex prop. 16. h. etiam tota figura plana L M 13. æquabitur multilatero coni inscripto, quod si erit ex multiplicatis lateribus quantum fieri potest conflatum neq; ad sensũ differet.

Si autem aliquis exoptet superficies coniunctiuas; is vnius accipiat exemplum, ex qua cæteræ innotescent: Sit itaque describenda superficies coniunctiua, qua FE 1 2 coniungitur cum segmento 219: Accipiatur interuallum 12. & centro 8 describatur arcus; deinde accepta longitudine 72 centro L describatur arcus versùs easdem partes; seque intersecabit cum priùs ducto in puncto 16. vbi ergo se intersecat, ducatur à puncto 8. recta, & rursùs ad lineam 8 L parallela 16 17. Nam hæc deducta vsque ad L superficiem coniunctiuam dabit, eam verò non terminamus prope punctum L. Quia non admodum deseruit, & facilè quisque ex se inuenire poterit.

PROBL.



PROBL. III. PROPOS. XVIII.

Coni recti circularis, cylindri superficie concaua secti, superficiem in planum proijcere.

SIt datus conus rectus, vel eius semitriangulum intrinsecum OBE, extrinsecum verò CKO, qui sit circularis basis, cuius quadrans ID interne, externæ verò CA, secetur que cylindro, cuius portio circuli MI, & cuius superficies imaginanda est plano IBO perpendiculariter insistere velut cblpf secat a p c b in fig. seorsim facta.

Diuiso itaque annulo CIAD, in quot libuerit partes ducantur, à punctis, quibus portiones radiorum, vt 10. 12. secant perpendiculares ad co, sintque 10 13. discontinua, à punctis interni circuli 11 14. punctata à punctis medij, & 12 16 continua ad extrinseco circulo, & vbi secant OC, ad discontinuas à vertice intrinseco B ad punctatas ab L, ad continuas à vertice coni extrinseco K, ducantur rectæ, vt sunt B 13. L 14. & K 16.

Productis itaque lineis in quadrante AOC, quæ à vertice B proficiscuntur, vsquedum incidant in arcum IM à punctis, in quæ cadunt 1. 2. 3. erigantur perpendiculares ipsi AO, seu parallelæ lineæ CO, quæ sint 1 17. 2. 18. 3 19. perque puncta 17. 18. 19. ducatur flexa, & idem agatur in alijs similibus, & hic apparatus erit sufficiens ad superficiem internam, superficiesque coniunctiuas describendas.

Verùm ad hoc, vt etiam superficiem extrinsecam arcuatã, clausã duabus superficiebus CA, & ID intrinseca, & extrinseca coni facias. A punctis 3 2 1 parallelæ OA diametro ducendæ, nos duximus solum à punctis 3, & 4. quæ à circuli extrinseci punctis originem ducunt, quæ parallelæ sunt 3 21. & 4 23. sed alię quoque à cæteris similibus punctis in arcu IM repertis ducendæ sunt, si volumus, ne dum CA, sed medium, & intrinsecum ID, arcus delineare. Quibus confectis erit adornatum machinamentum ad superficies extendendas.

Interuallo itaque BI super lineam K 30. seorsim ductam describatur arcus 24. 25. super quem à linea K 30. transferantur minimæ partes quadrantis ID V. g. 30 26. sit æqualis D 10. cæterę que cæteris, & per puncta 26. 24. 25. & alia recte ducantur, vt est K 30. & K 26. quæ terminabuntur sumpto interuallo B 8. & translato in K N, sic B 17. & translato in K 27. sic sumpto interuallo B 6. & translato in K 29. & BI in K 25. & tandem ducta flexa, N 27 29 25. erit N K 25 superficies interna quartæ partis coni dati æqualis.

Ita autem inuenietur superficies coniunctiuas ad interuallum 10 11. & 11 12. ducemus rectas 31 32. & 33 34. æqui distantes à linea 26 K sumpta deinde distantia B 18. posito pede circini in K ducatur arcus, qui secet 31 32 in puncto 31. & rursùs interuallo B 19. posito centro in K describatur arcus, qui secet 33 34. lineam in puncto 33. & per puncta 27. 31. 33. ducatur flexa: Rursus ducatur à puncto K perpendicularis K 39. & à B altera 35 B, & sumpto interuallo à puncto 35. vsque ad K transferatur in 39 34. & vbi terminat in puncto 34. ducatur recta K 34. & habebimus superficiem coniunctinam 27 K 33 34.

At si quis exoptet habere sectionem, quã facit conus in cylindro ipso. Super lineã H 44. ab H trãsferatur p particulas assumptus arcus 20 M. & sit H 44. rursùsque arcus M 3 per minimas particulas assumptus erit N 38. & arcus M 4. & sit N 43. & tandem arcus M 20. & sit N 44. à quibus punctis exeitentur perpendiculares, quales sunt 43 42. 41 38. H 40. Sumpta verò distantia 21. 3 trãsferatur in 41 38. & 42 31. in 43. 42. perq; ea puncta ducatur flexa 40 41 42 44. quæ non erit ellipsis cum cylindri sectio non sit plana, sed quoddammodo eam imitabitur, sic ducetur media 45. 43. & extima 46 47. vt satis constat ex schemate.

PROBL. IV. PROPOS. XIX.

Superficiem Coni conuani circularis in planum proijcere secti à superficie conuexa Cylindri ad axem perpendicularis.

HÆc propositio, vt præcedens operi consignabitur, nisi quod arcus MI contrario modo est collocandus, vt arcus IQ.

PROBL. V. PROPOS. XX.

Coni in rectam terminantis superficiem à superficie cylindrica gemina sectam in planitiem consignare.

HVnc conum descrip. prop. 8. tract. 25. vt in eius fig. videri potest; probauimusque ibi eius sectiones basi, rectæ axi, æquidistantes esse ellipses, & qualem repræsentat conus m r n t g K u seorsim factus.

Sit ergo talis conus, cuius basis sit circulus, seu eius vicarius quadrans PD, & triangulum per axem OPK, quem repræsentat m n k in figura seorsim facta. Diuiso itaque quadrante DP in quaslibet partes ducantur radij, seu portiones radiorum quarum vna est 1 3. & à punctis, in quibus secant quadrantes extrinsecum AG intrinsecum DP, & medium CY parallelæ 1 14. & 4 13. & cæt. & normales 1 5. 2 7. 3 8. & 4 6. & cęt. ducantur ipsi PO, quæ normales incident in puncta 5. & 6. sectionis OG basis cum triãgulo OPK. Ab ijs ergo punctis ad verticem coni K rectæ ducantur, & sint K 5. & 6 K. A punctis verò 7 8. & sicut P, Y, & alijs similibus pertinentibus ad circulos medium, & externum prædictis parallelæ quales sunt 7 10. ipsi 5 K, & Y 12 ipsi PK cum ad puncta X, & Z assumpta tendant, vt fecimus in præced. propos. Istæ itaque secabunt arcum MP, & NH exprimentes vestigium superficiei cylindricę conum secantis. Iamque omnis apparatus erit completus ad superficies, quas volumus, tum coni, tum cylindri, tùm coniunctiuas delineandas.

Seorsim itaque ducta linea QR transferatur in eã per minimas partes arcus D 4 P, & sint partes D 1, & 1 14, & 4 P æquales tribus R 30, & 30 31. & 31 Q, & cæterę, cęteris; si adsint. Ducatur deinde seorsum linea RT, quæ exprimat t u in fig. coni, & ei normalis T S quę exprimat g u, in eamq; transferantur omnes sinus versos D 14. & sit T 15. deinde 14 13. & sit 15 16. & tandem DO, & sit TS. Assumpto autem interuallo 5 K centro puncto 15. ducatur arcus versùs B, & interuallo R 30. ducatur arcus centro B, & vbi se decussant

cuſſant arcus, ducatur recta 5 18 15. Rurſus interuallo 6 K centro 16 ducatur arcus, & interuallo 30 31 centro 18 ducatur alius arcus, & vbi ſe decuſſant in 19. puncto ducatur recta 16 19. idem que fiat interuallo PK, centro S, & rurſus interuallo 31 Q centro 19. & ducatur S V, perque puncta interſectionum arcuum B 18 19 V flexa curuetur, & tota ſuperficies BVTS erit ſuperficies coni propoſiti, qui in lineam deſinit.

Ad quod ratione confirmandũ; ſciendum eſt, quòd omnes lineę in ſuperficie huius coni t g à peripheria baſis m t n r ad lineam g u, in quem terminat ductæ ſunt parallelæ plano, ſicut t u à vertice ducta plano m n k parallela eſt, vnde pars c k in ipſa linea coni terminatrice eſt ſinus h y, & e u crus reſiduum, & ideo e k parallela, & inter parallelas æquabitur ipſi ſinui hy. Et quod t u ducta à vertice coni, & ſectio rectanguli per axem eſt quoque rectangula lineæ terminatrici u g. Vnde ſuperficies coni quatenùs in g u terminat, erit rectangula: Ideo TB repreſentans t u eſt rectangula lineæ TS repreſentanti u g, & ſingulę partes in ea ſunt æquales ſingulis ſinubus baſis, vt 15 5 ſinui 5 1, vel 0 14 ex effectione. Et quia h k æquatur ipſi y e, ideo 15 18 fecimus æqualem rectæ 5 K; quia itaque flexa B 18 V æquatur arcui DP, & angulus T rectus eſt, vt eſt angulus u. ideo E 18 T 15 æquabitur ſuperficiei coni æqualibus lineis rectis ſub æquali angulo, & arcu contentę ſaltem proximè.

Modò ſit deſcribenda ſuperficies illa, quę intercipitur inter duas ſuperficies MP, & NH cylindri ſecantis conum. Acciplatur interuallum 5 17, & tansferatur ſuper lineam 18 15 à puncto 8 vſque ad 20. ſic 6 18 à puncto 19 vſque ad 24 ſuper lineam 16 19, ſic MO ſuper lineam TB, quæ ſit B 25. & per puncta 25. 20. 24 V flexa ducatur. Rurſus interuallũ MN transferantur in 25 26. & 17 13 in 20 23. ſic 18 9 in 24 27. & tandem RL in V 28; perque puncta 26. 23. 27. 28. flexa ducatur 26 27 28. & iam ſuperficies 25 V 28 26 erit illa, quæ inter duas ſuperficies cylindri ſecantis intercipitur.

Quod patet. Nam cum lineæ 5 K, & aliæ ſint parallelæ, & æquales lineis 18 15. & alijs, ſi cogitentur in cono ipſo, vt y e parallela ipſi h k, ſuperficieſque nempe baſis coni, & cylindri ſecantis ſint rectangulę ad planum OGK trianguli per axem, repreſentati per triangulum m n k interceptæ quoque portiones 5 17. & 18 6. erunt æquales illis, quæ in ſuperficie coni ſunt inter baſim coni, & ſuperficies cylindri interceptæ, quod eſt dicendum de alijs. Quapropter 8 15. & 18 20. eo quòd illis 5 17. & alijs æquales ſint, menſurabunt intercapedinem æqualem illi, quæ inter baſim coni, & ſuperficiem cylindri intercluditur. Sic 25 26, 20 23 equales 17 13 ſibi parallelis intercapedinem, quę inter vtramque ſuperficiem cylindrorum reperitur menſurabunt.

Iam ſi velimus ſuperficies coniunctiuas ſumpto interuallo 1 2. & 2 3 arcus DP, CY, & AE trahantur parallelæ ipſi 18 15 linęę 21 32. & 22 33. accepto verò interuallo 7 34 transferetur in correſpondentes lineas 36 21. & interuallum 8 35. in 22 37. & ducatur 20 21 22 flexa per puncta 20. 21. 22 ſic ſpatium 7 10 in 36. 32. & 8 11 in 32 33. perque puncta 23 32 33 flexa ducatur; & erit ſuperficies 20 22 23 33 coniunctiua in radio 13.

Ratio huius operationis poteſt colligi ex præcedentibus, vnde eam non adferemus.

Tandem ſuperficies cylindri, quę inter vtramque ſuperficiem coni eſt, ita exprimetur. Extendatur arcus NH in lineam 48 44, & ſingulę eius partes N 13. & 13 9. & 9 L extendantur in ea 44 41. & 41 43. & 43 46. & à ſingulis erigantur perpendiculares equales ſingulis ſinubus 41 49 æquetur ſinui 5 1. & 43 50 ſinui 6 4. & 44 51 ſinui OD; perque puncta 46. 50. 49. 51. flexa ducatur, & erit ſectio ſuperficiei coni in cylindrica ſuperficie, cuius ambitus NH; ita ducantur alię vt patet in figura, & erit tota ſuperficies 48 60 51 46. ea, quæ quæritur.

PROBL. VI. PROPOS. XXI.

Coni obliqui rotundi ſuperficiem inuenire à Cylindri ſuperficie ad axem non perpendiculari ſecti.

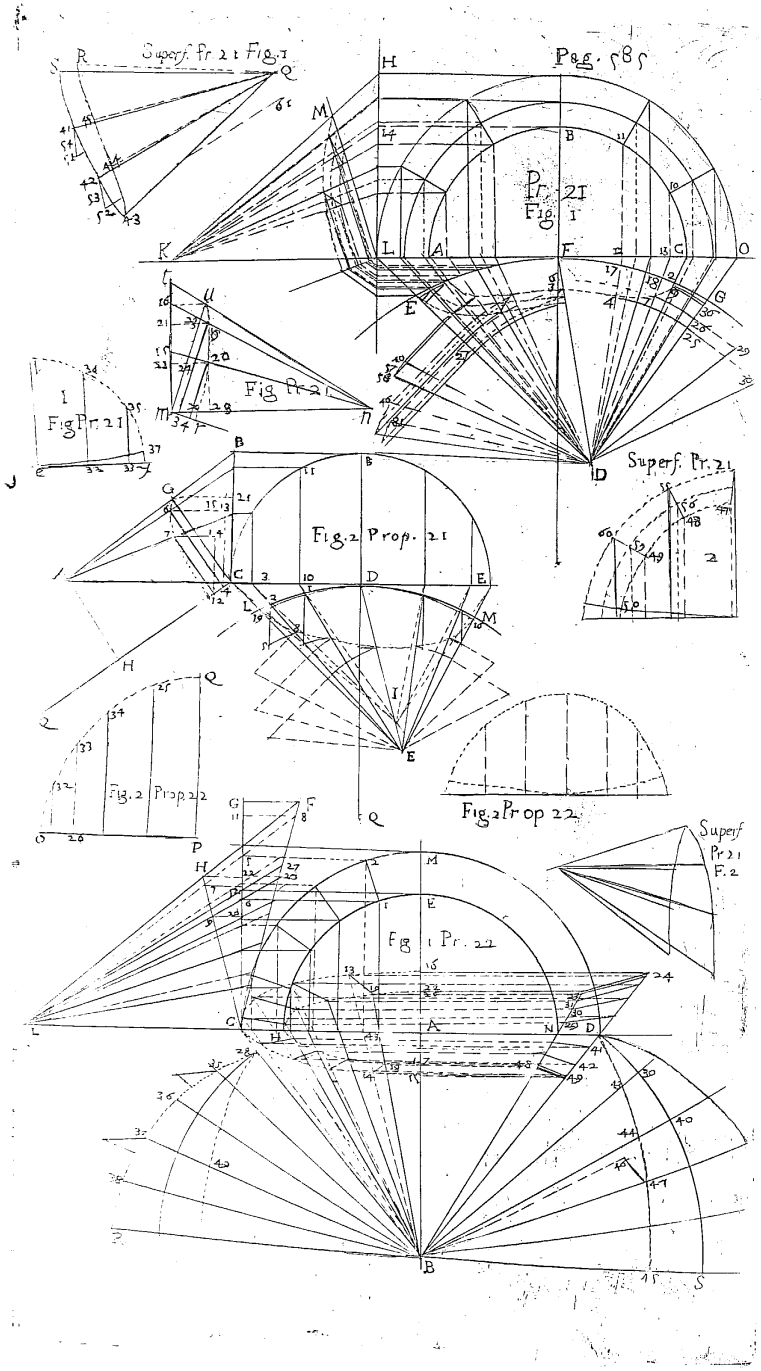
SIt data baſis coni circulus ABC, coni verò triangulum ſcalenum ADC. Arcus verò ſuperficiei cylindricę ſecantis EFG; ſuper quem intelligatur cylindrica ſuperficies: ſed inclinata, quantùm eſt linea ML à linea perpendiculari LH. Ad vitandam verò obſcuritatem, quantùm fieri poteſt, loquemur primò de apparatu neceſſario ad ſuperficiem intrinſecam deſcribendam.

In quadrante itaque BC factis, vt libet diuiſionibus 10 11 ducantur perpendiculares 12 11. & 10 13. & à vertice coni D educantur rectæ D 12. & D 13. & DC, & DF.

Deinde ſeorſim in rectangulis lineis m t, & m n altitudines perpendicularium transferantur, vel etiam poteſt fieri, ad alteram partem, vt in triangulo K L M. ſecimus pro quadrante ſiniſtro AB; quia enim conus eſt ſcalenus, ideo ambæ partes in apparatum neceſſariò accerſendæ ſunt cùm ſuperficies quartæ partis ſit differens ab alijs quartarum ſuperficiebus. Longitudo itaque m n ſit eadem, quæ DF, & altitudo m 15 eadem; quæ 13 10; ſicut & m 16. eadem, quæ 12 11. & tandem m t, eadem, quę FB, & ducantur ab n rectę n 15. & cęterę. Ducta deinde u m, quę faciat eundem angulum, ac eſt angulus MLH, erit inclinatio cylindri, ducatur m r illi perpendicularis; deinde ſumptis diſtantijs punctorum 17. 18. 2 à linea OF; ſed rectangulè ad earum diſtantiam ducantur parallelæ 3 19. & 4 20 vſque dum ſecet quelibet ſuam correſpondentem lineam; ſic linea 3 19. quę diſtat tantùm ab m u quantũ puncta 12. 17. ad lineam n 19 producenda eſt, quòd m 16 ſit eadem, ac altitudo 12 11. & cęt.

Hoc autem confecto aſſumantur rectangulę diſtantię punctorum, vt 19, & aliorum à linea t m, vt u 16. & transferatur à linea FO etiam rectangulè ab F verſus 3. deinde diſtantia 21 23. & transferatur iterum ab F verſus 3. deinde interuallo PF, quo deſcriptus eſt arcus EFG, inferius poſito ſuper lineam FP à puncto 6 apud 3. ducatur arcus, qui ſecet lineam D 12 in 4. & rurſus diſtantia 24 22 eodem modo reperiatur punctum 7. ſed tranſlata diſtantia m x dabit punctum 9. Deinde per puncta reperta 3. 4. 7. 9. in plano FDO ducatur flexa, quę erit id, quod de cono abſumit pendentia ipſius cylindri; Siquidẽ omnes axi mu parallelæ in cylindro pendente, ſi ſint æquales, pendent æqualiter, & æqualem lineam perpendiculares à verticibus cadentes intercipiunt, quę ad baſim coni normalis ſit.

His



His ita peractis, centro D à puncto 4. ducatur arcus 4 25. ſicuti à puncto 7. arcus 7 26. à puncto 3. arcus 3 27. ad partem ſiniſtram, & ab iſtis punctis 26. 25. 27. perpendiculares ad DG, & DE excitentur. Deinde ſumpta altitudine perpendiculari u 28 transferatur à 27 in 31. & ducatur D 31. rurſùs altitudo 19 28. transferatur in 25 30. & ducatur D 30. tandem altitudo 28 20 aſſumpta perpendiculariter tranſportetur in 26 29. & ducatur D 29. quæ datę D 4. vel quæ eadem D 25. & altitudinis 25 30. erunt Hypotenuſæ, & longitudines ſuperficiei concæ in illo ſitu.

Hoc peracto ſeorſim ducta e f, transferatur ſuper eam ambitus 3 4. & 4 7 9. vt ſunt e 32. 32 33. & 33 f; atq; erectis perpendicularibus e l, quæ ſit eiuſdem altitudinis, ac m u, & 32 34 equalis lineæ 3 19. iterumque 33 35. quæ æquetur 4 20 per puncta l 34 35 f curua ducetur, quæ imitabitur ſuperficiem, quam in ipſo cylindro obliquo conus ſecans efficit. Sumpto verò interuallo r x, & alijs inter m 4. & m x ſimiliter ſumptis tranſferemus in f 37. & alias lineas; ducemuſque arcum e 37. quò ob pendentiam cylindri minor eſt ſuperficies l e f.

Iam verò tempus eſt, vt ſuperficiem Internam deſcribamus. Sit linea QR æqualis lineæ D 36 minor, quam DG, quæ ſecat circulum cylindri FG, aſſumatur deinde interuallum D 29. & centro Q arcus portio deſcribatur, rurſuſque interuallum 37. 35. ex orbita l f, & centro R alia portio circuli occulti deſcribatur, vbi ergo ſe ſecant in puncto 45. ducatur linea 45 Q. Rurſùs aſſumpto interuallo D 30. centro Q circuli portio deſcribatur, denuòque ab orbita l f interuallum 34 35 aſſumatur, & centro puncto 45 circuli arcus deſcribatur, & vbi ſe ſecant in 44 à Q ducatur recta; Iterùm ſumpto interuallo D 31 ex Q centro arcus fiat; centro verò 44 alius arcus interuallo l 34 interſecet punctum 43: Per extrema itaque harum linearum ducetur flexa R 45 44 43. & erit quarta pars conicæ ſuperficiei deſcripta: Non alio verò modo alterius quartæ ſuperficies deſcribetur aſſumptis longloribus interuallis rectarum D 46. D 40. & DE interualliſq; curuarum 47 48. & 48 49. & 49 50. quas ſeorſim deſcripſimus in fig. notata n. 2.

Si verò ſuperficies coniunctiuas, quis cupiat dignoſcere, is aſſumpto interuallo 48 56 deſcribat portionem gyri centro 42. & aſſumpto interuallo D 57 deſcribat aliam portionem circuli centro Q, qui ſe interſecabunt in puncto 53. & idem fiat de interuallo 55 56. & de interuallo D 58. qui ſe interſecabunt in puncto 52. per quæ reperta puncta ducatur flexa 52 53 42. & parallela 52 61. & hæc erit ſuperficies coniunctiua comprehenſa numeris 42 51 61. quæ verſus 61 terminabitur, vt placet, & ſic dicas de alijs.

Scias tamen hunc modum non eſſe præciſum. Vnde ingenijs ſcrupuloſis. Minùs fortè probabitur, licet quoad vſum, aut ſaltem, vt plurimum inſenſibiliter differat ab exactiſſimo. Qui talis erit. Sit Conus ACB, qui ſuper axem ED trianguli ſcaleni, & ſuper planum CEF ad rectos collocatus ſit angulos.

Sitque cylindri ſecantis latus GC, & radius DQ, quò eius peripheria DL ducta eſt, & ei GC rectangula linea CH, quæ baſim cylindri exprimet, & cadet à vertice coni normalis AH, quæ eam terminet, transferaturque CH, ſuper DE, & ſit DI, & ab hoc centro rectæ punctatę ducantur ad punctum 10. & ſimilia, quibus perpendiculares cadunt; vt 10 11. & ab iſtis punctatis aſſumatur rectangulè ad CE interuallum à puncto, quo ſecant LDM lineæ 1 10. & aliæ, non autem à punctis in quibus ſecant lineæ 10 E, & cæteræ; ratio eſt, quia illæ non ſunt in plano, quo ponitur eſſe linea HC, ſed ſunt in plano AC; planum itaque CEI exprimit baſim cylindri, in quò eſt HC linea, at verò CFB planum triangulare coni, in quo AC axis, & vertex A. Hæc verò interualla trans ferantur in CH V. g. ſit 10 1 æqualis G 4 & 2. 3. æqualis C 12. tota verò conſtructio G 12 C, fiat vt priùs. Ductis poſtmodùm parallelis ad CB à punctis 4. & alijs nuper ſignatis, vt 4. 13. aſſumatur interuallum rectangulè ad eas puncti G à CB, quod erit 21 G, & 6 à 4 13, quod erit 6 13. & 7 14 puncti 7 à linea 12 15. transferanturque V. g. 7 14 in 2 5. nempe in lineas tranſeuntes per punctum 2 perpendiculares ad CF, & ſint 2 5. & interuallo DQ poſito pede circini in centro Q cylindri interuallo Q 5 arcus ducatur, qui pertingat vſque ad lineam E 3. ſitq; arcus 5 8. eritque punctum 8 in orbita 15 8 16. quia tantùm remouetur à linea ſuper 2 perpendiculariter, vt 2 5. vel quantùm eſt 7 14. vnde circulus cylindri, vel ſaltem portio Ellipſis, quę parum differet à circulo qualis eſt 15 D 16. tranſibit per 5. & per lineam CE in 8. vnde punctum 8. tantùm remouebitur à linea CF, quantùm remouetur punctum 7. à CB perpendiculari. Si verò aliquis velit etiam exactiùs rem proſequi non trahet arcum 5. 8. ſed puncto 5. applicabit normam factam iuxtà ellipſim 15 D 16. ad perpendicularem DQ, quæ faciat angulum mixtilineum 15 D, Q ſingulis punctis V. g. puncto 5. & vbi ſecabit 3 E in puncto 8 illud punctum 8 erit in orbita 15 8 16. cætera verò omnia executioni mandabuntur, vt priùs.

PROB. VII. PROPOS. XXII.

Dati coni concaui ſuperficie planâ, ſed axi non perpendiculari ſecti, ſuperficiem inuenire,

HÆc ſuperficies axi non rectangula, vel poteſt pendere verſùs apicem coni, vel in auerſam partem: ſed quo quo modo pendeat, eadem eſt operatio; ita conus poteſt eſſe, vel cuius baſis ſit circulus, vel cuius ſit ellipſis; ſed quæcumquæ illa ſit eadem etiam eſt praxis.

Sit ergo datus conus BCD, cuius axis AB, & ſemibaſis CMD, & HEN, planum verò pendens CH, vel CF lineis exprimatur. Ducantur radij, vel eorum portiones 1 2. & cæteri; deinde à puncto C ducatur perpendicultris ad CD recta CG, ad quam ducantur perpendiculares 2 5. & 1 6. & aliæ ſicut, & ad lineam CD ducantur perpendiculares 1 3. & 2 4. & aliæ à vertice verò L diſtante à C, vt B idē vertex diſtat ab A per puncta, in 5, 6, & alia, quę ppēdiculares cadunt rectæ ducantur, & vltra producantur quantùm ſat eſt V. g. ab L ducatur linea L 5. & L 6. & aliæ; ſicut, & à B producatur linea B 3. & B 4. quantùm ſat eſt.

Lineæ itaque à puncto L próductæ ſecabunt CH planū pendens in oppoſitū apicis L in punctis 10 & 8. horum itaque punctorum aſſumetur diſtantia perpendicularis, vt 11 8 à linea G C, & tranſferetur ſuper lineam correſpondentem rectangulè, ſic diſtantia rectangula puncti 13 à linea CD ſignati in linea B 4 13 erit æqualis lineæ 8 11, &

puncti 14. distantia rectangula à CD erit æqualis distantiæ rectangulæ puncti 7. à 12. & sic de reliquis, vtpote puncti 18 à CD erit æqualis distantiæ 9 20 & puncti 19 à GD distantiæ 10 21. & cæt. Per hæc autem puncta signata in lineis, quæ procedunt à B ducantur flexæ C 13 16. & H 19. 22. & C P 26 16. erit positio, seu situs, quem in plano CBD describunt circuli PEN, & CMD ad planum pendens CF producti, sic C 14 15. & H 18 17 flexæ, portionesque ellipsium erunt; quas conus semicircularis in plano producit detruncatus à plano CH.

Productis autem lineis BN, & BD, ad eas à punctis prædictis V. g. 13. 19. & alijs eiusdem generis producantur perpendiculares ipsi BE, ab ellipsibus, quidem internis H 18 17. & H 19 22. quæ terminent in BN productam, ab ellipsibus verò extrinsecis C 13 16. & C 14 15. quæ terminent in BD item productam, sic punctum 19 producetur vsque ad 23. punctum verò 13. vsque ad 24. quæ & simul poterunt coniungi linea 23 24. sicut, & puncta 19 13. linea item coniungi quibunt; vt puncta originaria, à quibus prodeunt 1. & 2. coniuncta sunt. Istis itaque peractis iam omnis apparatus adaptatus erit, vt ex eo erui possint exoptatæ superficies.

Si ergo conus sit scalenus, priùs oportebit describere totam ellipsim, at si non, ellipsis quadrantem O 25 Q tali modo. Axis AH ellipsis P 19 22 in lineam rectam extendatur, & sit OP, singulaque puncta, vt 19. 22. & alia, quæ in ipsa sunt in linea PO notentur, & punctum 22 sit V. g. punctum P, & punctum 13 sit 26. & cæt. ab istis verò punctis perpendiculares erigantur, vt 26 25. eiusdem altitudinis; ac punctum 10. à linea CD, quod interuallum rectangulè sumatur; & sic agatur de alijs punctis, prout originem ducunt à punctis correspondentibus in arcu HIE, sic distantia puncti 17 rectangula à CD erit eadem, ac PQ, & sic de alijs, quibus peractis per puncta extrema O 25 Q, & alia ducatur flexa, quæ erit portio ellipsis: quę exposcitur, & quam conus datus productus vsque ad planum CF signat in ipso: siquidem latitudines adipiscimur per partes axis 22 19 translatas in OP, & altitudines per distantias punctorum 27. & 10. & cæt. à linea CD translatas in rectis 26. 25. & PQ, & alias.

Hac itaque ellipsi erecta, sic deinde superficies interna extendetur: Sit linea B 28. seorsim sumpta æqualis lineæ BN assumatur interuallum B 29. & centro B describatur arcus; rursùsque interuallo O 32 in altera fig. 2. centro puncto 28. in linea B 28 arcùs describatur, & quò se decussant arcus in puncto 35 ducatur recta B 35. sic sumpto interuallo B 30 describatur arcus centro B, & rursus interuallo 32. 33. describatur arcus centro puncto 35. & quò se decussant in puncto 36. ducatur recta B 36. sic fiat quoque interuallo B 31. & interuallo 33. 34 adueniendum punctum 37. & de interuallo B 23. & 34 35 ad nanciscendum punctum 38. & sic de alijs, vsque ad punctum B: perq; extrema puncta B 38. 37. 36. & cæt. vsque ad 28 flexa ducatur, quæ superficiem dimidiam dimidij coni integrabit, eritque eodem modo altera dimidia pars faciēda cū hęc pro alio dimidio coni obliqui deseruire nequeat, at si conus sit rectus sufficiet hæc quarta pars cùm omnes quartæ sint æquales.

Verùm aduertendum est quoque in conis rectis alio modo absque ellipsi O 25 Q posse describi superficies proposita. Sit ergo describenda superficies exterior, quam à cono EFC detruncat planum, expressum linea CH. Interuallo BD describatur arcus DS, & interualla M 2. & alia quadrantis C M transferantur in DS; sitque M 2 æqualis arcui D 39. & alia alijs; ad singulaque puncta ducantur rectæ velut B 39. vel B 40. & cæt. Deinde interuallū B 41 transferatur super lineam B 39. & sit B 43. sicut, & interuallum B 42. & sit B 44. & sic de alijs vsque ad 45. perque puncta D 43. 44. 45. & alia, flexa trahatur, quæ terminabit superficiem extrinsecam defficientem à perpendiculari sectione B, D, 45.

At si quis superficies coniunctiuas exoptet, sumpto interuallo B 48 versùs 47 centro ipso B ducatur arcus; deinde sumpto interuallo 48, 42 centro 47 arcus describatur, & quo se decussant in puncto 46 recta ducatur B, 46. & alia 47. 46. eritque superficies B, 46. 47. ea, quæ exposcitur.

COROLLARIVM.

QVod si lineæ CH, vel CF essent flexæ; eodem modo operandum esset V. g. si essent superficies cylindricæ, quarum axis in plano iaceret, maximè si conus esset rectus; at si conus esset scalenus eodem modo, ac in propositione 21. huius de cono scaleno docuimus erit agendum.

PROBL. VIII. PROPOS. XXIII.

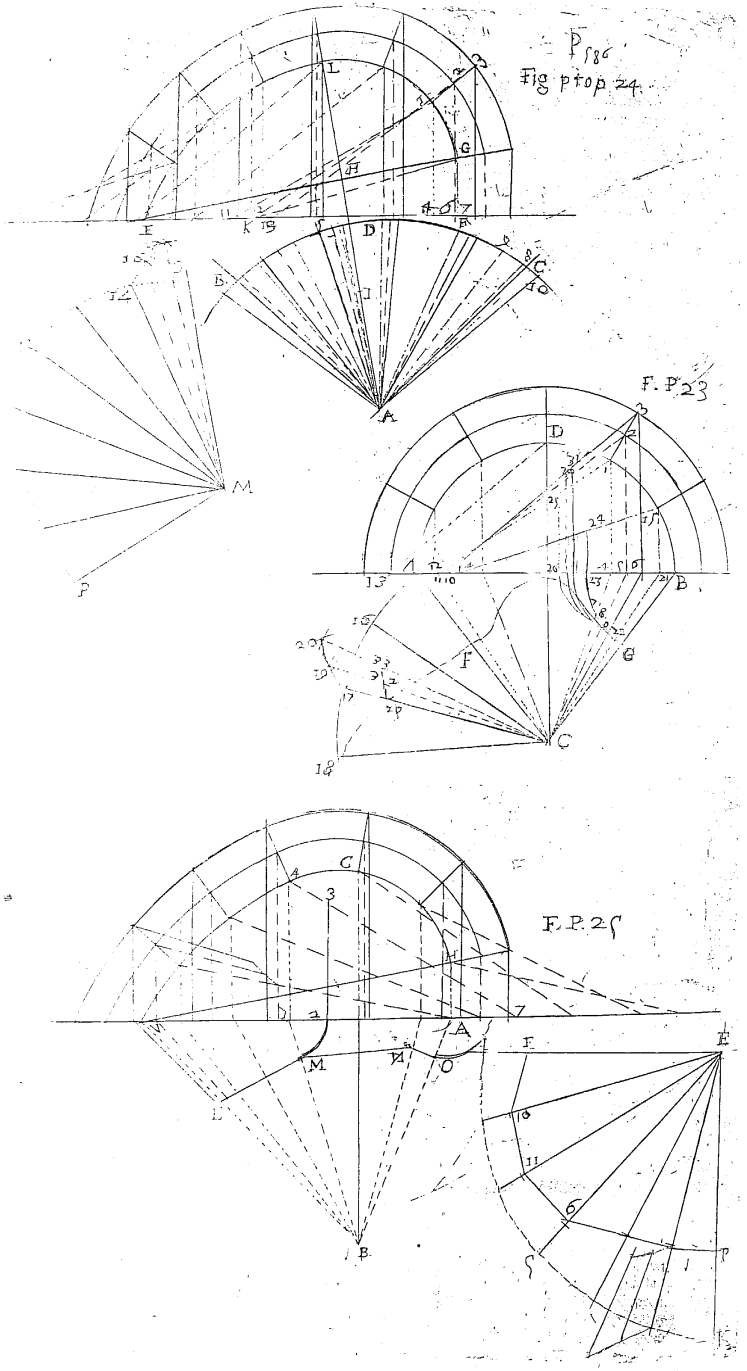
Coni concaui quacumque superficie axi perpendiculari secti, seu conus sit rectus, seu scalenus, seu rotundus, seu Ellipticus superficiem in planum extendere.

SIt triangulum per axem conum exprimens ABE, & eius semibasis AD, qui quacumque superficie secetur EFG ipsi plano triangulari CAB, & axi CE perpendicularis; oporteatque eius superficiem in planam proijcere.

Diuisa eius grassitie tribus circulis descripta in quotlibet partes ad centrum radij ducantur, vt est 1. 2. 3. & vbi se decussant cùm circulis intimo, medio, & extimo ad AB perpendiculares ducantur 1. 4 2. 5 3. 6. deinde à vertice coni C rectæ ad puncta 4. 5. 6. ducantur, quales sunt C 4. & C 5. & C 6. quæ secabunt superficiem FEG in punctis 7. 8. 9. centro ergo V. g. 4. interuallo 4 C ducta portione circuli occulta notetur in AB punctum 12. & ducatur 3 12. Sicque centro 5. interuallo C 5 notetur punctum 11. nec non eodem modo in centro 6. interuallo C 6 notetur punctum 10. & ducatur 1 12. & 1. 10. & idem agatur in omnibus alijs punctis, in quibus radij, seu portiones radiorum tres semicirculos secant. Iamque apparatus erit adornatus ad superficiem in planum extendendam.

Super ergo AC, seu si libeat super allam æqualem seorsim ductam centro C interuallo 14 15 ducatur arcus, rursusque centro A interuallo B 15. alius arcus describatur; & vbi se intersecant in puncto 16. ducatur linea 16 C; rursus centro C interualli 12 1 ducatur arcus, & deinde centro 16. interuallo 15 1 alius arcus signetur, & vbi se decussant in puncto 17. recta ducatur 17 C, & eodem modo sumpto interuallo 13 D ducatur recta

18 C;



18 c; tandem per puncta 18. 17. 16. A ducatur flexa, quæ in cono recto, & circulari, vt in hoc circulus erit, at ea erit ia alijs ambitus quicumque. Itaque coni superficies, quæ A 16 18 C continetur est illa: quę quartam partem coni operit.

Superficies autem coniunctiua eodem modo fiet, nam adhibitis interuallis 11. 2 centro C ducetur arcus, & 1 2 à centro 17. ducetur arcus, qui se intersecabunt in puncto 19. & ducetur recta C 19. Iterumque adhibito interuallo 10. 3 centro C arcus ducetur, & 2 3 interuallo, centro 19. alius arcus ducetur, qui se intercipient in puncto 20. & describetur recta C 20. deinde puncta 17. 19. 20. flexa coniungentur, & superficies 17 20 C erit coniunctiua coni integri.

Modo via subtractionis inquirenda est superficies, quæ secatur à superficie FEG, quod vt fiat cẽtro puncto 21. interuallo 21 22 ducetur arcus, qui secet AB in 23. & ex eo puncto erigatur perpendicularis 23 24. & sic fiat de alijs punctis; quibus perpendiculares 1 4. & E D, aliæque si sint plures incidunt, & ductis arcubus, vt 7 26. erigatur à puncto 26 perpendicularis 26 25. & cæt.

Deinde intsruallum 14 24 transferantur à C in 27. super lineam C 16. æqualem lineæ 14 15. & interuallum 12 25. in lineam C 17. æqualem lineæ 12 11. & fit C 28, & sic de alijs, perq; puncta ducatur flexa 29. 28. 27. F, & erit superficies, quęsita 29. FC detruncata à cylindro irregulari, seu regulari, cuius positio, seu situs est FEG.

Nec alio modo superficies cõiunctiua inuenietur. Nam centro facto in puncto, quo perpendiculares aliorum circulorum medij, & extimi cadunt V, g. in 5. interuallo 5 8 ducetur arcus versus BA, & ex eo perpendiculares erigentur ad Hypotenusas 11. 2. & 10. 3. deinde interualla V. g. 11. 30. & 10. 31. transferentur in lineas C 19. & C 20; notabunturque puncta C 32. & C 33. perque ea ducetur linea 28 32 33. eritque superficies 28 C 33 coniunctiua, quæ exquiritur.

PROBL. IX. PROP. XXIV.

Superficiem coni concaui, cuius basis lenticularis, seu semilenticularis, seu cuiuscumque alius figuræ, secti à superficie cylindrica in planum proijcere.

SIt angulus ABC, cui insistat conus aliquis, qui cylindri superficie secetur ad illud planum ABC perpendiculari, vt BDC, oporteatque inuenire superficiem illius coni, qui tamen habeat basim ad libitum electam quamcumque, & triangulum quodcumque, sed tamen tale cuius per axem angulus aliquis sit BCA datus, extendatur arcus super rectam EF, ita vt æquales, aut ferè æquales sint EF, & BDC, & à puncto F erigatur perpendicularis FG, & ad quamlibet longitudinẽ aperto circino à puncto E ducatur versus G arcus, qui secet FG, eritque recta EG diameter basis coni ad libitum electa, super quã fiat quadrans GL centro H, & centro I super eandem lineam alius arcus EL, eritque basis cuiusdam coni integrata ex diuersorum circulorum portionibus, ipseque conus non propriè conus; sed potius ex portionibus conorum cõpactus: huius ergo coni sit inuenienda superficies.

Ductis radijs, seu radiorum portionibus V. g. 1. 2. 3. & cæteris ad centra circulorum à punctis, in quibus tres circulos secant intimi, extimi, & medij, quales sunt 1. 2. 3. perpendiculares ad EF demittantur pro vt sunt 1 4. & L 5. sic 2 6. & 3 7. & cæt.

Deinde interualla in arcum BDC transferantur; ita vt F 6. sit æqualis arcui C 8. & 6 7 æqualis arcui 8 10. & 6 4 æqualis arcui 8 9. & cæt. Exinde à puncto A ad singula puncta 10. 8. 9. & cæt. in BDC rectæ ducantur singulæ singulis perpendicularibus correspondentes, quarum longitudines transferantur quęlibet ad perpendicularem sibi correspondentem, & ab ea super FE mensuretur: sic A 9 mensuretur à puncto 4. quo cadit 1 4 orthogonalis, vt sit 4 11 æqualis rectæ A 9. ducaturque 11 1; sic A 8 transferatur in 6 12. & ducatur 12 2. & tandem à puncto 7 mensuretur distantia 10 A, quæ sit 7 13. & ducatur recta 13 3. & sic fiat de omnibus alijs punctis, & iam apparatus fabricatus est ad superficiem exoptatam repẽriendam perquisitus.

Ducta ergo seorsùm linea MO equalis KG nascenti ex AC, à puncto F in K mensuratę, centro M interuallo 11 1 describatur arcus occultus; rursusque internallo GI centro O alius arcus describatur, & vbi se decussant in puncto 14 ducatur recta M 14. & ita fiat de alijs; donec ad vltimam peruenias M P; quæ erit æqualis rectę AB. Itaque si per harum linearum extrema puncta flexa ducatur P 15 14 O erit superficies quæsita PMO coni, cuius basis globosa ELG.

Si verò requiras superficies coniunctiuas, eadem arte requiri queunt. Mensurabitur itaque linea 12 2. & centro M ducetur portio arcus; rursusque interuallum 1 2. & centro 14. ducetur arcus, qui se intersecabunt in puncto 16. ad quod linea producetur à centro M; quæ sit M 16: eodemque modo interuallo 13 3 centro M ducetur arcus, rursùsque interuallo 1 3 centro 14 arcus ducetur, qui se intercipient in puncto 17. ducetur itaque linea M 17. deinde per puncta 14 16 17 flexa 14 17. trahetur, & erit superficies quęsita M, 14 17.

PROBL. X. PROPOS. XXV.

Coni cuiuscumque irregularis, & à quacumque superficie secti orthogonaliter plano insistente, superficiem inuenire.

MOdus, quo hoc problema in opus deducatur idem est, ac duorum præcedentium problematum. Nam priùs inuenitur superficies coni irregularis VAB plano insistentis cùm hac tamen differentia, quod cum VA sit recta non est necesse eam extendere, vt fuimus in arcu præcedentis propositionis BDC; sed super ipsam VA erigenda perpendicularis AH, & cætera, deinde omnia exequenda, vt in antecedenti propositione; quibus omnibus obseruatis extenditur superficies EIK; Deinde fingamus hunc conum esse detruncatum à superficie cylindrica angulari irregulari LM NO, quæ plano VAB perpendiculariter insistat: ad hoc, vt superficiem coni detruncatam in planitiem dillatemus, eadem obseruabimus, quæ propositione 23. huius latè descripsimus. Nam centro I interuallo IM ducemus arcum M 2, exque

puncto 2 excitabimus perpendicularem 2 3. quæ terminabitur in lineam 4 7 æqualem lineæ E 5. Assumpta itaque longitudine 7 3, mensurabitur à puncto E super rectam E 5. & erit E 6: Puncta itaque F, 6. P, & alia simili ratione inuenta erunt ea, per quæ transibunt rectæ F 10. & 10 11. & aliæ, eritque superficies terminata FEP, quæ exposcitur.

Ita etiam, vt in prop. prædicta superficies coniunctiuæ prodibunt; nec est necesse rem vlterius verbis prosequi, cum ipsa figura satis, superque id, quod proponitur, demonstret.

Ratio verò harum operationum, quas in istis tribus problematibus postremis docemus consistit in eo, quòd reperiamus omnes hypotenusas procedentes à vertice dati coni, & terminantes in superficiem, quæ finguntur, vel ponuntur conum rescindere: Harum verò Hypotenusarum latitudines adipiscimur, quod in datum arcum, & nobis cognitum terminent, quorum partes ad libitum distinximus, quæ partes, & earum subtensarum, seu hypotenusarum distantiam determinant, & hoc sufficiat cuilibet inerudito intellectui.

EXPENSIO III.

De superficie sphærica, eaque diuersimodè secta variis modis in planum extendenda.

FAciliores extensiones priùs venabimur, exinde difficiliores, vt ordo doctrinæ seruetur. Faciliores sunt, in quibus sphæra per parallelos secatur, quam in quibus per circulos maximos vnde prius agemus de superficiebus planis æquantibus superficiem sphæræ in partes sectam à parallelis circulis.

PROBL. I. PROPOS. XXVI.

Sphæricam superficiem in annulares superficies planas distribuere.

SIt quadrans sphæræ, quod sufficit ACB, cuius superficies in planum proijcienda sit in annulares superficies distributa.

Diuidatur CB quadrans in quotquot partes libeat V. g. in quatuor, & producta AB per primam diuisionem 2. à puncto C occurrat diametro producto AB versus D recta C 2 D: Sicque fiat depunctis 2 3 producta per eos linea 2 3 E; sicque de punctis 3. 4 ducta recta 3 4 F, & sic de alijs, si adsint.

Habebimusque latera conorum rectorum, quorũ axis V.g. coni CAD erit axis AD, basis semidiameter AC; vnde superficies erit CA 25 in orbem flexa, quæ circa eum vertitur ad altitudinem A 5, quę est eadem, ac corporis ex annulis solidis compacti in sphæra inscripti, vt est corpus K; cuius annulus solidus MN PQ est idem, ac portio superficiei conicæ NPQM coni NRM.

Sic dicas de cono 52 E, cuius semidiameter baseos est 2 5., axis 5 E, vertex E latus 2 E. Vnde superficies 5 2 3 6 si intelligatur circa conum gyrata semidiametro 5 2 efficiet superficiem communem tum cono 52 E, tum corpori sphæræ inscripto annulis solidis compacto; cuius vnius annuli superficies operiat planũ 2 5 3 6. Patet verò ex demonstratis Archimedis Tr. 18. prop. 9. quod superficies hæc parùm differat à superficie ipsius sphæræ, cum, & multilaterum ipsi circulo inscriptum parum differat à circulo maximè si multilaterum inscriptum plurimis lateribus constet, vt propos. 43. Tract. 21.

Iam verò notum est ex prædemonstratis sectorem circuli, cuius semidiameter sit latus coni, & circumferentia æqualis circumferentiæ ipsius coni esse æqualem superficiei ipsius coni exclusa base ex propos. 24. Tractatus 31. Quare etiam portio annuli plani diametro eadem descripti erit æqualis annulo circa conum descripto, dummodo habeat eandem altitudinem, & eandem circumferentiam quo suppositio.

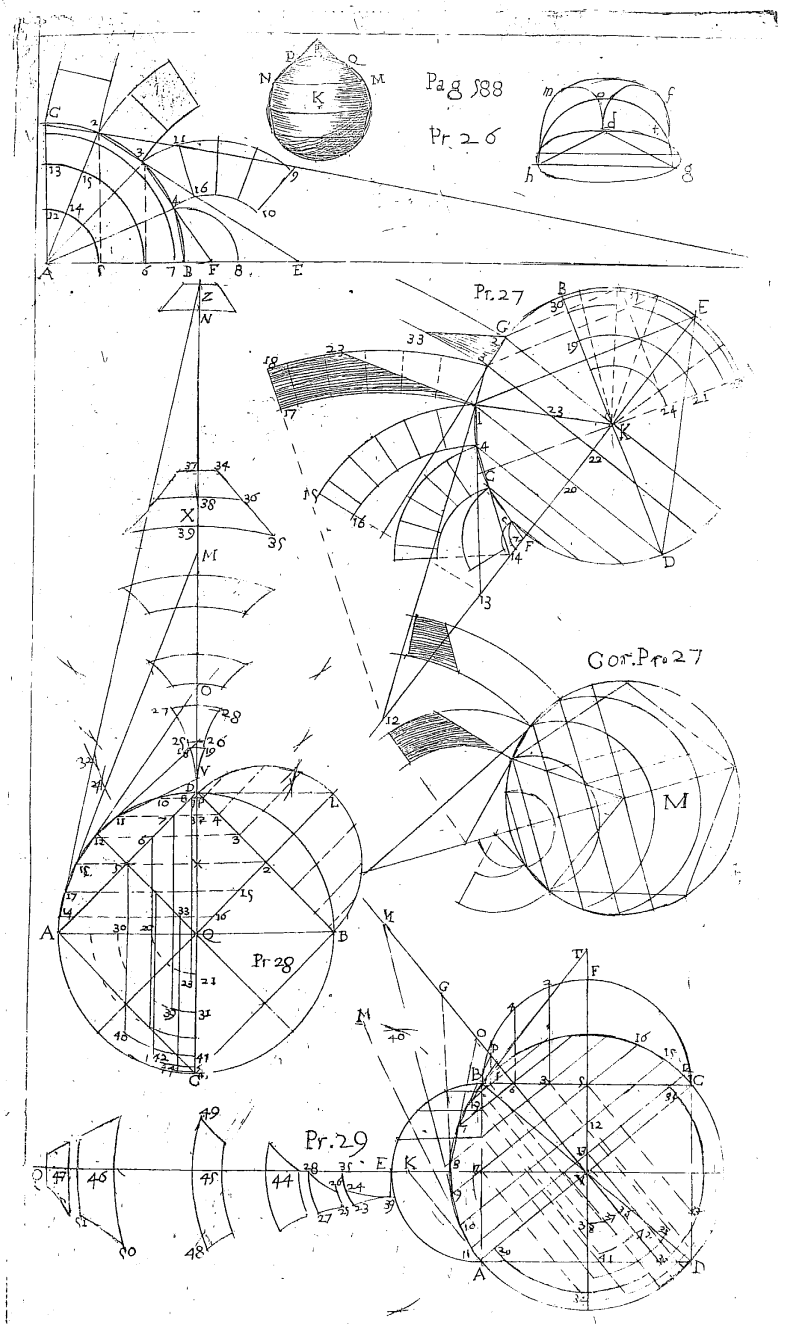
Centro B interuallo B 4 describatur sector B 48 itaque peripheria 4 8. æqualis basis quadranti iste erit æqualis superficiei conicæ quartæ parti coni 7 4 B. Sic centro F interuallo F 3 describatur rursùs circuli sector 3 9 F; sitque peripheria 39. æqualis quartæ parti peripheriæ ipsius basis iste sector erit æqualis superficiei coni 3 6 F; sic, & sector 4 10 F eadem ratione erit æqualis superficiei coni 4 7 F, ablatis ergo istis æqualibus superficiebus coni 47 F, & 4 F 10 sectoris; hæc à sectoris superficie 39 F, illa à coni superficie 36 F remanebunt superficies coni residua 3 6 4 7, & sectoris 3 4 10 9 æquales.

Remanet itaque docendum, quomodo sectoris peripheria fiat æqualis peripheriæ basiali coni semidiametro 7 4. vt est A 5 fiat circulus, ita semidiametro 6 3. vt est A 6; istique circuli diuidantur in quotlibuerit partes, quoad fieri possit minimas, vt 12 14. & 13 15. illæque transferantur in peripherias 3. 9 & 4. 10, sitque æqualis 13 15 parti 3 11. & 12 14 parti 4 16. & sic de alijs, donec sint numero æquales, quæ in quadrante 13 15 6. & in peripheria 13. 11. 9 sic, & illæ, quæ sunt in ambitu 12 14 5. ac quæ in 4 16 10. æquabuntur; physicè, & sensibiliter peripheria 13 15 6 ac 3 11 9 pariq; modo quadrans 12 14 5. ac ambitus 4 16 10. Si ergo omnes semiannuli superficiales circa conos in annulorũ planorum portiones projiciãtur, quæ eis sint æquales habebimus quadrantem sphęræ superficiei in annulos planos, seu eorum portiones proiectam, vt erat agendum.

PROBL. II. PROPOS. XXVII.

Sphæricam superficiem à triangulari superficie sectam in annulares superficies proijcere.

DOcebimus in sequentibus eadem ratione subnixi diuidere sphæram, & eam in tales annulares planas superficies projicere, quæ rursus circumuolutę ipsi sphæræ, & in formam sphæricam redactę emisphærium eius in triangulum diuidant, V.g. si sphęra triangulari superficie plano perpendiculari h d m, & h o g, & d f g secetur. Inuenire superficiem residuam, & ab ipso triangulo sphęrico comprehensam h d g m o f. Facto circulo ABCD; diuisoque in quadrantes; in eo inscribatur triangulum EDI, & ab aliquo eius angulo, vt ab E ducta recta EK vltra circulum quantùm sat erit. Diuidaturque quadrans FG, in quot libuerit partes, & per puncta terminantia rectæ agantur, vt 2 3 versùs



uersùs 12. sic 3. I vsque ad 12, sic 14 vsq; ad 13. sic 4 C vsque ad 14. sic C 5 vsque ad 7; nempe ad lineam BKF 11. Deinde modo superiùs descripto fiant portiones annulorum planorum V g. 1 4 15 16, & alias, quæ singulę ab F vsque ad I terminabuntur, modo superiùs descripto, vt satis vides, oruntq; superficies, quæ sphęricũ segmentum DIB extra triangulum EDI remanens operiunt.

Modo accedamus ad superficiem inuestigandam, quæ intra tertiam partem trianguli DKI remanet. Ducto itaque arcu I 17. & mensurato semidiametro 20 I super K 19 erit quadrans 21 19 circumferentia basis coni 20 I 12: quam minimis partibus assumptam mensurabimus super I 17 & à centro 12 trahemus lineam 17 18. & puncto 3 eodem centro ducemus arcum 3 18. & esset superficies, quæ aperiret conum 22 3 12 quoad partem 22 3 I 20. sed volumus solùm eam partem, quæ operiat 22 23 20 I.

Assumpto itaque 22 3 mensurabimus super K 25. & ducemus quadrantem 25 30. Deinde super eundem KA mensurabimus lineam 22. 23. & erit K 24. trahemusque à puncto 24 rectam 24.31 perpendiculare ad AK, quæ occurret arcui 25. 30 in puncto 31. eritque arcus 30 31, quem subtendit 22. 23. quem mensurabimus à puncto 18 vsque ad punctum 32. & ducetur recta I 32. eritque superficies nigra I 32 18 17. quæ quæritur operiens solum partem 22 23 I 20.

Rursùs mensurabimus 32 18 super arcum 33. & ducemus G 33. rectam, eritque reliqua superficies K 22 23 planum operiens.

Patet verò, quòd reliquæ duę partes in triangulo EDI sunt istis æquales: Vnde replicatæ superficies 2 3 33. & I 32 18 17. & assumptæ sexies totum triangulum æquabunt in superficie sphæræ à triangularibus superficiebus secantibus relictum. Vnde tum superficiem portionis sphæręDIF, & reliquarum EAD, & EBI, tum trianguli EDI remanentis inuenimus.

COROLLARIVM.

IDem poterit fieri etiam si sit quadratum, aut pentagonum, vel quælibet alia figura: quę sphęram secet, vt patet in figura M appositа, quæ nullis literis adornatur.

PROBL. III. PROP. XXVIII.

Superficiem sphæræ à quatuor superficiebus in quadrum positis circulo maximo perpendicularibus sectam; intraque eas comprehensam, inuenire.

SIt Circulus ABCD, exprimatque sphæram, in quo sit quadratum eisdem literis insignitum, quod demonstret vestigia superficierum plano, & circulo ABCD incumbentium, sitque reperienda superficies sphęrica, quæ ab illis superficiebus clauditur.

Super latus DB fiat semicirculus DLB, & diuidatur in quotlibet partes, ducanturque perpendiculares à diuisionibus factis L 2. & ex illis punctis signatis in latere BD ducantur parallelę ad diagonalem BA, vt 2 5, vel 3 6. sic 4 7. & P 8. & continuentur vsque ad circulum in 10. 11. 12. 13. Deinde allę quoque ad libitum ducantur prædictis parallelæ, vt 15 17. & 16 18.

Producta deinde altera diagonali CD vsq; ad N ad eam per puncta rectæ ducantur V. g. 14 17 N, & 17 13 M, & 13 12 O, & cæt. deinde super eandem diagonalem C N; vel aliam rectam sicubi facto centro in D interuallo D 10. ducatur arcus 18 19. & à puncto 8 ducta ad 8 P perpendiculari, occurrat quadranti 20 21 radio I 10 descripti; assumaturque arcus 23. 21. & mensuretur à linea DO in vtramque partem super arcum 18 19. postea assumpto interuallo LD tangentis DL in puncto D vbi DB terminat vsque ad ei normalem QL, centro 18 arcus deducatur, & rursus centro D alius arcus, & vbi cõueniunt, in pũcto 24 ducatur arcus 18 D, & idẽ fiat ad aliam partẽ, ducendo arcũ 19 D & erit 18 19 D portio prima superficiei quæsitæ. Eodem deinde modo centro D interuallo V 10 describatur arcus 25. & 26. fiatque æqualis arcui 18 19. vel duplus arcus 23 21. rursùsque interuallo V 11 eodem centro arcus describatur 27 28. Ducta deinde 7 29 parallela ad DC occurrentẽ arcui 30 31 ex semiradio 32 11 in puncto 29. & assumatur arcus 29 31. & mensuretur à linea OD hinc, & inde, & sit arcus 27 28 duplus arcus 29 31. Deinde interuallo LD tangentis DL in puncto D facto centro in punctis 27 25 duo arcus ducantur, & quo se decussant in puncto 32: facto centro, ducatur arcus 25 27, & sic fiat ad aliam partem, eritque superficies secunda sphęrica iminens plano 7 4 8 P, & sic fiat de alijs; donec peruenias ad 5 2; vbi cum iam non ampliùs circulo DLB occurrant, sed maximo, ideo rectis poterunt terminari. Verùm si aliquis harum superficierum terminationem exactiorem exoptet, poterit tria puncta reperire, vt videre est in arcu 34 36 35 posita superficie Z iuxta superficiem X ad hoc, vt totius superficiei X Z simul tria puncta habeamus, eodem enim modo, quo reperta est distantia 37 34 ex arcu 40. 41. & 38. 36. ab arcu 42 43, & 39 35 ex arcu 44 45 eodẽmodo, & punctum 36 intermedium inter 34 & 35. & alia quęcumque intermedia puncta cuiuslibet alterius superficiei reperientur.

PROBL. IV. PROPOS. XXIX.

Superficiem sphæræ à quatuor superficiebus in quadratum oblongum positis, & plano circulari perpendicularibus sectam in planum proijcere.

HÆc praxis parum differt à præcedenti. Talisque est. Facto circulo, & diametris se decussantibus secto, descriptoque in eo parallelogrammo ABCD, super vtrumque latus semicirculi describantur AEB, & BFC, à quorum altero, vt à BFC in partes æquales diuiso demittantur perpendiculares quales sunt F 5. 2 3. & 4 6. & aliæ, & punctis, in quibus secant 6. 3. 5 deducantur parallelæ 16. 9 diametro AC, quibus, & aliæ addantur pro libito 10 12. & 11 3. Per centrum autem V ducatur recta perpendicularis ipsi diametro AC; quæ sit VG, ad quam per bina puncta in arcu A 8 B signata, à lineis nuper ad illum immissis ducantur rectę 11 10 M, & 10 9 N sic 9 8 G, & 8 7 O, & tandem 7 19 P; quibus interuallis ducantur arcus

facto

facto seorsim centro super lineam EQ in E V. g. interuallo 1 19. ducatur arcus 23. 24. deinde 25. & 26 arcus interuallo P, 19 hinc arcus 27. 28 interuallo P 7. & sic de alijs, vt fecimus in antecedenti, vel semper eodem centro E adhibito, vel si spatium deficiat, vtlibet sumpto.

Ex inde in singulas chordas suus semicirculus super AC erigatur V. g. diametro chorda 11 14 sic 10 15, sic 9 16. & sic de alijs velut vnus ex ipsis est circulus 29 30 31. diametro chorda 9 16 deductus; deinde à singulis punctis, in quibus prædictæ chordæ latera secant B 17. & B 5. sicut, & 5 V, & 17 V perpendiculares ad AC excitentur velut sunt 6 V 30. sic 3 32, sic 5 33; sic 17 34V & cæt. quæ quælibet ad suum circulum terminent; qui super eam chordam, à qua discedunt lineæ effecti sunt, quibus habitis.

A puncto 35 in linea EQ mensuretur arcus 36 37, & sit 35 24; deinde arcus 36 38. & sit arcus 35 23 mensuretur, deinde super E 39 linea ipsi EQ normali ab E deducta distantia 1 B facto centro in puncto 39. & exinde in puncto 24. interuallo BT tangentis in puncto B vbi 5 B terminat, & centro puncto 39. duo arcus describantur, & quò se intersecant in puncto 40 facto centro ducatur arcus 24 39. & sic fiat ad aliam partem: sed interuallo adhibito AK tangentis in puncto A, & vbi in puncto 50 arcus se secant, arcus ducatur 23 24. eritque 23 24 39 prima superficie quæsita. Eodem verò modo prorsus, vt arcus 23. 24 terminatus est, terminabitur quoque arcus 25 26. At arcus 27 28 terminos præbebit arcus 42 41, cui subtenditur recta 4 6, & quia linea EQ stat loco lineæ GV 30; ideo vt arcus 42 41 terminat in ipsam 30 G. Sic & arcus 27. 28. Postmodum ducentur arcus 26. 28 interuallo B T, & arcus 27 25 interuallo AK, & in antecedenti prima superficie factum est, & erit 27 25 26 28 superficies secunda. Ita quoque efficiemus superficiem 44. Sic & superficiem 45. cuius arcus 48 49 æquabitur arcui 33 30 34. quem linea 17 5 subtendit, & hinc superfinies residuæ 46. & 47 eodem quidem modo quoad arcuum longitudines determinabuntur; sed latera V. g. 50 51. vel rectis terminabuntur, vel tribus punctis repertis: si superficies illa sit latior. Verùm præsuppono istas superficies adeo esse paruæ latitudinis, vt arcus 50 51 per tria puncta repertus vix differat à linea recta. Vnde securi linea recta pro curua possit vsurpari absque scrupulo sensibilis erroris.

PROBL. V. PROPOS. XXX.

Superficiem sphæricam à quatuor superficiebus in quadratum positis plano alicui circulari sphæræ orthogonalibus in planum proijcere alio modo, ac in præcedentibus factum est.

SIt sphæra circulo ABDC expressa, & literæ quadratum quoque notent, at AB; BD; DC; CA latera sint vestigia superficierum secantium sphæram perpendicularium ipsi circulo ABCD. In quadrato alij circuli concentrici inscribantur V. g. GHFE, & allj arcus IK, & LQ quot quot placet à quibus, vbi secant BC, ducantur eidem BC perpendiculares veluti G 5. 26. 3 7, 4 8; L, 9. & I 10. per-

que puncta, in quibus secant arcum ED ducantur rectæ, quæ secent productam AD; sic per puncta 10. 9 ducatur recta 10 9 11. & per 9 5. recta 9 5 12. sic per puncta 5 6 recta 5 6 13. & cæt. & vt supra fecimus in 26. pr. h. reperiatur superficies sphæricæ, quæ inter circulos concentricos veluti GFEH, & 2. 15. 14. extenduntur qualis est superficies 5 6 16. 17. & reperiantur aliæ, & ita totum spatium circulo GFEH circumsceptum superficiebus suis, nempe 5 16 17 6 6 21 & 7 22. & 7 8 si quater sumantur erit opertum.

Ad hoc autem, vt reperiamus superficies angulo BFH intercluſas; ducta seorsum linea, electoq; in ea ſicubi puncto N, assumatur arcus B 10. & à puncto N mensuretur, & sit NO; deinde sumpta intercapedine IE 10 centro M per O arcus 22 23 arcui 19 18 æqualis, factoq; centro in puncto 23, & rursus in N ducantur duo arcus interuallo tangentis BX in puncto B vsque ad X in lineam normalem FX, & quo se decussant arcus in puncto 24. facto rursus centro eodem interuallo ducantur 23 N, & idem fiat ad aliam partem ducto arcu 22 N, eritque superficies 22 23 N prima anguli, quæ quæritur. Deinde rursus centro M aliquo in linea M N interuallo 11 10. ducatur arcus 25 26 æqualis eidem 22 23. & rursus eodem centro M; sed interuallo 11 9 ducatur arcus 27 28. Fiatque æqualis arcui 21 20; ducantur deinde arcus 28. 26. & 27. 25. vt ductus est arcus 23 N; & eodem interuallo, & erit secunda superficies; quæ requiritur 27. 28. 25. 26. & sic tertia quoque reperienda erit. Spatia autem A 20 C implebuntur, vt supra factum in pr. 27. h. vt satis constat ex figura ipsa.

PROBL. VI. PROPOS. XXXI.

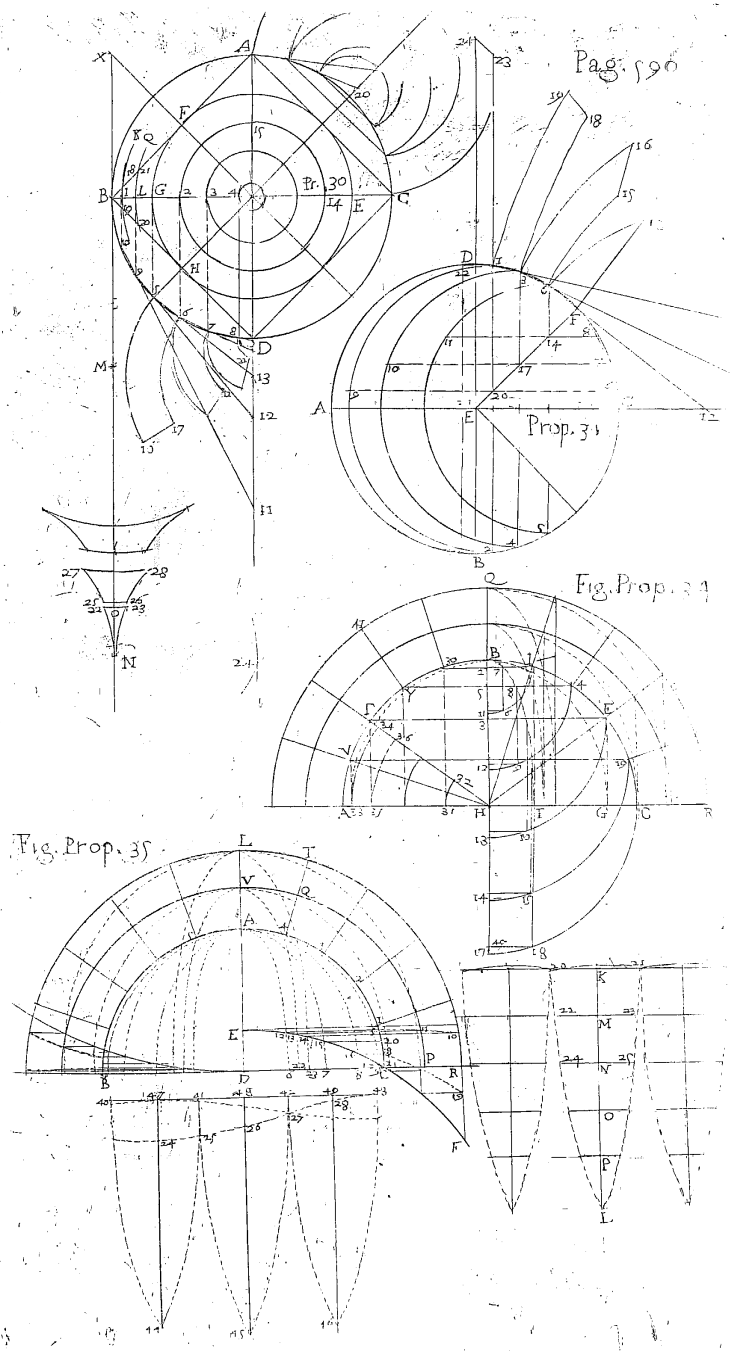
Sphæricam superficiem angularibus duabus superficiebus eiusdem plano circulari perpendicularibus sectam in planum proijcere.

SIt sphæra expressa per circulum ABCD, sintque vestigia angularium superficierum BE, & EC angulum quemcumque facientia in E; sitque propositum reperire superficiem sphæricam, quæ ab illis superficiebus concluditur.

Trahantur rectæ parallelæ ad libitam distantiam, prout commodiùs fuerit 1 2. & 3 4. & 6 5. vel plures vsque ad radium ED, & rursus aliæ ad eandem distantiam ab EC, quæ distant ab ED primo ductæ, vt 6 9 7 10. 8 11. quæ pertingant saltem occultæ ad semicirculos super priores parallelas tractos, nempe 8 11 ad 6 11. 5. sic 7. 10 ad 3 10 4. sic 6 9 ad 1 9 2.

Postmodùm vt fecimus supra per puncta 6 F ducatur ad EC producta recta 12 F 16. & cæt. & ducantur arcus V. g. 6 13 centro 12 interuallo 12 6. & alij omnes. Fiat autem arcui 6 11. arcus 6 13 æqualis, & ducatur F 13 recta, quæ licet in sphæra curua sit, non tamen in multilatero, inscripto, & erit superficies F 6 13 prima, quæ quæritur, quę operit planum F 6 14. Eodem autem arcui 6 11, fiat quoque arcus 6 15. & arcus 3 16 arcui 3 10; ducaturque recta 15 16. Et erit secunda superficies 15 16 6 3. quę imminet plano 14 17 6 3: Eidem verò arcui 3 10 fiat æqualis arcus 3 18. at arcus 1 19 arcui 1 9. & ducatur 18

19.



19. eritque superficies I 3 18 19, quæ in sphæram flexa operiet planum 20 17 F 3. pars verò residua superficiei 20 21 D I erit (cum præsupponatur minima circularis) veluti superficies cylindri diametrum ED habentis. Vel fiet æqualis Trapezio I 23, cuius latus D 23 æquatur arcui DA, & latus D 24. arcui I 9.

THEOR. I. PROPOS. XXXII.

In quacumque corpore sphærico, Elliptico, seu etiam Parabolico, & Hyperbolico corpus planis superficiebus constans inscribi potest.

SIt corpus aliquod, aut sphæricum, aut Ellipticum, aut Parabolicum, seu Hyperbolicum. Dico, quod corpus in illo multis superficiebus constans inscribi potest: Secetur in fig.p.33.per aliquem axem multis planis AFE, & AGH, deinde parallelis maximo ipsorum BLC, & MFGN, & cæt. ductis verò subtensis FG, & EH, per eas agatur planum FGEH, & ita fiat de omnibus alijs vndequaque & erit corpus inscriptum corpori exhibito.

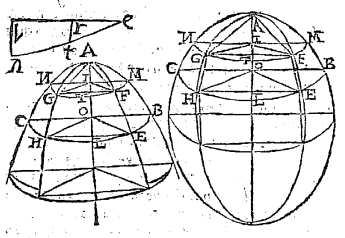
Probatur. Nam tunc dicitur aliquod corpus inscriptum alicui alteri corpori, cum omnibus suis angulis solidis tangit corpus, cui inscribitur, sed omnis superficies inscripta tangit corpus circumambiens suis angulis, quod transeat per F, G, & E, H extrema, quę in superficie exhibiti corporis sunt. Ergo etiam omnis angulus solidus, qui angulis planis constat in superficie corporis dati terminabit: Vnde erit inscriptum corpus multis superficiebus constans in corpore conuexo exhibito.

Quod autem per FG, & EH superficies ductę sint planæ, constat ex eo, quod EG, & EH sunt parallelæ ex eo, quia plana parallela MFGN, & BLC, aut circuli sint in sphæra, aut etiã ellipses, vt in sphæroide, & conoide omnes verò ellipses parallelæ similes sunt ex 11. tract.25. & ex prop.40.lib.6. omnes quoque circuli. Quare erit applicata OH ad IG, vt OE ad FI ex prop.54. Tract.24. & ex prop.43. lib. 6. quare ex 4. lib. 6. cum triangula GIF, & HOE sint æquiangula, etiam FG, & EH erunt parallelæ laterum proportionalium.

THEOR. II. PROPOS. XXXIII.

Si sit aliquod corpus sphæricum, vel Ellipticum, aut etiam Parabolicum, vel Hyperbolicum; in quo inscripti alicuius corporis omnia triangula; quæ inter plana per idem punctum secantia continentur, cognosci possint, etiam tota superficies corporis inscripti obtinetur.

SIt corpus sphæricum ABC, & secetur diuersis circulis (intellige verò si sit Ellipticum de Ellipsibus per idem punctum quomodocumque ductis, at si sit Parabolicum, vel Hyperbolicum de parabolis, seu Hyperbolis per axem ductis, vt ex Defin. tract.25. constat) V. g. circulo ALE, & AGH, & cæt. inter quę sit inscriptum aliquod corpus polygonum, quod posse fieri supra demonstrauimus: habeaturque nota normalis AT sicut TG arcum, & eius subtensam, & deinde AG, & ideo subtensam ipsius: si ergo super basim r e ipsi TA æqualem faciamus triangulum, cuius singula latera e t, & t r sint æquqlia triangulo ATG, patet ex prop.23.lib.I. esse triangula æqualia. Deinde sit trapezium FGEH. Ducaturq; planum HF normale plano TL, & sectio quoq; EL normalis erit. Tunc cũ iam habeamus notam TG, & GH ex præsuppositio, &



angulum rectum, si extendamus r e, & fiat r l æqualis ipsi TL æquabitur triangulum TGL triangulo t r l: ducta per imaginationem subtensa l t ex prop.22.lib.I. Quare si data LH, & GH super l t fiat triangulum l n r hoc erit æquale triangulo LGH, vnde trapezium f l r n æquabitur trapezio TLHG. Vnde patet, quod etiam si non ducatur l t Idem tamen potest præstari habitis punctis L, & H in plano, quæ sint l, & n.

PROBL. VII. PROPOS. XXXIV.

Sphæricam superficiem in planas superficies per circulos maximos diuisam extendere.

HÆc est huius expensionis pars secunda, in quà conabimur sphæricam superficiem in planas proijcere, quæ tamen non parallelis, vt in prima parte præsupponatur diuisa, sed circulis maximis.

Sit ergo sphæra ABC, circulis maximis secta, quę se decussent in centro B, & quia ex propos.13.tract. 29. circuli eleuati à plano situm consequuntur in ipso plano, qui non est; circulus; sed ellipsis, cuius semidiameter maior est ipse radius, at minor subtensa arcui, quo dictus circulus ab ipso plano eleuatus distat à vertice. Ideo, si aliquis arcus distet à vertice quantum est arcus BI formabitur in plano ellipsis BF, cuius semidiameter maior est radius BH, & chorda 2 I. subtendens arcum BI semidiameter minor; Sic dicas de circulo, qui sit eleuatus à plano quantum est CE, nam subtensa E 3 minor semidiameter erit ellipsis in plano eius situm exprimentis: quare erit ellipsis BG.

Ellipsibus ergo prædictis descriptis ex tract.24 propos.27. vel instrumento, vel saltem ellipsis quartam partem BG, quæ sufficit, super singulos V. g. sinus I. 2 fiet quadrans circuli, sic super 4.5. & E 3. & cæt. qui erunt I. 6. II. & 4. 9. 12. & E, 10. 13. à punctis verò; quibus sinus secant ellipsis ambitum BF V. g. à puncto 7 erigatur parallela ad radium BH, vsque quò secet quadrantem I 6 II super sinum ipsum erectum in puncto 6. sic à puncto 8 alia parallela 8 9 ad BH ducatur, donec secet quadrantem 4 9 12 in puncto 9. & cæt. quibus

bus præstitis erit parata constructio ad superficiem extendendam. Fiat ergo ellipsis 33 Y B facta ex axe 40 H, & HB, in qua puncta subtensarum arcus 18 17. & 14 15. & cætera, quale vnum ex ijs est punctum 40. ex præc. reperiuntur, transferendæque essent partes, in quas secatur à radijs Y 41. & cæt. sed cum sensibiliter ille partes non differant à quadrante ATB, vel CEB; ideo transferantur illæ partes.

Seorsim igitur agatur linea KL, & singulæ partes quadrantis BC transferantur in eam, nimirũ BI, & I 4. & 4 E, & cæt. quæ sint KM, & MN, & cæt. p quæ puncta notata K, M, N, O, P, ducantur ad LK perpendiculares, quæ fiant æquales hinc, & inde lineæ KL distantijs normalibus, quæ intercipiuntur inter radium BH, & parallelas, quæ sunt 7. 6. 8. 9. & cæt. ita vt K 20. & K 21 æquetur lineę 40 18. sic M 22 æquetur interuallo 14 15. sicut, & eidem M 23 sit æqualis, linea verò N 24 æquabitur interuallo 10 13. & pariter ipsi recta N 25. & sic de cæteris: per puncta verò 20 22 24. & alia vsque ad L sicut, & per puncta 21 23 25 vsque ad L flexæ duæ ducantur, & habebimus superficiẽ 20 21 L, quæ erit quinta pars dimidij hemisphærij, & planum situmque HEC, cæteraque æqualia operiet.

Id verò ex 33. h. satis euidenter constat. Nam latitudo 21.20 æquatur subtensę ar cui CE, longitudo verò quadranti CB, singulæ quoq; partes, vt 21 23, vel 24 25 subtensis arcubus parallelorum, qui representantur, in quadrantibus E 10 13. aut 14 15 19 similiter æquantur; quæ partes parallelorum inter circulos maximos intercipiuntur; quorum vnus representatur per lineam flexam, & quartam ellipsis B 8 F, alius verò subintelligitur ad aliam partem ductus.

Si vero quis cupiat superficies, quæ iuncturas coniungunt, si sphæra sit alicuius graffitiei, iam per se clarum est, annulum planum, vel eius quartam partem BQCR eam præbere.

Poterit etiam alio pacto superficies 20. 21. L, & promptiùs inueniri: nam ductis perpendicularibus T, 35; V, 33. & alijs ducantur arcus 33 34. & 35 36. & alij, qui à duobus radijs A H, & T H intercipiantur: Deinde diuisa linea KL in partes æquales partibus quadrantis BA, & ductis, vt supra lineis 20. 21. & cæt. fiat 21 20 arcui AT, & 22. 23 æqualis arcui 33. 34. sic 24 25 arcui 35 36. & cęt. Nam ferè eadem puncta habebimus, vt priùs, sed modus non est adeo perfectus, & deficit à veritate, licet expeditior.

PROBL. VIII. PROPOS. XXXV.

Sphæricam superficiem circulis maximis diuisam in planas proijcere superficies, à cylindrica superficie plano eiusdem circulari perpendiculari sectam.

SIt sphęra ABC; oporteatque reperiri superficies eius secta à cylindrica superficie, cuius vestigia sunt, vel conuexę CD, vel concauę ECF.

Proiecta itaque in planum superficie sphęrę, vt superiùs, cuius partes sint 40.44.41. & 41.45.42. & tandem 42. 46. 43. quę circumoperiant sphęram quantum est arcus C, 5, ducantur quoque quartę ellipsium, prout requirit eleuatio, cuiuscumque circuli maximi, sic ducentur singulę ellipses, Idest Ellipsis A 6 pro circulo eleuato ab horizonte arcu C 4; Ellipsis A 7 pro circulo C 3. Ellipsis A 8 pro circulo eleuato arcu C 2, & tandem A 9 pro arcu C 1, & si plures diuisiones placitum erit in quadrante AC distinguere plures etiam describentur ellipses pro vniuscuiusq; circuli maximi per illas diuisiones ducti eleuatione, & ab ijs punctis, quibus prędictę ellipses secantur ab arcu ECF, vel GD ducantur rectę parallelę ad diametrũ BC, quales sunt E 13 12. 5. 15. 20. 16. 18. & 7 21

Et si cupimus etiam superficies coniunctiuas, si sphęra sit alicuius graffitiei, & orbis, tunc etiam ducantur ellipses, quę sint iuxta eleuationem illius circuli, cuius desideratur ea superficies coniunctiua, sic si desideretur superficies, quę coniungit C B 4 T cũ CR 4 T. Ad eleuationẽ per punctũ PQ circuli trãseuntis describatur ellipsis V 22, & ellipsis L 23 circuli transeuntis per punctum R T; & à punctis 13. 14. in quibus secantur ab arcu EF, ducantur parallelę ad DR: quę sint 13 11 pertingens ad quadrantem medium, cuius V 22 est ellipsis, & 14 10 pertingens ad quadrantem LR, cuius 23 L ellipsis est, & iam erit omnis apparatus constructus ad superficies, tum coniungentes, tum obuoluentes sphęram ritè terminandas.

Et vt incipiamus à coniunctiuis 5. 11. 10. ducatur flexa 5, 11. 10. & erit superficies AL 5 10. quę quęritur; sic si per puncta 18 P 19. quę proueniunt ab ellipsibus trium arcuum coniunctionis 2 ducatur flexa 18 P 19 erit AL 18 19 superficies applicanda loco, & situi 2. & sic si alię expoſcantur.

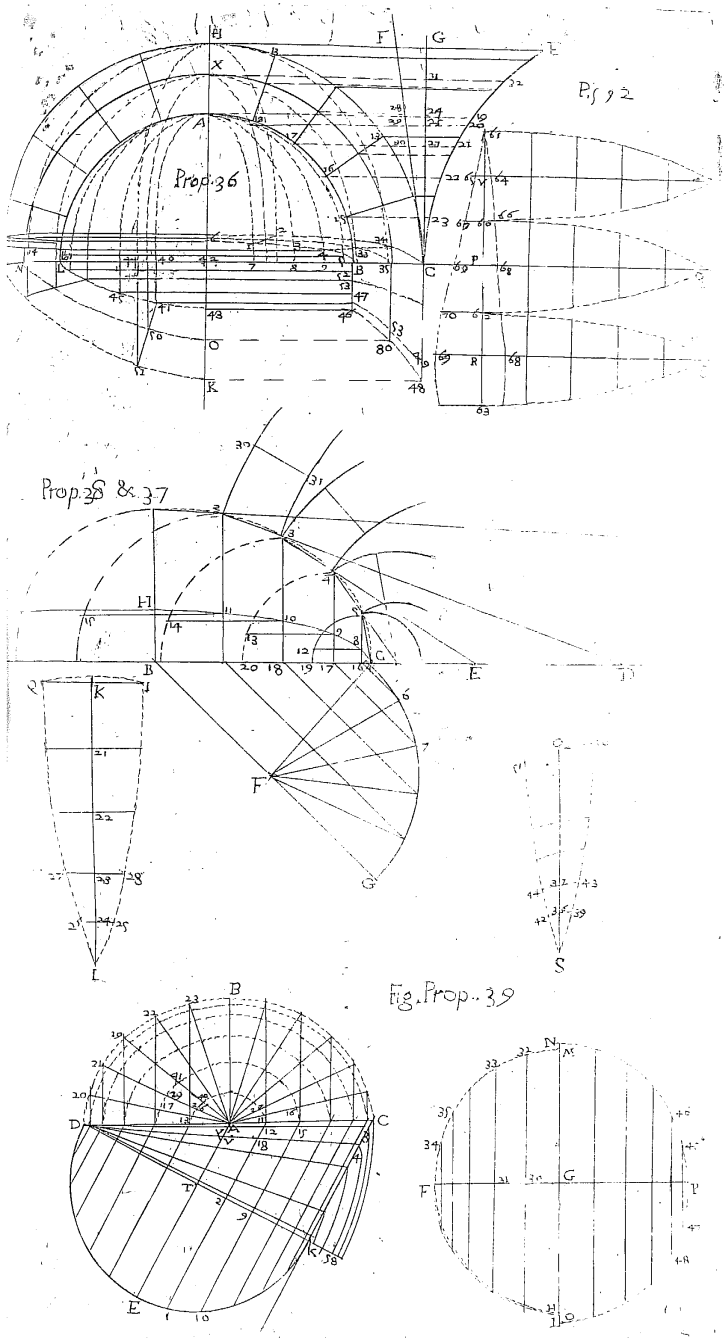
Transeamus ad superficies ipsius sphęrę, & globi: Accipiamus itaque interuallum C1, quod transferatur à linea 40. 43. super rectam 47. 44. & sit 47 24. sic interuallum C 5, & transferatur in 41 25; Sic C 20. & transferatur in 48 26. sic C 18. & transferatur in 42 27. sic tandem C 21, & transportetur in 49 28. & per puncta signata 24; 23; 26; 27; 28; 43 flexa ducatur, quę terminabit superficies 24 25 44. & 25 45 27. & tandem 27 46 43; quę octauam partem simul sphęrę exęquant.

THEOR. IX. PROP. XXXVI.

Superficiem sphæricam circulis maximis diuisam in planas superficies proijcere à superficie cylindrica sectam, cuius axis sphæræ axi sit parallelus, vel à superficie plana Orizonti non perpendiculari.

SIt sphęra, vel semicirculus eam representans LAB: sitque diuisus quilibet quadrans in quot quot partes erit voluntas, vt in partes 18. 17. 16. 15. & singularũ describẽtur ellipses punctatę vt pr. 34. h. Sit verò superficiei cylindricę secantis curuitas CE, vel planę pendentis angulus ECG, & GC perpẽdicularis. Ductis verò à singulis partibus, tum intrinseci ambitus AB parallelis ad BL, veluti 19 A, 18 20. 17 21. 16 22. 15 23. & si etiam superficies coniunctiuę exoptentur à circulo medio, & extrinseco lineę eiusdem rationis producantur, & ellipses eorum circulorum, vel quartę earum exarentur, quę ad eam coniunctionem pertinent.

Igitur assumpto interuallo 24 19 nascente ab A transferatur, & sit 42 43. sic 25 20 super ellipsim



ſim A 40 productam perpendiculariter ad LB in 41 transferatur, & ſit 40 41, idem fiat de diſtantia 27 21, & ſit 44 45. & ſic de alijs vſq; ad L: Deinde ducatur flexa L 45 41 43; quę pertinet ad deſcribendam ſuperficiem ſemiſphęrę LAB ſectam à cylindrica CE; quod ſi & coniunctiuę ſuperficies exoptentur, idem erit agendum; ſic transferretur G E in 42 K, & alia puncta reperientur, & ducetur flexa M 51 K. Sic, & 31 32 interuallũ transportabimus in 42 O; & alijs eodem modo translatis ducemus flexam N 50 O.

Si verò agatur de eadem ſphęrica ſuperficie deſcribenda; ſed à ſuperficie plana pendente ad partes internas, vt CF; centro C internallo quolibet puncto in FG, vt C 24. ducemus arcus 24 28. & 25 29. & cęt. deinde transferemus interuallum normale 24 28. in 42 6. ſic 29 25 in 7 1, ſic 27 30 in 8 3. & cęt. & ducemus quartam ellipſis 6 1 3 4 5 B, & ita mediãs, & extrinſecas quoq; pertinentes ad circulum mediũ, & extimum ellipſes indagabimus, quas flexa iungemus 4 34.

Cùm enim CF ſit ſectio ſphęrę, & ideo circulus patet ex 13. tract. 25 eius proiectionem ellipſim fore in quacumque ſphęra, ſeu ambitus maioris, ſeu minoris.

Hęc verò puncta, per quę prędictę ellipſes ductę ſunt, reducemus ad quadrantem AL, vel AB, prout commoditas poſtulabit rectis lineis ad LB parallelis; ſic reducemus linea 5 10 punctum 5 in 10. & punctum 4 in 11. Sic quoque faciemus de punctis in flexa L 43 repertis, productis tamen quadrante BA in 46. x 35 in 80. & HE in 48. rectis ad LB perpendicularibus; ducemuſque parallelas 43 46. 41 47. & cęt. Omniſque prępara-tio erit adornata, quâ ſuperficies exoptatę poſſint deſcribi.

Quod igitur pertinet ad ſuperficies coniunctiuas ita erit agendum: Sit ergo deſcribenda ſuperficies coniunctiua orbis alicuius, quę à plano FC ſecetur, & ea ſit 16 13, quæ in plano exprimitur linea punctata 4 33 34; tranſlato itaq; interuallo ellipſis B 33 in arcum N 14. & 35 34 in M 12 habebimus tria puncta 12 14. 11. per quę flexa ducta 12 11 erit ſuperficies 12 11 H A, quę quæritur coniunctioni 13 16 applicanda.

Sic ſi exoptetur ſuperficies coniunctiua pertinens ad iuncturam 18. 13. ſed orbis à cylindrica ſuperficie CE ſecti diſtantiæ puncti 50. & 51 à linea LB normaliter ſumptæ transferantur in 35 53. & C 49. & per tria puncta flexa ducatur 47 53 49. & erit ſuperficies, quæ deſideratur A H 53 49.

Sed iam tranſeamus ad ſuperficiem ipſam ſphęræ in ſuperficies planas reducendam. Itaque ductis ſeorſim lineis VT, PQ, & RS deſcribantur ſuperficies 60 T 61, & 60 Q 62. & 62 S 63; vt iam docuimus propoſ. 33. huius; quibus modo erit illud addendum, vel ſubtrahendum, quod ſuperficies ſecans, vel cylindri, vel plani requirit: Itaque pro ſuperficie ſecta à plano pendente CF; punctum 61 erit punctum L, vt interuallum V 64 erit arcus L 10. & punctum 60. 66 erit arcus L 11. & cæt. per quæ flexa ducta 61 64 66 68 68 eas ſuperficies terminabit, ad quartã partẽ hemiſphærij à ſuperficie plana pendente ſecti ſpectãtes.

Sic ſi velimus addere id quod addit ſuperficies cylindricæ ſecans CE, erit punctum 61 idem quod punctum B, at interuallum V 65, idem B 52. & 67 60 idem interuallum, quod B 53. & cæt. vſque ad interuallum R 69 idem quod B 46; Per quæ puncta flexa ducta 61 65 67 69 70 69. dabit ſuperficiei quartã partẽ operiẽtes 61 T 67. & 67 Q 70. & 70 S 69 hemiſphęrij; cum parte addita circulo CC orthogonali, tamquam ſi eſſet cylindrica ſuperficies CGF addita ſphæræ. At ſi velimus quod ſit ſpherica, eodem modo agemus, ac in ſuperficie 61 R 68 ablata. Primò enim centro C omnia interualla in linea CC inuenta, vt CG, & C 31. & C 24. vel C 25. & alia arcubus in CE deducemus, diſtantiaſque 24. 19. à punctis, in quibus arcus ſecant CF vſque ad CC normalem; ſingulas; ſed normaliter aſſumemus: transferemuſque normaliter in ellipſes V. g. A 40 41 prolungatas: non per lineas rectas, ſed per propriam orbitam; hęcque puncta parallelis, vt 41 40 non in lineas rectas B 46. ſed in arcus productos AB, X 35. & HC, punctorumque, in quę parallelæ incidunt ab MC linea normaliter aſſumptæ transferentur normaliter quoque in lineas 70 62. & alias. Sed quæ ſint curuę, vt ſunt 60. 66. Q, & ſi fortè incipiant ſeiungi, vt faciunt 62 S, & 62 Q eas in ſingulis replicando, ita vt diſtantia 62. 70 ſit notata, tum in 62 S, tum in 62 Q productas. Interualla autem, quæ in RS, & alias rectas incidunt ſolum vnica notatione contentæ erunt V. g. 42 43 notabitur in R 69. 44. 45 in P 69: & ſic ſuperficiem 61 R 69 ſuperadditam dimidio hemiſphęrio, quæ ſit pars alterius hemiſphęrij conſequemur.

EXPENSIO IV.

De ſuperficie conoidis Hyperbolici Parabolici, & ſphæroidis Elliptici, annuli que ſolidi in planas ſuperficies extendenda.

SPhęræ ſphęroides ſuccedit, cuius cum ſit frequentiſſimus vſus viſum nobis eſt eius ſuperficiei extenſionem non eſſe prætermittendam, maximè quia quaſi eodem modo, ac ſphæra eius ſuperficies in planum vrgetur, & conoidum quoque Hyperbolicorum, Parabolicorumque ſuperficies extendere ex eius proiectione addiſcamus.

PROBL. I. PROPOS. XXXVII.

Superficiem Sphæroidis, & Hyperbolici vel Parabolici conoidis ſectam circulis circulari plano per axem ducto parallelis in planas ſuperficies proijcere.

SIt Corpus Ellipticum, ſeu Parabolicum, ſeu Hyperbolicum ABC: diuidaturque in quodlibet partes A 2; & 2 3. & cæt. & producto axe BC in D, per partes prædictas rectæ ducantur, quæ ſint 2 3 D, & 4 3 E, & cęt. Centris deinde D, & E, & cęt. ducantur arcus 2 30 interuallo D 2. & 3. 31 interuallo D 3. qui terminentur iuxta prędicta de ſphęricis ſuperficiebus propoſ. 27. & erit præſtitum, quod proponitur.

PROBL. II. PROPOS. XXXVIII.

Eandem corporum prædictorum superficiem in planas superficies distendere sectam secantibus maximis Ellipsibus, quæ in ipsis deduci possint.

SIt idem corpus quodcumque ex dictis AEC, cuius circularis plani quadrans sit CFG, cuius diameter CF æquat diametrum minorem BA. Superficies verò diuidentes, & secantes ipsam basim CFG imprimant sectiones, & earum vestigia FC, & F 6. & F 7. & cæt. diuidentes basim circularem CFG in partes æquales, & conuenientes in puncto F, & se inuicem veluti faciunt in sphæra circuli maximi in axe FC secantes: Cum autem interualla æqualia sint; assumantur quodlibet interuallum, vt 6 16. & transferatur super BA, & sit HB; fiatque portio ellipsis, seu quarta eius BHC datis diametris BH, & BC, vel si corpus sit parabolicũ, seu hyperbolicũ dimidiata Hyperbola, seu parabola describatur data altitudine BC, & applicata BH, quę sit H 10 C. Siquidem Tract 26. prop. 15. & 18. probauimus parabolam inclinatam, vel hyperbolam, hyperbolã similiter describere, vel parabolam sua in plano situatione: Ducantur deinde â punctis, in quibus secat perpendiculares predicta situatio H 10 C rectæ parallelæ axi BC, quæ sint 8 12. & 9 13. & 10 14. & cæt. centro deinde 16. & interuallo qualibet perpendiculari V. g. 16 5 ducatur arcus 19 12. 5 sic centro 17 interuallo 41 ducatur arcus, & sit 20 13 4. & cæt. & sic apparatę erunt delineationes, quæ ad superficiem describendam necessariæ sunt.

His itaq; cõparatis ducatur seorsum linea QI, & ei perpendicularis KL, super quã partes omnes circumferentię AC transferantur, & sit K 21 equalis parti A 2. sic 21. 22 equalis parti 2. 3. & sic aliæ alijs vsque ad L, ita vt tota KL æquet totum ambitum AC; perque singula puncta nimirum 21. 22. 23 24 ducantur parallelæ ad Q I. Assumatur deinde arcus 19 12. & transferatur hinc inde, sitque ei æqualis 24 25. & 24 26: Sic arcui 20 13 fiat æqualis 23 28. & 23 27. sic fiat de alijs; perque puncta I. 26. 27. & alia vsque ad Q ducatur flexa, & rursùs per puncta L 25 28. vsque ad I, & erit superficies Q I L quinta pars superficiei, quę operit sphęroidem BAC, nempe quaram partem dimidię sphęroidis, vel totius conoidis.

PROBL. III. PROPOS. XXXIX.

Corpus Ellipticum in planum proijcere sectum Ellipsibus se inuicem superantibus.

SIcut corpus Ellipticum potest maximis Ellipsibus secari, & ideo inuicem æqualibus, vt in præcedenti propositione, sic, & ellipsibus, quæ à maxima ellipsi deficiãt, & tandem in circulare eius basim se constringant, vel si maximus ambitus, qui corpus ipsum circundet sit circulus, aliæ ellipses paulatim in minimam ellipsim decrescent, & hoc euenit quando ellipses partientes corpus ellipticum non sunt ipsi circulo elliptici corporis perpendiculares, sed maximę, vel minimę ellipsi, quę in dicto corpore describantur.

Sit ergo ellipticum corpus, vel quod sufficit eius dimidium BDC; diuidaturque quarta eius pars in quot partes libuerit, & ducantur à centro A rectę A 20. & A 21. A 19. & cęt. describanturque deinde ellipses dato diametro minori AB, & successiuè alio maiori, & maiori, vt A 23; deinde A 22. & cæt. Prima itaque ellipsis erit GFH, vel eius quarta pars dato diametro minori AB, qui sit FG, & maiori A 23. quæ sit HG, secundæ item pars FO dato diametro eodem minori AB eodem ac FG, & diametro A 22 eodem ac FG; Tertiæ quarta pars erit FM dato diametro maiori 21 A, & eodẽ semper minori, & idem agatur de diametro 20, & describetur ellipsis PN. Eruntque descriptę Ellipses, quæ corpus Ellipticum ex 19. Tract. 25. diuidunt. Super AB verò circulus DEK est, & ellipsis descripta super DC maiori axe ipsa est ellipsis primo proposita, cuius quarta pars est CB.

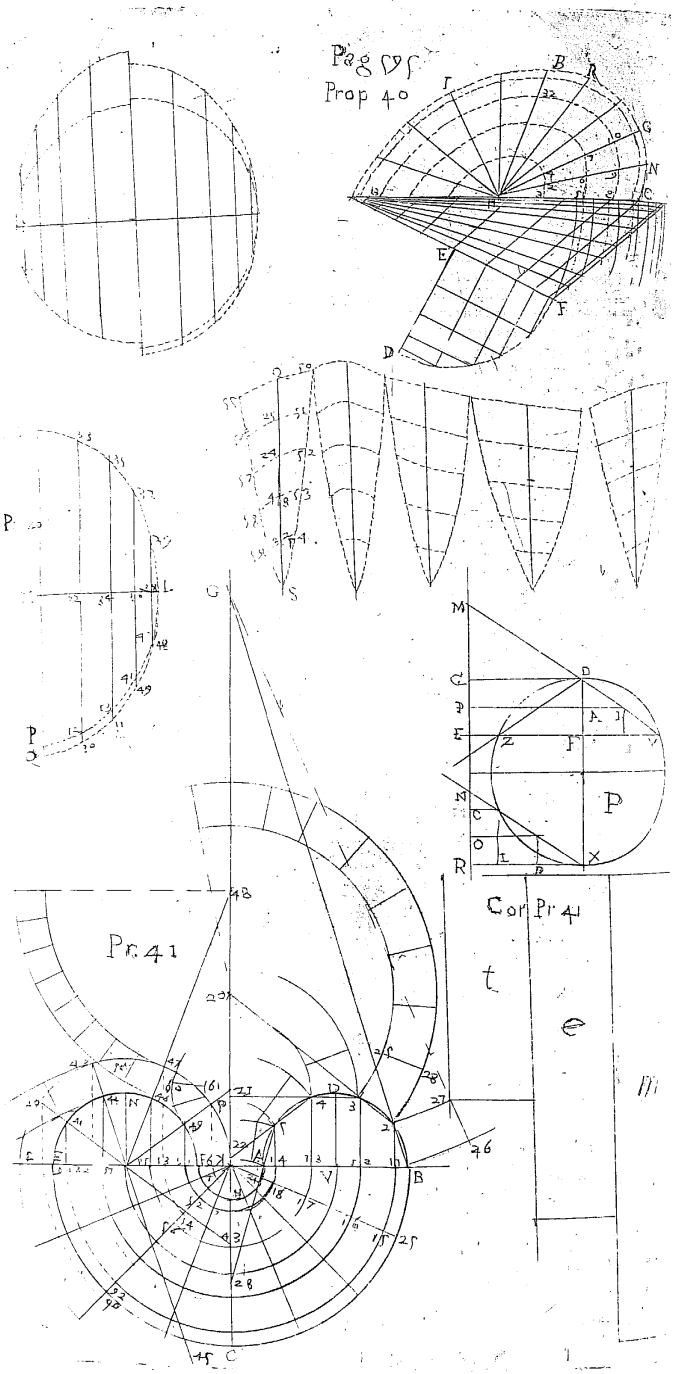
Istis omnibus Ellipsibus descriptis, Ellipses etiam describende sunt, quę oriuntur à planis Ellipsium parallelè ipsi DBC ellipsi maximę, circuli, cuius diameter AC, secantibus, & in partes equales diuidentibus, & transeuntibus per sinus, & sectionum vestigia ET, & 2 I. 19 9. & cęt.

Cum itaque istę ellipses sint parallelę eruntinuicem similes ex II. Tract. 25. quare poterunt describi, vt diximus prop. 72. Tract. 24. diuidendo DA, A 20. & A 21. &c. in partes proportionales ipsi DEK, quod factum est duplando semidiametros singulos A 20. & A 21. & alios, vt fiant diametri, & accommodando illos in triangulo DCK. Sic mensurata dupla 20 A in D 8 ducetur arcus 83, & trahetur D 3 ad punctum 3 in quo secat latus KC, sic dupla A 21 dabit longitudinem D 5. & arcus eo interuallo ductus 54 signabit punctum 4. ad quod ducetur D 4. & sic de alijs. Porrò triangulum DCK habet pro duobus lateribus diametrum DC Ellipsis maximum, & minimum D K angulum K rectũ claudẽtibus. A partibus, itaq; diametri circuli T 2. & 29 &c. parallelę descendãt, diuidentq; D 3, & D 4 in partes proportionales ex prop. 13. l. 6.

Singulę itaque partes proportionales in singulos correspondentes semidiametros transferantur sic pars 12 Y. transferatur in A 13. & y 15. in A 17. perq; puncta singulis in diametris impressa transeat flexa, quę constituet ellipsim 17. 29. 16. & ita agatur de alijs. Tandem in ellipsibus priùs factis inuenjantur sectiones istarum post remarum ellipsiũ, & quia transeunt per sectiones T E, & I 2. &c. ideo partes T 2. & 29. &c. transferãtur in equalem diametrum FP, & sint G 30 & 30 31. & cęt. ducãturque parallelę 30 32. & 31 33. & cęt. abscindentque ab ellipsibus portiones orbitarum æquales illis, quę intercipiuntur ab ellipsibus parallelis 17 29 16. & alijs similibus, & erit constructio preparata ad superficies elliptici corporis in planum proijciendas.

Sit itaque extendenda superficies, quę operit 20 A 19. Seorsim linea ducta Q S, ab aliquo puncto S, ellipsis FM facta super diametrum A 21 ellipsium inæqualium extendatur, sitque QS æqualis ellipsi FN, singuleque partes singulis V. g. F 34 parti F 36. & 34 35 parti 36 37. & cęt. Postea accepto interuallo 47 P ducatur arcus centro S; sic 13 26 in fig. priori ducatur alius arcus, & punctum in quo se secant sit 39. sic sumpto ab ellipsi NP interuallo P 45 ducatur centro S arcus, rursusque interuallo 26 40 alius arcus, & punctum in

quo



quo se arcus intersecant sit 42. Pari ordine sumpto interuallo 46 45 centro 39 arcus ducatur, & interuallo 29 41 centro 37. ducatur alius arcus, & punctum intersectionis sit 43. Postea centro 42 interuallo 47 48 arcus ducatur, & interuallo 29 17 alius arcus, & punctum, quo se secant, erit 44. & sic successiuè ages in alijs, obtinebisque puncta plurima, p quę ducta flexa s 51. & s 50 sicut, & per puncta 51 Q 50 concludent superficiem quęsitam 51 s 50. quę inter duas ellipses, quarum radij sunt A 20. A 19 intercipitur, si ergo idem agas de cęteris 19 A 23 habebis superficiem quartę partis corporis Elliptici in planum extensam. Hanc tamen propositionem quoad planitiem corporis spheroide inscripti, non omnino mathematicam esse agnoscimus, quia angulus, quem facit planum per subtensas ellipsibus parallelis V. g. ambitibus 17 29 41. & 13 26 40. & cum planis ellipsium, cuius axes sunt inequales V. g. cum ellipsi transeunte per HN axem non sunt recti, vt reposcitur ex prop. 34. Verùm adeo precisam, vt error sensibilis multiplicatis diuisionibus, quantum sat est, contingere non possit, cùm multiplicatis ellipsibus inequalibus parũ à recto differre possint anguli effecti à plano ellipsis arcus ellipsium parallelarum bifariam diuidente.

PROBL. IV. PROPOS. XL.

Ellipticum quodcumque corpus, in planas superficies extendere.

PRecedens propositio est communis omnibus corporibus ne dum quorum circulus basis est, sed etiam, quę vndequaque elliptica sunt, & quoad latitudinem, & quoad altitudinem, imo, & omnibus corporibus, etiamsi per axem non sectis etiam ouatis, & huiusmodi; pro qua re hic damus exemplum corporis ellipticiABC, sed per axem nõ secti origine ducentis ab ellipsi FED, quę sit p axẽ minorem HI ducta, quę maximã ellipsium per axem maiorem HG obtineat KML. Sit itaque describenda superficies, quę operiat portionem HGC. Datis ergo semidiametris EF ellipsis per axem minorem HI ductę, & HC describatur ellipsis KLP, deinde dato eodem diametro EF, & NH describatur ellipsis KML; Diuiso autem in partes, in quas PE diuisus est diametro KL ducantur ab illorum punctis terminantibus parallelę ad eorum circumferentias, & sint 32 33. 34 35. 36 37. sic ad alias ellipses 32 12. 34 13. vel 32 30. & 34 11.

Ducta itaque seorsum recta QS in illam transferatur ellipsis LQ equando partes partibus, vt sit s 22 parti L 48, sic 22 23 parti 48 49. sic 24 23 parti 11 30. & cęt.

Postmodum, vt in precedenti fecimus sumpta distantia 2 4 describatur arcus centro 22 puncto, dein de centro S interuallo L 39 describatur rursùs arcus, & vbi se decussant in 22 50 punctum imprimatur. Sic centro puncto 23 interuallo 6 7 describatur arcus occultus, rursùsq; interuallo 39.37. cẽtro pũcto 50. alius arcus occultus ducatur & vbi se secãt sit punctũ 51. Sic reperies pũcta notata 52. 53. 54. & per illa flexa curuabitur, & ita etiam ducatur flexa 55 s sumptis interuallis à partibus L 40. 40 41. ellipsis LP, & à centris 59. 58. 57. 56. 55. pro arcubus ducentis. Et pro arcubus à centris 22. 23. 24. 25. trahendis, sumptis interuallis 2 3. 6 5. 9 8. & cęt. & tandem per puncta tria 55 Q 54 alia ducatur flexa, & erit superficies 54 s 55. quæ desideratur, cui si fiant pro alijs interuallis quatuor, quæ remanent, similiter alię superficies V. g. pro parte EHG, & cęt. habebimus quinque superficies, quæ corporis ABC dimidiam superficiem operient; cui equales, similesque erunt, quę aliud dimidium circundabunt.

PROBL. V. PROPOS. XLI.

Cylindri in annulum flexi superficies inuenire planas.

SIt huius cylindri planum AHF, BCE, semicirculus autem ADB; oporteatque superficies reperire planas eius rotundę, & circumflexę superficiei equales.

Diuidatur semicirculus ADB, in quot libuerit partes V. g. 5. perque puncta terminatiua rectæ ducantur vsque ad perpendicularem CHG, vsque quo necesse erit, extensam; sitque prima B 2 G, secũda 2 3 20 tertia, 3 4 21, quarta 4 5 22 quinta 5 A 23. Facto autem centro puncto, in quo secant, vt in G interuallo GB ducatur arcus B, 26; & rursùs eodem centro interuallo G 2 ducatur arcus 2 27. & sic fiat de alijs, pro vt supra docũimus, agentes de sphęris propos. 1.

Vt autem terminentur, ducantur perpendiculares 2 11; 3 12. & cęt. & à centro K ad singulas extenso circino ducantur arcus B 25. & 11. 15. & 12 16. & 13 17. & cęt. vsque ad A 24. deinde mensuretur arcus B 25 super arcum B 26. sic arcus 11 15 super arcum 2 27. & ducatur linea 26 27 ad centrum G: omnino enim per centrum G transire debet, & erit superficies 2. 27 B 26. quę iminet sicui 11 15 B 25.

Rursus arcui 11 15 adequabitur arcus 2 28. & arcui 16 12 arcus 3 29. ductaque recta 28 29 versùs centrum 20 terminabit superficiem 3 29 2 28. quę iminet sicui 16 12 11 15. & ita de alijs, quibus replicatis quinquies quantum numerus partium arcus BCE requirit, erunt tot, quot semiannuli quadrantem AHCB operient.

Sed si quis optaret hunc annulum conuaum, & vellet cognoscere superficies coniunctiuas, quę partes secundum annuli crassitudinem copulant, id prestitimus ad aliam partem sinistram. Ducto itaque semicirculo ENF alius semicirculus ducetur LMK, quorum interuallum MN crassitudinem annuli ostendet; quibus in quinque partes diuisis per earum partium puncta terminantia ducentur rectę ad perpendicularem CHG; talis est LEK, & 40 41 43. atque 42 44 45. & 46 47 48. & 49 50 21. Facto autem centro in puncto 21 ducatur arcus interuallo 49 21. & rursus arcus 50 21; Sic facto centro in puncto 48 arcus ducetur interuallo 48 45. & rursus alius 48 47. & sic de cęteris qui arcus ita terminabuntur.

Ducentur enim perpendiculares à punctis, à quibus educti sunt, nempe 51 49. 47 53. & alijs ad LK, & à punctis; in quę cadunt centro A arcus describentur, vt 6 7. & 51 52. & 53 54. & 55 56. & cęt. qui arcus transferentur in arcus priùs deductos, sic arcus 6. 7 æquabitur arcui 50. 61. sic arcus 51 52 arcui 49 62. & ducta recta 62. 61 ad centrum 21 dabit superficiem, quæ requiritur coniunctiuam grassitudinis B K 59. 50 cum altera grassitiei parte 49. 50. 46. 47. & sic agendum in

alijs, vt ex delineatione satis, superque constat.

Ratio verò huius propositionis est eadem ac expens. 3. de superficiebus sphærarum in planum redigendis per superficies segmentorum conicorum: siquidem CB V.g. circumducta secundùm circulum B C E efficiet conum ex defin. 1. tract. 24. quare 2 B erit segmentum conicum, vnde, & superficies inter eius ambitus 2 27. & B 26 ex prop. 24. tract. 31. comprehensa erit superficies frusti conici: Siquidem certum est ex prop. 24. tract. 31 sectorem diametro GB ductum, cuius peripheriæ portio æquetur circulo BCE æquari superficiei coni, & sectoris illius partes partibus superficiei conicæ; ideo etiã sectoris portio B 26 G equabitur coni portioni, cuius ambitus B 25. & latus BG, & sic dicas de sectore 2 G 27. quod equetur superficiei coni, cuius latus 2 G, & ambitus II 15, quo dempto à sectore BG 26 remanet superficies 2 B 27 26 æqualis residuo conicæ superficiei, cuius arcus inferior sit B 25. & superior II 15. & altitudo B 2. Id autem dicendum est quoque de alijs.

COROLLARIVM.

HInc intelligi potest, quod superficies annulum circũuestientes tantò sunt maiores, quę sunt vltra XD diametrum perpendiculari M N parallelum, quantò minores sunt, quæ sunt citra DX, vt in figura P: Nam si sumatur DY æqualis arcus, & signetur in XT, & ducatur XTN erunt parallelæ MY, & NX ex propos. 27. lib. 3. Cor. 1. Quare cum NM, & XD sint parallelæ, MD, & NX erunt æquales, ex 33 lib. 1. Quare MY superabit NX linea DY quantùm NT deficit ab NX æquali linea TX.

Ducantur verò à punctis medijs subtensarum I, & H lineæ NM normales IP, & OH, & quia sunt triangula æquiangula DIA, & XHB, vtpote effecta à parallelis ex prop. 4. lib. 6. erit DI ad IA, vt HX ad BX, verùm DI æquatur lateri HX, ergo AI æquabitur ipsi BX. Igitur OH æqualis ipsi BR tantùm deficiet ab RX æqualis ipsi PA quantùm PI accrescit super PA. Si ergo MY intelligatur circumuolui, & fieri conus, sicut NX, erit BY semidiameter, & RX, vt DY, & TX altitudines frustorum æqualium superficierum conicarũ, & LX, & FY annulorum planorum altitudines, & circuli RB ducti, & PI radij intermedię peripherię latitudinẽ plani annuli bifariam, & circulariter diuidentis. Rectangula autem erecta ex latere ipsorum mediorum circulorum æquali ex 12. tract. 30. & altitudine, sunt annulorum planitiei æqualia. Quare cum ita sint circumferentiæ, vt diametri, & diametri se superent ea ratione, vt quanto RB est minor, quam RX, tantò sit maior PI; etiam rectangula æqualis altitudinis LX, vel FY annulorum, sed circumferentiarum, quarum vna ducitur radio RB altera PI se superabunt eodem modo. Nempe si fiat rectangulum e ex LX, & ex circumferentia ducta radio RX, & rectangulum r ex LX, & circumferentia ducatur radio DH, & rectangulũ m ex circumferentia ducta radio PI, & LX, vel FY, cum se referant, vt altitudines ob æquales bases ipsis FY, & LX, & ideo inuicem, idest vt peripheriæ, nempe vt diametri ex 33. lib. 6. erit maius m, quàm e tantùm, quantùm minus est t, quàm e; quare, & annuli probati ę quale prop. 12. tract. 30. illis rectangulis tales erunt.

Quare, & segmenta conorum, quæ constituuntur ex peripherijs æqualibus ex 24. Tr. 31. nempe frustum conicum ex circumferentia æquali circumferentiæ ductę radio EY extimæ, & ex radio DG intimę, sicut, & frustum ex TX constituitur ex peripheria æquali ex CH intimæ, & ex radio RX extimæ, vnde ex Coroll. propos. 12. tract. 30. erunt eiusdem altitudinis ac rectangula N, & T, & equalis basis inuicem TX, vel DY; vnde respectum rectanguli e, & ipsius altitudinis DY tantùm decrescet frustum ex XT quãtum augetur frustum ex DY; Quod & debes fateri de frusto DZ, vtpote, quod sit latus coni æqualis cono NX.

TRAC-



TRACTATVS XXXIII.

De inscriptione, & circumscriptione Solidorum.

ANtequam ad ipsorum corporum trutinandam soliditatem accedamus, oportunum fuit inscriptionem corporum quinque regularium in sphæra, & omninò necessarium quorumcumque corporum in globosis descriptionem attingere, vtpote quod talium corporum cubatio maximè ab hac inscriptione dependeat; Et quia simul agitur de proportione laterum corporum inscriptorum benè precedit soliditatis cognitionem ipsa laterum doctrina; cùm priùs se se offerant intellectui latera cognoscenda, quàm ipsa ab eis comprehensa soliditas.

EXPENSIO I.

De principijs.

PRiùsquam ipsam rerum soliditatem attingamus priùs definitiones, quæ ad corporum solidorum cõstitutionem faciunt; oportet exponere.

DEFINITIO I.

Solidum est, quod longitudinem, latitudinem, & crassitudinem habet.

DEFINITIO II.

Similes solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine æqualibus continentur.

DEFINITIO III.

ÆQuales solidæ figuræ sunt, quæ similibus planis multitudine, & magnitudine æqualibus continentur.

DEFINITIO IV.

Solidus angulus est plurium, quam duorum planorum angulorum in vnum punctum inclinatio.

Sic superficierum PBE, & PEF, & PBC, & PCF in punctum P inclinatio vocatur angulus solidus. vt in fig. Def. 6.

DEFIITNIO V.

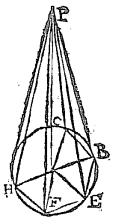
PYramis est figura solida, quæ planis plusquam duobus continetur ab vno plano ad vnum punctum constituta.

Quare si angulus solidus P habeat superficies suas, quibus clauditur ab aliquo plano, V.g. CBEFH incipientes, & in punctum P terminantes pyramis dicetur, quæ, & trium planorum, & quatuor, & quinque, & sic in infinitum sicut, & solidus angulus potest constitui.

Et hinc est, quod si solido alicui angulo substernatur basis plana, quod illa superficies tot lateribus terminatur, quot planis angulus continetur; cum enim superficies, & plana angulum continentia basim planam ei subtensam terminẽt, tot rectas lineas habebit terminantes, quot erunt ipsorum planorum sectiones in basi factas.

DEFINITIO VI.

FIgura solida planis superficiebus constans in globosa inscripta dicitur cum, vel anguli superficierum, vel solidi tangunt alterius superficiem.



Sic figura solida PBEFHC in cono inscripta dicitur, quia omnes eius anguli tangunt conum, nempe anguli solidi, vt BE FP, & superficierũ V. g. superficiei BPE secundũ lineã cùm FPE. Sufficit autem pro diuersitate corporum cõuexorum, vel quod anguli superficierum, vel quod anguli solidi tangant.

EXPEN-

EXPENSIO I.

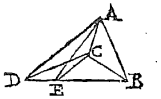
De solido angulo.

ANtequam solida ipsa pertractemus, de solido angulo est agendum, cum enim similitudo solidorum, ne dum à proportione laterum. Sed & ab angulorum solidorum æqualitate dependeat si non cognosceremus anguli solidi naturam, neque solidorum proportionem percipere possemus.

THEOR. I. PROP. I.

Etiam, si solidus angulus tribus tantùm angulis planis contineatur, duo quilibet anguli reliquo sunt maiores.

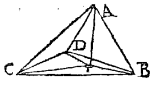
*PRobatur. Nam si aliquis angulus planus in angulo solido ABCD est maior, vel æqualis duobus reliquis. Assignetur, & sit BAD, à quo demantur angulus BAE æqualis angulo BAC; remanetque reliquus EAD, vel maior, quã DAC, vel æqualis. Remaneat primo æqualis angulo CAD; Fiat latus EA lateri CA æquale; substernaturq; basis plana ECDB, & fiet ex 22. primi triangula æqualia; nimirũ EAD triangulo ACD ob latus idem AD, & æqualia crura EA, & AC, cũ sint anguli DAE, DAC dicti æquales. At EEA triangulo BAC ob latus idẽ BA & crura EA, & AC æqualia: cum sint anguli apud A effecti æquales. Quare basis quoque BC esset æqualis basi BAE, & basis ED basi CD. Non fieret ergo triangulum BCD basis anguli solidi. Nam ex 20. primi oportet duo crura trianguli reliquo esse maiora omnifariam sumpta, & sic pyramis triangularis non daretur, quæ basim triangularem habet, & verticem tribus angulis planis contentam, & hinc neque BD maior esse potest BC, & CD cruribus eadem ratione. Vnde nec angulus BAD potest esse maior angulis BAC, & CAD.



THEOR. II. PROPOS. II.

Omnis solidus angulus sub minoribus, quàm quatuor rectis angulis continetur.

*SIt angulus solidus ABCD. Dico angulos eius planos BAD, DAC, & BAC, vel si plures sint esse minores quatuor rectis. Quod, vt probetur, determinentur omnia latera AB, & AD, & AC, & substernatur basis BDC, in quam à puncto A in sublimi cadat ex prop. 10. Tr. 22. perpendicularis IA, & ab angulis B, D, C ad eius contactũ I ducantur BI, & ID, & IC, eruntq; anguli tres DIC, & DIB, & BIC æquales quatuor rectis in plano BDC perpendiculari ad IA Cor. 1. pr. 12. lib. 1. Sed ex propos. 21. præcitati tract. angulus DAC ab obliquo plano effectus est minor, quàm DIC, & sic BAD minor, quàm DIB, & pariter BAC minor, quàm BIC. Ergo omnes simul erunt quatuor rectis minores.

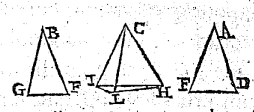


THEOR. III. PROPOS. III.

Si fuerint tres anguli, quorum duo, vt libet assumpti reliquo sint maiores, poterit ex illis angulus solidus constitui.

*PRobatur ad hoc, vt constituatur angulus solidus necesse est, vt basis plana illi angulo possit substitui, quæ saltem triangularis sit: Sed si anguli 2. sint maiores reliquo, habebũt etiam duas bases maiores reliqua: Ergo ex illis tamquam ex lateribus planum triangulare constitui poterit, quod angulum solidum substernat.

Quod verò duo anguli maiores reliquo simul sumpti habeant etiam bases simul sumptas maiores reliqua ostenditur.



Sint anguli tres A, B, C, quorum duo A, & B reliquo C sint maiores. Dico etiam bases DE, & GF simul sumptas reliqua HI esse maiores. Nam primo si vnus ex duobus ipsorũ est maior, vel æqualis ipsi ICH constat, & basim sub æqualibus cruribus contentam, vel esse æqualem ex 22. primi, vel esse maiorem ex 24. eiusdem, & ideo addita altera basi ambas reliqua esse maiores.

At si ambo anguli seorsim sumpti sunt minores angulo reliquo factis omnium angulorum æqualibus cruribus, & suis basibus DE HI, FG ductis, in triangulo reliquo HCI detruncetur angulus LCH æqualis angulo A; remanebit angulus residuus LCI minor altero EBG, cùm duo A, & B hoc toto HCI præsupponantur maiores ex Thesi.

Basis verò HI basi DE, & LI basi minor erit eò, quòd HL sit æqualis DE ex prop. 22. primi ob latera æqualia HC, & CL lateribus DA, & AE, & angulum comprehensum ab ipsis æqualem, at basis LI ex 25. lib. 1. minor basi FG ob angulum minorem LCI angulo FBG, & latera æqualia LC, & CI lateribus FB, & BG. At basis HI est minor cruribus HL, & LI ex 20. lib. 1. Ergo HI erit minor basibus DE, & FG simul sumptis. Vnde ex illis angulis angulus solidus constitui poterit,

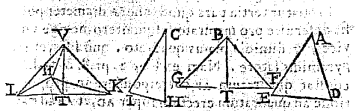
PROBL. I. PROPOS. IV.

Ex tribus angulis planis, quorum duo quomodocumque assumpti reliquo sint maiores, solidum angulum constituere; oportet autem illos tres angulos quatuor rectis minores esse.

*SInt tres anguli in fig. A, B, C minores quatuor rectis, & quorum duo, vt vt assumpti reliquo sint maiores, & fiant ei crura æqualia subductis basibus DE, FG, & HI. Electo verò quolibet triangulo, ad eius basim V. g. ab basim FG in triangulo FBG ducatur perpendicularis BT. Deinde ex basibus

basibus DE, FG, & HI constituatur triangulum KNL, & diuiso KL, vt est æqualis basis FG in T, ducatur NT, fiatque triangulum NTV ex perpendiculari TB crure EA, & basi NT, cuius latus TV perpendiculariter insistat lateri KL, & secet in NT ex prop. 21. Tract. 22. Deinde iungatur KV, & VL. Dico quòd sit factus angulus solidus constans tribus angulis planis datis A, B, & C.

Probatur. Nam, quòd ex tribus basibus possit triangulum constitui, constat ex hypothesi, in qua supponitur duos angulos fuisse datos maiores reliquo; Quare, & bases, vt prop. anteced. probatum est; Quòd autem ex tribus quoq; similrum perpendiculari TB latere EA, vel quolibet illi æquali, & NT possit triangulum componi.



Probatur. Nam aut NT est maior, quàm TL, vel minor, vel æqualis. Sit primò maior. Quia ergo ex TV, LV, & LT cõponitur LVT triangulũ, LV, & LT erunt maiora latera, quã VT, vnde tantò maiora erunt TN maius ex Hyp. quã TL, & NV æqualis ipsi VL sc. ipsi AE, vel æqualis GB, Aut NT erit minor, quã TL, at TV, & LV sunt maiora, quam TL, ergo tantò maiora latera erunt ipsa VT, & NV æqualis ipsi VL reliquo NT, Aut erit æqualis NT, & LT; & ita si TL, & LV est maior, quã VT, etiã maior erit NT cũ ipsa NV æquali VL, quam TV, vnde ex ipsis NT, TV, & NV poterit componi triangulum NVT. Quod verò ita super NT constituendum sit, vt TV cum ISK faciat angulos rectos docuimus prop. 21. tr. 22. intersectionum.

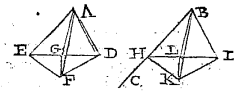
Quod tandem omnes anguli ad V nimirũ KVL, & KVN, & NVL sint æquales, singuli singulis assignatis C, B, A, ostenditur. Nam basis KN est æqualis ex constructione basi HI, & crus NV item ex constructione cruri EA, & ideo æquali HC. Crus quoque alterũ KV est æquale itẽ cruri FB. Quod ostenditur, nam TV crus perpendiculare ex cõstructione est æquale perpendiculari TB, & KT cruri FT, & anguli apud T comprehensi à dictis cruribus æqualibus ex cõstruct. ambo recti; Ergo ex pr. 22. lib. 1. basis KV basi FB, & æquali IC erit æqualis, vnde triangulum KNV erit æquale triangulo HCI, & triangulum KTV triangulo EBT, & altera medietas TVL alteri medietati TBG, & crus LV cruri GB, vel æquali EA secundi trianguli. Basis verò NL basi DE ex hypothesi est æqualis, & crus NV cruri EA, vel æquali DA. Ergo triangulum ex 23. l. 1. NVL triangulo DAE æquale, & sic omnia triangula KVN & NVL, & KVL singula singulis assignatis erũt æqualia; quare, & anguli ad V singuli singulis B, A, C æquales erunt.

PROBL. II. PROPOS. V.

Ad datam rectam lineam, eiusque punctum, angulum solidum constituere solido angulo dato æqualem.

*SIt angulus solidus A, cui constituẽdus sit æqualis angulus solidus B in data linea BC. Ad triangulum planum ADE ab aliquo puncto lineæ AE V. g. ab F dedacatur perpendicularis FG, & per G punctum transeat recta DE.

Deinde ex BC detruncetur BH, æqualis AE, & ad punctũ B ex pr. 24 l. 1. constituatur angulus planus IBH æqualis angulo plano DAE; fiant verò æquales IB, & AD, connectaturque IH, & in HI sumatur segmentum æquale segmento GE, quod sit LH, ducaturq; BL, & à puncto L educatur plano triãgulo IBH perpendicularis LK, æqualis ipsi GF iconnectaturque recta BK. Dico *angulum solidum* B *tribus planis contentum* IKB, & IBH, & BHK *esse æqualem angulo solido dato* A.



Probatur, quia angulus IBH est æqualis angulo DAE, cruſque BH cruri AE, necnon, & crus IB cruri AD, ex prop. 22. lib. 1. basis IH erit æqualis basi DE, totumque triangulum IBH toti DAE æquale. Cùmque LH ex effectione sit æquale segmentum parti GE, erit etiam LB ex propos. eadem 22. lib. 1. æquale crus cruri GA; ast LK est æquale ex constructione cruri GF, & comprehendunt crus BL, & LK angulum rectum ex def. 2. tr, 22. intersectionum, erit quoque ex prop. 22. eadem lib. 1. basis BK basi AF æqualis; sic quia crus IL, vtpote residuum ex LH sit æquale residuo cruri GD, & LK cruri GF ex effectione æquale; anguluſq; cõprehensus rectus sit, erit basis IK basi DF æqualis ex dicta propos. 22. lib. 1. & eadem ratione KH basis basi FE: Cùm itaque triangulum IBK habeat latera singula singulis lateribus trianguli FAD æqualia, erunt IBK triangulum DAF triangulo, & KBH triangulo FAE æquale ex propos. 23. lib. 1. sed iam ostensum est triangulum IBH triangulo DAE æquale; Ergo omnes anguli plani constituti ad verticem B singuli singulis erunt æquales angulis planis apud A, & sic angulus solidus B angulo A solido erit æqualis.

COROLLARIVM.

HInc autem non erit difficile constituere, & angulum solidum pluribus superficiebus, quàm tribus contentum. Quia potest diuidi in tot angulos tribus superficiebus constantes, & illis exhiberi queunt alij anguli solidi æquales, qui deinde simul compositi æqualem angulum solidum pluribus, quàm tribus superficiebus constantem efficiant.

EXPENSIO III.

De descriptione Tetaedri in sphæra, & proportione laterum ipsius ad diametrum.

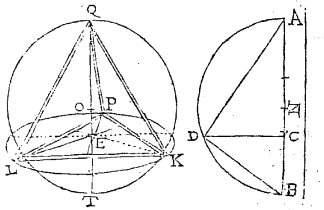
TEtaedrum est pyramis quædam quatuor superficiebus æqualibus, & similibus contenta habens quatuor solidos angulos tribus angulis planis clausos, & latera sex, de qua volumus ex Euclide docere, quomodo inscribatur sphæræ, & quænam sit proportio laterum, quibus continetur ad diametrum ipsius sphæræ.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. VI.

Tetraedrum construere, & data sphæra complecti, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sesquialter sit ipsius lateris pyramidis.

SIt datus sphærę diameter AB, qui diuidatur in tres partes, & sit tertia pars CB, facto deinde semicirculo centro Z super diametrum datam AB, à puncto C erigatur perpendicularis vsque ad circulum CD. Deinde alio in plano ad distantiam CD centro E fiat circulus, in quo triangulum æquilaterum describatur PKL, & à centro E ducantur radij EK, & EL æquales radio EP, & consequenter lineæ CD: super verò hoc planum erigatur normalis EQ æqualis rectæ AC, & connectantur extrema QL, & QK, & QP, & erit facta pyramis requisita.



De qua primò ostendendum est consequi omnia latera æqualia pro quo

Supponendum est ex prop. 1. Tract. 20. lineam KL crus trianguli æquicruris posse deseruire pro latere quadrati; quòd erit triplo maius; quàm quadratũ ex semidiametro KE, deinde ostendendũ est DA posse deseruire pro quadrato triplo maiori, quàm CD, quę est æqualis semidiametro EK, & ideo esse equalẽ cruri LK trianguli LPK circulo inscripti, cuius DC est radius. Hoc autem ostenditur, quia ex Cor. p. 16. l. 6. AC, & CD, & CB sunt tres ꝓportionales, & ideo quadratum ex prima AC, & media CD le respiciunt eadem proportione ex Cor. pr. 21. lib. 6. qua linea AC prima tertiam CB. Vnde simul composita quadrata ex lineis AC, & CD ad alterum ipsorum ex latere CD eandem dicent proportionem, quam compositæ lineæ AC, & CB, ad ipsam simplicem CB: sed quadrata hæc duo sunt æqualia quadrato super AD ex 11. lib. 2. Ergo istud quadratum AD ad quadratum CD eandem proportionem obtinebit, quam duo quadrata AC, & CD ad vnum CD, & quam AC, & CB lineæ ad simplicem lineam CB, & consequenter hoc quadratum AD erit triplò maius, quàm quadratum CD, cùm etiam AC, & CB simul faciant lineam triplò maiorem, quàm sola CB.

Vnde probatur pyramidem constitutam potiri lateribus inuicem æqualibus. Nam omnia sunt æqualia lineæ AD, & quidem tria latera KQ, & QL, & QP: quia triangula ipsis insistentia; vt KEQ sint æqualia triangulo ADC. Quòd habeant duo latera KE ipsi CD, & EQ ipsi AC æqualia, & angulum rectum ad E, & C claudant ex constructione. Latera verò KL, & KP, & LP, quòd sint latera quadrati triplò maioris; quàm KE æqualis lineæ CD sicut ostensum est progr. 1. AD esse latus quadrati triplo maioris, quàm CD. Vnde cum quadrata ex LK, & DA eidem quadrato ex CD eãdem triplam prodortionem dicant, erunt inuicem æqualia. Quare, & crura inuicem æqualia: nimirum AD, & KP, & alia crura PL, & LK.

Probatur secunda pars, quòd sphæra complecti possit. Nam producta diametro EQ, in T donec fiat æqualis diametro AB; sicut totum est equale toti, ita medietas BZ erit æqualis medietati OT. Sed hæc gyrata transit per vertices AD trianguli ADC. Ergo, & transibit per vertices KEQ, & PEQ, & LEQ triangulorum equalium predicto ADC.

Probatur tertia pars quod sphęræ diameter possit deseruire pro quadrato sesquialtero, nempe vna vice, & dimidia maius quadrato, quòd fieret ex Pyramidis latere. Nam ex Cor. 2. pr. 8. & 22. l. 6. constat quadratum AB correspondere in proportione ad quadratum erectum super AD, vt AB ad CA: quòd AB, AD, & CA sint tres continuè ꝓportionales, sed AB, & vna vice, & dimidia maior, quam AC, quòd sit partium duarum; illa verò trium ex construct. Ergo tale quoque erit quadratum AB; nempe trium partium ad quadratum AD duarum; AB Verò est diameter sphęræ; at AD latus pyramidis, vt ostendimus.

COROLLARIVM I.

HInc enascitur diametrum sphęrę posse efficere quadratum quadruplo maius, cum dimidio, quam semidiameter ambientis circuli triangulum basis.

Nam ostensum est diametrum sphęrę TQ vna vice, & dimidia in suo quadrato esse maiorem, quàm pyramidis lateris KL quadratum, ita vt si lateris quadratum sit 9. illud sit 6, & vt in supposito, lateris quadratum, excedit radij KE quadratum triplò, ita quod si quadratum lateris sit 6. hoc sit 2. Ergo quadratum diametri sphęræ QT ad quadratum radij KE se habet vt 9. ad 2. nempe quatuor vicibus illud continet cum dimidia.

COROLLARIVM II.

SEcundò perpendicularem à vertice pyramidis ad basim demissam esse duas tertias partes diametri sphęræ. Quia EQ est æqualis rectæ AC, & diametro TQ est æqualis rectę AD. At AC ex constructione duas tertias partes rectę AB comprehendit, & ideo quadratum diametri ad perpendicularis quadratum erit, vt 9. ad 4. nam proportio 9. ad 4. est duplicata 3. ad 2. vt videre est in istis numeris 9. 6. 4.

EXPENSIO IV.

De descriptione Octaedri in sphæra, & eius laterum ad diametrum proportione.

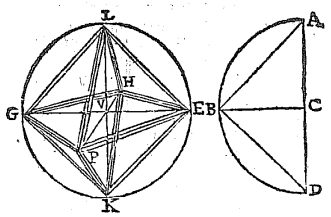
OCtaedrum est corpus octo triangulis equalibus similibus, & æquilateris constans, quæ efformant sex angulos solidos quatuor æqualibus angulis planis comprehensos, vt in fig. sequentis propos. satis apparet, & latera duodecim obtinet, quę angulos equales viginti quatuor planos efformant.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. VII.

Octaedrum constituere, & sphæra complecti, & demonstrare, quod sphæræ diameter potentia sic dupla lateris ipsius Octaedri.

SIt AD datæ sphærę diameter, quæ in C puncto bifariam sectus sit; erectaque perpendiculari CB, facto centro in C semicirculus describatur; coniungãturque AB, & DB rectis; eritque factum semiquadratũ ADB, quod sufficit. Seorsim autem aliud quadratum fiat EHFG, cuius latera EF, & FG, GH, & HE lateri AB sint æqualia, & diametri EG & FH diametro AD æqualia. A puncto verò V excitetur perpendicularis KVL, sintque portiones VK, & VL æquales AC, connectanturque eorum extrema octo rectis EL, & PL, & PK, & cæt. Dico primò esse constitutum Octaedrum.



Quod probatur ostendendo omnia eius latera æqualia: quia triangula tum iacentium superiora, tum inferiora ad centrum V. g. EVK, & LVP, & cęt. sunt æqualia ob æqualia crura EV, & VH, & VL ex effectione, & angulum rectum ad V; Vnde bases erunt æquales EL, & EP, & cæt. sicque omnia triangula superficialia, vt ELP, & cæt. æqualia latera possident, scilicet bases triangulorum ad centrum, & ideo æquales angulos ex 23. lib. 1.

Probatur secundò, quòd sphęra complectatur. Nam radij EV, & VG, & VL sunt equales rectę AC ex effectione; Ergo circumferentia quælibet interuallo VG centro V per eorum extrema transibit.

Probatur tertiò, quòd eius lateri sit duplus in potentia diameter EG, quia ex 11. lib. 2. equat in ELG rectangulo ex 28. lib. 3. quadratum basis EG quadrata laterum æqualium EL, & LG, vnde quadratum EG erit duplum quadrati lateris LG.

COROLLARIVM.

HInc educitur, quod si in eadem spęra descriptum sit Octaedrum, & Tetraedrum latus Tetraedri sua potentia comprehendere lateris octaedri potentiam, ideſt quadratum, quod poteſt efficere vna vice cum tertia parte, nam quadratum lateris pyramidis est 4. qualium 6. est quadratum diametri, & octaedri lateris quadratum talium partium 3. pyramidis lateris quadrati erit 4. earundem partium, octaedri vero lateris quadratum 3. nempe Pyramidis latus comprehendet latus octaedri potentiâ semel, & insuper $\frac{1}{3}$ ipsius lateris octaedri.

EXPENSIO V.

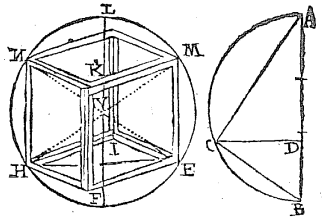
De Cubi in sphæra descriptione, & eius lateris ad diametrum ratione.

CVbus est figura solida sex superficiebus quadratis æqualibus constans, habens angulos solidos octo tribus planis angulis rectis conclusos, & latera duodecim.

PROBL. I. PROPOS. VIII.

Cubum constituere, & sphæra complecti, & demonstrare, quòd sphæræ diameter potentia sit tripla lateris ipsius cubi.

SIt sphęræ diameter quicumque AB; diuidaturq; in tres partes, & sit tertia pars BD, & à puncto extremo D excitetur perpendicularis, quam abscindat in C semicirculus super AB, connectanturq; AC, & CB.



Seorsum verò in aliquo plano fiat quadratum EFHI, cuius latera sint æqualia rectę CB & ab angulis eius excitentur perpendiculares ipsis lateribus æqualibus, quorũ exprema L, M, K, N rectis connexa efficient cubum EHML de quo loquitur prop.

Nam, quod sit cubus patet. Etenim ex effectione habet omnia latera æqualia, cum enim erectę, vt KF sint perpendiculares plano, erunt quoq; parallelę, vnde, & angulos rectos efficient cum lateribus in plano extensis FE, & c. ex prop. 7. Tract. 22. Quia verò sunt æquales latera quoque suprema MK erunt parallela, & æqualia lateribus EF, & perpendiculares lateribus erectis, vt FK: quare edm omnia latera sint æqualia, parallelaque, & omnes anguli recti cubus constitutus est.

Prob. secundò, quòd sphæra cõplecti possit. Quia dimidia omnium diagonalium, vt MH sunt æqualia, cum ipsę diagonales sint æquales. Vnde facto centro in communi eorum puncto medio V poterit ad interuallum VH describi circulus. Qui transibit per extremos angulos V. g. per H, & N, & cęt ita etiam alius per L, I, & cęt.

Probatur tertia pars. Nam diameter sphęre MH continet in suo quadrato duo quadrata lateris EM æquali quadrato lateris sibi æqualis EF, & diagonalis EH: diagonalis verò EH continet quadrata lateris EF, & FH ex 11. lib. 2. ob angulum rectum EFH. Ergo quadratum diametri continet tria quadrata trium laterum æqualium ME, & EH, & EF, quare vni eorum triplum est.

Est autem MH æqualis AB diametro. Quia quadratum AB ad quadratum CB, est quoque triplum. Siquidem est ad quadratum ex CB, ideſt ME, vt AB ad DB prima ad tertiam proportionalem ex Coroll. prop 21. lib 6. quę AB tripla est ad BD. Quare erit quadratum AB triplum quadrati CB, & ideo æquale diametro MH, cuius quadratum triplum est quoque quadrati EP, ideſt CB æqualis lineę.

COROLLARIVM.

HInc autem habetur diametrum cubi, seu sphęræ posse efficere quadratum æquale quadrato lateris cubi, & quadrato lateris pyramidis. Nam cùm; quadratum diametri sphęræ eiusdem contineat pyramidis quadratum vna vice, & dimidia erit vt 9. ad 6. & cùm idem contineat lateris cubi quadratum tribus vicibus erit, vt 9. ad 3. Quare composita hęc duo quadrata partium 6. & partium 3. efficient quadratum partium 9. quale est quadratum sphęræ, seu cubi: Vnde AC erit latus Pyramidis, & CA cubi, cuius diameter sit AB.

EXPENSIO VI.

De inſcriptione dodecaedri in ſphæra, & eius laterum ad diametrum proportione.

DOdecaedrũ est corpus duodecim pentagonis æqualibus æquilateris, & æquiangulis constans, simulque angulos solidos 20 comprehensos angulis planis tribus, & latera 30. consequitur.

PRORL. I. PROPOS. IX.

Dodecaedrum constituere, & sphæra compleċti, & demonſtrare, quòd dodecaedri latus irrationalis eſt linea, quæ vocatur Apotome.

CVm dodecaedrum duodecim facies habeat, & cubus 12. latera hinc est, quod constituatur delineando super vnum quodque latus, dodecaedri aliquam superficiem. Fiat itaq; quadratum b y basis electę ad placitum cubi, circa quem dodecaedrum constituendum est, secęturque eius semilatus r o secundum extemam, & mediam rationem in puncto n, ducaturque linea, m e, & u t perpendiculares, abscindatur n m, & g t æqualis maiori segmento n o, deinde coniungatur t r, & extendatur. Nam dico pro. 1. progress. quod impingit in punctum m.

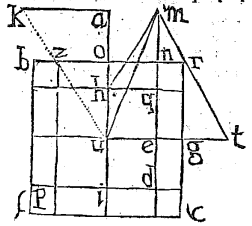
Probatur. Nam quia semilatus o r est sectum extrema, & media ratione, ita est r o, vel r g ad t g, maius extremum, vt n m idem maius extremum ad minus r n; sed talia quoque erunt latera triangulorum t g r, & n r m, quia erit ob angulũ rectum apud n, & g, & angulos ad verticem apud r, & m æquales, ita r g ad t g, vt n m ad n r. Ergo t r debebit transire per punctum m. Nam si transiret aliunde, non haberet eandem proportionem, quam habet r g ad t g siquidẽ si trãsiret supra, vel infra, esset maius, aut minus illud crus trianguli r n m, quã n m, & ideo linea n m, licet maior, aut minor, quã n m eidem r n eandem proportionem diceret, quam r g ad t g, quod esse nequit ex 7. lib. 5.

Progress. 2. Dico t m in r esse lineam sectam secundùm mediam, & extremam rationem, quod pari modo ostenditur. Quia eadem proportione referuntur t r ad m r, qua t g maius segmentum ad n r, vel e g minus. Ergo *componendo*, vt t r ad t r cum m r, sc. t m: sic t g ad t g cum e g, ideſt t e, vel æqualis n e tota linea extrema, & media ratione secta, sc. e g ad t g, quæ est, vt m r ad r t, cum sit, vt n r ad g t; quare cũ minus extremũ m r se habeat ad maius t r, vt maius ad totam t m, quadratum maioris segmenti ex prop. 11. lib. 6. erit æquale rectangulo minoris segmenti, & totius, vnde extrema, & media ratione secta erit.

Dico Progress. 3. Quod si ducta h m ex ea, & e m fiat triangulum rectangulum u a k, quod basis u k æqualis erit lateri quadrati r b; quod sic probo. Nam est æquale eius quadratum ex 47. lib. 1. quadratis crurum a u, & a k: hæc verò duo quadrata sunt æqualia quadrato lateris r b; Ergo quadrata lateris r b, & cruris u k æqualia sunt, & consequenter ipsa latera æqualia.

Probatur minor, nempe quadrata linearum a k, & a u esse æqualia quadrato lateris r b. Nam quadratum u a est æquale quadrato n b p d cum d n, & e m, ex constr. sint æquales; Quadratum verò ex a k, quadrato ex m h, quod æquale est quadratis ex m q, & q h; Quadratum verò ex q m est æquale quadrato g r o u, & quadratum q h æquat q e u h, quæ sunt æqualia gnomoni r d f, siquidem ex hypothesi quadrata duo e q u h æqualia existunt rectãgulis duobus y i. & i f, quod sint quadrata maioris segmenti n o. Rectangulũ verò q o est æquale rectangulo d g, vt patet, & rectangulum r e est pars quadrati r u. Vnde totus gnomon r d f secundum singulas partes æquat quadratum r u habens latus u o, vel q m, & quadratum lateris q h; quę duo quadrata æquant quadratum basis m h, vel a k, & hæc cum quadrato u a, vel æqualis b n æquant quadratum basis u k, & ideo erit æqualis lateri r b.

Dico Progress. 4. Quod si ex toto latere r b, & maiori eius segmento n z. Fiat triangulum isosceles f 2 3, & in puncto 4. & 8 secentur eius latera extrema, & media ratione, ideſt fiant 4 f, & 2 8 æquales basi f 2, ducaturque perpendicu-



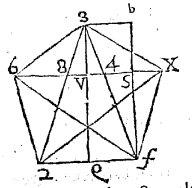
laris Q 3. & ei perpendicularis per puncta medię sectionis 4 8 æqualis hinc inde à puncto v mediętati lateris f 3, quod secabitur in puncto 4. extrema, & media ratione, minusque segmentum erit x 4. Nam ducta f b, parallela perpendicularj 3 Q, & b 3 basi f 2 parallela. Erit primo v 5 dimidium segmentum maius, vtpote æquale dimidio f Q, deinde probo 5 4 esse aliud dimidium minoris segmenti 43 & ideo duplum ipsorum æquari ipsi 3 f vel x 6. In triangulo b 3 f, ita f 3 est ad 4 f, vt basis b 3. ad parallelam 54. sed vt tota f 3 ad maius segmendum f 4 ita est f 4 maius segmentum ad minus 43, ergo vt est f 4 maius segmentum ad

43, minus ita est b 3. basis ad 5 4 sibi parallelam: sed b 3 est æqualis semibasi f Q, ideſt maioris segmenti f 4 medietati, ergo 5 4 erit æqualis medietati minoris segmenti 43, vnde cum dupla 4 f siet tota linea æqualis lateri 43. & cũ dupla vs æquali 4 f tota x 6 æqualis lateri quadrati r b in 1. fig.

Progress. 5. Et hinc patet, quod possit fieri pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ex 11. lib. 4. quia f 3 2 triangulum est quale reposcit prop. 10. lib. 4. cuius basis f 2 sit segmentum maius lateris 23. extrema, & media ratione secti. Nam quia 46 æquat f 2 parallelã, & f 2, æquat f 4 erit 46 f 2 parallelogrammum æquilaterum. Vnde diagonali f 6 angulus 4 f Q erit diuisus bifariam & ita erunt tres anguli æquales f 32. 3 f 6. & 8 6 f & ita fare in parallelogrammo x 8 f 2. Vnde omnes anguli erunt æquales, cum ostendentur æquales angulo f 32. Latera quoque æquabuntur. Quoniã iam tria 2 f, & f x, & 26 in parallelogrammis 28 f x, & 46 2 f super eandem basim existentibus ostensa sunt æqualia. Vnde remanet de duobus x 3. & 36. Quod patet, nam segmentum 38. & dictis progr. 4. æquat segmentum 86. Vnde, & anguli 6 3 8. & 36 8. subtensi ex prop. 14. lib. 1. æquabuntur, æquales autem sunt f 32, & 86 f ex dictis. Ergo toti anguli 436, & 36 f æquales erunt, sed inuicem 3 f 6 æquat f 32. Ergo reliqui æquales trianguli 3 f 6 reliquis inuicem æqualibus triangulis f 32, quare erit æquiangulũ, & isosceles; sed f 3 est idem in vtroque triangulo. Ergo ex 4. lib. 6. f 6 æquat 32. & 36 latus f 2. & eadem dicas de triangulo 3 x 2.

Dico progr. 6. Quod si ducatur m u hęc erit æqualis in prædicto quadrato semidiametro cubi, cuius latus sit r b. Nam erit eius quadratum triplo maius, quam quadratum semilateris cubi r o. Cumq; quadratum diametri cubi sit triplò maius, quam quadratum lateris ex prop. 10. h. Coroll. etiam semidiametri erit triplo maius, quàm eius semilateris; Vnde u m tripla potentiâ r o æquabit semidiametrum cubi, cuius semilatus est r o.

Quod autẽ sit triplo maius u m basis quadratũ, quam semilateris o r ostenditur. Nam est æquale quadrato ex e m, vel æquali n d, & quadrato ex e u facto in rectangulo triangulo m e u, hæc verò duo quadrata simul sunt triplo maiora, quã quadratũ ru ex semilatere r o; quoniã primò ub est iam æquale quadrato u r secundò si aliam partem accipiamus d o, cum occupet idem spatium quadrato e h quadrati r u, & rectãgulo h n erit idem quadrato u r, at cum e i quadratum æquetur rectãgulo e r etiam parallelogrammum d o æquabitur quadrato



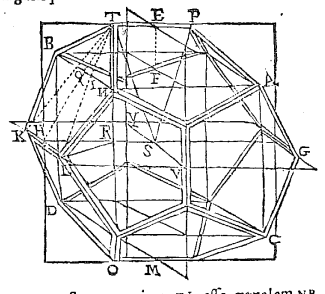
u r. Tertio u p est æquale rectangulo u u, cui si addamus quadratum alterius cruris e u æquale reliquo rectangulo r e quadrati prędicti r u fiet quãtitas omnis p e r u quadrato tertiò æqualis. Iam ergo ter adæquauimus duobus quadratis ex cruribus e m, & e u quadratum r u factum ex semilatere r o. Vnde, & quadratum u m istis duobus ex m e, & eu æquale erit triplo maius, quã quadratũ ex r o; Vnde erit semidiameter cubi, cuius semilatus r o.

Istis præsuppositis fiat cubus ABCD, secenturq; eius singulæ superficies bifariam planis, seu rectis GH, & cæt. quæ plana excedant plana cubi excessu n m, vel quantùm est segmentum n o; quod Interuallũ notetur, quoq; à linea E versùs T, & sit ET. Sic fiat vtrinquè omnibus superficiebus à pũcto, in quo se decussant V. g. ab E in P ab M in O, ab H in L, & K, & cæt. Deinde coniungantur puncta KB, & LN, & NT, & TB, eritque factum pentagonum, & si idem fiat singulis duodecim lateribus cubi, vt factum est in latere NB. Dico factum esse dodecaedrum.

Progress. 7. Quod vt ostendatur multa singulatim sunt demonstranda, & primò, quod pentagonum TNBLK sit in eodem plano. Nam sic non esset eadem figura, cùm non esset in eadem superficie. Nam ducta HT, quæ transeat per Q definet in T ex progr. 1. Ergo erit in eodẽ plano cũ latere cubi ex pr. 2. tr. 22. vtpote, quia, cum eo in Q se secat; linea verò LK lateri NB parallela est ex effectione, propteraque erit in eodem plano cum illa.

Quare, & latera TN, & NL, & cæt. prædictas coniungentes erunt in eodem plano, totumque pentagonum LNTKB in eodem plano erit ex pr. 2. T. 22.

Progress. 8. Probatur quod sit pentagonum æquiangulum, & æquilaterum. Nam, si ducantur TL, & TK, & NB sunt inuicem æquales, & se inuicem secant extrema, & media ratione. Vnde sunt lineę æquianguli, & æquilateri trianguli lateribus, anguliſque subtensæ.



Demonstroque primo TL esse æqualem NB. Nam ducta TR perpendiculari plano RLK, ductaque RL, hęc erit æqualis lineæ h m, vel a k, cum sit basis trianguli RHL æqualis triangulo f q m ob LH æqualem h q, & RH ipsi q m. At RT lineę u a ex constructione; anguluſque apud R rectus. Quare, & basis TL erit æqualis basi u k vel r b, & consequenter lateri cubi NB ex 3. prog. & 5. & eadem probatio est de linea FK: Deinde probatur, quod se secant extrema, & media ratione in I. Nam ex 2. prog. TH, vel mt, sic cũ latere NB se secat in Q: Ergo etiam TL, cum enim NB sit parallela lateri KL ita erit TH ad TQ, vt TL ad TI, sed TQ est minus segmentum ex prædicto progr. Ergo etiam TI, & consequenter IL maius. Cum ergo NB sit æqualis lineæ TL, & diuisa bifariam Q, parallelaque lateri LK, ipsa quoque secabitur secundum mediam, & extremam rationem, minusq; segmentũ erit NI ex 4. progr. Quare ex 5. pentagonum æquilaterum, & æquiangulum constituetur. Quod si replicẽtur singulis in lateribus cubi, cum in omnibus sit capacitas, constituentur duodecim

pentagona conficientia Dodecaedrum.

Progress. 9. Probatur. Quod sphæra possit amplecti. Nempe, quòd omnium horum pentagonorum anguli tangant sphęram amplectentem. Nam supra ostensum est progr. 6. m u esse æqualē semidiametro, quę nectit punctum m cum centro cubi u. Quod punctum distat, tum a b, tum ab n secundùm interuallum maioris segmenti; talis autem est linea PS, & TS, & cęt. quę angulos pentagoni cum centro nectunt, nam P, & T ex constructione distant à medio E, tum à superficie cubi quantùm est maius segmentum dimidij lateris extrema, & media ratione secti, & sic dicas de omnibus alijs, vt considerare est, quod etiam verificabitur de angulis, qui cubi angulis coincidunt cum, & cubi sit semidiameter.

Probatur quarto, quod latus horum pentagonorum sit Apotome, nam sphęrę diameter cum latere cubi est rationalis linea solùm potentia, vt supra ostensum est, cum triplum maius quadratum, quam latus possit efficere, & ideo ei sit, vt numerus ad numerum. Cum ergo latus cubi rationalis linea sit maius segmentum KL latus ex propos. 47. lib. 9. erit Apotome, vt ibi ostensum est.

COROLLARIVM I.

HInc ellicitur, quod si latus Cubi coniungatur cum maiori segmento ex propos. 47. lib. 6 element. efficietur minus segmentum, & latus cubi assumet sibi vices maioris, vnde fit, quod si aliqua linea secetur secundum mediam, & extremam rationem maius segmentum poterit deseruire pro latere cubi, segmentum autem minus pro latere dodecaedri.

COROLLARIVM II.

SEcundo ellicitur, quòd linea coniungens sex opposita latera parallela, qualia PT, & MO, sic LK alteri apud G, sic quòd est apud V alteri apud y, vt est linea GH, vel EM, secta sit secundum extremam, & mediam rationem cum contineat ex construct. latus cubi, & maius segmentū nępe medietatem hinc medietatē inde, vt est FE, qua cubum excedit.

EXPENSIO VII.

Icosaedrum sphæra inscribere, simulque omnium corporum regularium proportiones exponere, & numerum eorum demonstrare.

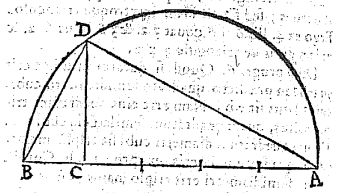
ICosaedrum viginti triāgulis planis cōstat equalibus, & similibus obtinens angulos solidos 12. quinq; angulis planis constantes, & latera 30.

PROBL. I. PROPOS. X.

Icosadrum constituere, & sphæra complecti, & ostendere, quod Icosaedri latus irrationalis linea sit.

FAcilior est hæc propositio, quàm præcedens, licet corpus pluribus superficiebus circumseptum sit. Ad hoc ergo, vt Icosaedrum constituamus; detur diameter aliculus sphæræ, quā illud volumus amplecti; & sit AB, & diuidatur in 5. partes, vnaque ex ipsis sit CB, à quo puncto C erigatur perpendicularis, quæ terminet in circulum in D; Ducanturque AD, & DB.

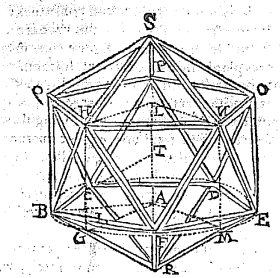
Nam dico AB posse quintuplum magis, quàm DB. Ratio est; quia quadratum totius AB est 25. partium quarum vna est quadratum ex CB factum; Verùm ex quadratis planis, quæ sint mensura quadrati AB, ex CB linea quadratum solùm 5. possidet. Siquidem, cùm ita sit AC crus maius ad CD crus minus in maiori triangulo ADC, vt idem crus CD maius in minori ad CB minus ex Coroll. prop. 16. lib. 6. erit CD media proportionalis, & sic eius quadratum erit æquale rectangulo ex AC, & CB quatuor partium, vnde vna cum quadrato CB faciet 5. quadrata: Istis verò duobus quadratis æquale est quadratum ex DB ex 11. lib. 2. Ergo hoc quadratum erit 5. partium respectu quadrati totius AB 25. partium quadratarum: Vnde cum duo harum linearum quadratæ se habeant tamquam numerus ad numerum ipsæ lineæ AB, & BD erunt rationales potentia tantum commensurabiles.



Quo supposito sic conficitur Icosaedrum. Semidiametro DB, fiat circulus BEDC, in eoque fiat pentagonū æquilaterum, & æquiangulū DCBEF ex dictis lib. 4. prop. 11. diuisaque circumferentia FB bifariam in G ducātur ad planum circuli facti perpendiculares GH, LA, & MN, & cęt. æquales ipsi DB primæ figuræ, vel GA radio illi æquali. Et harum vertices iungantur N, O, Q, H rectis. Fiatq; triangulum NLH parallelum plano circuli iam factis, extendaturque eius planum, & triangulis 4. ipsi NLH æqualibus à centro H additis compleatur pentagonum NOPQH equale pentagono inferiori, cum triangulum NLH sit æquale triangulo MAC, & consequenter æquali triangulo FAB pentagoni primo constituti, quibus præstitis iungantur anguli, & puncta pentagoni superioris cum inferioris angulis FH, & EN, & EN & HB, & cæt. Habebimusq; 10. triangula æquiangula, & æquilatera. Decem quidem, quia decem latera duorum pentagonrum æqualium perhibeant bases; æquiangula verò, quia æquilatera ob hanc rationem, quæ de vno ostensa pro omnibus ob paritatem inseruiet.

Probatur verò ex eo, quod singula omnium latera sint equalia lateri EB. Nam vt diximus propos. 4. Tractat. 20. huius latus pentagoni V. g. FB, vel NH efficere quadratum æquale quadrato decagoni FG, & exagoni, nempe semidiametri BA: Sed crus HF potest efficere quadratum æquale quadratis FG, & GH æqualis radio BA, ex constructa. vt docet prop. 11. lib. 2. ob angulum rectum apud G, ergo istæ lineæ FH, & FB, quæ æqualiter possunt, erunt equales, & idē valet de cęteris.

Istis iam 10. triangulis cōstitutis prolungetur AL in vtramq; partem in R, & S, vt pars addita LS, hinc, & AR. inde sint æquales lateri decagoni FG; Vertexque earum R, & S coniungatur cū angulis suppositorum pentagonorum, & erunt quinque triangula, vt NHS, & cæt. supra; quinque infra, vt FRB, aut DCR, & cæt. simulque decem, quæ habebunt omnia latera prædictis æqualia, & ideo illis omnino æqualia erunt ex propos. 23. lib. 1.



Probatur GH est ex constructione æqualis lineę GA, & ideo lineæ LH: verū SL: & AR lineę decagoni FG; angulus verò apud L, aut A rectus; vt ā gulus apud G. Ergo triangula LSH, & ARG, & FHG æqualia erunt. Quare bases quoque erunt æquales SH, & RB, & FH, & sic dicas de alijs. Cùm ergo omnia latera omnium triangulorum sint equalia erit constitutum Icosaedrum.

Probatur modo, quod sphęra possit amplecti, quod consequemur, si probauerimus lineas TS, & TB, & cęteras à puncto T bifariam SR partiēte procedentes ad angulos Icosaedri, esse æquales. Nam tunc sphæra omnes angulos continget.

Portio AL est latus Exagoni, quia radio ex AB æqualis, & LS decagoni ex constructione. Ergo ex prop. 3. Tract. 20. de circulo inscriptis, erit diuisa tota SA extrema, & media ratione, & LS minus segmentum, & medietas maioris TL. At ex pr. 35. lib. 6. Eucl. minus segmentum cum dimidio maioris potest efficere quadratum quintuplo maius, quam dimidium maioris. Linea verò TB est eiusdem proprietatis. Nam quadratū AB, vtpote, quod sit dimidio AT linea maior, vtpote æqualis ipsi AL est quadruplex ad quadratum lineæ AT. Vnde TB basis rectanguli TAB poterit efficere quadratum æquale quinque quadratis, quatuor cruris AB, & vni cruris AT. Quare poterit quintuplo magis, quàm AT. Vnde cum TS, & TB possint æqualia quadrata, nempe quintuplo maiora, quàm quadratum lineæ AT, inuicem erunt æquales.

Probatur deinde, quod tota RS æquet diametrum primæ fig. AB, & circuli ADB. Nam illa potest, vt in notabili quintuplo magis, quam DB; talis verò conditionis est SR. Nam vt dictum est eius medietas potest quintuplo magis, quam medietas TL, & ideo tota SR quintuplò poterit magis, quam tota LA æqualis ex constructa. ipsi DB, & ideo eorum quadrata erunt æqualia, vnde, & ipsæ æquales.

Probatur tandem, quod latus Icosaedri sit linea irrationalis, quod sufficit scire ne fruſtra laboremus ex nota diametro in inquirendo longitudinē illius adamussim, cum id fieri nequeat, quòd sit, & potentia, & longitudine incommensurabilis.

Nā vt probaui pr. 19. tr. 20. Latus pentagoni est incommensurabile diametro, tùm longitudine, tùm potentiā; sed diameter sphæræ RS est potentia commensurabilis diametro AB circuli, in quo inscriptum est pētagonum, vt dixi, ergo latus pentagoni FB erit incommensurabile quoque ne dum diametro AB circuli; sed etiam sphęrę SR, tum longitudine, tum potentia ex prop. 7. lib. 10. Elem.

COROLLARIVM I.

HInc educitur sphæræ circumscribentis Icosaedrum diametrum esse potentia quintuplum diametri circuli pentagonum ambientis ex cuius lateribus Icosaedrum est constitutum.

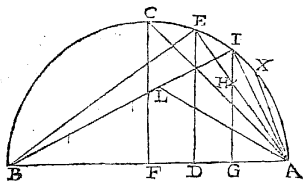
COROLLARIVM II.

Item colligitur sphæræ Icosaedrum ambientis diametrum esse compositum ex exagoni, & decagoni duobus lateribus circulo inscriptis eodem, cùm AL sit latus exagoni, at LS, & AR. latera decagoni.

PROBL. II. PROP. XI.

Omnium latera corporum regularium eadem sphæra describibilium exponere, & inuicem comparare.

DEtur diameter sphæræ AB, & semicirculus circa illum descriptus ACB; diuidaturque AB in tres partes, & sit tertia pars AD, ex qua ducta ad diametrum perpendiculari DE, ducatur AE, & EB. Nam. Dico *primo* EB *latus esse pyramidis sphæra describibilis*, cuius diamter AB.



Probatur. Quia sit eadem constructio, quæ prop. 6 h. & fig. 1. consequenter EB lineę quadratum erit sesquialterum ad quadratum AD, vt ex probat. tertiæ partis illius propos. constat.

Secundo ducatur à centro F perpendicularis FC, & ducatur AC, quam dico *esse latus Octaedri inscribibilis eadem sphæra, cuius radius* FC.

Probatur. Quia eius quadratum subduplum est ad diametrum, & quadratum diametri duplus ei est, vt 11. propos. lib. 2. diximus. Ergo est latus octaedri, vt ex probat. tertiæ partis propos. 7. h. constat.

Tertio dico AE *esse cubi latus eiusdem sphæræ inscriptibilis*. Probatur. Quia potentia diameter

est

eſt triplus ad quadratum AE; Cùm enim ita ſit baſis AB ad latus minus AE, vt ipſa AB baſis ad latus minus AD ob ſimilitudinem triangulorũ ex prop. 16. ex 21. lib. 6. erit quadratum diametri AB ad quadratum lateris AE, vt AB ipſa diameter ad AD; Eſt autem diameter AB triplus ad portionem AD; quare quadratum quoq; diametri triplum erit ad quadratum AE: quare AE erit latus cubi, cui triplus eſt diameter ſphæræ circumſcribentis, vt conſtat ex prop. 8. progr. 3. huius.

Quarto ſecetur latus AE extrema, & media ratione in H, eritq; maius ſegmentum latus AH dodecaedri, vt ex dictis prop. 9. huius conſtat. Tandem quintò diuidatur AB in quinque partes, & ſit quinta pars AG, & à puncto G ducatur ad diametrum normalis GI, nectaturque AI, & IB, aſſumaturque latus decagoni, & ei lateri decagoni ſit æqualis IL, & ducatur AL, *quam dico eſſe latus Icoſaedri eadem ſphæra inſcribendi*. Quia enim ex Coroll. propoſ. 4. lib. 6. AI, eſt media proportionalis inter AB, & GA, quod ita ſit baſis AB ad latus minus AI, vt ipſum latus, & baſis AI ad latus minus AG, erit quoque quadratum primæ, & diametri AB ad quadratum mediæ AI; vt ipſe diameter eſt quintupla lineæ AG; Ergo, & quadr. diametri AB ad quadr. lateris AI quintuplũ. Vnde AI erit diameter circuli, in quo pentagonum deſcribere oportet neceſſarium ad Icoſaedrum conſtituendum in ſphæra, cuius diameter AB, vt ex Coroll. propoſ. 5. huius conſtat, & quia latus Icoſaedri ex æqualis quadrati potens; tum quadrato prædicti diametri AI, cuius circulus debet ambibire pentagonum, tùm quadrato decagoni, conſequenter baſis AL in rectangulo AIL; potens, & quadratũ ex AI, & quadratũ IL erit latus Icoſaedri.

Quod verò attinet ad comparationem, non poſſumus comparare; niſi trium figurarum latera ad diametrum cum Icoſaedri, & Dodecaedri latera ſint omninò irrationalia: quare poſita diametro partium 6. in potẽtia, ideſt eius quadratum partium 6. Tetraedri latus erit partium 4. item in potentia; Octaedri lateris quadratum partium 3. Cubi verò lateris quadratum partium 2. quæ ex præcedentibus ſatis conſtant. Ideoque poſita diametro rationali, cætera quoque latera trium prædictorum corporum erunt rationalia; ſed quia eorum quadrata non adipiſcuntur eam proportionem, quam quadratus numerus habet ad numerum quadratum, cum reſpectu numeri 6. nec 4. nec 3. nec 2. ſit numerus quadratus, ideo omnia erunt longitudine incommenſurabilia, nimirum latus Tetraedri, Octaedri, & Cubi; cæterorum verò corporum latera irrationalia.

THEOR. I. PROP. XII.

Præter prædicta quinque corpora non poteſt aliud corpus in ſphæra inſcribi, quod conſtet ſuperficiebus æqualium; tum angulorum, tum laterum.

PRobatur ad ſolidi anguli conſtitutionem, tres ſaltem anguli plani requiruntur, qui tamen ſimul minores ſint quatuor rectis, vt propoſ. 2. huius. Illi ergo anguli, qui ad angulum ſolidum alicuius figuræ circulo inſcriptæ conſtituendum concurrunt, vel ſunt triangularis ſuperficiei, vel alterius ſuperficiei V. g. quadratæ, pentagonæ, ſexagonæ.

Si ſunt triangularis, vel tres anguli concurrunt, & triangulum habent pro baſi, & ſit Pyramis, Triangula verò æquilatera, & æquiangula angulos habent, qui ſunt $\frac{2}{3}$ vnius recti, ex pr. 17. l. 1. Cor. vnde tres compoſiti, vt in Tetraedro faciunt $\frac{6}{3}$, ideſt duos rectos vnde angulũ ſolidum conſtituere poſſunt, cũ ſint minores, quã quatuor recti. Si quatuor ſint erunt $\frac{8}{3}$, ideſt duo recti cum $\frac{2}{3}$, vt in octaedro; Si quinque erunt $\frac{10}{3}$, ideſt tres recti cum $\frac{1}{3}$ vnius recti, vt in icoſaedro erunt minores adhuc quatuor rectis, vnde ad anguli ſolidi conſtitutionem poterunt deſeruire, at ſi ſint ſex triangula æquilatera, & æquiangula eſſẽt $\frac{12}{3}$ anguli omnes in vnum ſolidum conuenientes cum ſint ſex, & ſinguli æquant $\frac{2}{3}$ vnius recti, vnde ſimul erunt $\frac{12}{3}$, nimirum quatuor rectos æquabunt, vnde ſolidum angulum non conſtituent amplius, & tanto minùs ſi ſint ſeptem, vel octo.

At ſi ſint anguli alterius figuræ cum minus, quam tres plani eſſe nequeant, qui ſolidum componant; oportebit videre an anguli illi ſimul ſint minores quatuor rectis angulis, ergo rectus quadrati poterit deſeruire, vt in cubo pro angulo ſolido, quia tres anguli recti non æquant quatuor rectos. Sic tres anguli pẽtagoni, quia illi nõ ſunt ex 11. l. 4. niſi $\frac{4}{3}$ vnius recti, vnde ſimul tres cõpoſiti facient $\frac{4 \cdot 6}{3}$, nimirum tres rectos integros, & $\frac{1}{3}$ at ſi plures horum angulorum, quam tres vellemus componere æquarent, vel excederent quatuor rectos, vt in pentagoni angulis; eſſent etenim quatuor anguli $\frac{2 \cdot 0}{3}$ nimirum quatuor recti, vnde angulum ſolidum non conſtituerent.

At angulus ſexagoni triplex non poteſt concurrere ad angulum rectum conſtituendum, neque alterius figuræ habentis plura latera, quam quinque quia angulus ſexagoni æquat vnum rectum cum $\frac{4}{3}$, vnde tres compoſiti quatuor rectos æquarent, angulus verò heptagoni tantò eſt obtuſior, vnde tantò minus tres eius anguli ſolidum angulum conſtituent.

Quare poterunt quidem alia corpora ſphæra inſcribi, ſed diuerſis ſuperficiebus conſtantia V. g. quadratis, & triangulis. Triangulis, & pentagonis, & cæt. de quibus ſuo loco cum prædictorum corporum conſtitutione fundentur, non videtur hic locus de ijs agendi ſed ſingulari tractatu.

EXPENSIO VIII.

De corpore multarum facierum in ſphæra inſcribendo.

AD cubandam ſphæram Euclidiano modo oportet oſtendere, quod ſit poſſibile corpus inſcribere ſphęræ, quod non tangat intimæ ſphęræ ſuperficiem, quod alio pacto, ac Euclides præſtabimus, ſimulque oſtendemus ſegmentorum inſcriptionem, quod videtur preſupponere Archimedeę ſphęræ cubatio.

PROBL.

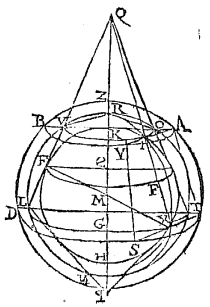
PROBL. I. PROPOS. XIII.

Inſcribere in ſphæra conorum ſegmenta, deinde tale multilaterum planis ſuperficiebus conſtans, vt ſolum tangant, ſaltem iuxta aliquas ſuperficies alterius ſphæræ concluſæ ſuperficiem.

SPæra exhibeatur ABPC, quæ concludat aliam ſphæram KHF, & oporteat in ea deſcribere corpus planis ſuperficiebus opertum, quod tangat ſphęræ cõcluſæ KEHF ſuperficiem. Diuidatur illud ſpatium in duas partes quaſcumque, & deſcribatur OVLN intermedia ſphęra radio maiori, quàm MX, deinde in hac intermedia ſphera OVLN, ſegmenta tangentia intimã ſphęram conorũ deſcribantur: Hoc autem facilè fiet; ſi ducamus MF radium ad intimiorem ſphęrã KFH, & ei erigamus tangentẽ LV, & à punctis V, & L ducamus quoſcumque parallelos OV, & TL inuicem inæquales, & per centrum ſphęræ, eorumque polos ex prop. 6. Tr. 21. p. 1. tranſeat axis MQ. Nam cum vnus parallelorum ſit maior alter minor tangens VL ad axem eorũ inclinabit, & cum illo coibit in Q cũ non poſſit ipſi parallelã eſſe ob paralleloroum, & ideo radiorum ipſorum inæqualitatem. Si ergo à puncto Q tanquam vertice linea QL intelligatur circumuerti circa parallelos VO, & LT, ex def. 1. tract. 24. deſcribet conum, cuius fruſtum erit ſphęra media ORVLN interceptum, & tanget in circulo EF parallelo ſphęram intimiorem, vt oſtendam.

Sic fiat de cæteris ſphęrę partibus ducendo æquales ipſi VL, vt eſt LN, & deſcribantur per extrema L, & N pararalleli prædictis LT, vel VO, & cætera fiant, vt priùs. Et ſic agatur de reliquis ſpatijs donec LV accõmodari poteſt in ſemicirculo RVLN ab axe diuiſo: quod ſi ſpatium reſiduum ſit minus, tunc ducetur quęcumque V. g. RV, quę conũ pariter deſcribet, ſed non contingentẽ ſphęrę intimiorls ſuperficiem, vtpote, quod VR minor ponatur, quàm LV, quę tangit.

Iſtis præſtitis intelligantur ſingulorum ſegmentorum conicorum baſes, & paralleli VO, LT, & cæt. extenti ſecare quoq; ſuperficiem ſphęrę exterioris, & deſcribere eam ſecando ex propoſ. 3. Tr. 21. p. 1. parallelos maiores DSC, & BYA. Deſcribatur ergo circa quodlibet fruſtum coni multilaterum cõtingens, ſaltem quoad plures ſuperficles, quod extimę ſphęrę includatur ſuperficie tali modo.



Ducatur MX radius ad ſphęrę mediæ ſuperficiem, & ei tangens CS. Per contactum autem X, & axem RP ducatur maximus circulus ex 16. Tract. 23. par. 1. & vbi ſecat parallelum VO in I erigatur alteri puncto I altera tangens YA, quę tangentes erunt parallelę, vtpote normales eidem plano circuli maximi BIX ex 7. tract. 22. Quare per illas planum AS tranſire poterit. Ductis itaque ſimiliter alijs planis per tangentes cæteras ſibi æquales, vel minores, quando æquales capere nequeunt in circulis parallelis ſingulis, donec in omnibus ſint ductę, erit corpus circa quodlibet fruſtum conicum circumſcriptum. Quod dico *tangere ad ſummum ſphęræ intimioris* KEHF *ſuperficiem*.

Probatur. Conicum fruſtum OVTL tangit ad ſummùm ſphęrę intimioris ſuperficiẽ KEHF. Nam VL fruſtũ rectæ circumducta formatur, quę circa parallelos VO, & TL gyratur, ſed illa tangit in puncto E. Ergo etiam cęterę omnes æquales interceptę inter parallelos circulos OV, & TL ſimiliter tangent, cùm æqualiter diſtent à centro M ex 16 lib. 3. omnium maximorum circulorum, & ideo ipſius ſphęrę. Quod oſtendetur alio modo. Nam per contactum E ducto parallelo FE ex axe QM deſcripto, hic erit in ſuperficie conica, quę æqualiter diſtat interualło E e radij à centro e, & axe ſuo MQ, & in ſuperficie ſphęrę, quę, & eodem radio E e diſtat ab axe ſuo ZM. Quare erit parallelus EF in contactu conicę ſuperficiei etiam intimioris ſphęrę KFEH. Non poteſt autem tangere alibi, quia Conica ſuperficies ex def. 1. Tract. 24. recta VL circumgyrata contexitur, quę tangit ſphæram ſolùm in puncto F ex effectione.

Cum itaque ſuperficies plana circumſcripta Conicis ſegmentis ex 11. Tract. 24. non tangat conum, niſi pęnes lineam XI, quæ tendit à Q vertice, & tangit ſphæram intimam tantùm ex effectione in punCto F ſequitur, quod planum SA cõtingat ſphæram intimiorem KFHE tantùm in puncto E, quod de alijs planis æqualibus fatendum eſt. Alia autem plana contingentia minora fruſta conica, quę non contingunt ſphæram intimam, neque ipſa contingent, & tantò minùs, ſi ea plana, neque contingant ipſa fruſta conica, quę ſphæram intimam, aut tantùm contingunt, aut nullatenùs contingunt.

COROLLARIVM.

COlligitur, quod eodem artificio poterunt ſphærę circumſcribi tum conorum ſegmenta, tum corpus quodlibet planis ſuperficiebus conſtans, quod non tangat alterius ſphærę circumambientis ſuperficiem. Nam ſphæra FHE eſt talibus ſuperficiebus circumdata, vnde ſi inter ſphæram eam circumdantem duę ſphæræ ZBPC, & BIXO intercipi intelligantur, & eadem operatio præſtetur corpus circumſcriptum non tanget amplexantis ſphærę maioris, quam ZOC ſuperficiem cum illam tantùm tangat. Corpus verò conicum circumſcribatur eodem modo, ac in propoſ. & ſi debeant ſegmenta conica adeo multiplicari, vt relinquant quantitatem qualibet data minorem id efficietur, vt ſequenti propoſ.

EXPEN-

EXPENSIO IX.

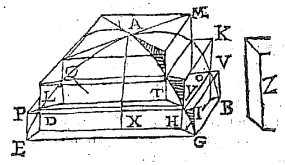
De inſcriptione, & circumſcriptione cylindrorum, vel quorumcumque altorum corporum; donec relinquant quantitatem omni data minorem.

CYlindrorum, vel Parallelepidorum corporibus globoſis ſolidis circumſcriptio, vel inſcriptio neceſſaria eſt ad cubanda multa corpora talis rationis: quare hoc loco nactl ſumus oportunam occaſionem hanc doctrinam tractandi, in quo agitur de inſcriptione corporum regularium in ſphæra.

THEOR. I. PROPOS. XIV.

Cuicumque figuræ ſolidæ curuilineæ, vel mixtilineæ tot ſolida inſcribi poſſunt, vel circumſcribi, vt relinquant ſolidas partes omni aſſignata ſoliditate minores, ſi tamen concedatur illam ſoliditatem ad ad quamcumque baſim redigi poſſe.

SIt figura ſolida curuilinea ABGE. Dico illi tot parallelepipeda poſſe circumſcribi, vel inſcribi donec relinquant quantitatem omni data minorem. Sit data quantitas Z, quæ ſit eiuſdem baſis, ac BE, vel ad eam redigi poſſit, & diuidatur altitudo XA datl corporis BGAE in tot partes donec parallelepipedũ malus omnibus EV ſit minus quãtitate Z. Quod facile fiet ſi altitudo AX ſubdiuidatur in tot partes donec remaneat altitudo ſolidi EV, minor quàm altitudo quantitatis datæ Z, quæ conceditur eiuſdem baſis, vel ad eandem baſim redacta ſit, ac baſis EB. Quadere erit minus parallepipedum EV, quam quantitas data Z. Sed omnia ſolida parallelepipedis cõſtantia, quę intus vacua ſunt, & ambiuntur circumſcriptis ſuperficiebus GP, & GV, & ex inſcriptis HD, & HO, & circumdant partim intra partl extra corpus ſolidum datum ABGE, vt EHV, cuius baſis EH, & HB, & LTK, & QTH ex conſtructione æquant EV ſolidum primum, ſiquidem vbi deſinit primum ſolidum maioris ambitus incipit ſecundi ambitus minor, & vnum intra aliud adaptari poteſt, Ergo omnia ſolida talia ſunt minora quantitate Z. Quamobrem tantò erunt minora quantitate Z ſolida, quæ tantùm circumambiunt, vel intus inſcripta ſunt, & corpori dato globoſo EAGB extra remanent, vt extrinſeca GIV EPG, vel GHO EHDintrinſeca: quæ proximè dimidio minora, quam tota GHIYEDLP. Quod Intellitur etiam ſi corpora ſolida circumſcripta annulis cylindricis conſtent, aut alterius cuiuſcumque figurę, vt ex te videre poteris.



TRAC-

TRACTATVS XXXIV.

DE SOLIDIS PARS PRIMA.

De ſolidis planis ſuperficiebus contentis.

VIſis corporum ſuperficiebus, & eorum inſcriptibilitate, modo ad ipſam corporum ſoliditatem eſt accedendum. Ordinique doctrinæ conſentaneum fuit, vt priùs lineas, ſuperficies, ſingulaſque exteriores corporum figuras, quæ oculis ſtatim obijciuntur, animaduerſioni quoque primæ occurrerent, quàm corpora, quæ iſtis inuolucris contecta ſolæ menti peruios ſinus admittunt, de quibus agit Euclid. 11. & 12. cuius præcipuas; & neceſſarias propoſitiones hoc Tractatu exponemus.

EXPENSIO I.

De Parallelepipedis.

PRima inter figuras ſolidas, & magis obuia eſt parallelepipedum; quo l obtinet oppoſitos angulos æquales, & plana oppoſita æqualia, eſtque veluti fruſtum trabis parallelis ſectionibus abſciſum. Cùm ergo à notioribus omnis cognitio incipiat, per huius ſolidi cognitionem ad aliorum corporum ſoliditates hauriendas acceſſus erit.

THEOR. I. PROPOS. I.

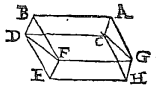
Si ſolidum parallelis planis contineatur, aduerſa illius plana parallelogramma ſunt æqualia, & ſimilia.

SIt planum ſolidum contentum parallelis ſex planis, nempe quatuor planis EG, FD, BC, & AH, & ſuperficie ſuperiori AF inferiorique CE. Dico primo *omnia plana; quibus ambitur eſſe parallela*.

Probatur. Terminantur etenim ex theſi planis parallelis ſuperficiebus, ideoque ſectiones ipſæ erunt parallelę ex propoſ.14. Tract.22. Sic planum GB terminatur parallelis planis AF, & CE, necnon. & parallelis planis AH, & BE, cum ergo ſectiones iſtæ terminent ſuperficies ſolidum ambientes ipſa ex def.35. Tr.3 erunt parallelogrãma.

Dico 2. Quòd erunt æqualia parallelogramma aduerſa. Quod patet: Nam cum aduerſa plana vt GE, & AD parallelis ſecentur, & terminentur, & parallelogramma fiat, oportet margines intercep-

tos HG, & CA, ſicut, & FE, BD eſſe æquales ex prop. 34. Elem.1. necnon eadem ratione GF, & AB ſicut, & ex HE, & GD: ſunt autem quoq ie eiuſdem altitudinis: quod ſint inter parallelas æquales HG, & CA, ergo ex propoſ.37.lib.1 erunt parallelogramma æqualia.



Dico 3. Eſſe quoque ſimilia. Quia enim latus CH eſt æquale lateri ED, & HG lateri FE: Ergo vt CH ad HG, ſic DE ad FE proportionatum erit: Angulus autem H æquatur angulo E. Nam ductis GC, & FD diagonalibus diuident bifariam parallelogramma æqualia GC, & FD, ex 34. lib. 1 quare diagonales GC, & GD erunt æquales. Quapropter triangula CGH, & FED erunt æqualia, cum latera, & baſes, ideſt diagonales obtineãt æquales. Ideoq; angulus H æquabitur angulo E. Propterea que ipſa plana aduerſa V. g. AH, & BE erunt ſimilia, cum conſequantur latera circa æquales angulos proportionalia.

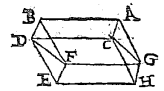
THEOR. II. PROPOS. II.

Si parallelepipedum plano ſecetur per diagonios aduerſorum planorum; bifariam ſecabitur ſolidum ab ipſo plano.

SIt ſolidum AE, cuius duo aduerſa plana, vt GC, & FD plano GD ſecundùm lineas diagonales GC,

& FD secta sint. Dico bifariam illud parallelepipedum sectum esse.

Probatur. Duo prismata GFAD superius, & GECD inferius habent plana similia magnitudine, & multitudine equalia. Ergo ex def. 3. Tr. 33. erunt inuicem æqualia.



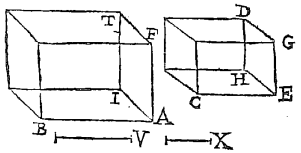
Patet autem Prismata obtinere plana similia. Quia triagula GCA huius, & HCG alterius sunt æqualia, & similia, & alia duo triangula FBD, & FED opposita similiter æqualia, similiaque sunt ex pr. 24. primi, vtpote, quæ in duo diuidant parallelogramma similia, & æqualia, vt supra ostensum est. Reliqua verò plana aduersa iam ostensa sunt æqualia, & similia GE plano AD, & AF plano CE; planum verò FDCG est cõmune: Ergo prismata erunt equalia, & similia CFAD, & GECD; cum constent planis æqualibus, & similibus.

PROBL. I. PROPOS. III.

A data recta linea dato solido parallelepipedo simile, similiterque positum parallelepipedum describere.

DEbeat à data linea AB describi parallelepipedum dato parallelepipedo CD simile, similiterque positum.

Fiat ad punctum A angulus solidus ex 5. Tr. 33. æquale solido angulo E, ita vt tres plani anguli apud A sint æquales tribus angulis planis apud E; deinde ex 12. lib. 6. Elem. fiat, vt CE ad EG ita sit in proportione ad aliam quãdam V latus AB; fiatq; lineæ V æquale latus FA: deinde fiat, vt EG ad EH; ita proportionatum sit latus AF ad aliam quandã X cui fiat æquale AI, habebitque ex *æquo* AI eam proportionem cum AB, quam EH cum EC. Reliqua verò latera aduersa istis fiant æqualia, & parallela & compleatur parallelepipedum; Quod dico esse simile parallelepipedo DC, & similiter ei positum.

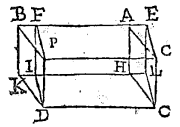


Probatur. Quia singula plana parallelogramma singulis sunt similia ob æqualitatem angulorum, & laterum proportionem eandem, sic angulus GEC est æquale angulo FAB, & latus EC eiusdem proportionis est lateri EG, ac latus AB lateri FA, quare ex def. 1. lib. 6. erunt hęc duo parallelogramma GC, & FB similia, & idem argumentum est de parallelogrammo HC, & IB ob angulos æquales ex constructione HEC, & IAB, & latera proportionalia; quia enim EC est ad EG, vt AB refertur ad AF, & vt EG ad EH ita proportionatur AF ad AI argumentando ex *æquo* ita quoque EC proportionem dicit ad EH, vt AB ad AI. Quare etiam hoc planum HC erit simile plano IB, & sic dicas de plano GH, quod eadem ratione assimilatur plano FI. Propter hoc & reliqua plana aduersa istis æqualia, & similia ex propos. 6. huius in parallelepipedo constructo erunt æqualia, & similia parallelepipedo dato CD.

THEOR. III. PROPOS. IV.

Solida parallelepipeda super eadem basi constituta, & eadem altitudine prædita, quorum insistentes lineæ in easdem rectas lineas terminent, sunt inter se æqualia.

EXibeantur duo parallelepipeda ABCD, & EFCD, quorũ basis sit eadẽ GD; & insistentes in basi lineæ GE, & GA, FB, & FF, &c. in eandem rectã EB terminẽt: Dico hæc parallelepipeda esse æqualia.



Probatur. Nam ex 25. lib. 1. Element. parallelogramma GAPB, & EGPF sunt æqualia, erunt ablato communi trapezio AGPF æqualia triangula GEA & PFB, quæ & sunt æqualia triangulis aduersis DIK, & LCH, vtpote residua æqualis trapezij HICD ab equalibus parallelogrammis aduersis; sic KF equale HE est ablato rectangulo IA cõmuni. Quare cũ, & planum DPBK sit æquale plano CG AH, & planum GLCE plano DPIF prismata PK, & GH concluſa dictis planis erunt æqualia ex defin. addatur ergo vtriſq; commune solidum trapezijs clausum AFCD, eritq; parallelepipedum ADCB, æquale parallelepipedo CDEF.

COROLLARIVM.

HInc emergit modus, quo facilè aliquod parallelepipedum æquale in basi, & in altitudine, sed dissimilis positionis ob inæquales angulos alterius angulI ad eandem positionem reducas nimirum faciendo eosdem angulos super eãdem basim intra eãdem altitudinem, sic parallelepipedum HKGD reducetur ad parallelepipedum EIGD; si pro angulo AGP fiat angulus EGP, & pro angulo AGC fiat EGC angulus.

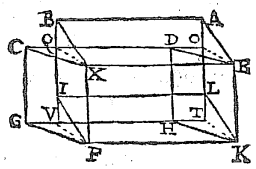
Quod si detur parallelepipedum æqualis quidem sed dissimilis basis ob angulos parallelepipedo inæquales; sed omnino eiusdem altitudinis; eodem modo ad similem basim reducetur: Nempe intra easdem parallelas EB, & GP mutando angulos. Sic parallelepipedi AKGD basis statuatur HCDK æqualis basi LCDI; sed dissimilium angulorum, ad hoc, vt fiat simills basi LCDI, opportebit trahere latera HC, & KD; ità quod cum CD faciant eosdem ãgulos hocq; modo totum parallelepipedum æquale iam alteri quantitate, fiet etiam illi æquale in angulis.

THEOR.

PROB. IV. PROPOS. V.

Solida parallelepipeda super eandem basim constituta, & in eadem altitudine, quorum insistentes lineæ non in ijsdem collocantur rectis lineis, inter se sunt æqualia.

SInt duo parallelepipeda AKBF, & DGEF, quorum basi eidem planæ EF insistant latera EA, & ED, & cæt. licet in diuersas parallelas AB, & DC terminent. Dico adhuc AKBF, & DGEF *hæc esse inuicem æqualia.*

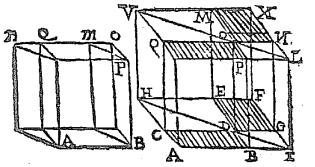


Probatur. Quia productis parallelis, ita vt se intersecent in T, V, O, Q punctis, & ductis lateribus punctatis fiet aliud parallelepipedum OVTF per insistentes rectas punctatas, quod erit æquale parallelepipedo AKBF ex præced. quod hæc duo super eandem basim EF insistant, & eorum latera vt FV, & FI, & cæt in easdem parallelas terminent nempe in VB, sic KT, & KL terminat in TA. Rursus hoc parallelepipedum modo factum, erit equale exhibito alteri DGEF, quòd quoque eius latera punctata, vt FV, & KT eijsdem parallelis TG insistant, vt faciunt KH, & FG, & sic de alijs. Ergo duo parallelepipeda exhibita parallelepipedo effecto eidem OVTF erunt æqualia, & consequenter inuicem. Quod verò punctata latera faciant parallelepipedum, patet, quia in parallelarum communem intersectionem terminent, vt satis ex se quilibet comprehendere potest.

THEOR. V. PROPOS. VI.

Solida parallelepipeda super æquales bases constituta, & æqualis altitudinis æqualia sunt inuicem.

BAses æquales, quæ exibentur, vel sunt diuersę quidem figuræ, & inequallium angulorum, vel sunt omninò eiusdem, vel sunt diuersæ figuræ, sed æqualium angulorum. Si sunt omninò similis, & æqualis figuræ, Id iam patet ex propos. 4. & 5. idem enim est, quòd sit æqualis omnino, & similis, & quod eadem. Quæstio ergo est differentis figurę, quę si est, & inequalium angulorum, vt sunt GDEF, & ABMN reducetur ad eosdẽ angulos ex Cor pr. 4. vt OP, & super eam fiet parallelepipedum eiusdem altitudinis, vt est ABOQ parallelepipedum, quod erit æquale exhibito iuxta ibi tradita. Collocentur ergo bases CB, & EG æquales, & iam similium angulorum tali modo, vt in angulo D se tangant, & latera CD, & DG in vnam rectam conueniant, & fiant recta CG. Nam, & in eãdem rectam conuenient latera BD, & DE ob angulos æquales CDB, & EDG ex 11. lib. 1. compleaturque parallelogrammum AHIF, quòd poterit fieri ex prop. 24. lib. 6. cum bases nigrę sint, & æquales, & similes quoque ob æquales angulos: Deinde super eas compleatur totum parallelepipedum, vt vides, ducaturque planum VHIL per diagonios, & ex prop. 28. h. erit diuisum totum parallelepipedum in duo prismata æqualia VAL, & VFL: sic etiam vt ex pr. eadem colligi potest prismata VCO, & VEO sunt æqualia, ob æqualia triãgula VMO, VQO, quibus sunt, planaque HEVM æquale plano QOCD, & QVCH æquale plano ODEM; planumque VHDO commune vtrisque prismatibus.



Idem dicas de prismate OBL, & OGL, quæ item sunt æqualia: Si ergo à prismatibus magnis VAL, & VEL æqualibus auferas primo duo prismata æqualia minora VCO, & VEO illud ab illo alterum ab altero, & rursùs duo alia prismata reliqua, quę item sunt æqualia OBL, & OGL hoc ab isto, aliud ab alio, reliqua ablatis æqualibus remanebunt æqualia, vt erant priùs, & sic parallelepipedum QOAB remanet æquale parallelepipedo DENX super æquales bases, sed diuersę figurę, & sub eadem altitudine constituta, licet æqualium angulorum. Sed parallelepipedum OQAB est æquale parallelepipedo ABmn, cuius basis est inæqualium angulorum basi DEFG iuxta Coroll. prop. 9. Ergo parallelepipeda habentia bases æquales, licet inæqualium angulorum, & differentis figurę, & altitudines æquales, sunt quoque inuicem æqualia.

THEOR. VI. PROPOS. VII.

Si solidum parallelepipedum plano secetur aduersis planis parallelo, erit quemadmodum basis ad basim; ita solidum ad solidũ.

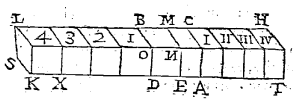
VSque modo egimus primo de proprietatibus parallelepipedorum, ex inde de illorum creatione, & constructione, & tandem de eorum æqualitate, & inæqualitate, modo de eorum proportione agimus.

Sit itaque solidum parallelepipedum ACBD, quod plano ME secetur parallelo aduersis planis CA, & DB. Dico, quod sicut basis NC ad basim MO, ita solidum super primam basim constitutum AECM, ad solidum super alteram basim erectam BEMD.

Probatur. Quia ita est prima quantitas ad secundam, vt tertia ad quartam in proportione ex 9. def. tr. 9. elem. cum primę & tertię equè multiplicia à secundę, & quartę equè multiplicibus in qualicumque multiplicatione, vel vna deficiunt, vel vna æqualia sunt, vel vna excedunt.

Sit ergo prima magnitudo basis NC secunda altera basis MO tertia parallelepipedum AECM quarta parallelepipedum EBMD; multiplicemusq;

primam magnitudinem, nempe basim CN in bases I, II, III, IV equales, & faciamus super eas eiusdem altitudinis parallelepipeda, quę equalia erunt parallelepipedo AECM ex propos. 4. & 5. h. Sic secundam magnitudinem, nempe basim MO multiplicemus, faciamusque ei bases equales I. 2. 3.



& super eas parallelepipeda eiusdem altitudinis, nimirum æqualia quartæ magnitudini, & parallelepipedo EBMD. Cum ergo sint æquales bases I. II. III. IV. singulæ basi CN, & I. 2. 3. singulæ basi NMBO, si ita multiplicentur, vt omnes bases I. II. III. IV. cum CN, ideſt NH euadant æquales basibus I. 2. 3. cum MO basi acceptis, ideſt 3N parallelogrammum. Etiam parallelepipeda I. II. III. IV, CE tertia magnitudo æquè, ac prima magnitudo basium suarum I. II. III. IV. multiplicata, ideſt parallelepipedum HE æquatur parallelepipedis I. 2. 3. MD quarta magnitudo æquè, ac secunda basium I. 2. 3. multiplicata, ideſt parallelepipedo XM ex prop. 4. & 5. h. cum parallelepipedum HE sit æqualis basis HN basi N3; & æqualis altitudinis parallelepipedi MX.

Ecce quomodò si æquales sint magnitudines æqualis quoque est multiplex primæ, & tertiæ, ac secundæ, & quartę. Verum si minor sit basis primæ multiplex NH, quam basis NL secundæ magnitudinis multiplex, talis quoque erit tertia respectu quartę, nempe parallelepipedorum. Sic multiplicata prima basis producit basim I. II. III. IV. minorem, quam basis I. 2. 3. 4. & parallelepipedum quoque EH nempe tertia quantitas AECM, vt prima basis multiplicata, producet parallelepipedum minus, quàm parallelepipedum EL ex multiplicatione quartę magnitudinis parallelepipedi EBMD consurgens.

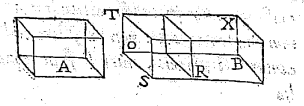
Et ecce quomodo multiplex primæ, nempe bases simul sumptæ NH vna cum parallelepipedis simul sumptis EH multiplici tertiæ simul deficiunt, bases nimirum à basibus multiplicibus secundæ NL, & parallelepipeda à parallelepipedibus MK multiplicibus quartæ magnitudinis. Et idem dicas de augmento. Quapropter eandem dicent proportionem basis C N basi MO, sicut parallelepipedum AECM constitutum super primam basim C N parallelepipedo EBMD constitutò super secundam basim MD.

THEOR. VII. PROPOS. VIII.

Parallelepipeda sub eadem altitudine constituta sunt inter se, vt bases.

Sit solidum cuius basis A, & solidum, cuius basis RB, quæ solida sint eiusdem altitudinis. Dico, *eadem proportione referri basis* A *ad basim* BR, *vt solidum super* A *ad solidum super* BR.

Quod vt probetur super rectam RS ex 45. lib. 1. basis RO statuatur, ita angulata, vt basis BR, & æqualis basi A, erigaturque super eam parallelepipedum RT eiusdem altitudinis, ac parallelepipedum super BR, vel quæ est eadem super A, & iam ex præcedens 6. propos. patet, quod parallelepipedum super basim RO est æquale parallelepipedo super basim A. Vade



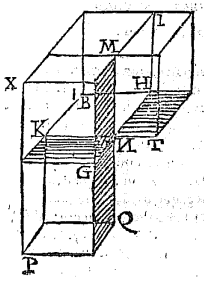
Ostendetur propositio. Ita se habet parallelepipedum RT ad parallelepipedum RX ipsi annexum, & faciens vnum parallelepipedum integrum SX cum ipso, ac basis RO ipsius RT ad basim BR ex præcedenti propos. Sed parallelepipedum RT est æquale parallelepipedo A, sicut, & basis RO basi ipsius A. Ergo ita est parallelepipedum A ad parallelepipedum XR, vt basis A ipsius ad basim BR parallelepipedi RX.

THEOR VIII. PROP. IX.

Similia solida parallelepipeda inter se sunt in triplicata ratione homologorum laterum.

Sint similia parallelepipeda TI, PN ex def. 2. Tr. 22. planis similibus concluſa, ideoque etiam bases KG huius, & TH alterius similes sint, & habeant homologa latera, sitque NT ad NP, vt NK ad NG. Dico *ea habere proportionem laterum* NT ad NK, vel NH ad NG *triplicatam*. quam explicauimus expens. 5. tract. 9. part. 1.

Parallelepipeda se tangant in angulo N, ita vt in vnam rectam conueniant latera MN, & NQ, & latera HN, & NG, quod ob similitudinem basium ex contextu prop. 10. lib. 6. euenier, siquidem anguli ad verticem N erunt æquales; Deinde compleatur basis BN, & super basim sit parallelepipedum eiusdem altitudinis KI, ac TI, & idem fiat super basim nigram KG; Eruntque quatuor parallelepipeda, nempe istud erectum super basim TH aliud super basim NB, tertium, & quartum habentia basim GK, quorum quodlibet suo collaterali erit, vt basis ad basim, cum sint eiusdem altitudinis, & basim habeant continuatam, & ideo, vt latus ad latus basium æquè altarum.



Prob. Latus NT ob similitudinem basium dicit proportionem ad NP, quam NK ad NG, ideoque *permutando*

permutando TN erit ad NK, vt NP ad NG. At ex 1. l. 6, quam proportionem dicit latus TN ad latus NK illam dicit parallelogrammum, seu basis TH ad aliá NB, & quam latus PN ad NG latus, eam dicit NB basis ad GK nigram basim. Verum ex 7. h. quam dicit HT basis ad basim NB eam dicit parallelepipedum IT super HT ad parallelepipedũ KI super NB, & quam dicit basis NB ad basim nigram GK, eam dicit parallelepipedum KI super NB ad parallelepipedum NX super KG, & quam dicit parallelepipedum KI super BN ad aliud NX super GK, eam dicit HM altera basis eiusdem ad nigram GM ex 7. huius, & quam dicit HM basis ad GM nigram, eam ipsam dicit HN ad NG, & consequenter latus MN ad NQ latus, ex hypothesi. Quare & eamdem dicit basis nigra MG ad basim nigram QG, & consequenter parallelepipedum NX super GM ad parallelepipedum NP super GQ.

Igitur parallelepipedum NT super TH dicit eam proportionem ad parallelepipedum NP super basim GK, quam latus NT ad NK latus; sed non immediatam, sed triplicatã, nempe ter repetitã. Nam parallelepipedum IT super HT dicit ipsam proportionem ad aliud KI super NB, & ecce prima repetitio, & hoc ad aliud NX super GK, cuius altera basis est GM, & ecce secunda, & hoc tandem super MG ad parallelepipedũ NP super basim QG, cuius altera est GK, & ecce tertia repetitio. Ergo parallelepipeda habent laterum TN ad NK triplicatam rationem, ſer ter continuè repetitã, quod erat ostendendum.

COROLLARIVM.

Ex hoc sit manifestum, quod si fuerint quatuor rectę linęe proportionales, vt est prima ad quartam, ita esse solidum super primam ad solidum super secundam simile, similiterq; positum; Quia prima linea ad quartam habet rationem triplicatam ex def. 10. lib. 5. vt solidum habet ad solidum, & hinc etiam est, quod obtineant duplicatam rationem basium, cum bases sint, vt prima ad tertiam.

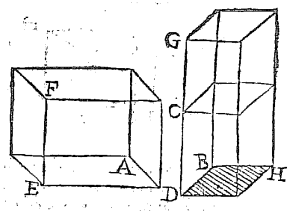
THEOR. IX. PROP. X.

Æqualium parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur; Et quorum solidorum parallelepipedorum bases, & altitudines reciprocantur illa sunt æqualia.

Solida, quę exhibentur æqualia, si non sunt æquiangula, reducantur priùs iuxta Coroll. propos. 9. ad æquales angulos, & tunc exhibeantur.

Sint itaque duo parallelepipeda equalia, nempe vnum super basim AE, alterum super basim nigram DH æquiągula, quę sint inequalis altitudinis. Dematur altiori DO altitudo CD equalis minori altitudini EF, & fiat parallelepipedum depressius supra basim nigram DH nunc

Progress. 1. Probatur assumptum. Parallelepipedum super basim AE est equale altiori parallelepipedo CH super basim DH. Ergo ex 7. lib. 5. eodem modo in proportione se gerunt eidem parallelepipedo depressiori CH. Sed parallelepipedũ GH euectius dicit eam proportionẽ depressiori GH, quam basis GB basi CB ex 8. huius prop. & basis GB alteri basi CB eam proportionem, quam altitudo DG altitudini DC ex 1. lib. 6. Ergo ita erit quoque parallelepipedum euectius GH parallelepipedo HC; velut altitudo GD altitudini DC.



Progr. 2. sed vt solidum ad solidum, ita est ex propos. 8. huius basis ad basim, si solida sub eadem altitudine existant. Ergo ita erit basis AE ad basim DH, vt parallelepipedum AF super AE ad parallelepipedum super DH eiusdem altitudinis, quæ est CB. Sed vt dixi in principio probationis parallelepipedi AF super AE ad parallelepipedum depressius CH super DH ratio est illa ipsa, quàm parallelepipedi euectioris GH super DH ad idem depressius solidum CH. Ergo est illa ipsa, quam habet altitudo DG altitudini DC, vel æquali ex constructione altitudini FE, vt probaui in primo progressu. Ideoque reciprocè AE basis erit ad BH basim, vt GD huius altitudo ad EF altitudinem alterius.

Progr. 1. secunda pars. Nam dato parallelepipedo super basim AE, quæ sit ad basim alterius nigram DH, vt altitudo GD huius ad altitudinem FE alterius, & altitudines sint inequales. abscindatur altitudo GD in C, & fiat equalis DC altitudini EF.

Prob. pr. ita est altitudo GD ad DC, vel equalẽ EF, vt basis EA ad basim DH ex Thesi. Vt verò proportione refertur basis EA ad basim DH, ita solidum super AE ad solidum HC super basim DH cùm equalis sint effecti altitudinis.

Progr. 2. Ex alia autem parte, vt est altitudo GD ad altitudinem DC, ita est basis GB ad basim CB ex 1. lib 6. Elem. & vt basis GB ad basim CB, ita solidum GH super GB basim ad solidum super CB alteram basim ex 7. huius, quia sunt eiusdem altitudinis; Ideoque iam eidem parallelepipedo CH super DH basim duo parallelepipeda eandem dicunt proportionem AE basis ad DH basim, parallelepipedum AF super basim AE ex 1. progr. & parallelepipedum GH super DH ex 2. progress. ideoque ex 7. lib. 5. inter se erunt equalia.

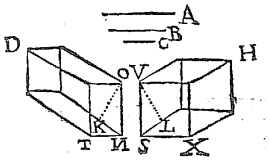
THEOR. X. PROPOS. XI.

Si tres rectæ proportionales fuerint; quod ex his tribus fit solidum parallelepipedum æquale est descripto à media linea parallelepipedo, quòd æquilaterum quidem sit in se, æquiangulum verò præfato.

Sint datę tres rectę A, B, C, & ex istis componantur parallelepipedum ND, in quo media B equalis sit NO. Ex qua huic equiangulum aliud parallelepipedum constituatur SH, cuius omnia

latera

latera sint æqualia mediæ B. Dico *quod hoc Parallelepipedum est æquale alteri* ND *ex tribus datis prius constructo.*



Probatur ex eo, quòd habeant basim VX basi OD æqualem ex 14. lib. 6. quòd VX basis contineatur sub media B, at OD sub extremis A, & C ex effectione. Et etiam ex eo quod habeãt altitudinẽ, quę mensuratur punctata VL ad angulos rectos ab V cadente in L altitudini alterius perpendiculari DK punctata in K angulos rectos efficiente dimetitæ æqualem. Quod enim perpendiculares punctatæ V, & O sint æquales patet ex 26. lib. 11. quoniam angulus N est æqualis ex effectione angulo S, & K, & L recti, basis verò ex hypothesi VS basi NO est æqualis, quare triangula KON, VSL æqualia, & ideo bases XO, & VL.

Cum ergo hæc parallelepipeda habeant bases, & altitudines æquales ex 11. huius erunt æqualia.

THEOR. XI. PROPOS. XII.

Si sint quatuor lineæ continuè proportionales parallelepipedum sub quadrato unius extremæ, & altitudine alterius est æquale cubo mediæ proportionalis, quæ extremæ basim substernenti propinquior est.

SInt quatuor continuè proportionales ex prop. 2. Tr. 15. A, B, C, D. Dico parallelepipedum EH scilicet ex EF, quadrato ex A, & altitudine D esse æquale cubo AO ex B. Vel si maius parallelepipedum ex quadrato D, & altitudine A lineę æquale esse Cubo ex quadrato lineæ C.



Probatur. Quoniam quadratum EF, ex A est ad quadratum OL ex B, vt A ad C ex 21. lib. 6. ob similitudinem eorum, ideſt ex 11. tract. 16. vt B ad D, sc. 10 æqualis ipsi B ad HF, erũt istis duobus solidis bases altitudibus reciprocè proportionales. Vnde ex ipsis A quadrato, & D altitudine constitutum parallelepipedum erit æquale AO cubo erecto ex B ex 10. huius.

THEOR. XII. PROPOS. XIII.

Si sint quinque lineæ continuè proportionales parallelepipedum erectum ex quadrato unius extremæ tamquam basi, & altitudine alterius æquatur. Parallelepipedo erecto ex quadrato secundæ, & altitudine tertiæ.

SInt quinq; continuè proportionales A, B, C, D, X, & ex A quadrato eleuetur parallelepipedũ ad altitudinem X, & ex B quadrato, & altitudine C aliud constituatur. Dico ea esse æqualia.

Pr. Basis A est ad basim B, vtpote, quod sint quadrata, & ideo similia plana, vt A ad C tertiam proportionalem, vt autem A ad C sic est C altitudo huius, cuius basis B ad X altitudinem eius, cuius basis A, ergo. Bases, & altitudines reciprocantur. Ergo ex prop. 10. h. erunt parallelepipeda æqualia.

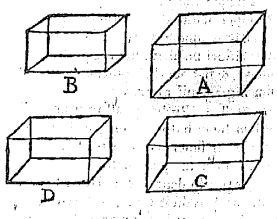
COROLLARIVM.

HInc autem etiam est, quod, & si parallelepipeda non obtineant bases ex A, & B quadratas, sed ex quocumque alio rectangulo, dummodo sint rectangula similia, & similiter posita idem sequetur, quia etiam basis A ad basim B ex prop. 21. lib. 6. erit vt A ad C, vt autem A ad C, sic est C altitudo, cuius basis B ad altitudinem, eius cuius basis A, vnde cum reciprocæ sint bases, & altitudines erunt æqualia parallelepipeda.

THEOR. XIII. PROPOS. XIV.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & solida parallelepipeda, quæ ab ipsis similiter, & similia describuntur proportionalia erunt, & si data Parallelepipeda proportionalia sint similia, & similiter descripta, & ipsæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ proportionales A, B, C, D, constituanturque super A, & B duo parallelepipeda A, & B, similia, similiterque descripta: Item super C, & D duo alia similia inuicem, & similiter posita licet à primis A, & B similitudine discrepent; Dico *ita esse solidum* A *ad solidum* B, *vt*



solidum C *ad solidum* D.

Probatur. Quia proportio ipsorum solidorum ex 14. huius est in triplicata ratione suorum laterum, cum enim latus A ad latus B, sit, vt latus C ad latus D etiam triplicata lateris A ad triplicatam lateris B, erit, vt triplicata lateris C ad triplicatam lateris D, quæ proportiõ triplicata est solidorum, quæ super latera dicentia proportionem simplicem quodlibet erectum est.

Probatur secunda pars. Ponitur solidum A ex hypothesi dicere eam proportionem ad solidum B. quam C solidum ad D solidum; sed solida suorum laterum habent triplicatam proportionem, ideſt ter repetitam, ergo latus solidi A ad latus solidi B dicet proportionem simplicem eandem, quam dicit latus C ad latus D, quoderat ostendendum.

COROLLARIVM.

AModo. quo præcedens proposit. ostensa est, ne dum conuenit parallelepipedis, sed omni generi solidorum similium. Nam & ipsa dicunt triplicatã diametrorum, aut laterum proportionem nam V. g. Prisma est dimidium parallelepipedi: quare, & ipsa erunt in triplicata ratione suorum laterum, vtpote dimidia prismatum, vt infra, sic, & pyramides, vtpote quod quælibet sit tertia pars prismatis. Sic omne corpus ex quinque regularibus, similibus, cum æqualibus pyramidibus constet, quæ sunt in triplicata ratione suorum laterum, vnde, & omnes pyramides vnius corporis solidi ad omnes alterius erunt in triplicata ratione lateris vnius pyramidis ad latus alterius.

EXPENSIO II.

De Prismatibus.

BReuis de Prismatibus Expensio erit, cum ea ferè omnia, quæ parallelepipedis conueniunt etiam prismatibus applicari, & de ipsis verificari possint, vtpote quod sint ipsorum dimidium.

DEFINITIO I.

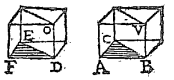
PRisma est figura solida, quæ planis continetur, quorum opposita sunt similia, & æqualia parallelogramma, alia verò opposita æqualia, & similia triangula, seu cuiuscumque figuræ.

THEOR. I. PROPOS. XV.

Prismata triangulares habentes bases, & eandem altitudinem inter se sunt vt bases.

SInt duo prismata VCB, & FEO triangulares super bases ACB, & DEF, & eiusdem altitudinis. Dico *esse inuicem, vt bases.*

Probatur. Nam talia sunt parallelepipeda, quorum medietates sunt; sed prismata sunt dimidium parallelepipedorum, sicut, & bases triangulares sunt dimidię basium parallelogrammarum, sed vt totum ad totum, ita est dimidium ad dimidium. Ergo dimidiatę eam dicent proportionem, quam parallelepipedum ad parallelepipedum. Si-



cut, & dimidium parallelepipedorum ad dimidium eorundem. Ergo eadem quoque erit proportio dimidiatę basis ABC ad dimidiatam basim EFD, ideſt triangularis, quam dimidiati parallelepipedi ACBV ad dimidium parallelepipedum EFDO, nempe prismatis ad prisma.

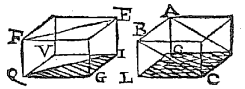
COROLLARIVM.

VNde prismata eiusdem altitudinis super eandem, vel æquales bases sunt æqualia. Sicut & prismata æqualia super æquales bases eiusdem sunt altitudinis, tandemque Prismata æqualia, & æqualis altitudinis, æquales quoque possident bases. Quia, & parallelepipeda prismatum eorum dupla, tales obtinent proprietates.

THEOR. II. PROPOS. XVI.

Si fuerint duo prismata æqualis altitudinis; sed illud super quadrangulam basim aliud super triangulam, & quadrangula sit dupla triangularis basis; æqualia erunt prismata.

SIt prisma ABCO quadrangulam habens bam OC, & aliud EIFG triangulam habens basim IGQ, quæ sit medietas basis CO. Dico esse æqualia ipsa prismata si sint æqualis altitudinis.



Ex prismatibus compleantur parallelepipeda, quę dico esse æqualia ex prop. 4. huius. Quia bases erunt, vt ostendam æquales, & altitudo æqualis ex hypothesi. Bases autem erunt æquales, quia completo parallelepipedo basis triangularis GIQ fiet qudrangula GV, & sic duplicabitur. Vnde erit æqualis basi CO, quę erit ex hypothesi dupla triangularis, cum ergo parallelepipeda sint dupla prismatum suorum in quæ diuiduntur, ipsa prismata ABCO, & EIFV quoque erunt æqualia.

THEOR. III. PROPOS. XVII.

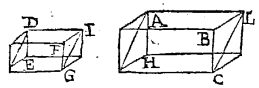
Similia prismata, quæ triangulares habent bases in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

SInt similia prismata ABC, & DPE habentia triangulares bases BCL, & GFE. Dico, *quod hæc prismata sunt in triplicata suorum laterum ratione.*

Nam si compleantur Parallelepipeda AHBC, & DPBG sunt in triplicata suorum literũ homolorum ratione; sed prismata sunt eorum dimidia. Ergo

ex prop.

ex prop. 8. lib. 5. Ergo, & ipsa sunt in triplicata suorum laterum ratione.

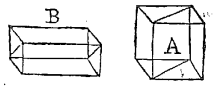


Cum autem prisma ACHB ad prisma DIGE consequatur proportionem triplicatam lateris LB ad latus IF; etiam consequetur triplicatam diagonalis LC ad diagonalem IG, quia ob similitudinem triangulorum LCB, & IFG, ita est diagonalis LC ad diagonalem IG, vt latus LB ad latus IF.

THEOR. IV. PROP. XVIII.

Æqualium prismatum reciprocantur bases, & altitudines; & quorum prismatum reciprocantur bases, & altitudines illa sunt æqualia.

PRobatur ex dictis. Quia bases, & altitudines parallelepipedorum, quorum sunt medietates reciprocantur, & ita est basis A ad basim B, vt hęc



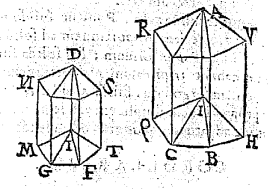
solidi altitudo in basi B ad solidi altitudinem in basi A, sed ità est totum ad totũ, vt dimidium ad dimidium, ergo, & dimidia basis A erit ad dimidiam basim B quales sunt bases prismatum, sicut altitudo solidi B ad altitudinem solidi super A. Pars etiam 2. prop. patet eadem ratione.

THEOR. V. PROPOS. XIX.

Omnia, quæ de Prismatibus triangulares bases habentibus ostenta sunt illa, & de cæteris verificantur.

QVæ dicuntur de prismatibus triangularibus, ea dicuntur etiam de prismatibus multilateribus V. g. pentagonis octagonis, & cæt. Quia ea omnia diuidi possunt in triangulata prismata, de quibus singulis eedem propositiones militabunt. Vnde, & tota ijsdem rationibus erunt obnoxia, vt patet.

Sic prismata ABH, & DNT pentagona, singula resolui possunt in tria prismata triangularia, quorum vnum est BCAI, aut IFGD, quę in eadem proportione erunt; qua bases, ita vt sicut se habet basis ad basim, sic se habet quodlibet prisma super eã basim, ad aliud super alterã basim. Nã V. g. basis HIB est ad basim BIC, vt prisma HIBV ad prisma BICA. Quare ex 18. l. 5. si componantur simul basis cum basi, & fiat basis HIBC hęc erit ad CIB simplicem, vt compositum prisma ex duobus HVAC ad simplex BICA: & quia basis simplex CIB est ad alteram simplicem ICQ, vt prisma simplex BICA ad aliud simplex CQAR; erit quoque ex *æquo* composita basis HIC ad simplicem CIQ, vt prisma compositum VACIH compositæ basi innixum, ad prisma ABICQ simplici innixum. Quare *componendo* rursus tota basis ex tribus iam composita pentagona erit ad vnam basim CIQ, vt prisma pentagonum ad prisma simplex QIRC.



Progr. 2. Et idem philosofandum de altero prismate pentagono TMD, quod nempe sit pentagona basis ad simplicem aliquam TIF, vt prisma pentagonum ad simplex TFID.

Progr. 3. Iam habemus basim pentagonam ad simplicem triangularem comprehensam QIC dicere eam proportionem, quam pentagonum prisma ad triangulare comprehensum CQIR. Sed basis QIC ad basim alterius prismatis triangularis TFI, ita prisma in ipsa innixum ICQR ad prisma in hac situm TIFS; Et vt hæc basis simplex ad pentagonam; qua claudltur, ita hoc prisma simplex ad pentagonum TMD, cuius est pars, ex secundo progr. Quare ex *æquo* ita erit pentagona basis HIQ ad pentagonam basim TMI. Vt pentagonum prisma AHQ ad pentagonum prisma DTM.

COROLLARIVM.

HInc est. Quod si daretur prisma pentagonum, & aliud triangulare idem esset argumentum. Nam ostensum est Pentagonam basim HIQ esse ad simplicem IQC, vt prisma pentagonũ AHQ ad simplex triangulare ICQR, & esse basim simplicẽ QIC triangularẽ ad basim item triangularem TIF, vt prisma in ea situm CIQR ad prisma in hac collocatum STLF; quare ex *æquo* ita erit pentagona basis HQI ad triangularem TLF; vt prisma pentagonum AHQ in pentagona basi positum ad hoc prisma SDTF in triangulari situm, quod si prisma triangulare ad aliud obtineat triplicatam proportionem etiam multilaterum ad aliud multilaterum, quorum sunt partes obtinebunt triplicatam proportionem, vt est in fig.

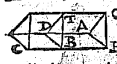


EXPEN-

8. THEOR. VI. PROPOS. XX.

Prisma ad prisma æqualis basis se habet, vt altitudo ad altitudinem.

DEtur prisma AOHT si basis HQ non est normalis, talis fiat ex Cor. pr. 4. h. & alterius DCTB



O. basis DBT si non est similis basi AOH similis fiat, & cum ex H Thesi sit æqualis ei erit DTB qualiũ laterum ipsi AOH. Eruntque prismata eiusdem altitudinis HO, vel BT. Quare inuicem referentur, vt bases ex pr. 15. h. AB, & DC. Sed AB ad DC est vt latus PB ad BC ob æqualem altitudinem TB. Ergo prisma AOHT ad DBCT erit, vt HB altitudo ad BC altitudinem.

EXPENSIO III.

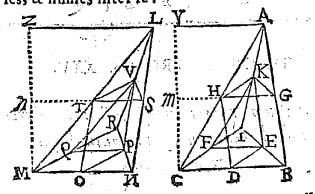
De Pyramidibus.

SOliditas pyramidum parùm captu difficilior, sed quæ viam sternit ad sphæræ corporumque sphæroicorum soliditatem inueniendam.

THEOR. I. PROPOS. XXI.

Omnis pyramis triangularis diuiditur in duas pyramides triangulares æquales, & similes inter se; & etiam toti similes, & in duo prismata æqualia per bifariationem omnium laterum. Prismata sunt æqualia quoque prismatibus alterius pyramidis in æquali basi, quoad aream, & vnum latus, quæ sit eadem altitudine prædita.

SIt pyramis BACI. Dico diuidi in duas pyramides æquales inuicem; similes, tum inter se, tum toti: quod fit diuidendo singula latera in G, H, K bifariam, & basis crura in E, & F, sic enim ductis lateribus puncta connectentibus erunt factæ duæ pyramides GKHA, & KEIF, quę erunt æquales, & similes inter se.



Probatur. Quod sint compositæ ex cruribus parallelis cruribus primæ pyramidis, & ideo quod eiusdem angulis polleant ex propos. 30. lib. 1. & æqualibus cruribus; sic crus HA est æquale cruri FK, quod sit æquale cruri HC, eo quod sit inter parallelas HK, & FC, quod crus HC, vtpote medietas est æquale cruri AH. Sic GH est æquale cruri EF: eò quòd ita sit AH ad HG, vt AC ad CB, & quia AH est dimidium cruris AC, etiam GH erit dimidium cruris BC, & tale quoque erit EF eodem argumento, quod sit IF ad FE, vt IC ad CB, at IF est ex effectione medietas cruris IC ergo etiam EF cruris BC.

Et sic argumentare de alijs & idem potes philosophari de angulis; Sic angulus AKH est æqualis angulo KIE ex prop. 30. lib. 1. Elem. ob bases parallelas GHK, & BIC, & sic de alijs. Vnde pyramides erunt æquales, & similes inuicem, & etiam toti similes ijsdem argumentis.

Prob. etiam. Quod diuidatur in duo prismata. Nam diuiso latere BC in D, & ducta HD, & ED, duo prismata erunt completa, nempe GHK EDB super basem triangularem BED, & prisma KEF HDC super basem quadrangulare FCDE, quę CDFE est dupla basis BED, & ideo cum sit eiusdem altitudinis ex propos. 19. h. prisma triangularis basis erit æquale prismati quadrangularis basis.

Dico tandem hæc quoque prismata BEDGKH, & EDFCKH esse æqualia prismatibus NPOSVT, & POQMVT alterius pyramidis æqualis basis, quoad aream NRM arcæ BIC, & latus NM lateri BC, & eiusdem altitudinis MZ, ac CY, similiter diuisæ.

Probatur. Nam triangula BIC & RMN in pyramidibus dissimilibus, quarum apices A, & L sunt necessariò inter parallelas, cum ex hypothesi sint æqualia ex pr. 39. l. 1. Cor. & habeant æqualem basim. Quare si diuidantur latera BN, & RM, & NO bifariam in P, Q, & O linea PQ erit æqualis lineæ EF ex ratione præcedenti, eo quòd DC, & OM sint æquales, vtpote dimidiæ æqualium BC, & MN, & EF, & PQ sint eis æquales, vtpote inter parallelas ED, & FC; necnon, & inter OP, & MQ. Quare ex 12. Tract. 29. trapezium OPQM erit æquale trapezio EDFC: quare erunt eiusdem altitudinis. Quapropter triangulares quoque bases NPO, & BED erunt eiusdem altitudinis; basis verò BD æquatur basi NO æquallum BC, & NM dimidiæ. Quamobrem sunt quoque æqualia triangula NPO BED. Altitudo quoque prismatum est eadem ob triangula DHC, & OTM æqualia ob æquales bases DC, & OM, & æqualem eleuationem, vtpote eleuationis dimidiæ Pyramidum æquè altarum. Ergo Prismata GKHBED, & SVTNPO, necnon, & EDCFHK, & POQMVT erunt inuicem æqualia ex prop. huius.

THEOR. II. PROPOS. XXI.

Pyramides triangulares æquali basi præditæ vt prius, & in eadem altitudinem eleuatæ sunt inter se æquales.

*SInt duæ pyramides, in præced. fig. quarum vertices æqualis perpendicularis altitudinis sint A, & L; bases verò æquales, & triangulares etiamsi dissimiles BIC, & RNM. Dico pyramides esse quoque æquales.

*Probatur. Nam si differunt hæc erit maior altera. Minor assignetur, & sit A minor pyramide L quantitate V. g. X. Ablatis ab ea prismatibus duobus, & ab L etiam prismatibus suis prædictis æqualibus remanebunt duæ pyramides AGKH, & KEIF in A æquales inuicem, similesque toti A duæ pyramides in L similes toti, & item æquales inuicem LSVT, & VRPQ. Ab eis ergo prismata æqualia quatuor hinc à pyramidibus in A, & quatuor inde à pyramidibus in L demantur, quę ob eandem rationem præc. prop. erunt æqualia inuicem. Et residuæ erunt Pyramides eiusdem speciei, ac priores à quibus æqualia item prismata poterunt resecari.

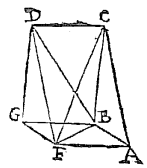
Id ergo fiat demendo à singulis æquis vicibus, donec in minore A remaneant adeo paruæ pyramides, vt omnes simul sint proximè minores differentia Z, ita quod residuum in L, quod semper est maius residuo in A, ablatis vtrique æqualibus sit, aut maius, aut æquale differentiæ X. Quod si ablatio omnium prismatum ab omnibus pyramidibus esset nimia ab vna, aut duabus pyramidibus, tum residuis pyramidis A, tum residuis Pyramidis L de-

trahantur, aut prisma, vel dimidium, vel trien̄s prismatis vtrinque. Ab istis itaque pyramidibus maioribus differentia x reliqua prismata auferantur. donec prismata tot sint, vt æquent differentiam x, vel superent. Id enim fieri potest, cum hę pyramides in L residuæ fuerint maiores, vel equales differentiæ x. Quia itaque à pyramidis minoris A residuis pyramidibus tot prismata prædictis pyramidis L equalia prismatibus auferri possunt ex prec. demantur tot vicibus quot à residuis pyramidibus pyramidis maioris L ablatum est. Et tunc à pyramidibus minoribus, quam quantitas x A superetur, aut magis, quàm quantitas x, aut quid ei æquale, quod est absurdum, non erit ergo minor pyramidis A pyramide L, sed equalis.

THEOR. III. PROPOS. XXII.

Omne Prisma triangulari basi innixum diuiditur in tres pyramides æquales triangularibus basibus fultæ.

*SIt prisma CDBF triangulares possidens bases ABC, & FGD: culus parallelogramma ambientia tribus diametris BF, & CF, & DB secentur. Dico in tres pyramides esse diuisum ABCF, & BDFG, BDCF, quas dico æquales esse inuicem.



Probatur. Quia Pyramis ABFC habet æqualem basem ABF, basi BFG pyramidis FBGD ex 34. lib. 1. El. ob diagonalem BF, æqualem verò altitudinem, quòd terminent in eandem parallelā DC basi GB. Ergo erunt ex prec. inuicem equales.

Progr. 2. Pyramis verò CDFB habet quoque verticem in eodem puncto F, quo altera prædicta FBGC, & habet basem CDB illius basi BGD ob diagonalem BD ex 34. lib. 1. æqualem: Ergo, & istæ sunt æquales nimirum FBDG, & CFBD; sed FBDG erat æqualis primo propositæ CBA. Ergo omnes sunt æquales.

COROLLARIVM.

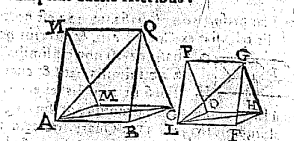
HInc enascitur quamlibet pyramidē esse tertiā partem prismatis, quod eandem cum ea habeat basim, & altitudinem, seu prisma tale pyramidis in illo contentæ triplum esse.

THEOR IV. PROPOS. XXIII.

Similes pyramides, quæ triangulares habent bases in triplicata sunt homologorum laterum ratione.

*SInt pyramides BCAQ, & FLHG similes, sitæ in basibus triangularibus BCQ; & FHG. Dico pyramides ipsas esse in triplicata homologorum laterum BQ, & FG ratione.

Fiant ex illis prismata MAN BCQ, & OLP FHG, quę ob pyramides similes erunt, & ipsa similia. Nam planum BMAC, & LOFH faciet cum BQC, vel FDH plano eundem angulum, vt faciebat prius, cùm erat triangulare, & idem dicas de alijs; quare similia omninò erunt prismata BCN, & FHP, propter oppositos angulos æquales oppositis ob laterum equalitatem, & parallelismum denuò ductorum prius ductis lateribus.

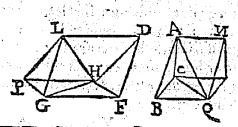


Probatur propos. prismata sunt ex dictis in triplicata suorum laterum ratione. cùm sint similia; sed pyramides in eadem proportione sunt, cùm prismatum tertia pars sint ex propos. 18. lib. 5. El. Ergo erunt, & ipsę in triplicata suorum homologorum laterum ratione.

THEOR. V. PROP. XXIIII.

Sub eadem altitudine existentes pyramides, & triangularibus basibus prædita inuicem sunt, vt bases.

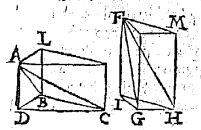
*PRob. Nā sūt tertia pars prismatis, quod super earū basim inscriberetur. PED CQN, habent verò eandem altitudinem, & eandem basim, vt in pyramide ABCQ, & GPHL patet. Quare cùm tertia pars ad tertiam partem habeat eandem proportionem, quam totum ad totum ex prop. 18. lib. 5. que sunt prismata sub eadem altitudine eorum basibus innixa NCQ, & DEP; & prismata, inuicem sint ex prop. 15. li. vt bases; Pyramides quoque eandem proportionē; quam bases consequentur ex 18. l. 5.



THEOR. VI. PROPOS. XXV.

Æqualium pyramidum, & triangulares bases habentium reciprocantur bases, & altitudines.

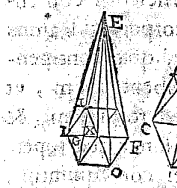
*SInt duæ pyramides ABCD, & FGHI, quæ habeant bases triangulares CBD, & GHI. Dico earū bases, & altitudines reciprocari. Nam possident eandem altitudinem, & basim, quam prismata GMFI, & CDAL. Sed prismatum propos. 18. li. vt dictum est bases, & altitudines reciprocantur. Ergo pyramidum quoque, quæ sunt tertia pars prismatis ex 21. li. bases, & altitudines reciprocabuntur: & ita erit basis CBD ad basim GHI, vt altitudo IF ad altitudinem DA.



CO-

COROLLARIVM.

HInc elicitur nempe à tota expens. passim quòd idem dicendum sit de pyramidibus, quarum bases plura latera numero equalia possideant, quàm tria. Nam ea resolui possunt in tot pyramides triāgulares V.g. pyramis sexagona resolui potest in sex pyramides, quę erūt tertia pars suorum prismatum; quare pyramis ad pyramidem æqualis altitudinis eam habebit proportionem, quam basis ad basim, & si basis erit equalis, & æqualis altitudo pyramides quoque erunt æquales, at si sint inæquales basi solùm, essent vt bases, si altitudine tantùm, erunt vt altitudines si prorsùs inequales, at similes in triplicata suorū homologorum laterum ratione. At equales, si altitudines, & bases reciprocentur. Quod verò omnes pyramides resolui possint in pyramides triangulares patet, quia bases possunt diuidi in triāgula V.g. VQC, TLX, & in triangula TQB, & FXO, & per lineas rectas, erunq; triangulorum QB, & QT, vel XF, & XO, & per vertices E, & A plana agi queunt. quæ vtique pyramides triangulares efficient QTBA EXOF, & reliquas.

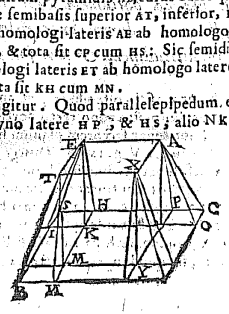


THEOR. VII. PROP. XXV.

Frustum quadrangulæ pyramidis parallelis basibus abscisum, est æquale parallelepipedo basim habens comprehensam duobus lateribus, quæ singula constent ex latere minoris basis, & semidifferentia homologorum laterum, & trienti parallelepipedi in basi siti à semidifferentia eorundem laterum comprehensa, quæ omnia sint eiusdem altitudinis.

*SIt frustum pyramidis AB, cuius bases quadrangulæ semibasis superior AT, inferior, EC; differentia homologi lateris AE ab homologo latera CS sit SH, & tota sit CP cum HS. Sic semidifferentia homologi lateris ET ab homologo latere HN sit KH, & tota sit KH cum MN.

Dico igitur. Quod parallelepipedum ex basi YS, ex vno latere HP, & HS, alio NK, KH, & altitudine KE pyramidis constans vnà cum triente parallelepipedi in basi MB siti, & eiusdem altitudinis est æquale frusto pyramidis BA. Cadant igitur superficies EM, & KA, & aliæ normales ipsi in planum CB, & faciant parallelepipedum MA, intelliganturque extensæ, vt sectent superficies frusti pyramidis, & sint HETN, & IEAO, & cęt. Igitur diuident frustum pyramidis in parallelepipedum AM existens in medio, & duo prismata æqualia KA, & NX, quæ simul vnita constituent parallelepipedum basis KP, & altitudinis YX, & duo IT, & YA equalia tū inuicē, tum prędictis, quod sint super bases æquales MI ipsi KP, vtpote complementa circa diametrum, & YO ipsi YN, vnde & ipsa vnita constituent parallelepipedum æquale priori basis MI, & altitudinis YX. Tandem constituent quatuor pyramides, vt MNBT, & alias ex angulis constitutas, quarū singulæ essent duo triētes prismatis, ex basi MB in altitudinē MT consurgentis ex Cor. propos 12. p. 1. & ideo triens parallelepipedi eadē basi, MB siti eandē altitudinem habentis. Itaque tres pyramides facient parallelepipedum HS in altitudine KE, vel YX: Duo prismata BP, & NX efficient parallelepipedū ex basi KP, & altitudine KE. Duo autem prismata OX, & ME constituent parallelepipedum ex basi MI, & altitudine XY. Ideoque cùm parallelepipedo medio YE conficient totum parallelepipedum BA situm super basim parallelogrammā YS, quę est ex latere PH vna cum semidifferentia HS pro vno latere, & pro alio MK cum semidifferentia KH pro alio latere, cui si addas pyramidem MBT, idest triens parallelepipedi super basim MB altitudinis MT erit frustum pyramidis parallelis basibus constantis æquale illi parallelepipedo ex basi YS ad altitudinem KE ducto vnà cum triente parallelepipedi basis MB ad altitudinem eandem MT eleuato, quod erat probandum.



COROLLARIVM.

*PYramidis triangularis frustum est æquale prismati triangularis basis V.g semibasis SY, quæ constituatur ex latere PH minori, & semidifferentia SH pro vno latere, & pro alio ex alio minori MK, & semidifferentia KH, & triente prismatis ex basi, cui semidifferentię prędictę KH, & HS latera prestent. Quia frustum illud Pyramidis erit dimidium frusti basi quadrata sub ijsdem lateribus, & angulo comprehensi, sicut prisma basi triangulari situm est dimidium parallelepipedi basis quadratę sub eodem angulo, & lateribus cōprehensæ, dummodo omnia in æqualem altitudinem sint eleuata.



TRACTATVS XXXIV.

PARS SECVNDA.

De soliditate corporum curuorum.

EXpedita soliditate corporum planis superficiebus contentorum restat, vt curuis planis contenta corpora videamus illa verò sunt in triplici differentia alia, quæ continentur, curuis quidem, sed rectilineam habent basim, vt fornices quadrati, alia quæ curuis superficiebus, sed rotundam, & planam basim continent, vt coni, & cylindri, alia sunt, quæ superficie omnino curua absque vlla admixtione planitiei consequuntur, vt sphæræ, & sphæroides.

EXPENSIO I.

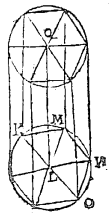
De Cylindris, & Conis.

POst corpora, que planis superficiebus continentur, succedunt mixta, quæ superficie curua altera, aut duabus planis constant, inter quæ precipua sunt coni, & cylindri, de quibus, & soliditates, & soliditatum proportiones sunt indaganda.

THEOR. I. PROPOS. I.

Sicut se habet basis triangularis inscripta sectori in proportione ad sectorem, ita prisma rectè in basi collocatum ad corpus solidum in sectore normaliter existens, eandemque cum prismate altitudinem possidens.

SIt basis triangularis KML inscripta sectori KML super quam sit prisma KLMQ, sectorq; KML, super quem ad eandem altitudinem corpus sit triangulare velut prisma, sed rotundæ superficiei LMKQ, quod apellabimus sectorem solidum. Dico, quòd sicut est basis triangularis LMK ad sectorem planum LMK, ita est prisma LKMQ in basi prædicta ad sectorem solidum LMKQ.



* Probatur. Nam, si sumantur æque multiplices basis, vt LMN, NOL, & sectoris item LNO, LMN, superque bases fiant prismata sua, & super sectores planos sectores solidi sub eadem altitudine, Prismata erunt æqualia inuicem ex pr. 15. cor. par. 1 h. nec non, & sectores solidi MNLQ, NOLQ, KLMQ; quia, vt patet, continentur, tum prismata inuicem, tum sectores solidi inuicem superficiebus equalibus, & similibus planitie, & numero ex def. Tract. 33.

Si ergo crescant bases triangulares prima quantitas magis, quam sectores plani secunda, crescet & tertia, nempe crescent prismata magis, quam sectores solidi quarta quantitas. Si verò vlibet multiplicentur bases triangulares prima quantitas, & æquet secundam quantitatem sectores; prismata quoque tertia quantitas, nempe velut bases basibus, reperientur æquales quartæ quantitati, nempe sectoribus solidis, quod si prima quantitas multiplicata sit minor nempe bases, quam sint sectores plani secunda quantitas, vt vt multiplicati, erunt quoq; æque, ac bases sue multiplicata prismata tertia quantitas maiora, quã sectores solidi quarta quãtitas multiplicata, vt sectores.

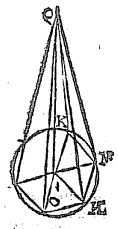
Crescentibus itaque basibus crescunt prismata decrescentibus decrescunt, & cum equales sint æquantur illæ cum sectoribus planis, hęc cum sectoribus solidis, vnde ex 9. def. Tr 9. inuicem dicent proportionem, & ita erit basis triangularis ad sectorem planum, vt prisma ad sectorem solidum.

THEOR. II. PROP. II.

Sicut se habet basis triangularis ad sectorem planum, ita se habet pyramis in basi sua ad portionem coni in sectore constitutam; dummodo æqualem possideant altitudinem, & coni sint recti.

* HÆc propositio ostenditur, vt antecedens. Nam supposito cono recto portiones omnes coni, que super sectorem planum fiunt, sunt similes, & æquales V.g. IMKQ, INMQ, OINQ, &c. quod ex def. superficiebus similibus, æqualibusq; & numero equali contineantur; sicque pyramides QIMK, MINQ, NIOQ, & cęt. factæ super bases triangulares in sectoribus inscriptas inuicem erunt æquales ex prop. 20. Tr. h. pa. 1. quare si bases multiplicentur, ita quod superent sectores, pyramides quoque

quoque ita crescent, vt superent portiones conorum: Si verò bases triangulares ita multiplicentur, vt minus sint, quàm sectores, erunt quoque pyramides, minus quàm portiones conorum; Si tandem ita augeantur æquè multiplices bases, vt adequent sectores; pyramides quoque æquabunt portiones coni: quare vt est basis pyramidis ad sectorem planum, ita pyramis ipsa ad portionem coni recti super sectorem



eleuatam in æqualem altitudiuem.

COROLLARIVM.

* HInc eruitur ita esse circulum ad multilaterũ sibi inscriptũ, sicut conus in ipso locatum ad pyramidem in multilatero constitutam, nam cum diuiso circulo in tot sectores inuicem equales in quot triãgula æqualia basis multilateri inscripti diuisa est, ita erit quodlibet triangulum IMK ad quemlibet sectorem circuli, vt quelibet pyramis colocata in triangulo ad quemlibet sectorẽ conicum æquè, ac pyramides eleuatum. Ergo etiam omnes ita se habebunt ad omnes ex 17. lib. 5. & omnia triangula multilateri, ideſt multilaterum ipsum ita se habebit ad omnes sectores numero equales, vt pyramides in triangulis sitas ad sectores solidos conicos in sectoribus planis locatos.

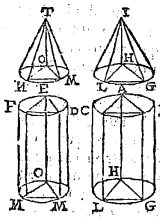
Et idem dicendum est de prismatibus, quæ sint ad cylindros, quibus inscripta sint, vt bases triangulares prismatum in sectoribus inscriptę ad circulum ui basis cylindri est, vt ex prec. propos. eodem argumento colligitur.

THEOR. III. PROPOS. III.

Coni recti, seu Cylindri eiusdem altitudinis, & diuersæ basis sunt inuicem, vt bases.

SInt Coni GILH & MDNT, vel cylindri BACGHL, & DEFMON recti sub eadem altitudine, sed diuersę basis GHL, & MON. Dico esse ad inuicem in proportione vt bases. & ita referri conus GHLI ad conum MTON, vel cylindrus BACGHI ad cylindrum DEFMON, vt basis GHL ad basim MON.

* Probatur. Nam ex propos. 40. & 41. lib. 6. ita est circulus GHL ad circulum MON, vt



multilaterum GHL ad multilaterum MON, ideoque *conuertendo* circulus GHL erit ad multilaterum GHL, vt circulus MONad multilaterũ MON, sed vt circulus GHL est ad multilaterũ GHL, sic cylindrus CABLHG, seu conus ILHG ad prisma AGHL, seu pyramidẽ IGHL ex 2. h. & vt basis circulus MON ad multilaterũ MON, sic Cylindrus DFE MON, seu conus TOMN ad prisma EMON, vel pyramidem inscriptam TOMN: Ergo ex propos. 16. lib. 5. ita erit cylindrus BAC GHL ad sibi inscriptũ prisma AGHL; vt cylindrus DFE MON ad prisma sibi inscriptum EMON. Quare *conuertendo* ita erit cylindrus BAC GHL ad cylindrum DEF MON, vt prisma inscriptum AGHL ad prisma inscriptum ENOH; sed prismata se habent ad inuicem, vt bases ex prop. 23. par. 1. h. Ergo etiam cylindri.

Et sic quoque erit conus IGHL ad pyramidem inscriptam sibi IGHL, vt conus MTON ad inscriptam sibi pyramidem TMON. Quare pari modo *conuertendo* ita erit conus IGHL ad conum MTON, vt inscripta pyramis IGHL ad inscriptã pyramidem TNOM: sed inscriptę pyramides sunt inuicem, vt bases ex prop. 23. p. 1. h. Ergo etiam coni se habebunt ad inuicem, vt bases.

COROLLARIVM.

* HInc est. Quod si Conus, & Cylindrus sit pyramidi, & prismati æqualis basis, & eiusdem altitudinis sit ei æqualis. Quod patet ex Cor. p. 2. h. Nã ita est cylindrus, & conus ad prisma, & pyramidẽ sibi inscriptã, vt basis coni, vel cylindri ad basim prismatis, vel pyramidis inscripte. si sint æqualis altitudinis; sed prisma, vel pyramis inscripta ad prisma aliud, vel pyramidẽ z eiusdem altitudinis, & æqualis basis o illi circulo, qui basis est coni, vel cylindri, est vt basis sua inscripta circulo coni, vel cylindri ad basim o equalẽ circulo qui est basis cylindri, vel coni z. Basis autem inscripta ad basim coni, vel cylindri, & ad basim o huic æqualẽ eandẽ vtpote ad æquales dicit proportionem. Ergo etiam prisma inscriptum cylindro, vel pyramis cono inscripta ad conum, vel cylindrum suum, & ad prisma, pyramidemq; z æqualiũ basiũ eandẽ proportionem dicet; quare ex 7. lib. 5. erunt prisma, vel cylindrus æqualium basium, & eiusdem altitudinis, sicut etiam pyramis, & conus æqualia.

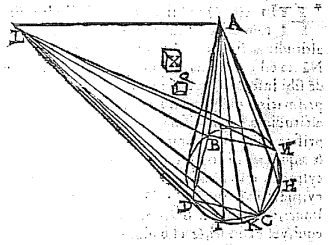
THEOR. IV. PROPOS. IV.

Coni, seu recti, seu scaleni, sicut, & cylindri in æqualibus, seu in eadem basi constituti, & in eandem altitudine sunt æquales.

* SInt coni, seu cylindri super eandem basem rotundam CN, quorum vertices A, & L, hos dico esse æquales; quod si quis neget; alterũ maiorẽ altero necesse est esse, assignet conum, vel cylindrũ maiorem, & sit I, ideoque A conus, seu cylindrus minor erit V. g. quantitate X. Auferantur ab vtrisque pyramides quadratę æquales, seu prismata ob eandem altitudinem, & eandem basim ex Tr. h, propos. 1. & 29, NBCDL, & ABCDN, & remanebunt segmenta conorum, vel cylindrorum quatuor, qualia sunt CDIL, & CDIA, à quibus segmentis auferantur, rursũs pyramides triangulares CIDL, & CIDA æquales, aut prismata æqualia ob eandem altitudinem, & æqualem basim, & residua erunt segmenta conorum CIKL CKIA, & cętera, vel cylindrorum, si pro conis cylindri assumpti fuerint à principio; Sed ad vitandam confusionem loquamur de solis conis, quod, & de cylindris intelligetur, à quibus ablatis rursus pyramidibus triangularibus IKCL, & IKCA æqualibus remanebunt adhuc sectiones conorum minores. Id ergo

toties

toties fiat; donec remaneant segmenta conorum simul in cono minori A minora quantitate, & differentia X proximè (auferendo, vel omnia eorum, quæ simul auferenda sunt, vel aliqua, sed semper æquo numero ab vtraque pyramide. Ideoque segmenta conorum residua in pyramide maiori L erunt maiora, vel æqualia differentiæ X, sint ergo æqualia primò, & à cono L auferantur tot pyramides triangulares, donec exequent segmenta conorum minora quantitate X residua coni A, aut proximè superent. Nam cum deinde, & à segmentis ipsis coni A tot pyramides æquales auferri possint, aut nihil remaneret segmenti conici, quòd est absurdum, cùm pyramis sit minor segmento conico, quod eam continet, aut à minori auferetur maius, scilicet aliquod æquale differentiæ X) quod item absurdum est.



Quod si sint maiora hæc segmenta coni L, quàm differentia X. Auferantur à cono ipso L tot pyramides æquales triangulares; donec ipsę pyramides ablatę exequent, vel proximè superent differentiam X, & eodem modo cum, & à segmentis coni A residuis æquales tot pyramides auferri possint, auferreretur à minoribus conicis segmentis differentia X, aliquid, aut æquale, aut maius Differentia X; quod item est absurdum.

COROLLARIVM.

HInc ellicitur idem dicendum esse de segmentis conorum, & cylindrorum. Siquidem idem argumẽtum valet etiam de segmentis CIDL, & CIDA. Nam auferatur primo ab vtrisque pyramis triangularis CDIA, & CIDL. Deinde triangularis CKIL, & CKIA, & sic consequenter; donec restans segmentũ à CIDA minoris coni remaneat minus differentia Q proximè, qua differt minus à maiori, deinde à residuo maioris deducentur tot partes solidæ, donec superent ablatæ differentiam Q, & auferrentur etiam tot pyramides à residuis segmenti conici minoris, quod est absurdum.

THEOR. V. PROPOS. V.

Sub eadem altitudine existentes Coni, & Cylindri inuicem sunt, vt bases.

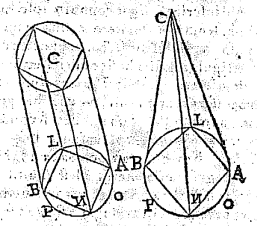
SIt conus, vel cylindrus eiusdem altitudinis A, & alius B, siue obliqui sint, siue recti, dico, quod ad inuicem sunt, vt bases.

* Probatur. Nam cum obliqui sint æquales rectis ex præced. & recti sint ad inuicem, vt bases ex prop. 3. h. dummodo in eamdem perpendicularem altitudinem extollantur, etiam obliqui eiusdem altitudinis erunt inuicem, vt bases.

THEOR. VI. PROPOS. VI.

Coni, & Cylindri obliqui ita referuntur ad pyramides inscriptas, vel prismata inscripta, vt circulus, in quo sunt, refertur ad multilaterum basis pyramidis, vel prismatis seu rectæ, seu sint obliquæ figuræ solidæ.

SIt conus, seu cylindrus CLOP, in quo inscribatur pyramis, vel prisma ABC LN super basim multilateram LAN. Dico, quod, vt est circulus LOP ad multilaterum basis ABLN; sic conus, seu cylindrus LOCP ad pyramidem, seu prisma ABLNC.



Prob. Nam si sit conus, seu cylindrus rectus super basim circulum LOP erit æqualis obliquo æquèalto ex præced. 4. sic si super multilaterũ, basimque LNAB sit pyramis, seu prisma ALBNC erunt æqualia rectum obliquo æquèalto ex prop. 18. Cor. & ex 21. par. 1. h. sed conus, seu cylindrus rectus est ad pyramidem, vel prisma inscriptum *conuertendo* pr. 1. h. & 2. Cor. vt basis circulus LOP ad multilaterum ANBL. Ergo etiam obliquus conus, seu cylindrus LCOP refertur ad pyramidem, seu prisma inscriptum, vt basis circulus LOP refertur ad ABLNC multilaterum. basimque ANBL.

THEOR VII. PROP. VII.

Omnis conus est tertia pars Cylindri eandem cum ipso basim habentis, & altitudinem æqualem.

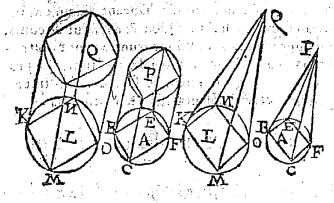
*PRobatur. Nam ita prisma est ad cylindrum sicut basis multilatera prismatis est ad circulum circumscriptum, qui cylindri est basis, & ita quoque est pyramis in ea basi multilatera ad conum, qui in circulo eodem collocatus est ex præced, sed ex 11. lib. 5. quę eidem rationi sunt eędem rationes, & inter se sunt eędem rationes. Ergo ita erit prisma ad cylindrum, vt pyramis ad conũ Ergo *permutãdo* ita erit Prisma ad pyramidẽ quantitates eiusdem generis, vt cylindrus ad conum eiusdem item generis. Sed prisma comprehendit ter pyramidem, illiusque est triplum, dummodo eadem basi sita, ad eademque altitudinem sit eleuata: Ergo ita quoque erit cylindrus respectu coni, & conum ter continebit, quòd erat ostendendum.

THEOR.

THEOR. VIII. PROPOS. VIII.

Coni, & Cylindri sunt inuicem, vt Pyramides, & Prismata in illis inscriptas.

*SIt cylindrus, seu conus FEBCP, & alius ONMKQ, inscribanturque conis pyramides, & cylindris prismata similiũ basiũ. Dico ita esse ONMKQ cylindrus, seu conus ad FEBCP cylindrũ, seu conum, vt est prisma, seu pyramis inscripta ONMKQ ad prisma, vel pyramidem inscriptam FEBCP.



Pr. Ita est ex 6. h. ONMKQ cylindrus, seu conus ad prisma, seu Pyramidem sibi inscriptam, vt circulus L basis ad basim multilaterã OMKN, vt autem circulus L ad ONMK basim inscriptã sibi; *permutando* propositionem 40. & 41. lib. 6. ita circulus altera basis A ad basim multilaterã inscriptam sibi FEBC, vt autem circulus A ad multilaterã basim FEBC sibi inscriptam, ita est cylindrus, seu conus FEBCP in circulo A situs ad prisma, seu pyramidem in FEBC multilatero sitam. Ergo ex prop. 12. lib. 5. Ita erit cylindrus, seu conus ONMKQ ad prisma, seu pyramidẽ sibi inscriptam, velut cylindrus, seu conus FEBCP ad prisma, vel pyramidem sibi inscriptam, vt etiam dixi prop. 3. h. Quare *permutando* ita erit cylindrus, seu conus ONMKQ ad cylindrum, seu conum FEBCP, vt prisma, vel pyramis inscripta ONMKQ cylidri, vel coni ad prisma, vel pyramidem cylindro, seu cono FEBCP inscriptam.

THEOR. IX. PROP. IX.

Similes Coni, & Cylindri in triplicata ratione sunt diametrorum, qui in basibus.

SInt duo coni, & cylindri similes, quorum altitudines Q, & P, quarum bases OMNK, & FEBC. Dico hos conos, seu cylindros esse inuicem in triplicata ratione diametrorum. Inscribantur in cylindris prismata. In conis pyramides quotlibet laterum æqualium V. g. quadrangulæ sed similiũ basium, vt in fig. prec. propos. Prisma ONMKQ, seu pyramis ad prisma, seu pyramidem FEBCP habet proportionem triplicatam lateris MK ad latus BC ex prop. 14. & 25. & Cor. prop. 26. Sed vt ex prop. ant. P. L. Ita est pyramis, seu prisma Q inscriptum ad pyramidem, seu prisma P inscriptam, vt est conus, seu cylindrus Q circumscribens ad cylindrum, seu conum P circumscribẽtem, ergo cylindrus, seu conus erit ad conũ, seu cylindrum P in triplicata ratione KM ad BC eadẽ ex 41. l. 6 diametri circuli L ad diametrum circuli A.

COROLLARIVM.

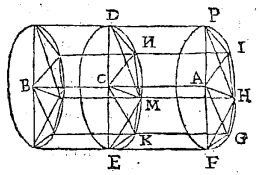
QVare patet, quod etiam erunt in duplicata ratione basium suarum.

THEOR. X. PROPOS. X.

Si Cylindrus plano secetur aduersis planis parallelo erit, Cylindrus ad Cylindrum, vt axis ad axem.

SIt Cylindrus AB sectus plano DME parallelo planis PHF, vel illi aduerso. Dico ita cylindrum super axem AC esse ad cylindrum super axem CB, vt axis AC ad axem CB.

* Diuidatur circulus basis PHGF in partes æquales, & per eas partes, & per axem ductis planis, & per subtensas PH, & HF, DM, & ME constituantur prismata inscripta PHAC, & DMCB, & cæt. vsque dum inscribant totum cylindrum. Quæ in cylindro AC erunt omnia æqualis altitudinis, sicut & omnia, quæ inscribunt cylindrum CB, & æqualium basium AHF, & CME. Et ideo erunt inuicem, vt altitudines, nempe quæ sunt in cylindro AC ad ea, quæ sunt in cylindro CB, vt altitudo AC ad altitudinem CB ex 20. par. 1. h.



Rursus inscribantur alia, vt sunt AGFC AGHC, & cæt. dimidiatis arcubus priorum in cylindro AC, & CEKB, & CKMB in cylindro CB, & hæc etiam secundò inscripta in cylindro AC ad ea, quę inscripta sunt secundò in cylindro CB erunt, vt altitudo AC ad altitudinem CB, vtpote, quod omnia sint æqualium basium AGF, & CKE, sicut AGH, & CMK, & cæt. ex cõstructione.

Rursusq; idem replicetur toties, donec inscripta prismata adeo multiplicentur, vt omne spatium absumant, quòd possibile est absumi remanens inter superficiem rotundam cylindri, & subtensas planas prismatum superficies. Satis enim constat sine ostensione particulari, quòd quantò magis prismata multiplicantur, tantò minus spatium remanet inter superficiem globosam cylindri, & prismatũ superficiem planam. Quia ergo omne spatium, quod absumi potest à prismatibus inscriptis, & quantum fieri potest multiplicatis absumptum est. Ergo illa prismata æquabunt cylindros AC, & CB, & ea quidem, quę inscripta sunt in cylindro AC ipsum æquabunt, sicut quæ inscripta sunt in CB cylindro ipsum æquabunt quoque. Siquidem si non æquarent, remaneret aliquis locus nouę inscriptioni contra præsuppositum. Verùm ea omnia prismata in AC sunt semper ob æquales bases, in quibus sunt, ad ea omnia, quę in CB, vt altitudo AC ad altitudinem CB ex 21. h. p. 1. Ergo etiam cylindrus AC erit ad cylindrum CB, & altitudo AC ad altitudinem CB.

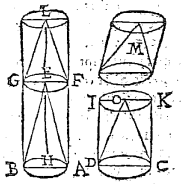
THEOR.

THEOR. XI. PROPOS. XI.

Super æqualibus basibus constituti Coni, & Cylindri inuicem sunt, vt altitudines.

SInt super bases æquales AB, & CD duo coni AED, & COD, & duo cylindri FAGB, & KCDI. Dico esse inuicem, vt altitudines, seu recti, seu scaleni sint.

Prob. Nam si cylindrus CADI superponatur cylindro FAEG erit vnicus cylindrus, cuius axis HL, quod si sit scalenus, vt M, pro illo apponatur alius EL rectus æqualis altitudinis, qui cùm sit etiam æqualis basis erit æqualis scaleno M ex prop. 4. h.



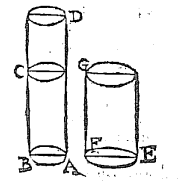
Cum ergo cylindrus totus in axi HL, sit diuisus in E in duo segmenta erit cylindrus FGAB ad cylindrum EL æqualis, vel scaleno M, vel recto KICD, vt axis HE ad axem EL ex præced. axis verò in cylindro EL recto est altitudo cylindri æqualis altitudini cylindri M.

Probatur quoque de conis, quia enim supra ostensum est prop. 7. h. quòd conus est tertia pars cylindri eandem cum ipso altitudinem, & basim possidentis, estque eadem proportio partis, & totius, erit quoque proportio coni ABE ad conum GLF, vel ad scalenum M, vt altitudo HE ad altitudinem EL.

THEOR.. XII. PROPOS. XII.

Æqualium Conorum, & Cylindrorum reciprocantur bases, & altitudines, & quorum Conorum, & cylindrorũ reciprocantur bases, & altitudines illi sunt æquales.

POnantur duo cylindri, quorum bases, & altitudines sint inæquales (Nam si sint æquales per se patet) nimirum BD, & EG, quorum bases AB, EF. Detruncetur ab altiori portio æqualis cylindro EG, quæ sit AC, & sic exordiemur argumentum.



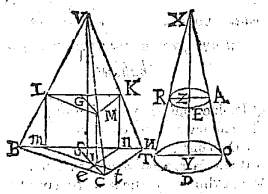
Probatur. Duo cylindri AC, & EG in ea proportione ad inuicem referuntur, qua bases: Cylindri verò AC, & AD inuicem referuntur, qua altitudines Ergo ita erit basis EF ad basim AB, vt altitudo AD ad altitudinem CB vel GI æqualem, quia proportiones sunt eædem, cylindro AC æqualium cylindrorum DB, & GE ex hypothesi, & ideo ex 7. l. 5. eædem inuicem. Conorum verò eadem est ratio, quia sunt tertia pars cylindrorum.

Probatur secunda pars. Nam quia ponitur eadem proportio basis EF ad basim AB, vt altitudo DA ad CB, vel æqualem IG, erit quoque cylindrus DE altior ad cylindrum CA ob eandem basim AB, vt GE maioris basis ad cylindrum ICA eiusdē altitudinis ex 16. l. 5. Quare ex 9 l 5. cũ duo cylindri DC, & GE eandem rationem habeant eidem CA, inuicem erunt æquales. Quod & asseritur de conis, qui sunt tertia pars cylindrorum, vt supra ostendimus prop. 7. h. in quibus descripti sunt. Et propositio intelligitur etiam de scalenis cùm sint æquales rectis eiusdem basis, & altitudinis.

PROBL. XIII. PROPOS. XIII.

Frustum Coni æquatur Prismati, cuius basis habeat pro vno latere diametrum minorem, cum semidifferentia diametrorũ, & pro alio lineã æqualẽ minori peripheriæ, & semidifferentia eius à maiori, & insuper trienti prismatis, cuius basis ex prædictis semidifferentijs tamquam lateribus sit constituta.

SIt frustum coni QDTRA, & altitudo coni sit YX basis inferior QDT, & diameter eius QT superior REA, & diameter RA. Fiatque pyramis NVB eiusdem altitudinis SV, cuius basis NCB habeat crus NC æquale diametro QT, & CB æquale crus peripheriæ. Dico frustum coni æquari prismati, cui basim substernant latera em, & en, quæ sunt ex l m, & l basis minoris lateribus, & semidifferenc l, l r, & insuper trienti prismatis, cui basis re, lt semidifferentis contenta, quæ prismata sint æqualis altitudinis, ac frustum coni.



Probatur. Nam fiat triangulum æquale circulo QT ex 3. Tract. 30. & sit NCB, cuius latus HC æquetur radio QT, & CB peripheriæ QDT, & super eam extollatur pyramis VNCB, quæ æquabit conum QXT ex Coroll. prop. 3. par. 2. huius. Deinde, ad eleuationem eandem basis OI planum KML, quod substernet basim triangularem pyramidi KMLV; quam dico esse æqualem cono RAX, quia ex prop. 3. par. 1. Coroll. obtinet æqualem basim LKM basi REA, vt ostendam, & eandem altitudinem ex effectione.

Quod

* Quod autem basis KML æquetur basi REA. Pr. vt QT diameter ad RA diametrum, ita est altitudo YX ad altitudinẽ ZX in triangulis per axẽ æquiangulis RAX QXT, sed vt YX ad altitudinem ZX, sic est SV altitudo ad GV altitudinẽ, quod sint æquales. Vt autem SV ad GV, sic est CV ad MV ob similitudinem triangulorum SVC, & MVG; vt autem CV ad VM, sic NC ad KM ob similitudinẽ triangulorũ NVC KVM. Ergo ex 16. l. 5. vt QT ad RA, sic NC ad MK: sed QT, & NC sunt æquales: Ergo ex 12. lib. 5. RA, & KM erunt æquales. Rursùs eodem arg. ex 42. l. 6. peripheria QDT est ad peripheriam REA, vt diameter QT ad diametrum RA; Iam verò ostensum est QT esse ad RA, vt NC ad KM, nempe vt CV ad MV, & in triangulis similibus CBV, & MLV, vt CB ad ML: Quare ex prop. 16. lib. 5. ob similitudinem rationum QDT peripheria erit ad AER peripheriã, vt CB crus ad ML, sed QDT peripheria, & CB crus ex effectione sunt æqualia. Ergo ex 12. lib. 5. AEK peripheria, & ML crus erunt æqualia. Propterea que ex 3. Tract. 30. basis KML æquabitur circulo REA ob KM æquale diametro RA, & ML æquale crus peripheriæ REA. Igitur pyramis KMLV, & conus REAX æquabuntur ob bases, & altitudines æquales ex prop. 3. h. Coroll.

Si ergo à cono QDTX, & pyramide NC BV ex effect æqualibus auferatur hinc pyramis KMLV. inde conus AERX, quę æqualia ostensa sunt, restabit frustum coni RAQTD æquale frusto pyramidis NCBKML: sed frustum pyramidis KMK NCB æquat prisma, cuius basis duo latera sint constituta vnum ex diametro KM minori, & semidifferentia, vt idem latus; alterum ex crure ML peripheriam minorem æquante, & semidifferentia eorundem, & insuper trienti prismatis, cuius basis crura efficiant vnum semidifferentia diametrorum NC ab MK, & alterum semidifferentia CB ab ML, quę est peripheriarum ex Cor. prop. 35. p. 1. h. Ergo etiam illi æquale prismati erit frustum conicum QDTRA.

EXPENSIO II.

De soliditate Annulorum, & Rhomborum solidorum.

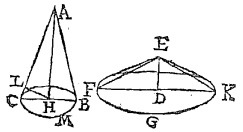
CVm quandoque annuli soliditas perquiri oporteat, hinc corpus annulare inter cętera corpora rotunda tetragonismo supponimus maximè; quia ad sphęrę soliditatem perscrutandam apprimè deseruiat.

THEOR. I. PROPOS. IX.

Duo Coni Isosceles; cuius vnus habeat basim superficiei alterius æqualem; & altitudinẽ alterius lineæ ductæ orthogonaliter à centro basis ad latus coni primi, erunt inuicem soliditate æquales.

SIt conus ABC, in quo à centro basis sit ducta HL perpendicularis ad latus AC, & huic lineę sit æqualis altitudo DE coni KEF: sicut superficies curua coni ABC basi circuli KGFK sit æqualis. Dico *hos duos conos esse inuicem æquales.*

Quia superficies BAC æquatur basi KFG, & æqualia ad idem relata eandem habent proportionẽ



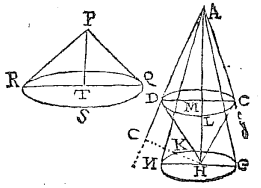
qualis DE, igitur sicut basis KGF ad basim BMC; ita Altitudo HA ad altitudinem HL, vel DE; Quare reciprocam bases altitudinibus habent proportionem; vnde ex prop. 12. Tr. h. coni CAB, FEK erunt æquales.

THEOR. II. PROPOS. XV.

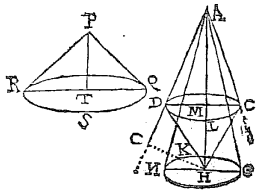
Si ex duobus conis Isosceli bus Rhombus solidus componatur, æquatur cono illi, qui basim habet æqualem basi compositorum conorum, & altitudinem æqualem altitudini vtriusque.

SIt Rhombus ex duobus conis integratus ADHO; Sitque alter conus, cuius basis GKN basi OLD æquetur, & altitudo HA sit eadem. Dico *Rhombum, & conum esse æquales.*

Probatur. Sicut AH ad AM; sic Rhombus solidus OADH ad conum OAD, quia coni compositi eandem habent basim, quare sunt inuicem, vt altitudines, vt autem AH ad AM, ita quoque ob æqualitatem basium GKN, OLD est conus AGN ad conum OAD. Ergo cum eidem cono OAD eandem dicant proportionem inuicem sunt æquales Rhombus OADH, & conus GNA. Quod intelligitur etiam si coni OAD, OHD inuicem non sint æquales.







THEOR. III. PROPOS. XVI.

Si sit Rhombus, vt superiùs, & sit conus alterius conorum Rhombi superficiei basem possidens æqualem, & altitudinem æqualem lineæ à vertice coni Rhombum componentium perpendiculariter in latus productum cadenti, conus iste prædicto Rhombo solido æquatur.

SIt Rhombus HOAD conicus, & à vertice H in latus AC productum, si oportet cadat perpendicularis HC, & fiat QPR conus altitudinem TP æqualem perpendiculari HC, & basim QSR æqualem superficiei OAD coni possidens. Dico *Rhombum* HCAD *hoc est conum* QPR *isse æqualem.*

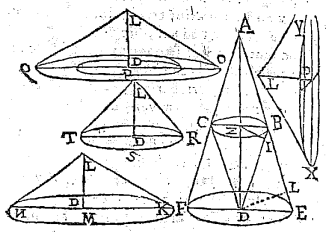
Probatur. Quia superficies coni OAD æquatur basi QR, erit superficies OAD ad propriã basim ELD sic basis QR ad basim GKM, OLD basi æqualem. Sed vt superficies AOD ad propriam basim DLO; sic AD ad DM ex dictis prop. 30. Tract 31. cum circulus æqualis superficiei conicę sit ex radio TQ media proportionali inter latus, & diametrum basis, & sicut AD ad DM; sic ob similitudinem triangulorum AH ad HC; Ideoque etiam basis QSR ad basim GKN, sic AH ad HC, idest altitudo AH ad altitudinem PT; quæ æqualis lineę HC est effecta. Cum ergo habeant bases conus GAN, & QPR altitudinibus reciprocè proportionales ex prop. 12. Tract h. erunt inuicem equales coni GAN, & QPR. Quare etiam Rhombus OADH, qui probatus est ant. prop. æqualis cono GAN cono KPQ æquabitur.

THEOR. IV. PROPOS. XVII.

Si à Cono Rhombus inscriptus auferatur, residuo conus ille æqualis est, cuius altitudo perpendicularis à vertice opposita Rhombi ad latus deductæ, & cuius superficies residuæ conuexæ superficiei æquetur.

SIt conus EAF, cui inscriptus Rhombus ABCD, qui scilicet verticem in centrum D defigat, & linea LD à vertice D cadens perpendiculariter in latus EA feratur. Fiatque conus, cuius altitudo DL basis verò KMN; æquetur superficiei, quę ambit residuum coni EBCF, vt ex propos. 32. Tract. 31. efficì potest. Dico *hunc conum* KLN *esse æqualem illi residuo* EBDCF *sublato cono* BCD.

Fiant duo alij coni primus maior, cuius basis OPQ coni AEF toti superficiei conuexę æquetur, & DL sit altitudo, qui ex dictis æquabitur cono EAF. Deinde alter constituatur, cuius basis RST æquet



superficiem BAC coni conuexam, & altitudinem DL, iste quoque conus æquabitur Rhombo BACD: Basis verò OPQ æquatur basibus KMN, & SRT, quòd æquetur toti superficiei conuexæ EAF, cui quoque duę bases KMN, & RST æquantur ex constructione, cum quę tres isti coni LRT; KLN, & OLQ, vtpote altitudine equali prediti se habeant ad inuicem, vt bases ex prop. 5. Tract. h. Sequitur quod OLQ conus basis OPQ, cùm ad ambas bases simul KMN, RST dicat proportionem æqualitatis, quod etiam ad conos KNL, & RLT eadem relationem feratur, & eos æquet, & ideo conus EAB duos conos æquabit KLN, & RLT. Vnde sublatis æqualibus cono RLT, & Rhombo BACD residua conus KLN, & EBDCF residuus annulus triangularis erũt æqualia.

COROLLARIVM I.

HInc ellicitur frustum coni EBCFD æquale esse duobus conis primo, cuius basis sit æqualis superficiei frusti conici, quam inuenies ex propos. 31. tract. 31. & altitudo LD, alterum cuius altitudo IZ, & superficies basis ipsius coni CDB superficiei æqualis.

COROLLARIVM II.

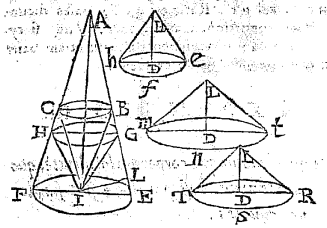
HInc ellicies, quod si fiat conus OLQ æqualis toti cono EAF, & TLR V. g. cono BAC, postea fiat conus, cuius basis circulus æquet residuũ annulum sublata basi RST à basi OPQ, vt ex 18. tract. 30. potes efficere, & super hunc circulum erigatur conus YLX altitudinis DL, iste æquabit frustum coni EBCF.

Probatur. Nam cum coni sint omnes eiusdem altitudinis, ita erit conus RLT ad conum OLQ, vt basis RST ad basim OPQ, sicque conus XLY ad conum OLQ, vt basis XY ad basim OPQ; Ergo ex propos. 25. lib. 5. prima quantitas, RLT conus cum quinta, nempe cum cono XLY erit ad secundam OLQ, vt tertia basis RST cum sexta basi YX ad quartam OPQ basim; sed basis RST, & YX sunt æquales conicę basi OPQ. Ergo etiam conus YLX, & RLT sunt æquales cono OLQ, sed RLT æquat conum BAC partem, & OLQ æquat totum conum EAF, ergo residuus conus YXL æquabit frustum coni reliquum CBEF,

THEOR. V. PROPOS. XVIII.

Si à Rhombo Rhombus auferatur inscriptus, residuo conus ille æqualis est, cuius altitudo æquetur perpendiculari à vertice oppositæ Rhomborum deductæ ad latus, & superficies residuæ conuexæ superficiei.

SIt Rhombus AGIH, in eoque inscriptus alter Rhombus BACI, & linea à vertice communi conorum L deducta, quæ sit LL. Sit que e L h altitudinis L, & basim e f h habeat superficiei conuexæ, quę ambit CBCH, residuæ Rhomborum BACI & AGIH ablato cono BAC æqualem. Dico hunc conum e Lh æqualem esse soliditati residuæ Rhomborum si alter ABCI ab altero AGIH Rhombo auferatur. Fiat itaque conus, cuius basis RLT æque-



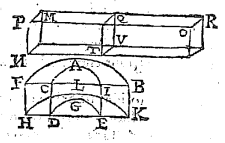
tur BAC coni superficiei cõuexæ, & altitudo DL sit IL iste conus erit æqualis Rhombo BACI ex 16. propos h. item sit tLm, cuius basis tnm æquet superficiem conuexam coni GAH, & altitudo eadem DL, eritque ex prehabitis probo 16. conus iste tLm æqualis Rhombo GIAH. Et quia tota huius basis æquat superficiem totius coni GAH, & RLT superficiem conuexam coni BAC; & e f h. superficiem residuã BGHC erit basis tnm basibus e f h, & RST æqualis, & altitudines DL erunt æquales, cum ergo coni æqualium altitudinum ex prop. 5. Tr. h. se habeant ad inuicem, vt bases, erit conus tLm æqualis conis eLh, & RLn, & item ex dictis Rhombo GAIH; sed conus RLT æqualis est Rhõbo BACI: Ablatis itaque istis æqualibus erunt residua æqualia eLh conus, & BGICH residuum Rhombi.

THEOR. VI. PROPOS. XIX.

Annulus solidus, cuius basis quadrata, æqualis est parallelepipedo, cuius vnum latus sit æquale annuli altitudini, & basis æqualis annulo eiusdem plano.

SIt Annulus solidus ABCDEI. Dico hunc esse æqualem parallelepipedo NR, cuius vnicæ superficiei QO æquetur superficies annuli HLK EGD, & altitudo NF altitudini LE.

Sit prisma NR quadrãgulę basis, & æqualis basis MO basi BAFL cylindri BFAHK, & portio parallelepipedi, seu prismatis æqualis basi QP cylindri interni CAIDE basi DGE, & conũ omnium sit æqualis altitudo NP cylindrorum ipsorum æqualis altitudini EF. Isti cylindrus, & prisma erunt æqualia ex prop. 3. Cor. p. 2. h. quia habent bases cylindrorum basibus æquales, & sunt æqualis quoque altitudinis, scilicet cylindrus BAHEK prismati NR, & cylindrus internus IADE prismati NQ. Ablato itaque EADI cylindro interno à cylindro maiori BAHEK

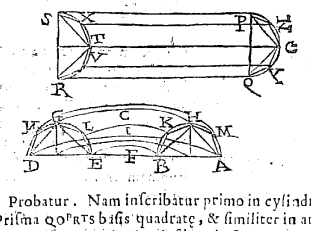


sicut, & prisma NQ æquans cylindrum à prismate NR residua nimirum prisma TR, & annulus solidus KIACH remanebunt æquãlia, cuius basis OQ plana æquabit annulum planum KLNDGE, vtpote, quod sit quoque residua æqualis basis RP circulo BAFL ablata plana basi PQ æquante IACL basim.

THEOR. VII. PROPOS. XX.

Annulus solidus rotundus æquatur Cylindro, cuius rectangulum per axem sit æquale annulo plano, qui per diametrum transit, & circulus basis æque tur annuli circulo.

SIt annulus solidus circularis quoad superficiem ABCDGE, & cylindrus, cuius rectangulum per axem SRQP sit equalis annulo plano ABFIED, & EGD circulus circulo basis QOP. Dico hunc annulum esse æqualem cylindro SVRO.



Probatur. Nam inscribatur primo in cylindro Prisma QOPRTS basis quadratę, & similiter in annulo prisma æquale, & eiusdem basis EGDHAB ex prec. erunt æqualia. Inscribantur rursus conicæ superficiei segmenta plana SXTPZO, & RVTQYO, & GLEHBK, & DNGAMH in annulo solido omnia erũt æqualia inuicem ob æquales bases DNG, & SXT, &c. & æqualis altitudinis, ac circulus GCH: siquidem ex prop 41. Coroll. Tract. 31. quantùm augescit extima quælibet, vt GNCMH, tantùm decrescit intima correspondens superficies, & sumpta in æquali re motione à puncto G, vel H: quare suppletionibus illis, quæ augescunt defectum superficierum deficientium, omnes erunt æquales altitudinis ac longitudo, quam præbet circulus GCH. Quapropter si in cylindro QS figura solida tot laterum æqualium inscribatur, cuius latera æquentur inscriptarum annulo solido superficierum rectis lateribus, vt QY ipsi LE, & alia alijs erunt omnes

superficies solidæ figuræ cylindro inscriptæ eiusdem altitudinis, ac quę in annulo solido inscriptæ fuere. Siquidē cylindri altitudo ponitur ex Thesi equalis annuli circulo GCH, cuius altitudinē mutuò se supplendo inuicem equant superficies ānulo inscriptæ, ideoque planæ superficies annulo inscriptę erunt eiusdem altitudinis ac illæ, quæ in cylindro fuere inscriptæ. Sunt autem etiam bases æquales, vtpote triangulorum GND, & QYO æqualium ex thesi. Quadere omnia solida prismata annularia inscripta annulo solido erunt æqualia prismatibus inscriptis in cylindro V.g. GNDCAMH prisma ānulare prismati recto RVTQYQ ex prop.19 Tract. h quia scilicet sunt eiusdem basis RY, & altitudinis RV.

Si ergo in annulo solido tot prismata annularia inscribantur, quot possunt inscribi, similiterque in cylindro tot quot possunt inscribi, omne spatium annuli prismata ipsi inscripta, & cylindri cylindro inscripta æquabunt, sed facta qualibet multiplicatione semper perseuerant equalia: Ergo soliditas cylindri, & soliditas annuli, quas æquant, erunt æquales.

COROLLARIVM.

HInc autem est superficies globosas tum annuli, tum cylindri esse æquales, quia omnia plana annulo inscriptibilia, quę figurā eius quantū potest multiplicata æquant, sunt omnia si simul sumantur supplentibus incrementis excrescentium defectibus deficientium æqualia omnibus planis figuræ cylindri æquali numero laterum similiter inscriptę, vt patet ex ostensione præc. propos.

PROBL. I. PROPOS. XXI.

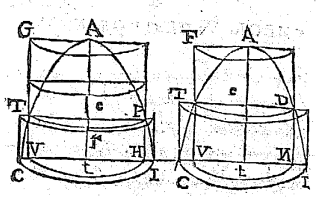
Annulos solidos cylindris æquales, vel proportionales reperire.

DEscribatur Parabolicum conoides IAC, & circa eum cylindri describantur æqualis altitudinis DF, & IT inscribatur quoq; eisdem equèaltus DV. Dico residuum ablato DV à TI cylindro esse annulum solidum æqualē solido cylindro DF.

Probatur. Quia annuli solidi residui ablatis cylindris inscriptis à circumscriptis omnes sunt remanentibus ad altitudinem axis residui erecti, & circumscriptis cylindris equales.

Quod sic ostendo in Parabola AIC est TA ad EA ex propos.5. tract.24. vt quadratum TI ad quadratum ED, sed TA est dupla TE ex effectione. Ergo etiam quadratum TI duplum erit quadrati DE; quare etiam circulus ex IT semidiametro duplus erit circuli ex ED radio, & ideo etiam cylindrus IT duplus erit cylindri DF ex prop. 5. tract. h, sed etiam NF duplus est cylindri VD. Ergo cylindrus IT, & NT sunt æquales, ablato itaque cylindro VD communi annulus residuus solidus IT remanebit solido cylindro DF æqualis.

Eadem ratio, atque ostensio erit de cylindris quibuscumque inscriptis, & circumscriptis, alijs. Sic TA est ad EA ex prop.5. Tract 24 vt quadratum IT ad quadratum PE, & ita circulus TI radio, & cylindrus IT ad circulum ex PE, & cylindrum PG, sed TA ad EA est, vt 3 ad 2. Ergo etiam cylindrus IT ad cylindrū PG, vt 3. ad 2. erit, sed huic HC



lindrus quoque est, vt 3. ad 2. quod sit, vt altitudo IA ad altitudinem EA. Quare cylindrus IT, & HC erunt æquales ex 9. l.5. ablato itaque communi cylindro PV remanebunt æquales cylindrus residuus PG, & annulus IGHPT, & sic de cæteris.

COROLLARIVM.

HInc colligas omnes superficies orizontales horum annulorum equari cylindricis V.g. IHCV, vel PI. Ratio est, quia bases dicunt eandem proportionem ac cylindri. Vnde si cylindri crescunt per augmenta æqualia etiam bases annulares eodem modo crescent.

EXPENSIO III.

De quorumcumque corpòrum soliditate, quorum sectiones basi parallelæ sint similes, aut æquales.

CVm aliquando corpora reperiantur, quæ irregularis quidem figuræ sunt, sed tamen cubationem non respuunt; hinc de illis agere oportet; quorum multa attulit Ambrosius à Sancto Vincentio agens de Ductibus; sed nos ab ipso non nisi vnicum exemplum excerpemus.

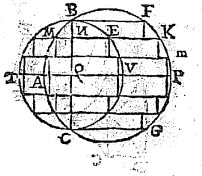
THEOR. I. PROPOS. XXII.

Si dentur tria plana communem habentia altitudinem; in quibus ductæ æquidistantes parallelæ sint continuè proportionales, & ex illis planis corpora formentur, ea corpora erunt æqualia.

DEtur portio circuli BGFC, & BAC ex quibus superficiebus rectanglè in linea CE vnitis intelligatur corpus erectum, quod ex duabus partibus superficie globosa eorūdem arcuū FPG curuata, vel BAC comprehendetur ex alia parte verò superficiebus planis BFGC, cuius vnicum latus curua terminatur FPG alterum verò plano BAC. Dico hoc corpus esse æquale corpori, quod ex duobus semicirculis BVC quadratè vnitis exoritur.

Inscribantur singulis planis equalis altitudinis rectangula, vt TQ, & VQ, & QA, & cętera singulæ lineę in plano BDC ductæ singulis in plano BAC existentibus eędem sint, & ex illis componantur rectangula eas rectanglè vniendo, illa erunt æqualia quadratis ex lineis in BEC constitutis. Siquidem ex prop.35. lib.3. Rectangulum ex PQ, & QA

QA æquale est quadrato QB, sed QB æquatur VQ, ideoque quadratum VQ æquabitur rectangulo ex PQ, & QA. Sic ex eadem prop.35.lib.3. rectangulū ex KN, & NM æquatur rectangulo ex BN, & NC, quod æquatur quadrato NE ex eadem propos. vnde rectangulum KN, & MN æquale erit quadrato NE, sic dicas de alijs. Si ergo ex istis basibus parallelepipeda intelligātur erecta æqualis altitudinis omnia erunt æqualia illis ex prop.19.Tract.23. quæ quadratis basibus æqualis altitudinis eriguntur V.g. parallelepipedum PQ super rectangulum ex PQ, & QA erectum erit æquale parallelepipedo ex VQ quadrato erecto in altitudinem eandem P m, & sic dicas de alijs.



Si ergo hęc duo corpora alterū ex BFGC superficiebus, & BAC; alterum ex semicirculo BVC dicantur inęqualia, Dicatur V.g. corpus ex BEC constitutum maius quantitate e. Et inscribantur tot parallelepipeda in vtroque modo predicto, vt ex prop.17.Tract.23. fieri posse ostendimus donec solida in vtroque inscripta relinquant minorem quantitatem, quam e, tunc rectangula solida in corpore ex semicirculis BVC, quod dicitur maius constituta, essent adhuc æqualia illis, quæ in corpore minori ex planis BFGC, & BAC constituto inscripta sunt, hęc itaque essent maiora corpore, in quo inscripta sunt. Siquidem superarēt differentiam e, quę inter corpus, & corpus inuenitur, quod omninò absurdum est.

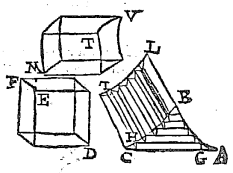
COROLLARIVM.

ERit autem eadem ostensio etiam si BVC non sit semicirculus, sed portio circuli. Quamobrem generaliter quando dantur tria, aut quatuor plana, in quibus ductę singulę, aut sint tres continuę proportionales, aut quatuor proportionales, ex quibus nimirum medijs fiant rectangula equalia extremis, illa plana rectanglè compositā, & secundùm alia latera superficiebus rectanglè se coniungentibus, seu curuis, seu rectis circumuestita prout latera curua sunt, sed recta constituent corpora equalia illis, quę superficiebus operiuntur, quorum parallelæ æquè diuisę inscriptę equè possunt, sic propos. 70. Tract. 24. semiclipsis FHG cum altera eiusdem portione rectanglè vnita, & superficiebus sibi inuicem incidentibus vestita constituent corpus equale triangulo semiparallelogrammi FG si secundum diametrum FG rectanglè vniātur, & similiter rectangulis sibi inuicem superficiebus terminentur; idem asseres de prop.69. eiusdem Tract. & sic de cęteris.

THEOR. II. PROPOS. XXIII.

Duo corpora quascumque habentes bases in eandem altitudinem subuecta parallelo ductu basis, inuicem erunt, vt ipsæ bases.

AD perfectam corporum cubationem præter conos, & cylindros videtur etiam necessarium noscere omnia ea corpora, quę cylindri naturam sapiunt, & sunt ea, quę parallelis lateribus inuicem à quacumque basi, seu elliptica, seu cuiuscumque incertę figurę in altum eleuentur, siue obliquè, siue rectè, dummodò in alteram, æqualem, & similem basim terminent: ea verò cylindracea dicemus.



Sint duo corpora ABCL, & DEF, quorum bases sint BAC, & DE altera quidem cuquecumque BAC V.g. curuis AB, & BC, altera verò quadrata DE. Dico, quod sicut BAC est ad DE: ita corpus BACL super primam basim ad corpus DEF si sint æquealta.

Inscribantur tot rectangula in basi ABC ex propos.1. Tr.30. donec minus euadat spatium, quòd inter curuas AB, & BC intercipitur, & rectangula inscripta, omni data possibili quantitate, & super illa parallelogramma, vt GH erigantur parallelepipeda GHI, æquè eleuata, ac solidum DEF ob eandem altitudinem datorum solidorum ABCL, & DEF, quę omne quoque spatiū possibile inter CBIL curuam superficiem, & superficies solidorum inscriptorum occupabunt; Quare parallelepipeda inscripta ipsa tandem ABCL soliditatem adequabunt: Nam si non equarent, nouę inscriptioni parallelepipedorum, & ideo suarum basium daretur locus in basi ABC, & sic contra Thesim omni possibili quantitate minus spatium non remansisset. Verùm parallelepipeda singula inscripta, vt GHI sunt ad solidum eiusdem altitudinis DEF, vt bases V.g. GHI ad DF, vt basis GH ad basim DE, & sic de alijs.

Quare ex prepos. 17. lib 5. omnia quoque solida inscripta in ABCL erunt ad solidum DEF, vt bases omnes parallelogrammę GH, & cęt. inscriptę in ABC basi ad basim DE: sed illę equant ABC basim solidi ABCL, sicut & parllelepipeda inscripta solidum ABCL, vt dixi, ergo solidum ABCL erit ad solidum DEF ex 7. prop. lib.5. vt basis ABC ad basim DE.

Sit deinde aliud corpus MVT equealtum, vt ABCL. Dico iterum; quod corpus ABCL erit ad MTV corpus, vt basis ABC ad basim MT. Quoniā ABCL corpus est ad DEF corpus est, vt ABC basis ad DE basim, & ob eandem rationem *conuertendoque* DEF corpus MTV corpus, vt DE ad MT erit ex æquo ABCL corpus ad MV corpus; vt ABC basis ad MT basim.

CO-

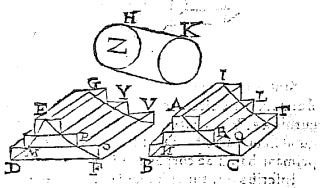
COROLLARIVM.

HInc patet, quod si hęc solida æquales habuerint bases, & altitudines æqualia sint, quia cum referantur, vt bases, & bases referantur proportione æqualitatis, sequitur, vt etiam ipsa corpora eadem æqualitatis ratione inuicem respondeant.

THEOR. III. PROPOS. XXIV.

**Si corpora cylindracea æqualium similium, & similiter positarum basium sint diuersę altitudinis mutuò correspondebunt, proportione, vt altitudines.*

*SInt corpora cylindracea ABCI, EDFG, quæ obtineant bases omninò æquales quoad latera ream, & positionem. Dico ea esse inuicem, vt altitudines.



Probatur. Nam cum bases ponantur omninò similes, si diuidantur parallelis in partes æquales erunt omnia rectangula circumscripta basibus æqualia V. g. BQ rectangulo DO, & alia singula in BAC singulis in DEF. Quare, & parallelepipeda super eas bases erecta solida ipsa circumscribentia erunt ad inuicē, vt altitudines V.g. BCT solidū erit ad DFV solidū, vt altitudo QT ad altitudinē OV. Sic rectangulū solidum NRL ad solidū MPY ob æquales bases NR, & MP est, vt altitudo RL ad altitudinē PY id est vt solidum BT ad TV solidum, & ita dicas de omnibus alijs. Quare ex prop. 17. lib. 5. ita erunt omnia solida BCT, & NRL, & cęt. parallelepipeda in corpore solido BCAI circumscripta ad omnia solida parallelepipeda DFV, MPY, & cęt. in corpore DFEG circumscripta, vt altitudo QT ad OV. Ergo & ipsa corpora talia erunt, cùm omnis possibilis circumscriptio tandem ipsa solida exequet, vt toties diximus.

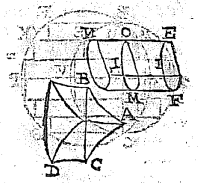
COROLLARIVM.

*HInc autem colligitur, quod etiam si bases non sint similes, idem tamen sequi. Nam detur solidum KZ, cuius basis Z non sit similis basi CAB; sed tamen æqualis, & ideo basi FED, sitq; eleuatum super illam cylindraceum, quoddam corpus ad eandem eleuationem cylindracei DFG ex prec. Coroll. erunt æqualia cylindraceum DEFG, & super Z, sed CABI cylindraceū refertur ad FDEC, vt altitudo AI ad altitudinem EG. Ergo etiam ad corpus in Z locatum æquale ipsi FDEG referetur, vt AI ad EG, id est vt AL ad æqualem RH altitudinem corporis Z.

THEOR. IV. PROPOS. XXV.

Cylindracea Corpora, quorum reciprocantur bases, & altitudines sunt æqualia, & æqualium cylindraceorum reciprocantur bases, & altitudines.

*SIt corpus cylindraceum ABCD, & aliud EFIO. Sitque basis ABC ad basim FEI, vt altitudo EO ad altitudinem CD. Dico hęc corpora esse æqualia. Quod ostenditur eodem modo, ac prop. 12. Tract. h. fiant enim OLMN eiusdem altitudinis



ON, ac CD, critque ex prec. 1. FO solidum cylindraceum ad NOLM corpus eiusdem basis, vt altitudo EO ad altitudinem ON, id est vt EO ad ON ex hypothesi, ita est basis ABC ad basim EIF vel OLM, vt autem ABC ad basim OLM, ita est ex prop. præced. solidum ABCD ad solidum OLMN. Ergo eidem solido OLMN solidum EIFO, & ABCD eadem dicunt proportionem altitudinis EO ad ON altitudinem. Quadere ex 7. lib. 5. erunt hęc solida cylindracea inuicem æqualia, secunda quoque pars eodem modo probatur ac prop. 12. h.

COROLLARIVM.

HInc enascitur omnes cylindros Ellipticos mirum quorum basis Ellipsis est esse equales si obtineant, vel bases, & altitudines æquales, vel bases altitudinibus reciprocè proportionales: Item esse ad inuicem in ea proportione quā bases si fuerint tantum æquales altitudine, quod si fuerint æquales basibus tantùm se inuicem referre, vt altitudines. Quibus potest addi quod si fuerint similes habeant triplicatam suorum diametrorum, seu axium proportionem. Quia omnes portiones axis ad applicatas ad diametrum eandem proportionem dicunt ex def. ellipsium similium prop. 51. Tract. 24. Ideoque omnia prismata, seu parallelepipeda in eis inscripta similia. Vide, &c.

EXPENSIO IV.

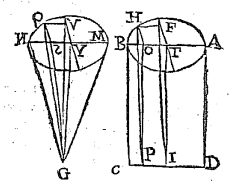
De Conis Ellipticis, atque eorum in lineam rectam terminantibus.

SVnt coni diuersę rationis ob diuersam basim, quod sit elliptica, vel hyperbolica, de quibus soliditas pretereunda non est, vnde sit.

THEOR. I. PROPOS. XXVI.

** Conus in rectam lineam terminans est ad conum in punctum terminantem eiusdem basis, & altitudinis, vt 3. ad 2.*

*SIt conus ABCD, quem descripsimus pr. 8. tr. 25. in lineam rectam terminans. Dico, quod ad conum MNG eiusdem basis, & altitudinis se habet, vt 3. ad 2.



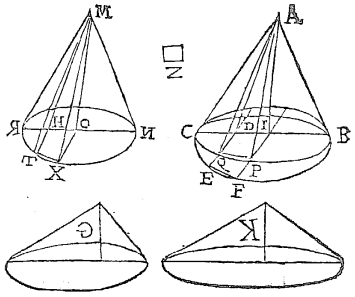
Probatur. Inscribantur enim in cono in lineam terminante prismata hoc modo. Ducatur per subtensam FH, & OT parallelas planum FP, PT. Rursusq; per FT, HO parallelas plana FTI, OHP, eritq; prisma basis quadratæ FHTOIP, fiat verò in basi equali, & simili ex Thesi coni MNG eadem operatio constituendo super æqualem basim, & similem QV sy pyramidem, quæ erit æqualis altitudinis. Cum itaque prisma, & pyramis sint æqualis altitudinis, & basis erunt ad inuicem, vt prisma ad pyramidem. At vero prisma basis quadratę se habet ad pyramidem eiusdem basis, vt 3. ad 2.. Si ergo in cono in rectam terminante inscribantur talia prismata, quo vsque describi possint, & in cono item acuto æqualis numerus pyramidum super æqualem similēq; basem, omne spatium tum huius, tum illius coni absorbebitur, & occupabitur, quare cum semper omnis inscriptibilis multitudo prismatum in cono in rectam terminante, & in cono in punctum finiente se habeant, vt 3. ad 2. nimirum, vt prisma quadratę basis ad pyramidem, erit ipse conus in rectam terminans ad conum in punctum finientem, vt 3. ad 2.

Quod verò prisma quadratę basis sit ad pyramidē eiusdem basis, & altitudinis, vt numerus 3. ad numerum 2. patet. Nam prisma, quod semper obtinet quadratam basim est triplum pyramidis triangularem basim habentis ex pr. 22. p. 1. h. at vero pyramidis quadratę basis ex prop. 5. par. 1. h. est dupla pyramidis triangularis basis. vnde prisma ad talem quadratę basis pyramidem se habebit, vt 3. ad 2.

THEOR. II. PROPOS. XXVII.

Conus Ellipticæ basis, & eiusdem normalis altitudinis, seu rectus, seu obliquus est æqualis cono eiusdem normalis eleuationis basis circularis; quæ tamen sit æqualis Ellipsi cono Elliptico basim subiacenti.

*PRobatur. Nam si assumantur in basi coni circularis partes equales peripherię circuli NTR, subtendanturq; rectæ. vt XT, & ab ijsdē punctis perpendiculares ad diametrum ducatur XO, & TH, & cęt. Deinde axi elliptico CB basis coni elliptici BAC circūscribatur circulus BFC, cui diuiso in æquales numero partes, vt circulus NTR eodē modo rectę subtrahantur EF, & segmentis peripherię ab ijsdemque punctis in axem BC normales ferantur, vt ED, & FI, & ducatur subtensa ambitui elliptico PQ. & fiat prorsùs eadem operatio, quam



exhibuimus prop 24. tract. 30. erunt spatia elliptica PIQD equalia spatijs circularibus XTOH, vt ibi ostenditur. Si ergo super hęc spatia Pyramides eleuentur, cum in eandem eleuationem extollantur, erunt equales; quamobrem, & ipsi coni erunt equales. Si enim coni essent inequales sequeretur illud idem absurdum, quod in pyramidibus assignauimus pr. 21. p. 1. h. nempe si circularis V. g. esset minor quantitate z; quòd ab eo tot pyramides inscriptę auferri possent, donec remaneret aliquid minus quantitate z proximè, & tunc facta æquali numero ablatione Pyramidum inscriptarum continuè equalium quantitate pyramidibus à cono circulari minori ablatis, remaneret aliquid maius in cono elliptico BAC, vtpote maiori; quam residuum coni circularis NMR. Si ergo auferatur adhuc ab hoc cono elliptico BAC aliquid equale, vel maius proximè differentię z, cùm & à cono circulari MNR idem numerus pyramidum equalium deduci posset, aufereretur aliquid maius differentia z à residuo coni NMR minore, quam differentia z, quod esset absurdum.

COROLLARIVM I.

*HInc primo enascitur conos ellipticos, si sint equalium basium, & equalis altitudinis esse inuicem equales; quia tertiò circularis basis equabuntur.

COROLLARIVM II.

*QVod si habeant bases altitudinibus reciprocè proportionales, quod sint equales. Nam sit coni altitudo IA ad altidudinem coni K, vt basis coni K ad basim coni BAC, sitque coni K elliptici equalis basis coni G, & equalis altitudo, & ideo conus circularis G, cono K elliptico æqueturi; sicut conus NMR circularis, equalis basi, & altitudine æquatur cono BAC: Erunt ergo isti coni circulares G, & NMR ex prop. 12. h. equales, quod & reciprocentur bases, & altitudines, quod sint equales basis coni G ipsi basi coni K, & altitudo altitudini sicut, & equalis basis coni NMR basi coni BAC, & altitudo altitudini.

Quare sicut illę reciprocantur, sic & istę, eritq; basis coni NMR ad basim coni G, & altitudo coni G ad altitudinem coni MNR: Ideo coni NMR & G equabuntur ex h. Propterea que BAC equalis cono NME, & K conus cono G equalis, inuicem equales erunt.

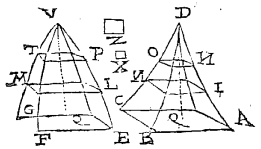
COROLLARIVM III.

*DEducitur quoque conos Ellipticos æqualis basis, & diuersę altitudinis esse ad inuicem, vt altitudines; quia conus circularis NMR equalis altitudine, & basi, & soliditate cono BAC, V.g. est ad conum G, vt altitudo ad altitudinem, qui conus cono K soliditate basi, & altitudine sit equalis quare ellipticiCAB, & K ad inuicem referentur, vt altitudines, & idem dicendum de basibus inequalibus, si altitudines fuerint equales.

THEOR. III. PROPOS. XXVIII.

Duo corpora coniformia, quorum omnia plana basi ipsorũ parallela similia sint, & inuicem plana huius planis alterius, erunt ad inuicem, vt bases: dummodo in æqualem altitudinem assurgant.

SInt duo corpora ADBC, & EVGF; quæ In eandem altitudinem VQ, vel DQ, non malem eleuentur, in quibus si ducantur plana æquidistantia, ea inueniantur similia inuicem, & basi; cui parallela sunt, & etiam æque eleuatis secantibus planis In alio corpore ductis; ita vt ne dum IN V. g. planum ipsi AC, & NO ipsi IN, vel AC; sed etiam AC basis huius ADC sit ad EG basim alterius, vt planum secans NI ad secantem LM, & NO ad PT. Dico, quod eadem proportione referrentur, vt bases.



Probatur. Nam si intelligantur circumscripta cylindracea corpora æquealta: tum inuicem, tum & cylindraceis corporibus alterius, erunt hæc ad inuicem, vt bases ex prop. 23 huius. Si ergo hæc corpora C ABD, & E EGV asserantur non ad inuicem referri, vt bases, sit minor proportio ABCD corporis ad EVGF corpus, quam ABC basis ad EFG basim, sit ea minor quantitate Z. Itaque tot cylindracea corpora circumscribantur donec differẽtia, quæ inter ABDC corpus, & ipsa sit X minor differentia, quàm Z, & tunc omnia ista cylindracea corpora corpori ADCB circumscripta dicent minorem proportionem ad EVGF, quam basis ABC ad basim EFG, quò contra ostensa est. Siquidem cum singula referãtur in ABCD ad singula in EVGF, vt bases singulæ singulis. Singulæ verò bases obtineant ex thesi eam proportionem, quæ AC ad EG; etiam omnia paralleleipleda referentur, vt ABC basis ad EG basim, & tamen minorem dicerent cum enim coniforme corpus ABCD esset ad EVGF in minori proportione quantitate Z, & circumscripta corpora cylindracea nõ addant quantitatem Z corpori ADCB, sed solùm quantitatem minorẽ, vtique dicent ad EVGF minorem proportionem basis ABC ad basim EFG.

Quòd & dicas, si ABCD corpus asseratur maius in proportione, nam tunc EVGF minus erit, quam EFG ad ABC basim, vnde eodem argumento vti poteris; cùm itaque ABCD ad EVFG non possit obtinere, neque maiorem, neque minorem proportionem basis ABC ad basim FGE consequetur eandem.

COROLLARIVM I.

*HInc enascitur; quòd, si hæc corpora fuerint æqualium basium, quòd se referent, vt altitudines: quia plana quoque huius ad plana secantia alterius in easdem numero partes erunt æqualia: Quare, & cylindracea corpora huic circumscripta ad cylindracea alteri circumscripta erunt, vt altitudines huius ad altitudines alterius, & cæt. vt eodem argumento persuadere tibi poterit.

COROLLARIVM II.

HInc rursus est, quod sint æqualia, si sint equales, tum altitudines, tum bases.

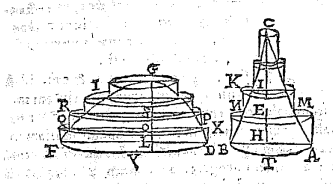
THEOR. V. PROPOS. XXIX.

Solida corpora, quorum omnes bases basi parallelæ similes sint, & altitudines obtineant basibus reciprocè proportionales æqualia sunt.

*SIt ABC corpus quoddam, cuius altitudo normalis HC se habeat ad altitudinem alterius corporis GL; vt basis DYF ad basim ATB reciprocè. Omnes verò sectiones, quæ parallelæ basi fiunt, sint similes ipsi basi. Dico hæc corpora esse æqualia.

Probatur. Nam circumscribantur vtrinque solida cylindracea eodem numero multiplicata. Diuidantque altitudines in partes proportionales ex 18. lib. 5. & in singulis corporibus V. g. in ACBT inuicem æquealta, sicut, & in GDFY, vnde erit altitudo EH ad altitudinem LO, vt HC ad GL, ideſt ex Thesi, vt basis DYF ad basim ATB. Vnde ex

pręc. pr. 25. cum hæc cylindracea ATBN, & DYFQ habeant altitudines basibus reciprocè proportionales erũt



æqualia. Idem asserendum de cylindraceo MENK, & PQQR, nam altitudo IE, ideſt æqualis EH ad OS, aut æqualem OL, vt basis PQQ ad basim NEM reciprocè, erit quoque solidum MENK solido PQQR æquale, & idem asseras de omnibus alijs circumscriptibilibus. Quapropter cum omnia cylindracea solido ACBT circumscriptibilia sint æqualia solidis cylindraceis solido DGFY circumscriptibilibus, si hæc multiplicentur quantùm multiplicari possunt, occupabũt ex pr. 14. Tr. 33. omnẽ quantitatem possibilem, quæ inter solida exhibita, & cylindracea circumscripta intercipi queat. Vnde nulla quantitate possibili illa excedet, quare etiam ipsa corpora, quorũ omnia plana basi parallela sint similia, & habeant altitudines basibus reciprocè proportionales inuicem erunt æqualia.

EXPENSIO V.

De Conoidibus Hyperbolicis.

CConoides Hyperbolicum efficitur ab hyperbola circa suum axem versata. Quare si secetur à plano rectangulo ad axem illa sectio erit circulus.

At si à plano ad axem obliquo, sectio erit ellipsis, vt supra ostendimus Tract. 25. Expens. 5.

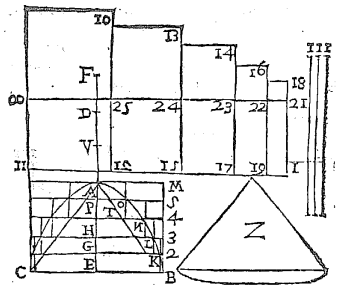
THEOR. I. PROPOS. XXX.

Conus assumptus ad quodlibet Hyperbolicum Conoidem eam proportionem habet, quam diameter cum transuersa diametro tota, ad diametrum, & diametrum transuersam cum dimidio eiusdem.

*SIt quodlibet Conoides, seu rectangulè, seu obliquè sectum ABC. Dico conum inscriptum item ABC habere eam proportionem ad conoidem, quam diameter EA cum diametro transuersa AD, tota inquam ED ex istis compacta habet ad duas, nimirum diametrum EA, cum diametro transuersa AD, & huius dimidio FD, ideſt EF.

Progress. 1. Sit itaque conus Z; cui conus BAC habeat eam proportionem, qua ED respicit FE. Dico huic cono conoidem hyperbolicum esse æquale; quod si tale non est, erit aut maius conoides, aut minus, sed neutrum esse potest; Ergo erit æquale.

Progr. 2. Nam maius sit, si id esse potest, & inscribatur in conoide figura inscripta, & circumscripta, ex multis cylindris constans eiusdem altitudinis. Quales inscripti sunt EK, LG, & quales circumscripti BG, KH, adeoque multiplicentur ex propos. 14. tract. 33. vt figura circumscripta super inscriptam minus addat, quam conoides super conum Z. Fiatque CM cylindrus ex frustis cylindrum E 2, G 3. & cæt. constans æqualis, tum altitudinis, vt priores, & æqualis basis. Quia ergo circũscripti cylindri minus excedunt inscriptos, quàm conoides conum Z, & hæc circumscripta cylindrorum multitudo est maior, quam conoides erunt etiam inscripti cylindri maiores cono Z.

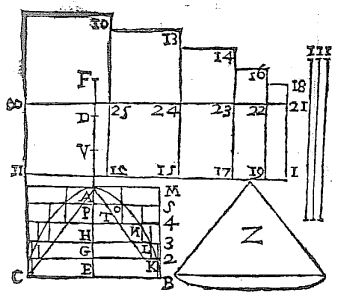


Progr. 3. Et quia vt diximus supra pronos. 7. tract. h. Cylindrus MC ad conum ABC inscriptum habet proportionem, triplam habebit eam, quam tripla DE, vt sũt lineę III ad DE, & vt FE ad TV, quia TA est tertia pars diametri AE, & AV tertia pars totius AE. Quia itaque cylindrus CM est ad conum inscriptum BAC, vt III ad DE, at conus inscriptus BAC ad conum Z habet eam proportionem, quam ED ad FE ex *æquo* cylindrus CM ad conum Z erit, vt III ad FE. Verum illæ III lineæ habent eam proportionem ad DE, quam EF ad V, vt dixi. Ergo *permutando* DE ad VF eam habebit proportionem, quam III lineæ ad EF, ideſt quam cylindrus MC ad conum Z, ideſt DA ad VA, ideſt 2. ad 1. & EA ad AT, ideſt 3. ad 1. quoniam DA, & EA componunt ED: at AV, & AT componunt VT.

Progr. 4 Cylindrus itaque primus E 2 pars magni cylindri, cuius altitudo MB ad primum inscriptorum EK eiusdem altitudinis GE habet proportionem, quam bases circuli, & circuli, quam quadrata eorum, & quadrata, quam quarta pars, quæ tandem pro latere habent applicatas DE, & GK, itaque cylindrus E 2 ad cylindrum EK habet eam proportionem, quam applicatæ quadratum BE, quę etiam radius est ad quadratum applicatæ KG ijsdem muneribus fungentis; Quadratum verò BE ad quadratum GK habet eam proportionem, quam rectangulum ex DE, EA quale est 10. 11. ad rectangulum DG, GA quale est 12. 13. ex 6. Tract. 24. Propterèque cylindrus E 2. ad EK cylindrum erit, vt rectangulum 11. 10. ex DE, & EA ad rectangulum 12. 13. ex GD, & GA lateribus. Eodem argumento vteris ad ostendendum cylindrum G 3. vel quod idẽ E 2. ad cylindrũ GL habere proportionẽ, quam rectangulũ ex DE EA, sc. 10 11. ad rectãgulũ ex HD, HA, quod est 14. 15. & sic de alijs; Quare omnes V. g. ex 19. Tr. 17. quatuor cylindri æquales E 2. G 3. H 4. P 5. ad ones V g. cylindros inscriptos EK, GL, NL, PO habebũt eã proportionẽ, quã quatuor rectangula æqualia 11. 10. ad quatuor 12 13. 15 14. 16 17. 18 19. Dixi autẽ quatuor V. g. tot. n. erunt quot cylindri

inſcripti, & tot inſcribentur, quot oportet.

Progr. 5. Ducta itaque 21. 8. interuallo 25 12 quantum eſt AE habebimus ſeriem quadratorum decreſcentium 8. 1 0. & 25. 13. & cæt. vſque ad 32 18. & rectangulorum item decreſcentium 11.25 vſque ad 24 19. quæ decreſcunt: rectangula quidem vnico decremento arithmetico quoad latitudinem, at quadrata duplici decremento arithmetico ſecundùm vtrumque latus longitudinem, latitudinem; Quare ex 12. tract. 27. erunt integra rectangula V. g. quatuor ad deficientia eiuſdem numeri, & altitudinis dupla, vt etiam potes videre. Nam deficientia 12 24. 15 23. 17 22. 19 21. includunt decem partes rectanguli quale eſt 19. 21. At quatuor æqualia primo 11 25 maiori, viginti partes includũt. Vnde ſi vtriſque addatur rectangulum 11 25 erit proportio quinque æqualium ad quinque decreſcentes minus, quam dupla.



Sic omnia quadrata V. g. quatuor æqualia comparata 4. quadratis decreſcentibus ſunt magis, quam tripla, vt ex prop. 14. Tract. 27. vt & etiam ex calculo colligere licet, nam quatuor quadrata æqualia ad decreſcentes ſe habent, vt 100. ad 30. At ſi vtrinque addas idem quadratum ſunt minus, quam tripla cum ſe habeant, vt 125. ad 55.

Vnde ſimul quadrata æqualia cum rectangulis æqualibus ad quadrata decreſcentia cum rectangulis decreſcentibus habebunt proportionem 2. ad 1. & magis, quam 3. ad 1. quæ proportiones aggregatę ex 32. Tract. 17. ſunt, vt 12. ad 5. & ideo habebunt proportionem magis, quam 12. ad 5. Vel pluſquam diametri DE ad partem eius VT, quæ ex progr. 3. eſt, vt 2. ad 1. ſcilicet DA ad AV, & 3. ad 1. ideſt AE ad AT, ſi tamen ab vtriſque quadratis, rectangulíſque æqualibus, & quadratis, rectangulíſque inæqualibus decreſcentibus excludas maximum. At ſi includas iam quadrata, rectangulaq; integra, & maxima erunt reſpectu quadratorum decreſcentium, minùs quam 2. ad 1. & quam 3. ad 1, ſcilicet minus, quam 12. ad 5. vel DE ad VT.

Progr. 6. Propter hoc cylindri quoque æquales, ſi compares V.g. quatuor æquos quatuor decreſcentibus exclutis maximis V. g. E 2. G 3. H 4. T 5. ipſis EK GL HN TO qualis comparatio eſt inſcriptorum erit eorum æqualium proportio ad decreſcentes inſcriptos plùs, quam 12. ad 5. quam DE ad VT. At ſi compares multitudinem cylindrorum, æqualem æqualium numero cylindris decreſcentibus, ſed incluſis maximis V. g. 5. qui faciunt cylindrum CM ad quinque B- KH LT NP OA veluti comparantur æquales cum circumſcriptis, eorum proportio eſt minus, quam 12. ad 5. ideſt minus, quam DE ad VT. Eò quia, referantur, ita cylindri MC ad cylindros inſcriptos conoidi, & circumſcriptos decreſcentes, vt rectangula æqualia rectangulo IO. II. reſpiciunt rectangula decreſcentia, dummodo æqualia numero ſumantur, vt progr. 4. oſtenſum eſt.

Prog. 7. Cum ergo cylindri B 2. & cæt. ideſt totus MC ad figuram cylindrorum inſcriptam maiorem habeant proportionem, quam DE ad VT habebit quoque maiorem proportionem ad illam inſcriptorum cylindrorum figuram, quam ad conũ Z: Siquidem progr. 3. ad conum Z oſtenſus eſt cylindrus MC habere proportionem, quam DE ad VT. ideſt quam 12. ad 5, ſi enim quatuor cylindri E 2. G 3. & cæt. quatuor decreſcentibus comparati minoribus illis KE, CL, HN, & cæt. dicunt maiorem proportionem, quam DE ad VT, quantò magis, ſi omnes, quibus conſtat cylindrus CM, comparentur omnibus inſcriptis, qui ſemper minores numero ſunt, nempe vna vnitate minùs cum vltimus cylindrus in conoide inſcribi nequeat, qui habeat altitudinem PA.

Progr. 8. Hinc autem ſequitur conum Z figurã inſcripta eſſe maiorem, cum illi cylindrus totus MC, quia figuræ inſcriptæ dicit maiorem proportionem, quòd eam ſecundùm plures eius partes contineat, quàm ad conũ Z; hoc autem eſſe nequit, cum oſtenſum ſit progr. 2. figuram cylindrorum inſcriptam CONO Z eſſe maiorem.

Progr. 9. Si verò ſit conoides minus CONO circumſcribatur, & inſcribatur talis figura ſolida ex multiplicatis cylindris, vt circumſcripta addat ſuper inſcriptam quantitatem talem, quæ ſit minor quantitate illa, qua conoides à cono Z, in quantitate deficit. Itaque circumſcripta cylindrica figura erit minus cono Z, quia enim conoides CONO Z eſt minus, & inſcripti cylindri minus ſunt, quam conoides, & minus circumſcripti cylindri excedunt inſcriptos, quàm conus, conoidem, vtiq; conus circumſcriptis cylindris maior erit, & ipſi erunt illo minus.

Progr. 2. Deinde ea omnia conſiderentur, quę prog. 3. 4. 5. dicta ſunt.

Progr. 10. Cum ergo omnes cylindri æquales MC cylindrum magnum componentes ad quinque cylindros circumſcriptos minorem habeant proportionem, quam DE ad VT, ſiquidem probatum eſt progr. 4. rectangula æqualia quale eſt primum 10. 11. ad rectangula decreſcentia 11 18. minorem habere proportionem, quam tripla, & dupla ſcilicet 5. ad 12. nimirum quam DE ad VT ſi vtriſq; addantur maximo quale 10. 11. & ideo cylindri quoque æquales cylindrum CM componentes, qui ex progr. 3. cylindris decreſcentibus eadem proportionem dicunt, quam rectangula æqualia decreſcentibus, ſi vtriſque addantur maximi, vt hic fiere oportet, quia primus E 2 cylindri CM eſt etiã circumſcriptus, dicent proportionem minorem ad cylindros decreſcentes, quam DE ad TV.

Et hinc eſt quod cylindri circumſcripti ſimul ſumpti erunt maiores cono Z, ad quem cylindrus MC dicit eandem proportionem, quàm DE ad TV ex progreſſ. 3. Sed ex progreſſ. 9. maior conus Z, probatus eſt quam cylindri circumſcripti ſimul ergo eſſet maior, & minor, quod eſt abſurdum.

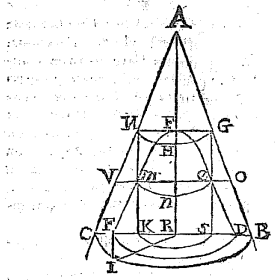
Cum itaq; conus Z, neque maior, neq; minor eſſe poſſit conoide hyperbolico conus Z, & conoides erunt æqualia, ideoque quam proportionem dicet conus inſcriptus BAC ad conum Z eam dicet ad conoidem; ſed ad conum Z dicit proportionem quam

quam BE ad BE. Ergo conus inſcriptus BAC dicet ad conoidem Hyperbolicum eam proportionem, quam BE ad EP; nimirum quam diameter EA, & tranſuerſa diameter AD habet ad diametrum eandem FA, & tranſuerſã diametrum AD cum dimidio eiuſdem tranſuerſæ diametri, nimirum DF.

THEOR. II. PROPOS. XXXI.

Quæcumque rectæ ducuntur in conoide hyperbolico rectangulæ ad planum hyperbolæ generantis vſque ad ambitum coni Aſymptotici ſunt æquales inuicem.

SIt conus ABC rectus, Aſymptoticus ſectus plano per axem exhibente ſectionem hyperbolicam DEF, quæ conoidem generet, & ſint Aſymptoti eiuſdem AB, & AC, fiant ſectiones GHN rectę ad axem RA, quę per verticem hyperbolicum tranſeat, & aliæ, VT BI C, quæ ei æquidiſtent, & à puncto E, quo ſecat Hyperbolam generantem normales ad BIC erigantur, vt EI. Dico EI, & aliæ ſimiles ſi adſint eſſe ſingulę æquales lineę FN, & ideo inuicem.



Probatur. Nam rectangula BE, & EC ſingula ſunt æqualia quadrato FN, vt ex prop. 46. Tract. 24. de conicis, ſed etiam quadrata ex BE, & EC ſunt æqualia quadrato EI. Ergo quadratum ex EI, & FN ſunt æqualia; Vnde & latera eorum EI, & FN ſunt æqualia.

THEOR.. III. PROPOS. XXXII.

Solidum fruſtum aſymptotici coni conoidem Hyperbolicum cingens æquat cylindrum; cuius axis æquet axem Hyperbolæ generantis, & radius baſis, æquet lineam tangentem eius verticem, & in ambitum Aſymptotici coni terminantem.

SIt vt ſupra conus Aſymptoticus BAC cingens conoidem hyperbolicum DFE, ſitque cylindrus SKGHN, cuius baſis GHN habeat pro radio FN verticem hyperbolę generantis tangentem, & in conum aſymptoticum BAC terminantẽ. Altitudo verò, ſeu axis ſit RF idem, qui etiam eſt axis conoidis. Dico ſpatium NGIB DCF fruſtum ſolidum aſymptotici coni, cingens conoidem cylindro deſcripto SKGHN eſſe æqualem.

Prob. Solidi cylindri cylindrum KG diuidentes, & fruſto KNGB annuli circũſcripti æqualis altitudinis ſemper erunt æquales ex prop. 23. h. Cor. vt baſes. Quamobrem ex propoſ. 22. Tract. h. & corpora etiam ipſa erunt æqualia.

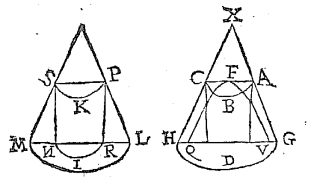
Quod autem baſes ſint æquales oſtendltur. Nã annulus quicumque CIBDE baſis corporis cingentis æquat NHG quãcumque baſim cylindri; eo quia ex præc. EI æquet NF. Ex prop. verò 18. tract. 30. XC EI circulũ æquat annulus CIBDE: ſiquidem circ EI radio, & circulus ex EB radio æquant ex IR circulum, ideſt ex CB: ablato itaque ex EB circulo reſtant circulus ex EI, ſeu ex FN ex præced. equales lineę, & annulus CIBDE baſis corporis conoidem cingentis æquales.

Idem verò dicas de quolibet alio ſpatio, ſiue maiori, ſiue minori, vt de ſpatio FNVmneOGF, qui eadem ratione æquatur cylindro mG.

THEOR. IV. PROP. XXXIII.

Conoides Hyperbolicum iiſdem poſitis æquatur ſpatio, quod Cylindrum prædictum circumcingit.

PRobatur. Fruſtum coni ACBGH, in quo conoides, æquatur fruſto coni KSPLIM, in qua cylindrus ex hypoth. & ſpatiũ FAGVQHCF cylindro BKSNB. æquatur P ex 31. h. Aufer ergo à fruſto coni PKSMI cylindrũ KPSRN, & à fruſto coni GABCHD ſpatiũ circumcingens conoidem æquale cylindro, remanebitque conoides FVQ æquale ſpatio ſolido circumcingenti cylindrum PKSMNIL.



COROLLARIVM.

QVare colligitur, quod habita cognitione Aſymptotos conoidis hyperbolici, & baſis eiuſdem, facilè deueniemus in cognitionem eius ſoliditatis. Aſymptotos autem reperiemus ex propoſ. 47. Tract. 24. de conicis ſectionibus. Habita autem diametro GH habebimus quoque ex propoſ. 12. Tract 25. baſim GDH datis verò aſymptotis ſoliditatem quoque coni venabimur ex prop. 7. h. inquirendo ſoliditatem cylindri illum conum comprehendis, cuius conus GDHX eſt tertia pars. Pariter id efficiemus de cono ABCX ſublata altitudine conoidis, & ablato hoc cono ABCX ab illo GDHX erit fruſtum ABC GDH ex quo auferemus cylindrum PSKRIN; & reſiduum ex præced. erit ſoliditas Hyperbolæ.

EXPENSIO VI.

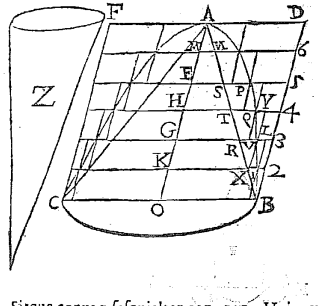
De Conoidis Parabolici proportionibus.

SOlidum Parabolicum efficitur, à parabola circa suum axem versata vsque dum ad terminum vnde discessit redeat, vt diximus Tr 25. in def. Ex. 4. Quare si secetur plano rectangulo ad axem illa sectio erit circulus, si secetur plano obliquo illa sectio erit Ellipsis, vt probauimus Tract. 25. Expēl. 4. sed modo de eorum soliditate agendum est.

THEOR. I. PROPOS. XXXIV.

Conoidale Parabolicum quomodocumque sectum, seu rectè, seu obliquè habet proportionem sesquialteram ad conum inscriptum.

FIsto conoidale parabolicum ABC, in eoque inscriptus conus item ABC, sitque superficiei secantis diameter BC, in qua tum conus, tum conoides existat. Axis verò AO, & A erit vertex, tum trianguli, tum conoidalis: Circa verò conoidem cylindrus sit eiusdem altitudinis, ac conoides, conusque inscriptus habens latera BD, & FC parallela axi AO; basim verò BC, cono, conoidique communem.



Sitque conus Z sesquialter cono BAC. Huic cylindrus erit duplus, quia est triplus coni inscripti, est sicut numerus 3. ex 7 h. sesquialter numero 2. sed triplo numeri 2. nempe 6. est subduplus, numerusq; ipse 6. duplus numeri 3.

Dico itaque hunc conum Z sesquialterum cono BAC esse æqualem concidi prædicto.

Progr. 1. Quod si talis non est, erit conus Z, aut maior, aut minor conoide, sed nec maior, nec minor esse potest; Ergo æquale erit cono ipsi conoides nam si est maius, sit maius quantitate P.

Et Probabitur. Quod non possit esse maius conoides cono Z sine implicantia, & absurdo. Circumscribatur itaq; & inscribatur conoidi figura ex frustis cylindrorum constans, ita vt quodlibet frustum habeat basim aliquam &c. applicatis ordinatim ad axem AO, & sint æqualis altitudinis, vt est cylindrus TO inscriptus, LK circumscriptus, habens pro diametro basis suæ circularis applicatam IK; Tot verò inscribātur, & circumscribantur: donec spatium, quo figura circumscripta superat inscriptam ex prop. 14 Tract. 33. minus sit, quàm quantitas ea, qua conoides superat conum, & sic figura inscripta erit maior cono Z cum minus differat à quantitate maiori conoide, quam conus Z à conoide maiori, quàm conus Z.

Progr. 2. Tunc, quia cylindri sunt omnes æquales altitudinis ea ad inuicem proportione gaudebunt, qua gaudent bases ex prop. 5. Tract. h. Proportio verò basium, quę sunt circuli eadem est, quæ quadratorum ex prop. 40. lib. 6. quarum semilatera sunt applicatæ BO, & KI: quadrata verò applicatarum ex prop. 5. tract. 24. eam habent proportionem, quam intercepta diametri portiones: Itaque ita est cylindrus O2 ad cylindrum IO, vt basis, seu circulus, cuius diameter, & semilatus quadrati ambientis BO ad circulum similis rationis IK: sed vt circulus ad circulum, ita quadratus ad quadratum, & ex 18. l. 5. quarta eius pars, quale est quadratum, cuius latus est BO ad quadratum, KI, & ita intercepta portio diametri AO longitudine ad AK ex citat. 5. Tract. 24 & ita etiam ob parallelismum linearum in triangulo BAO linea 2 K, vel BO ad KX. Quare ex 16. l. 5. O2 cylindrus ad cylindrum OI erit, vt 2 K ad KX. Idem autem dicendum de alijs cylindris. Nam ita est cylindrus 3 K ad cylindrum KV vt quadratum 3 G, vel BO ad quadratum VG, & ita est AO ad AG, & BO ad RG, & ideo ex 16. l. 5. est cylindrus K3 ad cylindrū inscriptum KV, vt BO, vel æqualem 3 G ad GR. Et eadem ratione cylindrus G4 ad cylindrum GQ, vt BO, vel H4 ad TH; sicque de alijs vsq; ad MN vbi nullus est cylindrus inscriptus.

Progr. 3. Si ergo omnes lineę in vnam colligantur longitudine æquales, qualis vna ex ipsis BO si comparentur cum lineis omnibus ab axe OA ad coni latus deductis, quarum vna est XK habebunt proportionem duplam; quia BA diagonalis secat omnes simul sumptas per medium, ita vt omnium linearum simul media pars sit intra BAO alia extra. Cum ergo lineę æquales qualis EC habeant ad quinque in cono deductas qualis XK est vna, proportionem duplam, etiam cylindri simul omnes quinque æquales diametris basium, & altitudine ad quinque cylindros in conoide inscriptos consequentur proportionem duplam.

Nam vt OI est ad O2 sic KX ad OB, & vt KX ad 2, & sic GR ad OB, ergo ex pr. 25. l. 5. vt OI. & KV ad O2. & ideo ad duplū O3 sic KX, & GR. simul ad OB, & ideo ad eius duplam OB, K2. & sic dicas de alijs gradatim procedendo.

Progr. 4. Quare totus cylindrus illis constans, & insuper cylindro DN; nempe cylindrus DC habebit ad inscriptos quinque proportionem plusquam duplam: Idem vero cylindrus erat coni Z duplus, vt supra dictum est, quia factus est coni BAC sesquialter. Figura igitur inscripta ex cylindris minor est cono Z; quod est absurdum, cum poneretur maior, eo quia circumscripta figura minus adderet super inscriptam, quam conoides super conum Z, & ideo cum figura circumscripta sit maior conoide etiam inscripta erit maior cono Z, cum tamen probata sit minor.

Progr. 5. At si aliquis asserat conum Z esse minus conoides. Figura iterum eodem modo inscribatur & circumscripta superet inscriptam tali quantitate quæ sit minor, ea qua conoides deficit à cono 2, eritque figura circumscripta minor cono Z, siquidem figura inscripta est minor conoide, quæ & excedit à circumscripta minus eo, quo conus excedit conoidem, & ideo necessariò conus Z est maior ipsa figura circumscripta.

Progr.

Progr. 6 Sit itaque primus cylindrus figuræ circumscriptę O 2, secundus KL, tertius GY, & cęt. sintque frusta cylindrorum æqualium tot numero O 2, K 3, & G 4, & cęt. Itaque, vt est frustum O 2 ad cylindrū O2, vt primus circūscriptor. Sic basis circularis, cuius radius BO, vt frusti cylindri, ex BO ad eundē circulū, vt basis cylindri circūscripti vtque circulus ad circulū, ita quadratum ad quadratum, & sic quarta pars quadrati, cuius latus est radius BO ad quartā partem eiusdem quadrati ex 18. lib. 5. vt prius, est enim eadem sub duplici consideratione, vnde habet proportionem æqualitatis. Non sic verò cętera frusta cylindrorū comparata cum cylindris circumscribentibus. Nam ita est K3. cylindrus ad KL cylindrum, vt circulus cuius radius 2 K, idest BO ad circulum IK, & vt circulus ad circulum, ita quadratus ad quadratum, & eius quarta pars, cuius latus 2 K ad alterius quartam partem, cuius latus IK; vt autem quadratum 2 K ad quadratum IK, ita est AO ad AK, & ita ob parallelas K 2. vel BO ad XK, & ita in quibuscumque arguendum: quare omnia frusta cylindrorum æqualium inter BO ad omnes cylindros circumscriptos eam obtinebunt proportionem, quam latera æqualia omnia qualia BO 2 K ipsorum cylindrorum radij ad ductas BO, KX, RG, & cęt. ab axe ad latus coni inscriptivt supra pr. 3. ex prop. 25. l. 5.

Progr. 7. Lineæ verò æquales A 2 inclusiuè vsque ad 6. sunt duplæ ad alias ab X vsque ad N si simul in vnam longitudinem redigantur, vt dixi. Si verò addamus vtrisque BO propter cylindrum primum BX; qui vnus ex circumscriptis est, & vnus ex æqualibus cylindri DC; erunt omnes à B & NO vsq; ad 6. sex lineę sex lineis inter BN minus quàm duplæ, cum hę postremæ non dimidio crescant per additionem BO, sed æqualiter. Quadere cylindri quoque æquales frusta cylindri DC ad cylindros circumscriptos erunt minus, quam dupli.

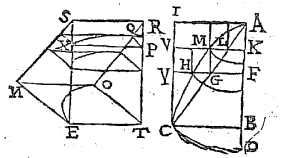
Progr. 8. Sed cylindrus DC ex illis sex cylindris æqualibus constans est duplus coni Z, ergo ex prop. 7. lib 5. figura circumscripta est maior cono Z, cum cylindrus maior CD ad figuram circumscriptam dicat minorē proportionem, quod est cōtra id, quod supra dictum est prog. 5. conum Z esse maiorem ipsa figura circumscripta. Cum ergo conus 2, nec maior, nec minor sit conoide erit æqualis ipsi conoidi. Quare cum sit triangulo inscripto BAC sesquialter, etiam conoides cono inscripto erit sesquialterum.

THEOR. II. PROPOS. XXXV.

* *Conoides parabolicum, & singulæ partes ipsius æquantur partibus coni prismatici eandem altitudinem, & eandem basim obtinentis.*

*SIt semiparabola ABC, quæ sufficit ad demonstrationē, & intelligatur efformare corpus parabolicum ABCD, cuius partes sint AKM, & FAH, deinde sit prisma TNRS, ex rectangulo CABI, & ex triangulo BAC, in quo sit conus prismaticus ex pr. 26. h. RSOTE. Dico, quod & totum ABCD æquatur prismatico cono RSTE, & singulæ eius partes KAM partibus PQSXR intercipientibus eandem altitudinem.

Pr. Nam ex pr. 39. tr. 24. Applicata axi FH, & MK & quęcūq; alia dās pūcta in parabola M, H est media proportionalis inter KL, & KV inter, & FG, FY, & ideo ex pr. 19. l. 6. rectangulum KL, KV æquat quadratū KM, & ita dicas de rectangulo FG, & FY, quod æquat FH quadratum, & de quocumq; alio. Omnia verò rectangula ex KL, & KV, & KY, FG, & cęt. idest parallelepipeda æqualta super eas bases erecta ex propos. 8. Tract. h. æquantur parallelepipedis æquealtis ex quadratis HE, & MK singula singulis, & ita quartę ellipsium in illis inscriptæ quartis circulorum in quadratis inscriptis ex prop. 26. tr. 30.



& ideo solidę quartæ cylindrorum solidis quartis ellipsium æquabuntur, singulæ singulis æqualtis ex propos. 37. Cor. tr. h. Ideoque ex prop. 19. l. 5. quadrans cylindri ex quadrante KM æquabitur quartæ cylindri PQX, & cęteris cæteri, quia æquealti extolluntur super æquales bases quadrante, nimirum ex radio KM, & quadrante ellipsis descriptæ in rectangulo PQX, quia scilicet dicunt eandem proportionē tū bases, tū solida super KM, & QPX bases erecta, quam quadratum ex KM, & rectangulum ex PX, idest XV, & PQ, idest KL æquala.

Cum itaque omnia solida æquealta inscripta, vel circumscripta quartæ parti conoidis ACBD æquent omnia solida inscripta in prismatico cono KOTE, & hęc si omni possibili numerositate multiplicentur tandem accessura sint ad æqualitatem quadrantes quidem solidi quartæ parti conoidis; Parallelepipeda verò ex quartis ellipsium prismatico cono RSOTE sequitur, vt etiam quarta pars conoidis AMCBD, & prismaticus conus RSOTE sint æqualia. Vnde si, & prismaticus conus quadruplicetur super quatuor quadrantes TOE ellipsis integræ, vel circuli integri describendo, & sic quoq; parabolicum conoides. Etiam quadruplicatum conoides Parabolicum, & prismaticus conus æquabuntur ex prop. 18. lib. 5.

Quod, & de singulis partibus intelligitur, cum valeat idem argumentum quocumque loco æquèalto tamen, ducantur plana secantia, tum conum prismaticum, tum conoides parabolicum. Possemus hanc propos. reducere ad impossibile. Sed hæc sufficiet ne hoc argumentum reductionis ad impossibile continua iteratione replicetur.

EXPENSIO VII.

De Sphæroidibus.

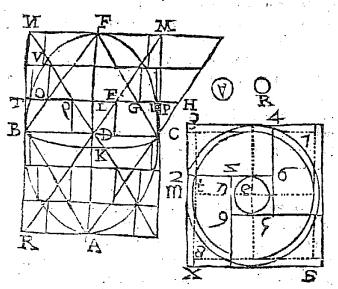
VSus sphæroicorum corporū frequentior est in comercijs humanis, ideo eius cubicatio magis quoque vrgens est, talis verò est ex nostro ingenio, lumine tamen desumpto à Luca Valerio, quod idem aliter probat.

THEOR.

THEOR. I. PROP. XXXVI.

Semiſphæroide ſi ſit conus inſcriptus eiuſdem baſis, ac circulus ſemiaxe ſphæroidis ductus, & altitudo ſit eadẽ ac alterius ſemiaxis, hic conus erit æqualis reſiduo cylindri eiuſdem baſis, ac altitudinis deducto ipſo ſphæroide.

SIt ſphæroides ABCF, & ſit eius dimidio CFB inſcriptus conus BFC, cuius baſis CKB, ex diametro axis V. g. minoris, at altitudo, VT DF alterius ſemiaxis maioris (quod, & è contra eſſe poteſt baſis ex axe maiori, & altitudo ſemiaxis minoris) Sit deinde cylindrus MB eiuſdem baſis CKB, & eiuſdem altitudinis FD; à quo ſit ablatum, ſemiſphæroides CIFOB, & remaneat ſcaphium CI FOBMN. Dico conum CFB eſſe æqualem reſiduo ſcaphio CIFOBMN.



Prodatur, & Progr. 1. In Ellipſi rectangulum HL, LG eſt æquale quadrato LI ex prop. 19. lib. 6. eo quòd LI ſit ex prop. 60. Tract. 24. media proportionalis inter LH. & HG. Sed LH æquatur ipſi QP, & LG reſiduum reſiduo QT; ſiquidem tota HL, LG, vel LO æquatur toti PT ob parallelas CH, & FB, & CM, & BN: Ergo rectangulum QT, & QP æquatur quadrato LI: Vnde etiam quatuor quadrata ex LF, & quatuor rectangula TQ, & QP æquabuntur. Fiat itaque quadratum 38. ex diametro CB, ſintque in eo quatuor rectangula ex TQ, & QP cuilibet lateri applicata ſecundùm latus maius QP, ſcilicet x 2 reſtabit 23. æquale fruſtum lateri Z 2. ideſt QT, quare ſi aliud rectangulum ei 32. applicetur ſecundum latus QT æquabitur ipſi 32. vnde latus maius occupabit lõgitudinem 34. ideſt QP, & remanebit portio equalis ipſi QT, & ſic ages de omnibus quatuor rectangulis, relinquentq; quadratũ 25 69. cuius latus 6 z equabitur lineę EQ, à qua ad adequandum PT æqualem 3 x, duę longitudines ablate ſunt æquales inuicem EP, & QT nimirum 2 z, & 64. 6 x 3; quare reſiduabitur 6 z equalis lineę EQ. Deſcribãtur rurſùs quadrata quatuor ex LI, ideſt quadratum totum OI ex 6 l. 2. vt remaneant rectãgula æqualia circumquaq; nempe quatuor rectangula ex PI, & IT qualia ſunt rectangulum 37. & & 83. & cæter. Quia itaque quatuor quadrata 7 e quatuor rectangulis æquantur 24. x z, & cæt. ſi hęc, & illa intelligantur auferri à quadrato toto 3 x 8, reſtabunt æqualia quadratum 69. & telarium circumquaque nempe quatuor ambientia rectangula 37. & 78. & 88. & 83. Et idem ſemper ſequetur quoquo puncto trahas parallelam HT.

Progr. 2. Cum itaque ex 41. lib. 6 Eucl. ita ſit quadratum ex 3 x ad quadratum 69. vt circulus inſcriptus quadrato 3 x, ideſt baſis coni CFB ad circulum inſcriptum quadrato 69. ideſt ſectioni EQ coni; ita *diuidendo* erit quadratum ex 3 x ad quatuor rectangula 36. &c. reſidua, vt circulus in quadrato 3 x inſcriptus, ideſt CKB ad annulum reſiduum, cuius latitudinis menſura eſt n m, vel 23, vel TQ, qui circumambit conum. Vt autem quadratum ex 3 x ad telarium; vel quadratum annulum m n, vel TQ, ita eſt quadratum ex 3 x idem ad quatuor quadrata ex LI qualia ſunt 8 e, ob eorum ſupra oſtenſam æqualitatem, & vt quadratum 3 x ad quatuor quadrata ex LI: ita circulus inſcriptus in quadrato ex 3 x, ideſt baſis coni CKB ad circulum ex diametro e t, ideſt LI, & *diuidendo* erit quadratum ex 3 x ad telarium reſiduũ ex quatuor rectangulis 37. 83. & cæt. vt circulus inſcriptus in 3 x ad annulum reſiduum, cuius latitudo t m, vel PI, qui circumambit ſphęroidem. Quadratum autem ex 3 x ad quadratum 69. dicit eandem proportionem, ac ad telarium ex quatuor rectangulis ſc. 37. & cæt. ob eorum æqualitatem ſupra oſtenſam. Ergo etiam circulus inſcriptus in quadrato ex 3 x ad circulum inſcriptum in 69. dicet eandem proportionem ac ad annulum, cuius latitudo t m, vel IP. Quapropter ex 7. lib. 5. equabuntur annulus planus t m, & circulus in 69. inſcriptus, ideſt circulus QE, qui eſt ſectio coni baſi parallela, ideoque ablatis æqualibus 69. & annulus, cuius latitudo t m remanebunt æqualia circulus radio e t, vel LI, & annulus, cuius latitudo n m, vel EP, ſicut æquantur annulus IP circumambiens ſphęroidem ac circulus baſis coni, vel ſectio, quæcumque eius QE, quæ per idem planum ſecans ſphęroidem, conum, & cylindrum ſit facta.

Progr. 3. Cogitentur itaque cylindrus, conus; & ſphęroides ſecti planis PT equidiſtantibus, quę diuidant cylindrum in ſegmenta æqualis altitudinis, & in cylindros circumambientes æqualios in eadem numeroſitate. Quia itaque, vt circulus ad circulum, ita cylindrus eiuſdem altitudinis ad cylindrum, qui in illis ſint collocati ex propoſ. 5. h. circulus PT ad circulum QE erit, vt cylindrus EP ad cylindrum QD. Quare *diuidendo* erit circulus PT ad annulum reſiduum planum ex QE ambientem conum, cuius latitudo EP, vel TQ, vt cylindrus PCTB ad annulũ reſiduum æqualtũ ſimiliter ambientem conũ EPCTQE: ſed circulus PT habet eandem proportionem ad annulum planum EP QT, quam ad circulum IO ex applicata LI tamquam radio, quia ſupra progr. 2. oſtenſi ſunt æquales talis circulus ex IO, & annulus ex EP, QT ambiens conum. Ergo etiam cylindrus PB ad annulum ſolidum PECDBT, & ad cylindrum IV ex baſi IO eamdem dicent proportionem. Ergo annulus ſolidus DEPTQB, & cylindrus IV ex baſi IO ex 7. l. 5. æquabuntur. Ablatis itaque iſtis æqualibus cylindrus IV ex baſi IO, & annulus ſolidus EPDBQT æqualia reſtabunt cylindrus æqualtus QD ſuper baſim QE circumſcriptus cono NMD, & annulus IPVTO reſiduus à cylindro IVO.

Progr. 4. Semper igitur perſeuerant æquales quicumque cylindri circumſcripti cono, & quicumque circumſcripti annuli ſcaphico reſiduo ſphęroidis ſc. QD cylindrus, & annulus ſolidus ſphęroidem circumcingens BIOYT. Fiat itaq; tot cylindri

cylindri circumſcripti ſphęroidi, & cono æquales, donec omne ſpatium poſſibile, quod inter conum eiuſdem, & vltimam eorum ſuperficiem expleant; ita quod nullum ſpatium poſſibile remaneat inter OV ſuperficiem annuli, & ſphęroidis FOB ſuperficiem; ſicut nec inter ſuperficiem cylindri, circumſcripti, & coni; Iam æquabitur multitudo cylindrorũ cono circumſcriptorũ ipſi, & ſphæroidi annulorum ſphęroidem ambientium; cum enim omne ſpatium poſſibile remanens inter ipſos, & corpora, quæ veſtiunt, abolitum ſit, iam ipſa æquabunt: Quare cum multitudo cylindrorum omnis poſſibilis æquetur multitudini annulorum, cum data quacumque multiplicatione perſeuerent æqualia, etiam conus BFC, & inuolucrum ſolidũ CNM BOFI ſphæroidem circumcingens æquabuntur.

Quod eſt oſtendetur redigendo oſtenſionem ad impoſſibile. Nam ſi conus CFB, & ſcaphium CMNBOFI ſunt inæqualia, ſit minor conus CFB, & deſcribatur circa ipſum talis multitudo cylindrorum donec differentia R inter ipſos, & conum ſit minor, quam differentia inter ſcaphium, & conum, quæ ſit y. Itaque figura cono circũſcripta minor erit ſcaphio GMNBOFI cum minus differat à cono minori, quam ſcaphium; Ergo etiam minor, quam cylindri ſolidi PI VOT ſcaphio circumſcripti, quia minus differt à quantitate minori, quod contra præcedentem demonſtr. eſt, in qua cylindri ſolidi coni, & annuli ſolidi ſcaphij oſtenſi ſunt æquales. At ſi aliquis aſſerat ſcaphium cono eſſe minus. Iſte inſcribat tot ſolidos annulos in ſcaphio, tot cylindros in cono donec differentia R inter ipſos, & conum ſit minor, quam inter conum, & ſcaphium. Tunc, quia maior eſt conus, & cylindri coni inſcripti minus differunt ab eo, quam ipſe à ſcaphio erunt maiores, quam ſcaphium. Ergo multò maiores erunt ipſa figura cylindrorum ſcaphio inſcripta, quòd probatum eſt ſupra impoſſibile. Ergo conus CFB ſcaphio CMNBOFI, neque erit maior, neque erit minor.

THEOR II. PROP. XXXVII.

Semicylindrus ſemiſphæroide circumſcriptus ſe habet ad ſemiſphæroidem, vt 3. ad 2. ad conum verò inſcriptum, vt 2. ad 1.

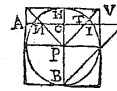
PRobatur. Nam ſemicilindrus BM ſe habet ad conum CFB, vt 3. ad 1. ex propoſ. 7. Tr. h. Quare ad reſiduũ ablato cono ſe habebit, vt 3. ad 2. ſed inuolucrum ſphæroidis ſolidum CMNBOFI eſt æquale cono CFB ex dictis; Ergo erit ad ipſum cylindrus, vt 3. ad 1. ſicut eſt ad conum, quare ad reliquum, ſcilicet ſphæroidem ablato ſcaphico ſe habebit, vt 3. ad 2. Sic dicas de alia medietate ſphæroidis, & cylindri eam circumſcribentis; quare ex prop. 18. lib. 5. erit duplus cylindrus BM ad ſphęroidem totam FCBA, vt 3, ad 2. Quapropter ad conum inſcriptum, qui eſt 1 reſpectu cylindri ſe habebit, vt 2. ad 1. ex propoſ. 29. & 30. Tr. 17.

COROLLARIVM I.

HInc eſt, quod idpoteris aſſerere etiam ſi inſectiones, non ſint per axes, & cylindrus obliquus, & conus ſcalenus, & baſes ellipſes. Nam erunt ellipſes ſimiles, vtpote, quia ſunt parallelæ, tum quę fiunt à cono, tum quæ fiunt à cylindro, tum quæ ſunt ſectiones ſphæroidis ex propoſ. 4. & 11. & 22. Tract. 25. Vnde eodem prorſus argumento poteris concludere cum ſit, vt rectangulum ad rectangulum ex axibus ellipſium, ita ellipſis ad ellipſim; ſufficit innuiſſe. Tu ex tuo ingenio argumentum ſi placet, diſpone.

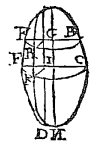
COROLLARIVM II.

HInc patet, quæ dicta ſunt de ſphęroide, de ſphęra quoque verificari: ſiquidem OI eſt etiam in circulo media proportionalis inter VT, vel NA, & TA cum ON æquetur ipſi PO ob rectangulum æquicrurum NOP, & NA reſiduo OH, & OA radio PB, & ob parallelas PT, & BX, lineæ IX: Rectangulum verò BO, & OH æquatur quadrato OI ex propoſ. 35. lib. 3. Quare ex propoſ. 19. l. 6. OI; vt in prop. 36. erit media proportionalis inter TV, & AT, quia OT æquat NO, vel OP, ſicut AO æquat PB, ſcilicet tota AT totam OB, vel æqualem OX, quæ etiam ob ſuas partes æquales lineę OB ipſam æquat ſicut OH reſiduum reſiduum VT.



COROLLARIVM III.

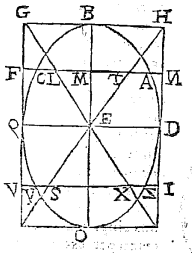
HInc etiam ſequitur, idem dicendum de ſphęroidibus, quæ obtineant ſectiones per axem vtraſque ellipſim; quod ſcilicet ſit cono, cuius baſis ſit ipſa ellipſis, quæ per axem tranſit; & alter axis altitudo ipſius, dupla. Nam omnes ellipſes, vtpote parallelę in ipſo ſphęroide erunt ſimiles, & ideo rectangula inſam circumambientia ſimilia, ſicut in ellipſi circulari ſunt quadrata. Vnde id quod concluditur de circulis circulo maximo parallelis eodem pacto concludetur de ellipſibus ellipſi maximę parallelis tranſeunti per axem. Omnes autem ellipſes baſi parallelę ſimiles erũt, quia tale corpus ellipticum MADNe intelligitur formari ellipſibus axi parallelis, vt AKD & ſuo ambitu per ambitũ alterius ellipſis per axem ductę CKP tranſeuntibus. Sit ergo talis ellipſis DKM, & ellipſis axi parallela AKD, & in ipſo ellipſis FRB parallelæ alteri ellipſi per axem PKC. Dico hanc BRF ellipſim eſſe ſimilem CKP ellipſi. Quod oſtenditur. Nam DIA rectangulum eſt ad DGA rectangulum ex propoſ. 6. Tract. 24. vt IK quadratum ad GR quadratum in ellipſi DKA, ſed vt DIA rectangulum ad DGA rectangulum, ita eſt CIP rectangulum ad BGF rectangulum ex prop. 48. Tract. 24. Ergo CIP rectangulum eſt ad BGF rectangulum, vt IK quadratum ad GR quadratum. Vnde, & ipſa latera erunt proportionalia cum quadrata, & rectangula ſint ſimilia. Vnde expenſ. 7. de ſimilitudine ſectionum con. Tract. 24. in præfatione Ellipſes CKP, & BRF erunt ſimiles.



THEOR. III. PROPOS. XXXVIII.

Frustum sphæroidis æquat duas tertias partes cylindri ambientis frustum deductis portione coni eiusdem altitudinis frusti sphæroidis eodemque plano resecti, qui tamen conus integer habeat pro basi sectionem sphæroidis per axem, & altitudinem alterum axem.

SIt frustum sphæroidis ABC, cuius centrum E, & frustum cylindri eiusdem altitudinis MB sit PH, & detrahatur ei frustum coni HTLG eiusdem altitudinis MB, qui cylindrus, & conus consequantur eandem basim circulum, qui ductus sit radio semiaxe DE, & pro altitudine semiaxem alterum EB consequatur. Dico, quod si frustum coni HTLG deducatur à frusto cylindri HF remanfurum concauum inuolucrum quoddam, cui portio ABC sphæroidis æqualis, erit.



Probatur. Nam ex propos. 36. h. reliquum solidi FH deducto frusto sphæroidis ABC est æquale frusto HTLG; Ideo sphæroidis frustum ABC remanens ab eodem corpore FH æquabit TNHLGF concauam soliditatem cylindri, deducto ipso frusto coni NTLG.

COROLLARIVM.

HInc dato frusto sphæroidis minori versus verticem CBA poterit eius quantitas inueniri si data sit eius sectio elliptica per axem, nam poterit inueniri axis minor, & maior, & sic haberi basis cylindri, & coni, & ex his inuenta soliditate coni HGE, ab ea demes soliditatem coni TEL, & residuum HTLG demes ab inuenta soliditate cylindri FH, & residuum HNTLFG æquabit portionem sphæroidis CBA.

Si verò detur pars sphæroidis versus centrum ACDQ demes soliditatem frusti conici TLE à solido DF cylindri, & reliquum NDE TELQF solidum erit æquale sphæroidis frusto ADCQ.

Si verò detur etiam DBQ demes à cylindro HQ conum GEH, & residuum erit æquale sphæroidi dimidię; si verò detur frustum centrum includens ACZY; inuentas soliditates conorum XES, & TEL subduces à cylindri frusto NV, & quod remanet erit æquale frusto sphæroidis AZYC.

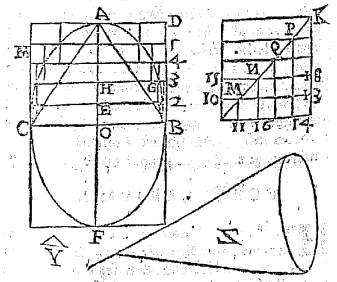
Quę etiam possent fieri, quamuis sectio non esset rectangula ad axem; si tamen conorum, & cylindrorum bases, quæ tunc essent ellipses, essent notæ, & ideo etiam alio modo frustorum sphæroidum soliditatem venabimur.

THEOR. IV. PROPOS. XXXIX.

Hemisphæroides duplum est coni inscripti.

SIt dimidium sphæroidis ABC plano BC per centrum transeunte, seu normale axi, seu non resecti. Dico, quod est duplum coni inscripti BAC.

Præassumpt. Dictum est propos. 14. Tract. 28. quadrata duplici arithmetico decremento minuta excluso vtrique maximo ad maxima, & integra eiusdem numeri esse minus, quam 1. ad 3. Quare Gnomones, qui ipsis successiuè auferuntur, erunt ad integra eiusdem numeri magis, quam 2. ad 3. quoniam, si ea adessent iam decrescentia ex Thesi maximis essent æqualia. Quare maxima quadrata ad illos gnomones excluso vtrinque maximo erunt minus quàm 3. ad 2. & si vtrinque addas maximum, cum sit augumentum æqualitatis quadrata ad gnomones successiuè ablatos erunt multò minus, quàm 3. ad 2. cum minus comprehendant maxima de gnomonibus, quàm quod priùs quandò non erant addita maxima. At si solùm quadratis maximis vnicum addas quadratum maximum, tunc maxima ad gnomones erunt magis, quam 3. ad 2. Ratio desumitur ex prop. 14. Tract. 28. Dimidium enim rectangulum FP in fig. illius prop. deficit ad hoc vt decrescentia quadrata æquent $\frac{2}{3}$ integrorum; Quare gnomones successiuè ablati erunt magis, quàm $\frac{2}{3}$ integrorum, rectangulo dimidio eodem. Rectangulum autem illud FF est minus, quam dimidium quadrati maximi ex prop. 15 contextu Tract. 28. quare dimidium eius erit minus, quam $\frac{1}{4}$ vnius integri. Ad hoc, vt ergo se habeant integra ad gnomones remanentes, vt 3. ad 2. esset aut auferendum dimidium rectangulum FP, ideſt minus, quam $\frac{1}{2}$ integri, aut addendũ integris ipsum rectanguli dimidium, & insuper dimidiũ dimidij, vel $\frac{1}{4}$ totius, ideſt $\frac{1}{2}$ illius rectanguli, ideſt minus, quam dimidium integri. Additur autem maximis maximum vnicum totum. Ergo integra vnico maximo adaucta ad gnomones residuos erunt magis, quam 3. ad 2. his notatis.



Proba-

Probatur Progr. 1. Sit enim conus Z duplum coni inscripti BAC. Dico hunc conum sphæroidi dimidię esse æqualem, quod si non est æqualis sit minor conus Z, si id euenire potest, & tunc (vt supra fecimus) inscribatur, & circumscribatur multitudo cylindrorum æqualem altitudinem habentium talis,, vt id, in quo circumscripta figura inscriptam excedit sit minus eo, quò sphæroides dimidium excedit conum Z; Cum ergo figura solida circumscripta sit maior sphæroidis dimidio BAC, & minus excedat inscriptam, quam sphæroides conum Z, erit maior figura inscripta ipso cono Z.

Cylindrus autem CD constat ex tot numero cylindris, quot sunt circumscripti, estque ad conum inscriptum BAC, vt 3. ad 1. quare ad conum Z, qui est duplus coni inscripti se habebit, vt 3. ad 2. & cylindrus CD dicet minorem proportionem ad figuram inscriptam, quam ad conum ea minorẽ Z.

Progr. 2. Itaq; cylindrus primus 20. ad cylindrũ primum inscriptorum OI habet proportionem, quam bases; cum sint æqualis altitudinis ex prop. 5. Tract. 34. qui sunt circuli, quorum radius maioris est BO, minoris est EI. Circuli autem habent eam proportionem, quam quadrata circumscripta ex prop. 40. lib. 6. & quadrata eam, quam quartæ eorum partes ex prop. 18. lib. 5. nempe quadratum, cuius latus est BO ad quadratum, cuius latus est EI. Quadratum autem BO ad quadratum ex EI eam possidet proportionem, quam rectangulum ex OF, OA ad rectangulum ex FE, & EA ex 6. Tr. 24. idem quam quadratum OF ad gnomonem 10. MK 11. siquidem 10. K 13. addito rectangulo 11. 13. eiusdem altitudinis 11. 14. ac 13. K æquat rectangulũ ex FE, & EA, cum latus 13. 14. cũ latere 13 10 æquet latus FE, & 13 11 æquet lineã EA. Itaq; ablato quadrato 11. M 10. à quadrato toto ex DB efficitur gnomon 11. MK 10. æquans rectangulum FE, EA.

Ita quoque dicendum de alijs. Cylindrus enim E 3. est ad inscriptum EG, eadem ratione vt circulares bases, & ideo vt quadrata basium, & ideo, vt quartæ partes, nempe vt quadratum E 2. ad quadratũ ex HG, & ideo ex 6. Tr. 24. vt rectangulum FO, OA ad rectangulum FH, HA, & ideo vt quadratum ex OF ad gnomonem 15. NK 16. qui fit ablato quadrato toto ex OH. Siquidem gnomon prędictus est æqualis rectangulo FH, & HA, quia latus 18. K est æquale segmento HA, & 15 18. addito 18. 14. latere parallelogrammi eiusdem altitudinis 16. 18 est æquale lateri FH, cum latus 18. 14. sit æquale segmento OH, & ita discurre de alijs.

Itaque tot cylindri æquales tot cylindris decrescentibus comparati circumscriptis, vel inscriptis eam habent proportionem, quam quadrata eiusdem numeri equalia, quorum vnum est OF gnomonibus decrescentibus, sed numero æquis qualia sunt V.g. ea in quibus M, N, Q, P literæ sunt.

Progr. 3. Nunc videndum, quam proportionem quadrata æqualia, dicant decrescentibus gnomonibus. Et iam ex præass. notum est, quadrata maxima ad decrescentes gnomones, si maxima, & æqualia superent tantùm gnomones vnico maximo & sibi æquali quadrato, dicere maiorem proportionem, quàm 3. ad 2. Cum itaque quadrata quinque maxima ad decrescentes gnomones quatuor M, N, Q, P habeant maiorem proportionem, quàm 3. ad 2. Cylindrus quoque magnus habens eandem proportionem iuxtà omnes quinque suos cylindros æquales inuicem ad cylindros quatuor dimidio sphæroidi inscriptos, quam quadrata quinque æqualia inuicem ad decrescentes gnomones dicet ad illos maiorem proportionem, quam 3. ad 2. Et ideo cum ille cylindrus magnus ad conum Z ex Thesi sit, vt 3. ad 2. Erit minor figura inscripta in sphæroidæ cono Z ex prop. 7. lib. 5. quod est contra demonstrata progr. 1. ostendimus enim figuram inscriptam cono Z esse maiorem.

Progr. 4. Si verò aliquis contendat dimidium sphæroidem Cono Z esse minus. Rursùs eadem inscriptio, & circumscriptio cylindrorum fiat adeo multiplicatis cylindris; vt id, in quo figura inscripta exceditur à circumscripta sit adeo minus, quam id in quo sphæroides dimidiũ exceditur à cono, ideſt minor differentia ea, in qua sphæroides ipsũ cono minus est, & tunc quia figura inscripta minor est ipso sphæroide, quod cono minus est, & circumscripta minus addit super inscriptam, quam super sphæroidem conus Z, etiam circumscripta minor erit cono Z, & sic cylindrus CD dicet maiorem proportionem ad circumscriptam figuram, quam ad conum Z.

Progress. 5. Consideretur rursùs cylindrus magnus CD, eodemque modo probetur, ita esse cylindrum primum O Z in ipso, cuius semidiameter OB ad cylindrum circumscriptum ei æqualem O Z, vt basis ad basim nempe, vt quadratum, ad quadratum, & vt quarta pars ad quartam partem; nempe quadratum OB ad idem quadratum OB, & vt quadratum ad ipsum quadratum, ita rectangulum ex FO OA, nempe quadratum ex OB ad illud ipsum rectangulum ex FO, OA, ideſt æquale quadratum ex OF. Sic quoque comparentur alij cylindri æquales portiones cylindri magni ad cylindros circumscriptos; eritque E 3, ideſt O 2 ad EG, vt rectangulum ex FO, & OA ad rectangulum ex FE, & EA, & sic dicas de alijs.

Rectangulum verò ex FO, & OA est quadratum, at ex FE, EA rectangulum est gnomon M, & ex FH, & HA est gnomon N, & sic de alijs, vt supra explicaui progr. 2.

Et ideo omnes cylindri, qui in toto cylindro CD existunt ad omnes cylindros circumscriptos habebunt eam proportionem, quam quadrata omnia ad omnes gnomones maximo etiam quadrato addito.

Progress. 6. Quadrata autem omnia maxima incluso vtrinque maximo ad decrescentes æquali numero gnomones residuos ex præassumpto dicunt minorem proportionẽ, quã sesquialteram, ideſt quã 3 ad 2. quare cylindrus quoque maximus æqualibus constans cylindris ad cylindros decrescentes circumscriptos eiusdem numeri habet minorem proportionem, quam sesquialterã. Quare maior erit multitudo cylindrorũ circũscriptorũ ex pr. 7. l. 5. conoz; cum cylindrus CD ad conum Z dicat maiorem proportionem, nempe eam, quam 3 ad 2, quàm ad circumscriptam cylindrorum multitudinem. Hoc autem esse nequit cum hæc multitudo progr. 4. ostensa sit minor cono Z.

Nota verò, quod idẽ semper sequitur siue sphæroides per centrum detruncatũ sit, siue rectangulè per axem, siue non, vnde non sunt multiplicanda argumenta.

Cũ ergo sphæroides CBA cono Z, non sit maius, neque minus erit æquale, & consequenter erit duplum coni inscripti BAC, prout etiam conum Z duplum effecimus, vel supposuimus factum.

COROLLARIVM.

Hinc emanat, quod sphæroidides sit æquale cono, qui habeat basim, cuius diameter sit duplus diametri basis coni inscripti, & eiusdem altitudinis, hic enim erit quadruplus coni inscripti, & ideo duplus hemisphæroidi, & ideo æqualis ipsi sphæroidi.

THEOR. VI. PROP. XL.

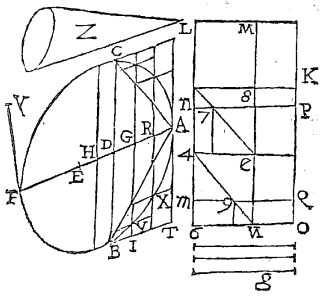
Cuiuscumque sphæroidis frustum siue maius, siue minus habet eadem proportionem ad conum inscriptum, quam axis dimidium cum segmento alterius axis portionis ad segmentum remanentis illius alterius portionis, quæ est in frusto reliquo.

Sit segmentum sphæroidis quodcumque, seu axi rectum, siue non ABC, Axis AF, centrum H, frustum, seu segmentum alterius portionis DF. Ostendendum est sphæroidis partem BAC ad conum inscriptum BAC eam dicere proportionem, quam FD, FH, seu æqualem DFY ad FD.

Sit conus itaque Z, qui habeat eam proportionem ad conum CAB, quam FD, FH, idest Y FD ad FD: Dico huic fore æqualem soliditatem portionis ipsius sphæroidis.

Progr. 1. Quod si non sit æqualis erit, aut maior, aut minor sphæroidis portio cono Z. sit itaque si id esse potest primo sphæroidis portio maior cono Z.

Progr. 2. Inscribatur, circumscribaturque pr. 14. Tract. 33. portioni sphæroidis multitudo Cylindrorum æqualem altitudinem habentium, adeoque multiplicentur, vt à circumscripta cylindrorum multitudine inscripta minus differat, quã conus, qui positus est minor sperοidis portione ab ipsa differt, cum autem circumscripti cylindri sint maiores ipso sphæroide, & ipsum maius cono Z, erit etiam inscripta conorum multitudo maior cono Z.



Progress 3. Secetur deinde DA in tres partes, & sit tertia pars BA, quia YFA est tripla HA, & DA ipsius BA: si auferatur tota DA ab YFA, & RA ab TA reliquum YFD ad reliquum DR erit vt totum YFA ad totum HA.

Quoniam vt est YFA ad HA, ita DA ad RA, ergo vt AYF ad DA *permutando*, ita HA ad RA, nimirũ vt YFA totum ad DA partem ita HA tutum ad RA partem. Quare & reliquum YFD ad reliquum HR se habebit, vt YFA totum ad totum HA nempe in proportione tripla.

Tres autem lineæ g æquales ipsi FD dicent ad FD proportionem triplam, quam YFD ad HR: Quare *permutando* tres lineæ ad YFD erunt in eadem proportione, qua FD ad HR: at cylindrus circumscriptus CT ad inscriptũ conum CAB est, vt tres lineæ ad FD. Conus verò CAB est ad conum Z, *inuertendo* vt FD ad YFD, & ideo ex *æquo* cylindrus ad conum Z erit, vt tres lineæ æquales ipsi FD ad YFD, cum ergo tres lineæ prædictæ ad YFD sint, vt FD ad HR, etiam cylindrus circumscriptus CT ad conum Z erit, vt FD ad HR.

Progress. 4. Sint ergo parallelogramma æqualia contenta sub FD, DA, quorum primus LR tot, quot sunt in figura circumscripti cylindri, sitque ON dupla DH, idest DE, & remanebunt DA, EF & ideo constituent quadratum reliquum N4. Postmodum a singulis excepto primo auferatur gnomon latitudinem habens AR quale est K 74. & a sequente gnomon latitudinem habens AE, vt est Q 46. & sic si alij adsint, eritque totus gnomon Q 46. æqualis rectangulo FG, & GA, quod Q4 cũ 96 æquent longitudinem FG est enim qm 6. æqualis lateri FG, & mg. lineæ AG, sic totus gnomon P 874 æqualis rectangulo sub RA, & KF contento; nam rectãgulum KN cũ 74 æquat longitudinem KF: est enim P n 4 æqualis lateri FR, & 7 n lateri RA, & sic dicas de alijs gnomonibus, si adsint.

Progr. 5. Cylindri autem æquales, vt CI, ex quibus componitur cylindrus CT magnus altitudinem eandem habentes, ac segmentum axis portionis sphæroidalis; & basis, cuius radius DB, ita est ad VG primum cylindrum inscriptorũ, vt basis nempe circulus, cuius radius DB ad circulum, cuius radius GV, & ideo ex pr. 5. h. quã quadratũ circũscriptũ circulo maiori ex radio BD ad quadratũ circumscriptum circulo minori ex radio GV; & quam quarta horum quadratorum pars ad quartam partem, & ideo quam quadratum BD ad quadratum GV, & ideo quam rectangulum FD, & DA ad rectangulũ FG, GA ex prop. 6. tr. 24. nimirũ quã rectangulum O 4. ad gnomonem Q 46. & ita dicas de alijs æqualibus cylindris respectu cylindrorum decrescentium, V. g. cylindrus ID erit ad cylindrum ex, vt rectangulum K 4. ad gnomonem K 74. nimirum FR, & RA, & ita si alij adsint.

Progr. 6. Modo videndum est, quam proportionem obtineant rectangula æqualia ex FD, & DA ad gnomones decrescentes. Et primò certum est ex pr. 12. tr. 28. quod rectangula integra MK ad decrescentia vnico decremento Arith. e p sunt, vt 2. ad 1. sed addito maximo tantùm maximis, & æqualibus sunt magis, quam 2. ad 1. Quadrata verò maxima 8 L, & inuicem æqualia ad decrescentia 7 e, & 9 N. quadrata duplici decremento arithmetico illis numero æqualia sunt magis, quam 3. ad ad 1. Quare ad gnomones residuos 874. & e 96. erunt minus, quam 3. ad 2. quia gnomones cum quadratis inclusis æquant maxima, at si addas integris maximum quadratum ex præcess. prop. 39. h. erunt magis, quam 3. ad 2. ideoque rectangula tria KM æqualia ad decrescentia V. g. duo P e i & Q e erunt magis, quam 2. ad 1. & quadrata item tria maxima 8 L ad gnomones 874. & e 96 decrescentes duplici decremento magis, quam 3. ad 2. Ideoque simul ex prop. 29. Tract. 27. erunt magis, quam

quam 6. ad 5. nempe quam ON æqualis ipsi ED ad dimidiam HD; & N 6. idest DA ad DB, nimirum quam tota O 6. vel æqualis FD ad totam HR, quæ est illa, quam possidet cylindrus circumscriptus ad conum Z, vt ex tertio progr. constat: quare cylindrus ad multitudinem conorum inscriptam habebit proportionem maiorem, quam LB cylindrus circumscriptus ad conum Z, & ideo multitudo conorum inscripta erit minor cono Z, & tamen progr. 2. hæc multitudo cono Z ostensa est maior.

Quod si aliquis asserat esse sphæroidem minus cono Z. Eodem modo inscribatur, & circumscribatur multitudo cylindrorum æqualem habentium altitudinem ex prop. 14. Tract. 23. ita vt circumscripta multitudo cylindrorum minus differat ab inscripta, quam sphæroides differt à cono Z. Quia ergo inscripti cylindri sunt minores ipso conoide, & ipsum minus cono Z, etiam circumscripta figura erit minor cono Z.

Progress. 7. Disponantur deinde, cætera vt 3. & 4. progr. factum est, & eodem modo argumentandi vtemur. Quia ergo ex 5. progr. cylindrus æqualium primus in cylindro CT existentium habet eam proportionem ad cylindrum ID eundem circumscriptum, quam quadratum ex DB ad quadratum ex DB idem erit, vt rectangulum FD, DA, vel æquale KL ad rectangulum idem, vel æquale KL. Sic cylindrus, cuius basis radius GI ad GV eam habet proportionem, quam quadratum ex GI ad quadratum ex GV ob rationem allatam progr 5. superioris partis huius, & ideo ex expen. 1. Conic. quam FD, & DA rectangulum ad rectangulum FG, & GA; & ideo quam rectangulum O 4. ad gnomonem Q 45 dicto rectangulo æquale ex 4. progr. præced. & ita effare de alijs: quare omnes cylindri æquales ad decrescentes cylindros circumscriptos eam habebunt proportionem, quam omnia rectangula æqualia ad omnes gnomones incluso maximo rectangulo, nimirum, quam KL, K4, O 4. ad KL, K 74. & Q 46.

Progr. 8. Certum est ex præhabitis prop. 12. Tract. 28. quòd rectangula æqualia K e. e O ad rectangula P e. & Q N habent proportionem duplam, & ideo ad residua rectangula, & portiones gnomonum K 8. & e Q duplam quoque, quibus si vtrinque addas maximum cum id, quod additur non sit vt 2. ad 1. sed æqualitatis habebunt maxima tria ad tria decrescentia, incluso maximo proportionem minus, quam duplam. Sic quadrata interga 48. & c 6. ad decrescentia *conuertendo* propos. 14. Tr. 28. habent proportionem magis, quam 3. ad 1. & tantò magis incluso maximo. Quare ablatis e 7. & N 9. ad residuos gnomones 874. & e 96. & 8L, qui simul cum quadratis, quæ includunt, æquant quadrata æqualia eiusdem numeri non decrescentia erunt minus, quam 3. ad 2. quare KL, K 4. 40. tria rectangula æqualia ex prædictis integrata ad KL, ad gnomones residuos ex gnomonibus prædictis confectos obtinebunt proportionem minorem, quam ex dupla, & sesquialtera constitutam, quę est 6. ad 5, nempe, quam ON ad dimidiam ON, vel æqualẽ DH, & N6. idest DAad duas tertias partes DR idest quam tota FD æqualis lateri O 6 ad totam HR, quæ est ex 3. progr. præced. quam cylindrus circumscriptus CT habet ad conum Z. Quare cylindrus circumscriptus ad cylindrorum inscriptorum multitudinem decrescentem habet minorem proportiodem, quam ad conum Z, & ideo erit maior ea cylindrorum multitudo cono Z, cum tamen ostenderimus minorem, quam conus Z.

Cum itaque, nec maior esse possit, nec minor conus Z sphæroide, ipsi erit equalis: sed conus Z ad conum inscriptum ABC est, vt YFD ad FD ex effectione: Ergo sphæroides ad conum inscriptum habebit eam proportionem YFD ad FD, nimirum, quam dimidia diameter cum maiori segmento, ad ipsum maius diametri segmentum.

EXPENSIO VIII.

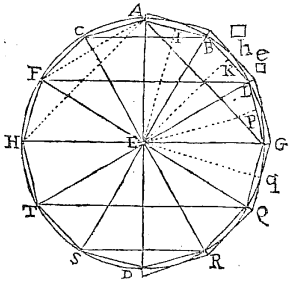
De Sphæra.

Soliditatis sphærę cognitio; cum sit vsibus humanis omninò necessaria prętereunda non est, & præter ea, quæ diximus in præced. quæst. hic principaliter modus Archimedis magis dillucidè tradendus est.

THEOR. I. PROPOS. XLI.

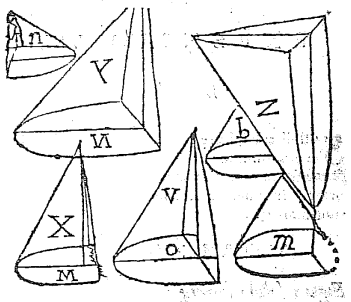
Figura solida sphæræ inscripta, quæ conicis superficiebus æquè altis continetur illi cono æqualis est, qui basim obtinet circulum æqualem superficiei figuræ inscriptæ, & altitudinem normali ad aliquod latus perpendiculariter demissæ.

Sit figura solida, quæ solidis conorum conicorum neatur segmentis V g. cono BAC; & opposito BEC, circaque hunc conum circumuolutum intelligatur corpus LBECF; ita vt LBCF superficies annulus intelligatur planus sphęra inscriptus. Sic asseras de corpore LGEHF, & cæt. Deinde sit conus rectus Z, cuius basis circulus æquet sua planitie subtẽsas planities omnium corporum sphęra inscriptorũ, & altitudo sit radius. Dico hunc conũ Z esse æqualem inscripto corpori sphęra GAHD.



Probatur ex prop. 16. huius. Rhombus conicus BACE ex duobus conis aduersis super eandem basim CB æquatur cono X altitudinem EI obtinenti, quę est linea à vertice coni in latus normaliter demissa, & etiam basim M superficiei coni BAC equalem. Item conus V erit æqualis cono concauo LBECF altitudinem habens lineam EK normalem ad latus eius LB à vertice deductam, & basim O superficiei LBCF annuli plani ex prop 18. huius equalem, tandem idem dicas de cono concauo LGEFH, quod habeat æqualem conum Y eiusdem altitudi-

nis ac linea EP normaliter à vertice E in eius latus demissa, & basim N æqualē superficiei planæ GLHF sphęrę superficiei subtensę ex 17.h. Et eadem asserenda de Rhombo REDS, & concauis QR, ETS, & GEQTH, sunt vtpote cū singuli sint singulis prędictis æquales; Erūt igitur V.g. sex coni, duo x duo y duo



v, qui totam soliditatem corporis inscripti æquabunt. At basis coni z est æqualis omnibus simul basibus horum conorum; quia basis eius æquat, ex hypothesi superficiem totius corporis inscripti, quam, & bases omnium conorum similiter æquant altitudo verò est æqualis eorum altitudini. Ergo cum conus z ad omnes illos conos, vt basis ad basim referatur ex 5.h. cum basis ipsius ad omnes bases proportione æqualitatis referatur, etiam conus z conis sex erit æqualis. Quare, & corpori solido sphæra inscripto æquabitur.

COROLLARIVM I.

IDem etiam dicendum de sectore aliquo solido V. g. LAEF, quod scilicet sit factus ex Rhombo conico BAGE, & residuo LBECF. Nam si detur conus aliquis n, qui superficiei illius LBACF sua basi æquetur, & habeat altitudinem KE, iste æquabitur prædicto sectori: Siquidem habebit basem æqualem basibus M, &, o conorum x, v eiusdem altitudinis; quam EK; quia basis M æquat superficiem BAC, & basis o superficiem LBCF, & has duas superficies æquat coni basis n, quare coni basis æquabit basim M, & o, quare cum sit eiusdem altitudinis conus n æquabit etiam conos x, & v, vnde, & sectorem LAFE.

THEOR. II. PROPOS. XLII.

Corpori ex conicis segmentis sphæra inscripto conus æqualis, est minor recto cono, cuius basis superficiem sphæræ exæquet, & altitudinem obtineat radium: Conus autem æqualis eidem corpori, sed sphæræ circumscripto est maior illo cono recto, cuius basis æquet superficiem sphæræ, & altitudo sit radius.

PRob. Nā conus æqualis corpori sphæræ inscripto habet altitudinem EK minorem, quam diameter EA, & basim vtpote æquantem superficiem corporis inscripti obtinet minorem, quàm basis, quæ æquat superficiem sphæræ, vtpotè, quod superficies inscripti corporis minor sit superficie sphæræ circumambientis.

Eodemque modo Prob. 2. pars, quia ille conus, qui æquat corpus circumscriptum sua basi æquat superficiem maiorem corporis circumscribentis superficie sphæræ, & altitudo est EP æqualis radio EA; basis verò æquans superficiem sphæræ, & altitudo radius EA conum minorem constituet cono, qui æqualis sit basis corporis sphęram circumscribentis superficiei, & altitudinis eiusdem.

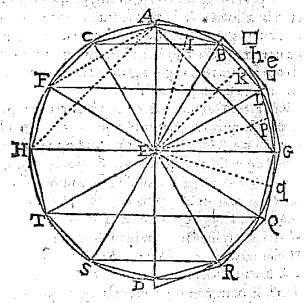
COROLLARIVM I.

ELlicitur etiam. Quod si detur conus habens pro basi circulum æqualem superficiei sectoris sphærę LAF, & alius habens pro basi circulum æqualem sectoris corporis circumscripti eidem superficiei; quod item conus hic posterior maior est primo; si habeant eandem altitudinem EA; quia superficies circumscripta sectori est maior superficie ipsius sectoris.

THEOR. III. PROPOS. XLIII.

Quælibet sphæra est æqualis cono habenti basim superficiei sphæræ æqualem, & altitudinem radio.

DEtur sphæra AGDH, & conus m, cuius basis æquetur superficiei sphæræ AGDH, & altitudo radio EA: Dico sphęram, & conum æquales esse quantitates.



Prob. Nam sphæra non erit, aut maior, aut minor ipso cono m: Ergo illi æquabitur.

Si verò aliquis asserat esse sphæram cono maiorem, sic ostenderur id esse impossibile.

Progress. 1. Inscribatur enim, & circumscribatur figura ex propos. 14. Tract. 23. adeo multiplicatis lateribus, vt spatium, quod inter sphæram, & figuram inscriptam intercluditur sit minus, quàm differentia illa V. g. h, quæ inter conum m, & sphæram reperitur: Itaque hæc conica figura solida, vt IKP, & cæt. erit maior cono m; quia magis accedit ad sphæram, quæ ponitur maior, quam conus m, cum minor si differentia inter sphæram, & inscriptam conicam figuram, quàm inter conum.

Progress. 2. considereetur deinde conus aliquis z, qui ex præc. obtineat basim æqualem superficiei corporis conici inscripti, altitudinemq; EK; iste conus vtique ex præced æquabit sua soliditate corpus conicum inscriptum: Verùm iste conus ex Coroll. prop. præc. minor est cono m ergo corpus quoque conicum sphæra inscriptum prog. 1. cono m minus erit: sed ostensum est malus igitur, maius, & minus, quod est impossibile.

Progress. 3. Dicat deinde aliquis sphęram cono m esse minorem, & circumscribatur aliqua conica fig. ex pr. 13. Tr. 33. quæ adeo constet multiplicatis lateribus, vt differētia solida e, quæ est inter sphęram, & se sit minor, quam differentia, quę est inter conum m, & sphæram, & iam fig. conica circumscripta minor erit cono m: siquidem minori differentia à minori sphæra differt, quam conus m prædictus.

Sit deinde conus z, qui constet altitudine EQ, & obtineat basim superficiei conici corporis circumscripti æqualem; vt prop. 41. h. Hic itaque conus æquabitur corpori conico circumscripto maiorque erit, quàm conus m ex propos. 42. cum suam basim consequatur maiorem. Ergo etiam figura conica circumscripta, quæ ei æquatur maior est cono m, sed supra ostensa est minor: Ideoque absurdè esset maior, & minor, quod esse nequit. Cum itaque conus obtinens basim superficiei sphæræ æqualem & altitudinem radio non possit esse aut maior, aut minor ipsa sphæra, illi omninò æquabitur.

COROLLARIVM.

HInc est quod cum superficies sphærę ex ostensione prop. 43. Tract. 31 sit quadrupla maximi circuli in sphęra inscripti; quod etiam conus iste æqualis sphęrę habeat basim huic circulo quadruplo maximi circuli equalem, & ideo consequetur basim obtinentem diametrum duplo maiorem, quam diameter sphæræ: nam sic area circuli ex prop. 36 lib 6. & 6. lib. 2. erit quadrupla circuli maximi in sphęra inscripti. Vnde etiam patet. Quod sphęra est ad conum GAH sibi inscriptum, vt conus qui consequatur diametrum GH, pro radio sue basis, & altitudinem radiū EA cum enim iste conus æquet sphæram. ad eundem conum referetur eadem proportione, ac ipsa sphęra.

COROLLARIVM II.

HInc etiam est sphæram esse ad conum sibi inscripum, vt circulus ex radio GH ad circulum ex radio HE: nam conus ex radio GH ad conum ex radio EH habentium eandem altitudinem EA ita referuntur, vt bases, conus autem ex diametro GH, & altitudine EA æquatur sphærę.

THEOR. IV. PROPOS. XLIV.

Cuiuscunque sectoris sphæræ soliditati æquatur illa conus, qui basim obtineat æqualem superficiei portionis sphæræ, & altitudinem æqualem radio.

SIt sector LBACDFL, & conus reperiatur aliquis n, qui basim consequatur æqualem superficiei LBACF portionis sphęrę, hempe ex prop. 46. Tr. 31. ductam radio subtensa arcui FA, & altitudine EI. Dico hunc conum esse æqualem soliditati sectoris LBACFE.

Probatur. Nam sector solidus sphæræ, nec maior erit, nec minor prędicto cono n. Ergo el æquabitur.

Quod verò cono sector non sit maior, ostenditur: si enim sector cono maior est figura conica sectori sphęrę inscribatur, adeo multiplicatis latetibus, vt differentia h, quæ inter ipsam est sphęræ sectorem mediat, sit minor, quam illa, quæ inter conum n, & sectorem reperitur: Itaque ista figura cono n maior erit cum magis in quantitate ad sphęrę sectorem maiorem ipso cono accedat ob minorem differentiam inter se, & sphęram.

Prog. 2. Fiat deinde conus aliquis æqualis soliditati corporis conici in sphęra inscripti, iste conus erit minor cono n; cum constet basi minori vtpote quod æquetur superficiei corporis sectori Inscripti; coni vero n basis superficiei portionis sphęrę maioris: habeat quoque altitudinem minorem EK, quam conus n obtineus altitudinem EL. Quamobrem cum iste conus sit minor cono n, etiam figura conica inscripta sectori LAFE ipsi cono æqualis erit minor cono n. Itaque esset figura conica inscripta sectori maiori quidem ex primo progr. minor ex secundo cono n; quod est absurdum.

Progr. 3. At si aliquis putet soheram cono esse minorem; Tunc circumscribatur sectori LAFE figura conica, adeo multiplicatis lateribus, vt sit differentia e inter ipsam, & sphæram minor, quam ea, quę est inter conum n, & ipsam sphęram, & iam ista figura conica cono n minor erit; cum minor differentia interponatur inter sphęram minorem cono n, & seipsam.

Progr. 5. At fiat conus alter æqualis figurę conicę circumscriptę; iste conus maior vtique erit cono n: siquidem constat ex altitudine æquali EQ, & basi maiori, quę est æqualis superficiei figurę conicę circumscriptę sectori, & ideo maior superficie LAF sphęrę, cui æquatur ex theti basis coni n, & ideo cum constet conus hic æqualis soliditati sphęrę conicę circumscriptę sectori basi maiori, eademque altitudine; maior erit. Cum itaque sit maior conus iste cono n, etiam figura conica huic æqualis sphęrę sectori circumscripta cono n maior erit; sed progr. 3. ostensa est minor: Ergo esset maior figura conica circumscripta sectori cono n, & simul minor, quod esse nequit. Cum itaque sine absurdo sector LAFE, nec maior, nec minor esse possit cono n, ipsi æquabitur.

COROLLARIVM I.

HInc patet quomodo possit cognosci quantitas LAFE sectoris sphęrę data sectione LF, & subtensa AF, nam cùm iam cognoscamus basim coni n ex prop. 46. Tr. 31. quę ducitur radio subtensa AF, & altitudine AE si constituamus conum, ex hac basi radio AF, & altitudine AE istius coni cognita soliditas, quæ est pars tertia cylindri eiusdem altitudinis, & basis ex prop. 7. h. etiam sectoris sphęrę quantitas inotescet.

COROLLARIVM II.

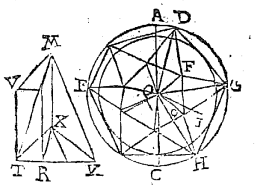
HInc quoque exeret quantitas portionis sphæræ. Nam cum habeamus notum diametrū LF, etiam obtinemus basim eius diametro ductam ex prop. 3. tract. 30. datur quoque altitudo coni linea in EL terminans educta à centro E; vnde conus constituetur tertia sc. pars cylindri eiusdem basis, & altitudinis; Si ergo hunc conum à secto-

sectore LAFE subducamus, erit nota sphæricę portionis LAF soliditas; ex qua etiam venabimur soliditatē reſi lui LGHF, & ſi ſit ſegmentum RLFS ſubductis duabus portionibus LAF, & RDS idem conſequemur.

THEOR. IV. PROPOS. XLV.

Omne corpus circa ſphæram circumſcriptibile æquale eſt Parallelepipedo, cuius altitudo ſit ſemidiameter, baſis verò ſit æqualis tertiæ parti ſuperficiei ipſius figuræ circumſcriptæ.

SIt ſphęra ſu ABCG, eique circūſcribatur corpus quoddam V. g. triangularibus ſuperficiebus conſtans, vt ſunt circumſcriptæ eius medietati quę ſunt GDF, & QGF, & GQH, & cæt. Dico, quòd hoc eſt æquale parallelepipedo, quod habeat pro baſi tertiam partem eius ſuperficiei, & pro altitudine ſemidiametrum.



Probatur. Nam corpus circumſcriptibile ſphęræ eſt illud, quòd habet ſuperficies tangētes ſphęram; à puncto verò contactus ad centrum ſphęrę, linea ducta eſt radius, &ex pr.2.tr.23.eſt perpēdicularis illi ſuperficiei, vnde ſi ab angulis alicuius ſuperficiei illius corporis V. g. GHO ducātur rectę ad centrū ſphęrę Q fiet pyramis GOHQ, cuius altitudo erit ſemidiameter IQ. Omnis verò pyramis eſt tertia pars priſmatis ex dictis ad eādē altitudinē & in eadē baſi: Quare ſi tertia pars baſis GHO aſſumatur, & ad eādē altitudinē QI fiat priſma MVTRX hoc erit æquale totī pyramidi TMNX, quam ſuppono æqualem, & ſimilem pyramidi GOHQ. At ſi baſes omnes, vt TRX redigantur ad vnam baſim æqualem quadrangulam ex prop.18.Tract.19. quę ſunt tertię partes baſium pyramidalium, erit illa baſis æqualis tertię quadrangulę parti baſium omnium ſimul, quę ſubtendunt omnes pyramides polygoni circumſcribentis ſphęram, & ſi conſtituatur ſuper eam baſim parallelogrammam Parallelepipedum ad eleuationem priſmatis TRXVM erit omnibus priſmatibus quale eſt vnum ex ipſis TRVMX quę ſingulas pyramides æquant ex pr. 22. part.1.h æquale, & conſequenter erit æquale omnibus pyramidibus. Vnde etiam ipſi polygono circà ſphęram deſcripto, quare parallelepipedum, cuius baſis æquet tertiam partem ſuperficiei polygoni, & ſemidiameter eius altitudinem menſuret, erit æquale ipſi polygono, quod erat oſtendendum.

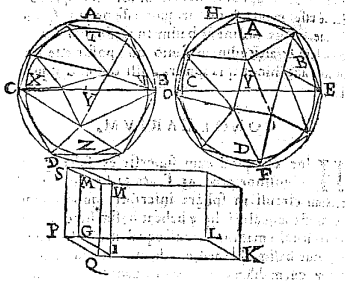
THEOR. V. PROPOS. XLVI.

Sphæra quælibet æqualis eſt ſolido rectangulo comprehenſo ſub ſemidiametro ſphęræ, & tertia parte ambitus ſphæræ.

SIt ſphęra ABCD, & ſolidum rectangulum LKMN cuius baſis LKGI, æquet tertiam partem ſuperficiei ſphęrę propoſitę, altitudinem verò LN menſuret eius radius CY. Dico quòd ſphęra propoſita eſt æqualis rectangulo ſolido LKMN.

Probatur. Nam, ſi non eſt æqualis ſphęra ſolido, erit, aut maius illud ſolidum, aut minus ipſâ ſphęrâ: ſed nec maius, nec minus eſſe poteſt. Ergo æquale ſolidum erit ipſi ſphęrę.

Nam ſi maius eſt, erit ergo æquale alicui alteri ſphęrę maiori ea propoſita BACD, vel ſi contendas æqualem aſſignari non poſſe, aſſignabitur ſaltem aliqua maior propoſita, quæ nec ſolidum omninò



exequet, ſed inter vtramque magnitudinem conſiſtat: Sit ergo hæc ſphęra HEFO, quæ in aliquo ſuperet ſphæram propoſitam BADC, & ideo ambiet illam, & tamen ſit minor ſolido LKMN. Quo poſito circumſcribatur ſphæræ minori Polygonum, quod ſphæram maiorem non excedat; Id enim poſſe fieri ſupra oſtendimus propoſ.13.Tract.33. fiatque ſolidum rectangulum LKQS, cuius baſis LKPQ, ſit æqualis tertiæ parti ſuperficiei illius polygoni, & altitudinem eius menſuret ſphæræ radius, quod ex præmiſſa erit æquale ipſi polygono.

Parallelepipedum itaque LKSQ æquale polygono, habebit baſim maiorem LKPQ, quam LKGI baſis illius ſolidi, quod nos dicimus ſphęrę æquale cū illa ſit æqualis tertiæ parti polygoni; hæc tertia parti ſphæræ in polygono exiſtentis, vnde cum ſit malus continens, quā contentū erit etiā maior ſuperficies poligoni continentis, quam ſphęrę ABDC cōtentę, & cōſequēter maior erit tertia pars ſuperficiei polygonę, quā ſuperficiei globoſæ ſphæræ, & baſis LKPQ æqualis tertiæ parti polygonæ ſuperficiei maior erit, quam baſis LKGI tertiæ parti ſuperficiei globoſæ æqualis, & tandem ſolidum ſub eadem altitudine ſit ſuper baſem maiorem LKPQ, maius erit, quam ſolidum KM LK ſuper baſem minorem LKGI. ſed hoc ſolidum dicebatur ab aduerſarijs aut maius, aut æquale ſphæræ maiori EHOF; Ergo ſphęra maior erit minor, quā ſolidum LKSQ rectangulum ſuper baſem maiorem LKPQ; ſed hoc ex conſtructione eſt æquale polygono contento in ſphæra maiori, ergo eſſet ſphæra continens minor contento polygono, quod eſt abſurdum.

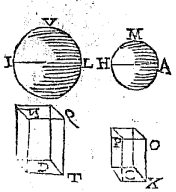
Pro-

Probatur quoque, quod minus eſſe nequeat ſolidum prædictum LKMN ſphæra propoſita ABCD. Circa idem centrum Y deſcribatur ſphæra, aut æqualis, aut non minor ipſo ſolido LKMM, nec maior ſphæra propoſita BACD, ſed inter vtramq; magnitudinem conſiſtens, & ſit TVXZ per aduerſarios. Huicque ſphæræ aſſignatę XVXZ circumſcribatur rurſus polygonum non excedens ſphæram primo propoſitam BACD ex Cor.pr.13. tr.33. fiatque deinde ex præced. baſis æqualis tertiæ parti ſuperficiei polygonæ, quæ ſit LKPQ, & ſuper eam ad altitudinem radij YC parallelepipedum LKS. Cum ergo ſuperficies polygoni huius ſit minor, quam ſuperficies ſphæræ continentis ABCD, etiam eius tertia pars erit minor, quam tertia pars eiuſdem ſphæræ continentis, & ideo erit quoque minor LKPQ æqualis tertiæ parti ſuperficiei polygonæ, quam baſis LKGI, quæ æqualis ex hypotheſi eſt tertiæ parti ſuperficiei conuexæ ſphęrę CABD vnde parallelepidum LKS licet maius eſſet, vt æquans KTVZ maiorem, quam KMLN eſſet minus parallelepipedo LKMN ſuper illam baſim ad eandem altitūdinem erecto, quod in illo continetur, quæ omnia abſurda ſunt, cum ergo parallelepipedum LKMN, nec minus eſſe poſſit, nec maius ſphæra BACD illi erit æquale.

THEOR. VI. PROPOS. XLVII.

* *Sphæræ ſunt inter ſe in triplicata ratione diametrorum, radiorum, & peripheriarum.*

INſpiciantur duæ ſphæræ AMH, & LVI. Dico eas ad inuicem referri in triplicata ratione diametri AH ad LI, vel radij, vel peripheriæ AMH, LVI, fiant eis parallelepipeda æqualia C, & D; quorum latera OP, & QN ſunt æqualia ſemidiametris AH, LI. Certum eſt hæc eſſe ſimilia ob baſium rectangula



trienti ſuperficierum ſphęricarū æqualia ex 46. h. ſc. circulis ex diametris LH, & LI, tamquam radijs ex 43. tr.31. & ideo ex tr.31. prop. 3. triangulis ex ambitu, & radio eorum AH, & LI, ſc. comprehenſa à ſextante ambituum ex radijs HA, & LI ductorum ſc. trienti HMA, & LVI peripheriarum, quæ ſunt dimidium ambituum ductorum radijs HA, LI ex 43.lib.6. Quare ex eadem 43. & 18. lib.5. OP, ON, XD erunt proportionalia lateribus QN, QT, TD, vtpote radij diametri AH, LI, & trientes peripheriarum AMH, LVI. Ergo ex def.3.tr.34. parallelepipeda erunt ſimilia, ideo ex 14. p.11.h. in triplicata ratione lateꝝ, ideſt radij PO ad radiū QN, vel trientis peripheriæ OX ad QT, & ideo peripheriarum ex 18.l.5. vel diametri OX ad diametrum TD. Quare etiam ſphęrę æquales parallelepipedis HMA, & LVI erunt in triplicata ratione peripheriarum ex 7.l.5. vel radiorum, vel diametrorum.

EXPENSIO XI.

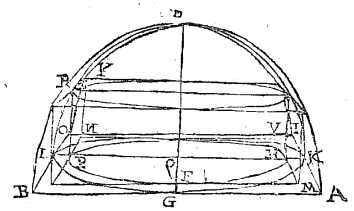
De ſphæræ, vel ſphæroidis quadriformis, & vngulæ Cylindricæ ſoliditate.

SPhęra quadriformis eſt figura ſolida, quæ formatur à plano quadrato, vel rectangulo: ſed deinde omnia plana, quæ parallela lateri, & baſis perpendicularia ipſi plano per corpus illud ducuntur, aut circuli ſunt, aut Ellipſes. V. g. ſuper quadratum AIOB, ſit formatum tale corpus AIOBD, cuius ſectio KDL normalis baſi AIOB, & parallela lateri AB ſit circulus, vel ellipſis, illud corpus erit ſphæra quadriformis, ſi ſectiones ſint circuli, vel ſphæroides quadriforme, ſi ſectio ſit ellipſis; de quo corpore ſoliditas cubica quærenda eſt.

THEOR I. PROP. XLVIII.

* *Sphæra ita eſt ad ſphæram quadriformem, vel ſphæroides ad ſphæroidem quadriforme, vt circulus aliquis, vel ellipſis ad quadratum, vel rectangulum ambiens baſes ipſorum corporum.*

SIt ſphęroides quadriforme AIDOB, vel eius medietas ſupra deſcripta, cuius baſis rectāgula AIOB, & in ea hemiſpherium KLGD, cuius baſis circulus KGL. Dico, quod ſphæra KGLD, ita eſt ad ſphæram quadriformem AIOBD, vt circulus AGL ad quadratum AIOB.

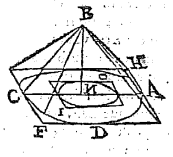


Probatur. Inſcribantur enim tum in hemiſphærio, tum in hemiſphęra quadriformi in hac parallelepipeda in illa cylindri æquales inuicem altitudinis V. g. parallelepipedum MNY, & cylindrus HEPR per continuam ſubdiuiſionem radij DQ; erit que quicumque circulus ad circumſcriptum ſibi quadratum in eadem proportione V. g. circulus KGL erit ad quadratū AO, vt circulus HEP ad quadratū MN, & ſic dicas de omnibus alijs quibuſcumque, cum omnis circulus ad allum circulum, vt ex propoſ.40. lib.1. conſtat, V.g. circulus KGL ſit ad circulum quemcumque HEP, vt quadratum AO ex diametro HL ad quadratū MN ex diametro HP, quod eſt etiam dicendum de Ellipſibus ex propoſ.27. Tract.30. vnde *permutando* ſequitur, quod ſit circulus KGL ad quadratum AO, vt circulus HEP ad quadratum MN, vel Ellipſis KGL ad rectangulum ambiens AO, vt Ellipſis HEP ad rectangulum ſe circundās MN, & cæt. Cum ergo cylindri ſuper circulos, vel ſuper Ellipſes erecti ſint æquales altitudinis: ac parallelepipeda ſuper quadrata, vel rectangula ex diametris ex Theſi dicent eam proportionem, quàm baſes; ideoque omnes cylindri, qui ſphęra, vel ſphæroide inſcriptibiles ſunt ad omnia parallelepipeda ſphęra, vel ſphæroide quadriformi inſcriptibilia dicent eādem proportionem. quam circulus, & baſis, cui cylindri inituntur, dicit ad baſes rectangulas parallelepipedorum ex prop.5.h. Omni itaque inſcriptione poſſibili tam Parallelepipeda in ſphæra, vel ſphæroide quadriformi, tum cylindri in ſphæra, vel ſphæroide multiplicentur, neceſſe eſt, vt adæquent parallelepipeda, quidem ſphæram, vel ſphęroidem quadriformem

mẽ; Cyliadrl autẽ ſphæram, vel ſphæroidẽ aliquin, ſi non omninò implereut,noua,& minutior inſcriptio poſſet inſtitui contra hypotheſim, quà poſuimus, omnia eſſe inſcripta, quæ potuerunt inſcribi. Cum ergo omnes cylindri ſphæram,vel ſphæroidem æquent, omniaque parallelepipeda ſpheram,vel ſphæroidem quadritormem,& omnes cylindri inſcripti ſint ad omnia parallelepipeda inſcripta, vt baſes circulares ad baſes rectangulas, illæque circulares habeant ad rectangulas eam proportionem, quam aliquis circulus ad aliquod quadratũ ambiens, vel aliqua ellipſis ad rectangulum circumſcriptum. Erit etiam proportio ſphæræ, vel ſphæroidis ad ſphæram, vel ſphæroidem quadriformem rectãgula baſi ſitam,quę maximum circulum, val maximam ellipſim ſphęroidis ambiat, vt ipſe circulus, vel ellipſis, ad quadratum, vel rectangulum ambiens.

COROLLARIVM.

*Ellicitur. Quod cum ex pr.43.Cor.h.conus, qui ſit eiuſdem altitudinis,ac radius,& habeat dlametrum ſphæræ pro radio æquet ipſam ſphæram: Quod etiam Pyramis eiuſdem altitudinis, ac radius ſphærę, quę habeat baſim, cuius latus ſit duplus diametri erit æqualis ſphęrę quadriformi. Nã ex 6 h.conus quadruplus coni ſphæra inſcripti ABCD erit ad pyramidem HFB eiuſdem altitudinis in baſi HF circulum ADC ambienti,vt circulus ADC ad quadratum HF;ſed vt ADC circulus ad quadratum HF, ita eſt OI circulus ad quadratum inſcriptũ OI ex 40. l. 6. & ita eſt ſphęra in circulo ſita ad ſphęram quadriformem in quadrato OI ſitam ex præc. Ergo conus ADCB erit ad pyramidem HBF, vt ſphæra in circulo OI ſita ad ſphęram quadriformẽ in quadrato OI collocatam ex 16. l. 5. Verùm conus ADCB æquat ſphæram,cuius circulus maximus OI, ergo ex 12. lib. 5. etiam pyramis HFB æquabit ſphęram quadriformem in OI ſitam.

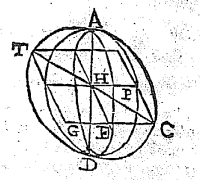


Idem dicendum de ſpheroide, & de ſpheroide quadriformi; Nam ſicut ſphęroides æquat conum cuius baſis quadruplum ſit baſis coni inſcripti; & eadem altitudo; ſic, & ſphæroides quadriforme æquat talem pyramidem. Quod etiam intelligendum eſt ſi ſit baſis ellipticę, & ideo ſphæroidis quadriformis baſis non ſit quadratum, ſed rectangulum; vt quilibet per ſe poterit arguere cum oſtenderimus quodlibet ſphęroidem eſſe ex propoſ. 37. Tract.h. Cor 2. æquale cono, cuius, baſis ſit quadrupla baſis ſuę, & eadem altitudo.

THEOR I. PROPOS. XLIX.

* *Vngula Cylindrica eſt octaua pars ſphæræ, vel ſphæroidis quadriformis.*

VNgula Cylindrica eſt portio cylindri abſciſa ſemicirculo ſemiellipſi, & portione ſuperficiei cylindricę contenta. Sit itaque hemiſphęrium quadriforme ATDC,& diuidatur acto per axẽ diagonalęq; CT plano, iam illud planum erit ellipſis ACDT ex prop 13. tract.25. cum ſuperficies AE. DC perpendiculares ſint circuli plano AED; Ergo fruſtũ ſphærę quadriformis ACEDH continebitur ab ellipſi CAD portione cylindrica CADE, & circulo AED: Ergo erit vngula cylindrica: Eſt autem CAED cylindri ſuperficies; quia eſt normalis circulari plano AED: Ergo ſoliditas vngulę æquabit octauam partem ſphęrę quadriformis: ſiquidem triangulum EHC, ſuper quod initur CAEDH corpus vngulare eſt octaua pars totius baſis, & maximi ſphęrę quadriformis quadrati TC, & ſingulæ cæteræ partes ſolidæ, quæ reliquis



triangulis collocatę ſunt, habeant omnes ſuperficies ſimiles,& æquales huic,vt ex definitione ſphęræ quadriformis ſatis apparet. Quod & oſtenditur nam ex prop.28.Tract. huius corpora conformia æqualis altitudinis inuicem ſunt, vt baſes, ſed baſes hic ſunt æquales HEC, HPC, & cęt. & altitudo omnium æqualis HA,HD, ergo & corpora conformia erunt æqualia. Sed ſunt octo in quæ ſphæra quadriformis diuiditur, vt ſunt octo triangula ex quatuor quadratis HC, HG, & cæt. conſurgentia bifariam diuiſa. Ergo quodlibet corpus vngulare erit octaua pars ſphæræ quadriformis, quod,& poteris aſſerere proportionaliter de vngula alicuius cylindri, qui baſim conſequatur ellipticam,& ipſius vngulæ altitudo ſit, aut maior, aut minor, quam diametri: nam eodem pacto erit octaua pars ſphæroidis quadriformis talem baſim, & altitudinem obtinentis.

COROLLARIVM.

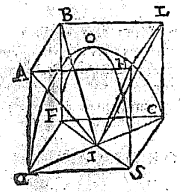
*Hinc ellicitur vngulam cylindricam eſſe octauam partem pyramidis quadrangulæ, cuius altitudo ſit eadem,ac radius, & latera cõſequatur dupla baſis ſphęrę quadriformis,cuius pars eſt, ideoque AC EDH vngulam eſſe æqualem pyramidi, cuius altitudo HA, & baſis TGC: nam baſis TGC trigularis eſt ſubdupla baſis TC quadrãgulæ, quæ eſt ſubquadrupla baſis illius,cuius latus ſit duplus lateris GC, & alius duplus lateris TG, & ideo CGT erit ſuboctupla baſis illius pyramidis, quæ ſphæram quadriformem æquat; ideoque, cùm, & hæc pyramis in CGT baſi ſita,& altitudinis HA ſit vt vngula cylindrica ACDEH ipſi ſphęrę quadriformi, ideſt

ideſt eidem, vt 1. ad 8. hæc pyramis baſis CGT altitudinis HA; & vngula cylindrica CAEDH æquabitur ex 7. lib. 5.

THEOR. III. PROPOS. L.

* *Sphęræ quadriformis medietas æquat parallelepipedum eiuſdem altitudinis, & eiuſdem quadratæ baſis, cui dempta ſit pyramis eiuſdem baſis, & altitudinis.*

COgita in baſi CSFD quacumque rectangula ſphærę quadriformis DCFOS medietatem, cuius altitudo ſit DA in parallelepipedo CA exiſtentem. Ex præc. cum tota æquet pyramidem, cuius baſis ſit quadrupla ipſius baſi CFSD, & altitudo DA ideſt quadruplum pyramidis BAHL, dimidia æquabit pyramidem, cuius baſis ſit dupla baſi CFSD: & altitudo eadem; nam hęc item erit

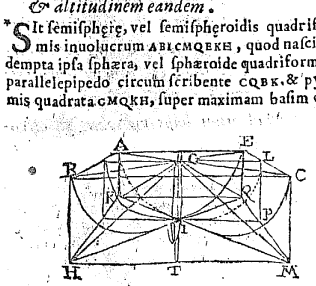


dimidia quadruplę pyramidis ex 24.par.1.h.& ideo duplum pyramidis LHBAI. Cubus verò, vel parallelepipedum vacuatum pyramide LBAHI eſt duplũ pyramidis ipſius LHBAI, quia parallelepipedũ eſt duplum priſmatis eiuſdem baſis, & altitudinis, & priſma tale eſt triplũ baſis triangularis, & ideo vt 3. ad 2. vel ſeſquialter pyramidi duplæ, quæ habet quadrangulam baſim; vnde parallelepipedũ LSBD duplum priſmatis, erit ad pyramidem LBAH1, vt 6. ad 2. ablata ergo ipſa pyramide, quæ eſt 2. erit reliquum ad ipſum 2. vt 4. ad 2. nempe duplum. Quare ex 7. l. 5. cubus, & ſphęra æquabuntur cum eidem pyramidi LBHAI ſint, vt 2. ad 1.

THEOR. IV. PROPOS. LI.

* *Inuolucrum ſemiſphæræ, vel ſemiſphæroidis quadriformis eſt æquale pyramidi quadratum eius maximum pro baſi habenti, & altitudinem eandem.*

*Sit ſemiſphęrę, vel ſemiſphęroidis quadriformis inuolucrum ABLCMQEKH, quod naſcitur dempta ipſa ſphæra, vel ſphæroide quadriformi à parallelepipedo circum ſcribente CQBK. & pyramis quadrata CMQKH, ſuper maximam baſim QH,



& altitudinem eandem IG. Dico hanc pyramidem inuolucro prędicto eſſe æqualem.

Probatur. Nam hæc pyramis MQKHG eſt ad cubum, vel parallelepipedum CAQH, vt 1. ad 3. ex prop. 22. huius,cum ſit dupla pyramidis triangularis, quæ eſt priſmati, nempe dimidiato parallelepipedo, vt 1. ad 3. & ideo parallelepipedo, vt 2. ad 6. Sphæra verò,vel ſphæroides quadriforme eſt ad hanc pyramidem ex oſtenſis, vt 4. ad 1. cum ſit vt pyramidis æqualta ſuper baſim quadruplo maiorem, ideſt pyramis quadruplo maior ad ipſam pyramidem inſcriptam GQMKH, & hinc hemiſphęrium quadriforme,vel hemiſphęroides erit ad GQKMH, vt 2.ad 1. vtpote dimidium corporis integri.

Ideoq; ex 2.pr.tr.17 parallelepipedo,cui inſcriptum eſt ſubſeſqualterum,ſc.vt 2.ad 3.Si igitur ipſa hemiſphęra,vel hemiſphęroides, quæ eſt, vt 2. ad 3. ad ipſum parallelepipedum auferatur, remanebit parallelepipedum $\frac{1}{3}$ nempe corpus quoddam æquale pyramidi KMQHG baſim habentis in baſi maxima hemiſphęrii, & altitudinem eandem, quę & ipſa parallelepipedi eiuſdem AMEH eſt $\frac{1}{3}$.

COROLLARIVM I.

*Hinc eſt quartam partẽ inuolucri hemiſphęræ,vel hemiſphęroidis CLMPTI eſſe æqualem quartę parti pyramidis QMKHG, nempe pyramidi MPTIG æquari. Eſt hoc CLMPTI etiam inuolucrum vngulę cylindricę;ſiquidem M. PLC eſt dimidium inuolucrum. Quòd ICLGMP ſit dimidia vngula cylindrica, & ex dictis conſtat, quæ tota reſultaret addito alio hemiſphęrio, quia continetur quartis circuli IL ſuperficiei cylindricę ILC, & Ellipſis IGC.

Cum ergo pyramidis pars PTMIG ſit quarta pars pyramidis MQGKH.&inuolucri pars quarta CLMIP ſit totius inuolucri æqualis toti pyramidi; inuolucrum prędictum, & pyramis PMTIG æquabuntur.

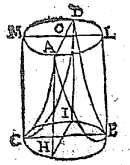
COROLLARIVM II.

Elicitur quoque. Reſiduum vngulæ hinc faciliter poſſe cognoſci ſi cylindro, in quo eſt ſit æquale priſma æqualem habens baſim triangulã, & eandem altitudinem, ſi ab hoc priſmatis dimidio auferatur ſoliditas vngulæ.nempe pyramis ex dimidio baſis ſphęrę quadriformis eiuſdem baſis,& altitudinis,remanebit ſoliditas reſidui vngulę. Igitur ſi detur cylindrus DABIHC, & ab eius dimidio DABML auferatur ſoliditas vngulę DALB remanebit reſiduum vngulæ ACIHB, hoc autem ſit prædicto modo vtendo corporibus æqualibus ipſis vice ipſum.

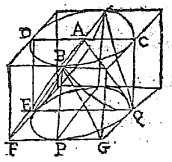
PROBL. I. PROPOS. LII.

* *Soliditatem Lunularum, & inuolucri ipſarum reperire.*

EX prędictis facilè ſoliditas duorum corporum, quę in fornicibus maximè in vſum veniunt, reperitur,nempe Lunulę, & eius inuolucri, eſt autem Lunula, ſolidum corpus quoddam in acutum deſinens ex ablatione duarum ſemiungularum ex dimidio cono per axem enaſcens,ſic corpus ABC ablatis duabus ſemlungulis MOAC, & OABL erit corpus quoddam in communi vſu loquendi apud Italos Architectos Lunula appellatum,& eſt maximè in vſu in concameratio nibus cubiculorum.



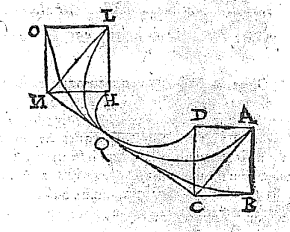
Huius igitur corporis ſoliditas faciliter inuenietur ex præc. Cor. Nam ſemicilindri LAMBHC inueniatur ſoliditas ex prop. 3. h. Coroll. & ab ea auferatur vngula integra, ideſt duę ſemiungulę LOBA; & OMCA auferendo pyramidę ex pr. 49. Cor. æqualem, reſidua erit ſoliditas lunulę BACH.



Inuolucrum autem lunulę eſt illa ſoliditas, quæ enaſcitur ablata lunula à priſmate ea circundante, ſic ſi intelligatur ſemicilindrus CBDQPB, & circa illud parallelepipedum CGFD, & agantur duo plana per BA, & FE alterum, alterum per BA, & GQ ſimul duæ ſemiungulæ ABQ, & ABE formabuntur, & lunula QPBE ex ſectione cylindri, ex ſectione verò parallelepipedi tria priſmata CABGQ, & BAGQFE, & BADFE, quorum duorum duo comprehendent vngulas; ſc. CABGQ, & BADFE; medium verò æquale illis duobus lunulam continebit; eiuſque inuolucrum erit. Igitur ſi ab hoc priſmate GQBAEF auferaţ lunula ABQPE erit inuenta inuolucri vngulę ſoliditas, eritq; corpus contentum ſemicirculo, vel ſemiellipſi QPE, & ſuperficie cylindrica ex ipſa conſurgente, & planis ſuperficiebus GQB, BFE triangulis mixtilineis, ſicut & GQP, PFE, & tandem triangulo GBF. Si ergo priſma comprehendens inuolucrum vngulæ BAEQFG ſit poſitum ſuper dimidiam baſim EQFG parallelepipedi cylindrum ambientis, & eiuſdem altitudinis DE, erit dimidium dimidij ex pr. 2. tract. 24. ideſt quarta pars totius. Quare à quarta parte parallelepipedi cylindrum ambientis à cuius ſectione vngula enaſcitur, auferatur lunula EPBQA reſiduum erit inuolucrum lunulæ, quod exquiritur.

COROLLARIVM I.

*ELlicitur, quod ſi duo ex iſtis ſemi-inuolucris ponantur auerſis priſmatum acuminibus efformabitur quarta pars inuolucri fornicis cruciformis, quatuor lunulis in centrum conuenientibus conſtantis, vt eſt in fig. hic appoſita, in qua ABDCQ eſt lunulę inuolucrũ, quo cõponitur ſemi-inuolucrũ ADCQ, ſed auerſis acuminibus C, A priſmatũ ambientium, ità vt acumen huius reperiatur vbi baſis alterius, namque DAC correſpondet plano EPG ſuperioris figuræ QD eſt quarta circuli PQ, & QA eſt quarta ellipſis BQ, ſic ACB refert planũ PEP ſed inuerſo acumine C, vt eueniret ſi GC planum ſuperioris figuræ cylindrica ſuperficie eſſet ſectũ, quę incideret in ellipſim BQ. Vnde QB circulus eſt, qui cum ellipſi QA facit latera curua huius corporis QCA, & QCB, triangulis mixtilineis contentum, triangulo rectilineo CAE, & ſuperficię cylindrica ABQ; Et ita dicas de alia portione NOLHQ ſi itaque quatuor ex iſtis QDABC componantur, ita vt in vnam baſim conueniant, cuius quarta pars ſit DACBQ cruciformis fornix erit compoſitus in acuminibus quatuor, quale eſſet acumen Q, inixum.



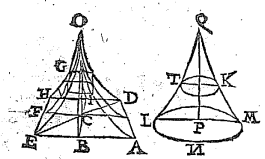
COROLLARIVM II.

*HInc etiam patet, quod ſi quatuor corpora inuolucri DABCQ componantur; ita vt quatuor quadratę ſuperficies baſim ſternant, vt FGIH, & ECFB, & cęt. & coniungantur in idem acumen O, & penes quadrantes OF, OL; OB, OI æquales, vel æquales, & ſimiles partes quartas ellipſium in vnũ, vt vides in fig. pr. ſeq. cõponantur, efformabitur corpus acuminatum AHO, ex ſuperficiebus cõcauis conſurgens EOH, EOA curuitate globoſa intus vergente, & ſi coſtę OE, OH, OD, OA intelligantur ablatę, & redactũ in figuram, vel octangulam, vel quãcumque aliam, vel etiam ad figuram prorſus circularem efformabitur corpus ſolidum. Quod poterit apellari pyramis, ſi rectilinea ſit baſis, vel conus inflexis conſtans ſuperficiebus, ſi ſit circularis.

THEOR. VI. PROPOS. LVI.

**Priſma quadrangulæ baſis ſe habet ad conum circularis baſis, quæ inflexis ſuperficiebus veſtiantur, & cuius latus diametro baſis coni æquale ſit, & ſuperficies ſint ſimili, & æquali curuitate flexæ, & ad eandem altitudinem latæ, vt quadratum baſis priſmatis ad circulum baſis coni.*

SIt priſma ſupra explicatum Cor. 2. AHO, cuius altitudo CO æqualis altitudini PQ, latus AE, vel LF æquale diametro ML æquetur; curuitas verò plani OLP per axem laterum, vt OP, & LO, ducti ſit æqualis, & ſimilis, nempe deſumpta ab eadem fig. V. g. circulo, ſeu ellipſi, ac curuitas MKQ, vel QTL plani MQL per axem ducti, ita quod NMQL corpus intelligatur inſcriptibile in corpore AOH, & ſingula plana circularia, vt KT inſcriptibilia, in quibuſlibet quadratis æqualtis, vt IG. Dico, quod corpus AOH erit ad corpus NMQL, vt quadratum AH ad circulum MNL.



Probatur autem prorſùs eodem argumento, quod adduxi ad oſtendendam proportionem ſphęræ circularis ad ſphæram quadriformem, nempe eam, quam habet baſis quadratum circundans ad circulum, nempe eãdem eſſe proportionem omnium quadratorum ad omnes circulos inſcriptos, quam huius quadrati, ad hunc circulum inſcriptum, ideoque eſſe quadratum baſis AH ad circulum baſis inſcriptæ, vel inſcriptibilis LNM, vt KG quadratum ad circulum HT ſibi inſcriptum, vel inſcriptibile ex prop. 41. lib. 6. & ſic de quocumq; alio, & ideo æquealta parallelepipeda in quadratis, ad æqualtos cylindros in circulis inſcriptis ſitos ex propoſ 22. h. obtinere eandem propoſitionem, quam baſis quadratum AH ad circulum baſis LM: Quare, vt ibi concluſimus, etiam ipſę figuræ ſolidæ, nempe AOH ad MNQL eandem proportionem dicetiquam AH baſis quadratum ad MNL circulum.

COROLLARIVM I.

HInc eſt, quod ſi bis accipiatur ſoliditas Lunulæ, & auferatur à duplici priſmate eiuſdem altitudinis, & baſis rectangulæ, quæ ambiat ſemicirculum baſim lunulę enaſcetur geminũ inuolucrũ; quod præc. Cor. 1. adnotauimus. Vnde etiam enaſcetur ex 2. Cor. pyramis flexis conſtans, qua habita poteris arguere à quadrato baſis HA ad circulum inſcriptum LNM, ita ſolliditas pyramidis flexis conſtans ad aliud, & inuenietur conus prædictus circularis LQMN.

COROLLARIVM II.

ELlicitur etiam, quod dicitur de tota pyramide idem dicendum eſſe de ſingulis ſegmentis ſolidis æqualtis, quod nimirum ſit ad inuicem pyramis ad inſcriptum conum, vt quadratum baſis ad circulum inſcriptum. Quod, & verificatur ſi comparetur quadrangularis ad pyramides cuiuſcunque alterius figuræ inſcriptas.

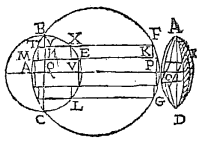
COROLLARIVM III.

QVod ſi priſma flexis contentum non obtineat pro baſi circulum, ſed figuram aliquam ex regularibus eodem argumento, ex 26. lib. 6. concludes eſſe priſma flexis contentum ad conum ex baſi polygona flexis contentum, vt quadratum ad polygonum. Et idem erit ſi HA ſit rectangulum, & LNM ellipſis

THEOR. VII. PROP. LIV.

Sphæra quadriformis eſt ad metam quadriformem quadratam, vt baſis quadrata ſphæræ ad baſim quadratam metæ. Patet itemq; ſphæra ad metam circularem, vt ſphæræ baſis circulus ad metæ baſim circulum.

META eſt corpus quoddam, vel quadratum, vel rotundum, nempe ſuper baſim quadratum, aut circulum erectum, quod ex duobus ſegmentis circuli per axem baſi normalem ducti formatur, & dicitur meta, eo quod antiquitùs metæ ad quas, qui primi perueniebant curſu victoria potiebantur, illa figura conſtabant. Huius corporis figura eſt AD, cui modulum præbet duplex ſegmentum BAC circuli BAGF, quę ſimul vnita penes ſubtenſam BC vel AD faciunt ſuperficiem APDI, quæ ſecta baſi IO, & ab eius ſingulis lateribus ductis ſuperficiebus quatuor curuatis iuxta ambitum AID formatur. Diximus ergo, quod ſi ex circulo BELC ſit erecta ſphęra quadriformis, quod hæc ſe habebit ad metam quadratam, vt quadrata baſis ſphæræ ad quadratam baſim metæ.



Sit igitur ſegmentum BAC dimidium plani metam formantis, & baſis quadratæ quartæ parti ſit latus QA, & BVC circulus ſphæræ quadriformis modulus, cuius quadratæ baſis quartæ parti ſit latus VQ, & BFPGC circulus reſiduus ex ſegmento BAC metæ genitore, in quibus plurimæ lineæ parallelæ ducantur, & inuicem æquidiſtantes, & ſuper ſingulas rectangula inſcripta æquèeleuata; Quia itaque ex 22. prop. huius rectangulum PQ, QA eſt æquale quadrato QV, & KN, & NM quadrato NE, & cętera cæteris; erit rectangulum PQ, QA ad rectangulum KN, NM, vt quadratum QV ad quadratum EN; & ita erit KN, & NM rectangulum ad FY, vt rectangulum, vt quadratum EN ad quadratum XY, & ita de omnibus alijs. Sed quadrata omnia ſunt inuicem ſimilia; Ergo etiam rectangula. Quare ex 26. lib. 6. PQ erit ad KN, vt VQ ad EN litera, & QA ad NM, & cęt. ſed QA quadratum ad NM quadratum eſt, vt rectangulum PQ, QA ad rectangulum KN, NM; quia cum ſint eiuſdem altitudinis ſe referunt, vt baſes PQ ad KN: Ergo ex pr. 26. l. 6. quadratũ VQ erit ad quadratum EN, vt quadratum QA ad quadratum NM, & eadem ratione EN quadratum ad XY quadratum, vt quadratũ NM ad quadratũ YI: ideoque *permutando* erit quadratum VQ ad quadratum QA, vt quadratum EN ad quadratum NM, & XY quadratum ad YF quadratum: Quare ex 17. l. 5. omnia quadrata QA, NM, YI erunt, vt vnum antecedens VQ ad vnum conſequens QA: ſed hęc quadrata VQ, EN, XY ſunt ad quadrata QA, NM, YI ex 5. huius, vt Parallelepipeda eleuata altitudinibus æqualibus QN, YN, & cæt. Ergo omnia hęc parallelepi-

lepipeda VN, EY & cæt. ad omnia MQ, NT erunt, vt bases omnes quadratæ ex VQ, EN ad omnes ex QA, & NM, nempe, vt basis VQ ex dictis ad basim QA.

Sed omnia hæc parallelepipeda si multiplicentur vsquedum multiplicari, in sphæra quadriformi queunt inscripta æquant ipsam sphæræ quadriformis quartam partē, & QA metæ quartā partem.

Alioquin, si omne spatium inter ipsa, & corpora, in quibus inscribūtur non implerent, nouę inscriptioni daretur locus: Ergo quarta pars sphæræ quadriformis, & ideo eius quadruplū sphæra quadriformis erit ad quartā partem metæ, & ideo integrā metam, vt quarta pars quadrati basis sphæræ ad quartam partem quadrati metæ, & ideo vt basis sphæræ ad basim metę.

Quod si basis sit circulus eodem argumento, ac in præt. factum est, concludes esse metam quadratam ad circularem, vt quadrata basis ad circulum, & ideo ex *æquo* esse circulum basis sphęræ ad circulum basis metæ, vt sphæra ad metam.

COROLLARIVM I.

*HInc constat idem dicendum esse de partibus æqualtis, cum idem valeat argumentum V. g. de corpore formato ex BNM segmento metę, & ENB segmento sphæræ.

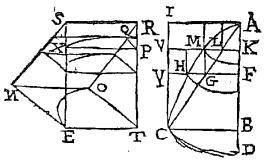
COROLLARIVM II.

*QVod si basis metæ non sit circulus; sed allquod polygonum regulare idem concludes esse sphæram quadriformem ad metam, vt basis quadrata ad polygonam metæ.

THEOR. VII. PROPOS. LV.

**Conoides parabolicum quadriforme æquatur prismati eandem altitudinem, & basim habenti, singulæque partes singulis æqualtis partibus.*

PRobatur. Nam repetita figura prop.35. h. pene eadem demonstratione propositum ostendemus. Quoniam omnes ductæ parallelæ ad basim, & applicatæ, vt KM efformantes parabolam generantem conoidem quadriformem, habent sua quadrata equalia rectangulis ex KL lineis, quæ ad eandē altitudinē in triangulo BCA, & ex KV, quę in rectāgulo IE trahūtur, quę superficies quadratē simul iunctæ efficiūt prisma TOENRS, & ideo omnia rectangula, vt PQX ex illis KL, & KV constantia in eadem altitudine bases sunt parallelepipedorum,



quę soliditatem prismatis TOENRS circumscribunt, quæ æquealta sunt, vt parallelepipeda æqualta super bases quadratas ex KM applicatis, quæ circumscribunt soliditatem parabolici corporis. Quare, cum omnia solida rectangula prismati circumscripta omnibus solidis rectangulis conoidi circumscriptis æquentur, sequitur ex prop.22.h. vt prisma sit æquale conoidi parabolico; singulęque prismatis partes singulis partibus eius æquealtis.

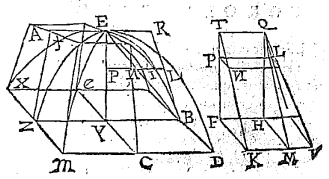
COROLLARIVM.

*HInc que sit euidens conoidem parabolicum quadriforme esse subduplum parallelepipedi eandem altitudinem obtinentis, & super eandem basi collocati: singulæque eius partes parallelis abscisas, singulis eius æquealtis partibus subduplas esse: quia tale parallelepipedum est duplum prismatis eadem basi, & altitudine gaudentis.

THEOR. VIII. PROPOS. LVI.

**Conoides Hyperbolicum quadriforme æquat frustum pyramidis æquealtum, ac conoides, cui frusto deficiat parallelepipedum super basem tangentem verticem conoidis, & eiusdem altitudinis erectum; Pyramis verò tota eadem basi sita in altitudinem transuersæ axis assurgit.*

SIt conoides Hyperbolicum quadriforme, ideſt quadrate quidem basis DX: sed cui prębeat superficierum à basi eleuatarum curuitatem Hyperbola BEZ normalis basi, vt rapresentat corpus tale fig. CEXEMD. Pyramidis autem latus pertingens ad verticem axis transuersæ sit BR. quæ sit super basim DX; & frustum eius, vel dimidiū frusti sit EMECX: vt perfecimus ad læuam AMC. Dico itaq; in primis antequam demonstrem propositionem; quartam partem corporis hyperbolici quadriformis esse æqualem prismati QTFV; cuius altitudo FT æquet conoidis altitudinem YE; basis verò sit rectangula MF ex RE tangente verticis & EY latere basis, & pyramidi æquealtæ HQV, cuius basis VH sit differentia VM inter RE, vel QT, & MK, vel DC, ita quod QE trapezium æquetur trapezio plano YERE, & triangulum FFK triangulo in illo descripto YEB.



Probatur. Nam ex prop.59. tract.24. PI applicata quælibet æquat suo quadrato rectangulum EX LP, & PN ab eodem puncto P nascentibus, & protensis, altera quidem in superficie DYE, vel æquali TFK ex effectione, altera verò in superficie BRYE, ideſt FQT. Cum ergo singula quadrata singulis rectāgulis, illa, quę describuntur in conoide hyperpolico quadriformi EXD hæc, quæ in prismate

mate QTMF, & QVH pyramide, & sint quoque equalia ex 18.h. equealta parallelepipeda in illis basibus sita. Ex prop.22. tr.h. ipsa corpora, in quibus describuntur erunt æqualia, nempe quarta pars corporis hyperbolici quadriformis, & prisma MQET, pyramisque VHQ: quæ pyramis, & prisma: si quadruplicentur erunt æqualia toti conoidi quadriformi, simulque conficient frustum pyramidis, cui parallelepipedum ipsi frusto æquealtum constitutū super minorem basim, demptum fuerit.

COROLLARIVM I.

*HInc videre potes inuolucrum huius corporis, cuius medietas EACMX, cuius sectio REFBZ ablata hyperbola BEZ, æquari parallelepipedo, cuius basis sit quadratū ex RF, & altitudo YB; Nā si demantur à frusto pyramidis quatuor prismata, quatuorque pyramides equales conoidi, quod conoides, & auferatur ab eodem corpore frusto pyramidis, remanębit inuolucrum corporis huius, & parallelepipedum illud equale.

COROLLARIVM II.

*EX serie quoque ostensionis euidens fit, quod conoidis quadriformis singulę assignatę partes basi parallelis planis resectę equatur prismatis, & pyramidis portioni ad eandem altitudinem à plano basi parallelo resecatę; Quia scilicet omnia plana parallela basi ad eandem eleuationem, hinc in sphæroide, hinc in prismate, & pyramide ducta sunt inuicem æqualia; Vnde eodem argumento ex prop.22. huius idem de portionibus concludere poteris; Et hinc ex Coroll.1. eadem de inuolucro portionis concludes, & de parallelepipedo in minori basi ad eandem altitudinem portionum conoidis hyperbolici erecto. Quod nempe tum partis inuolucrum, tum hoc parallelepipedum sint æqualia.

EXPENSIO IX.

De Corporibus spiralibus.

VIdimus Tract. 30. prop.53. & sequent. superficies spirales; modò spiralia corpora super ipsas eleuata breuitèr oportet attingere, & eorum mensuras aperire: Sunt autem spiralia corpora in quadruplici differentia; Alia, quæ obtinent basim circulum, & eleuantur parallelis superficiebus à basi, sed spiraliter assendunt per incrementa ambitui circuli proportionalia, altiorque est gyrus in fine, quam in initio; Alia sunt, quæ super basem spiralem sunt constituta: sed in æqualem eleuationem terminant, in basimque spirę, à qua eleuantur, æqualem, & similem. Alia sunt, quę super basem spiralem sunt collocata. Sed etiam secundùm, quòd crescunt spatio basis sic, & altitudine eleuantur: Alia tandem è contra; Nam in ipsa spirali basi collocata, secundùm quod basis crescit amplitudine, illa altitudine decrescunt.

DEFINITIO.

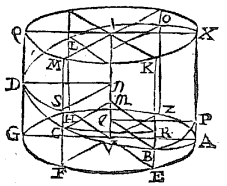
Corpus spirale est illud, quod in altum se eleuando tot partes absumit altitudinis, quot periphęriæ circuli ipsum ambientis, & ab eodem centro describti.

Soliditates spirales in altitudinem eleuantur proportionaliter ad circulum, secundùm quod feruntur in orbem; ita quod, quot partes absumit circuli in orbem se gyrando, tot altitudinis assequatur in se eleuando: Sicut enim linea spiralis, ita decrescit, vt quot partes absumit circuli generantis, tot partibus diminuatur, sic spira ABCD, si ex sex partibus circuli AEFG. eodem centro ducti efficit AE vnicam, etiam vnica parte BE eleuatur ex sex, in quas altitudo AX diuisa sit, si duas ambitus AE, & EF, etiam duas FC: altitudinis occupat, si tres AEFG, etiam tres altitudinis absumit GD, &c.

THEOR. I. PROPOS. LVII.

Corpus spirale super circulum spiraliter in altum ascendens, est dimidium cylindri super eandem basem collocati, & in eandem altitudinem eleuati.

SIt spirale corpus primi generis, quod spiraliter tantùm in altitudinem procedat super basem circularem AEGHZ, spirâ ABCDLOX. Dico, quod hoc est ad cylindrum AGQX, vt 1. ad 2.



Probatur. Nam spirali corpori ABCD LOXAG circūscribātur sectores solidi PABEVE, & REFCMV, & SDFGNV, & cæt. equalium basium, eritque sector solidus PBAEVE ad sectorē solidū XKAEVI, vt altitudo BE ad altitudinē EK ex 13.h quod sint super eādem basim VAE. Sic sector solidus EVFRMC erit ad sectorem solidum EKIVMF, ideſt æqualem XIKAEV, vt altitudo FC ad altitudinem FM, ideſt EK: ergo ex prop 25.lib.5. prima quantitas BAEPVE sectoris solidi cum quinta EVFCMR sectoris item alterius solidi erit ad secundam AEXVIK, & ideo ad duplam ex 18.l.5. XIMAVE, vt tertia BE altitudo cū sexta FC altitudine ad EK altitudinē, & ideo ad duplā FM, & EK. Cū ergo sint duo sectores solidi APBEVE, & EFRCVM ad AXIKVE sectorē solidū, vt duę altitudines EB, FC ad altitudinē EK, & sector quoq; solidus crescens FSG DVN sit ad solidū VFGMIQ, ideſt æqualē KXAEVI, vt GD altitudo ad GQ, ideſt æqualē KE ex eadem prop.25. prima quantitas cum quinta, nempe duo sectores solidi APVMFC cum sectore solidos SFVNDG erit ad secundam quātitatem AXEVKI, & ideo ad triplam XKMQAEFG ex 18.lib.5. vt tertia duę altitudines BE, FG cum sexta GD ad quartam EK, & ideo ad triplam EK, & FM, & GQ, & sic prosequere vsque ad complementum totius solidi spiralis, & totius cylindri, & tunc erunt omnes sectores

ctores solidi se augentes ad omnes sectores solidos æquales inuicem. vt omnes altitudines se augentes BE, FC, GD ad omnes altitudines æquales: Sed altitudines se augentes sunt dimidium altitudinum æqualium. Siquidem accrescunt proportione arithmetica. Quia verò rectangula eiusdem altitudinis ex propos. 12. tract. 27. decrescentia, seu crescentia arithmeticè dimidia sunt integrorum, etiam bases lineæ, quæ sunt in eadem proportione, ac rectangula æqualta ex 1. lib. 6. erunt dimidium basium integrarum: Cum ergo altitudines se augentes BE, FC, GD, & cet sint dimidium integrarum altitudinum EK, FM, GQ, & cæt. æquali numero multiplicatarum; Etiam sectores solidi crescentes BAPEVE, RVEFCM, & cet. erunt ad integros sectores AEIV, KFIV, MCIV, & ceteros eadem numerositate altitudinum sumptos, vt 1. ad 2. si autem sic sectores circumscribentes intelligantur multiplicati omni numerositate possibili iuxta vsitatum modum arguendi adæquabunt corpus spirale ABCDLOXAEFG. Ergo hoc corpus ad cylindrum ex sectoribus æqualibus integratum erit, vt 1. ad 2. dimidiumque eius adæquabit.

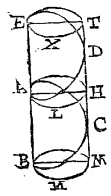
COROLLARIVM I.

QVod dicitur de toto cylindro, & de spirali corpore, idem dicendum de eorum partibus V.g. AEBPEV sectorem esse duplum corporis ascendentis ABEVE.

Quia si rectangula illi portioni, vt toti circumscribantur, eodem argumento poterit ostendi singulos sectores crescentes esse ad singulos æquales, vt altitudines crescentes ad altitudines æquales, & quia crescentes sunt dimidium altitudinum æqualium, cum arithmeticę crescant, etiam crescentes sectores esse dimidium sectoris integri.

COROLLARIVM II.

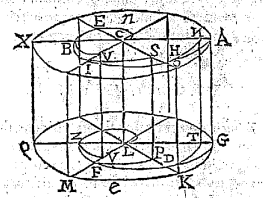
HInc est, quod habita primi spiralis corporis in altum ascendentis quantitate, cęterorum corporum spiris ascendentibus comprehensorum quantitates habeantur. Nam BNMCA spirale corpus est dimidium cylindri BHLBNM, & ALHDE spirale corpus est dimidium cylindri ALHTXE: sed hic sunt æquales cylindri; cum eorum sit æqualis basis, & altitudo ob spiram eandem; quę ascendit à D vsque ad A, & ab A vsque ad E. Ergo corpus interpositum inter duas spiras est æquale duobus dimidijs cylindrorum æqualium; duo verò dimidia æqualium vnum integrum conficiunt. Vnde corpus spirale inter dùas spiras BCADE conclusum æquat cylindrum BNMALH, vel cylindrum æqualem ALHTXE.



THEOR. II. PROP. LVIII.

Spirale corpus in æqualem altitudinem eleuatum: sed super spiralem basim collocatum est tertia pars cylindri æqualis eleuationi super circulum spiram generantem insistentis.

SIt spirale corpus AHIBECGDFZL super basim spiralem GDFZL, & circulus complectens sit GEQ: cylindrusq; super hunc circulum eleuatus ANXGQ. Dico spirale corpus AHIBECGFZL esse tertiam partem cylindri GEQANX.



Probatur ex eodem principio, & ferè eodem argumento, vt ostensa est propositio precedens. Quoniam LDT basis, sectorque deficiens est ad GLK sectorem, vt sector deficiés solidus TDLNHC inscriptus ad sectorem solidum integrum AOCGKL ex 23. prop. h. At vt PLF deficiens sector basis ad basim sectorem KLM, scilicet æqualem GLK, ita est solidus deficiens SIPFLC ad sectorem solidum super XLM in altitudinem FI erectum, seu æqualem ACLGKO: Quapropter ex prop. 25. lib. 5. prima quantitas TDL sector inscriptus planus deficientium primus cum quinta quantitate PLF, sectore plano; obtinebit ad secundum GKL, & ideo ad duplum eius ex propos. 18. lib. 5. GLM, vt tertia quantitas sector solidus deficiens NHCTDL, cum sexta PLFSIC ad sectorem solidum integrum LCAGKO; & ideo ad duplum eius GLM basi erectum æquealtum. Iam ergo si sumantur TDL, & PLF simul sectores plani erunt ad GLK sectorem planũ, vt sector solidus TDCLPFST ad sectorem solidũ GAKOLC, & LYZ sector planus ad sectorẽ planũ MLQ, ideſt GLK, vt deficiens sector solidus LYZBVC ad sectorem solidũ integrum super LMQ æqualem GACCKL sectori. Quadere similiter iunctis sectores TDL, PLF, LYZ ad GLK sectorem integrum, & ideo ad triplum eius, vt tres sectores solidi deficientes illis basibus locati NHCLDT, SVCLFP, VBCLZY ad sectorem solidum integrum AOC GKL, & ideo ad triplum eius æquealtum basi tripla GKMQL collocatum, & sic de alijs.

Cum itaque omnes inscripti sectores plani sint ad integros planos, vt omnes solidi inscripti deficientes ad solidos integros sectores, erit etiam ipsum spatium spirale omnes sectores solidos tandem adęquans iuxta vsitatum argumentum multiplicationis talis, quę omnem possibilẽ differentiã inter insctiptos sectores, & corpus spirale tollat, & absumat ad cylindrum ex sectoribus solidis non deficientibus compositum, vt tota basium multitudo, ideſt ipsum spirale planum ad circulum generantem

nerantem: sed spirale spatium ad circulum generantem est, vt 1. ad 3. ex propos. 53. Tr. 30. Ergo etiam spirale corpus AHIBECGDFZL ad cylindrum ambientem GMQXNA erit, vt 1. ad 3.

COROLLARIVM I.

HInc etiam euidens est: id quod dicitur de toto solido posse ostendi, de singulis partibus solidis, nempe, quod se habeant ad inuicem, vt portio basis spiralis ad circulum generantis portionem respondentem. Portio verò plani basis est ad sectorem, vt rectangulum ex lineis eam terminantibus cum triente quadrati differentię ad quadratum radij sectoris ex prop. 60. tr. 30. Ideoq; spiralis solidi frustum AHCGDL erit ad cylindri partem AOCGKL ambientem, vt solidum parallelepipedum super illud rectangulum linearum LD, LG terminantium, & trien alius parallelepipedi in quadrato differentiæ DK locati, quæ in parem eleuationem subleuata sint ad parallelepipedum æquealtum, ex quadrato GL radij basis sectoris assurgẽs.

COROLLARIVM II.

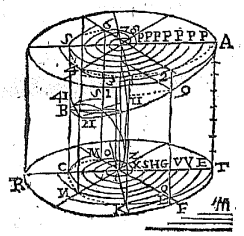
HInc etiam patet, quod idem verificatur de corpore situato in secunda, & tertia spira, & cęteris de quibus locuti sumus prop. 56. & 58. & 59. tract. 30. Quod scilicet sit ad corpus cylindricum comprehendens, vt ipsa spira plana ad circulum eam claudentem. Nam idem argumentum, quod attulimus in ostensione propositionis, etiam hic valet absque eo, quod replicetur: cùm etiam sectores solidi deficientes ad primum sectorem, & hos maximos æquales solidos, vt sectores plani deficientes illorum bases ad primum sectorem planum, & alios æquales ob eandem altitudinem x 23. h. sint in eadem proportione.

THEOR. II. PROPOS. LIX.

Corpus spirale basi spirali inixum, & quoad altitudinem spiraliter deficiens est ad corpus spirale eiusdem altitudinis super-spiralem basim positum, vt 5. ad 6.

SIt spirale corpus ABI super basim TCI spiralem inixum deficiens spiraliter, quoad altitudinem T. Dico, quod hoc corpus est ad spirale corpus usdem altitudinis super spiram TCI collocatum, 5. ad 6.

Ostensio, quæ nostra est sicut etiam totius h. pensionis à multis dependet, quæ priùs declanda sunt.



Et primo progress. Obseruandum est spirale corpus æqualis altitudinis, de quo præced. prop. 58. locuti sumus posse circumuelliri portionibus annulorum eiusdem altitudinis TA, & latitudinis TE, qui à diametro TI, vbi spira basis sumit initium deducti in ipsam spiram terminent, vt sunt FLTEPA 2, 3 KEP, & alię, vt vides in fig. Quia enim ex pr. 9. tract. 18. & 52. tract. 31. semidiameter IT diuiditur in partes æquales, secundùm quas quilibet sector arithmeticè, ideſt æqualiter quoad diametrũ decrescit; qui spirę, aut inscribatur, aut circumscribatur, si omnes illi sectorum arcus, vsque ad spiram à diametro TI deducantur, patet se inuicem superare annulorum æquealtis portionibus, vt sunt FLE, & YEK, & VYN, & cet. Nam omnes TE, & EY, VY crassitudinem mensurantes æquales sunt.

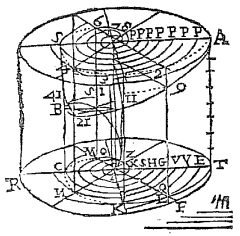
Diuidatur itaque IT radius (vt huius rei demus exemplum) in octo partes æquales, à quibus singuli arcus ducantur, vt TF, EK, YN, &c. Certum est ex præass. Expens. 7. tract. 31. decrescere singulos arcus radijs interceptos TF, & EK, YN, &c. arithmeticè pęnes diuisioaem diametri; ita quod, vt IE deficit à IT octaua parte, sic arcus EL à TF deficiat octaua parte, & sicut YI deficit ab TI duabus octauis partibus, sic YQ ab TF duabus octauis partibus decrescat; itaque si annulus EL duplicatur, deficiet duabus octauis partibus: si annulus YQ triplicatur, deficiet tribus octauis partibus ab LE, & cet.

Progress. 2. Itaque sectorum arcus arithmeticè decrescent à se inuicem æquali arcu deficiendo, nempe semper octaua parte earum, in quas primus arcus TF diuisus est. Itaque in sectore IFT erit arcuũ, & ideo portionũ ãnularium series arithmetica, quorum primus annulus LEFT, secundus LQEY, & cet. In secundo verò sectore IKL erit adhuc alia series arcuum, & ideo portionum annulorũ, quorũ primus KL, qui deficiunt, vt illi, qui sunt in sectore IFT, sed incipiendo ab arcu minori LK vnica octaua parte. In sectore verò NIK erit alia series arcuum, & ideo portionum annulorum eodem decremento arithmetico deficiens, sed incipiens ab arcu minori duabus partibus ab FT, sed vnica ab KL. Ita vt etiam ipsę series arithmeticè decrescant vsque ad finem, totque sint series, quot arcus in IFT sectore, vel quot decrementa arithmetica, quæ in singulis deficiunt, vel quot partes in arcu maximo FT sectoris maximi IFT, vel partes in radio IT. Quæ tamen omnes series simul sumptæ componunt soliditatem totius corporis spiralis basis; sed æqualis altitudinis.

Progr. 3. Quod autem annulares portiones, vt arcus arithmeticè deficiant, patet, quia omnes annulares portiones istis arcubus comprehensæ sunt æquealtæ, vtpote deductæ ob æqualibus partibus ET, & EY, & YV diametri TI erunt ad inuicem, vt bases, nempe vt ipsi arcus. Siquidem ex propos. 14. Tract. 30. æquantur rectangulis ex portionibus intermedijs inter arcum maiorem, & minorem marginalem ipsius portionis annularis plani, sc. arcu intermedio inter LE, & FT, qui in figura expressus non est, ne generaret confusionem. Isti verò arcus intermedij crescunt ad inuicem etiam arithmeticè, vt ipsi arcus marginales cum semidifferentia inter maiorem, & minorem, vel à maiori deficiunt, vel super minorem accrescunt V.g. arcus inter FT, & LE erit maior, quàm LE semidifferentia inter FT, & LE, at arcus intermedius inter QY, & EL erit minor, quam EL semidifferentia inter QY, & LE, quæ duæ semidifferentiæ æqualium differentiarum, quibus decrescunt arcus FT, LE,

QY addítæ ſimul facient differentiam eandem arcus LE ab FT, vel QY ab LE. Exemplum eſt in quatuor lineis mſeorſim ductis arithmeticè deficientibus tantùm enim deficit ſecunda à quarta quantum prima à tertia. Cum ergo rectangulorum baſes intermedijs arcubus æquales arithmeticè decreſcant, etiam ipſa rectangula arithmeticè deficient, vt ipſæ baſes, vtpote æqualta, & ideo ipſæ quoque portiones annulares LEFT, & QYEL rectangulis æquales ex 14. Tract. 30. arithmetico defectu extenuabuntur, & ſi ſuper iſtas baſes portiones ſolidæ annulares intelligantur eleuatæ ad eandem altitudinem AT, quæ ſunt illæ ſoliditates, quæ integrant ſpirale corpus quoad baſim ſolummodo TLKCMOI baſi infima, & A 23 45 67 8. baſi ſuprema locatam, etiam ipſæ ſoliditates cum ſint inulcem, vt baſes ex 23. prop. Tract. 34. par. 2. decremento arithmetico eodem ſemper æquali decreſcent: ideoque ſector ſolidus FIT AP 2 erit diuiſus in portiones annulares ſolidas decreſcentes arithmeticè, vt ipſę baſes, ideſt in ſeriem ſolidam arithmeticam, V.g. FTLBAP 2. erit prima ſolliditas, & EL QY P P 2. ſecunda ſoliditas, & ſic dicas de alijs vſque ad axem.

Eodemque modo ſector ſolidus I K L 2 3 diuidetur in ſeriem arithmeticam ſoliditatum, pro ut decreſcunt ex 1. progr. ipſæ baſes, eritque ſeries, cuius maximus terminus K L Q 2 3 erit minor, quã maximus LEFTPA 2 vnica differentia arithmetica, & ſic effare de alijs ſeriebus, ità quòd vnuſquiſque ſector ſolidus ſeriem in ſe contineat proportionalium arithmeticarum ſoliditatum annularium.



Progreſſ. 4. Conſiderandum itaque eſt, quod ſpiralis ſuperficies corporis baſi, altitudineque deficientis, hæc omia ſolida æquealta ſecat ab A deſcendendo ſpiraliter per A 9 11 B, & cæt. vſque ad centrum 1, & arithmetico defectu ſingulas altitudines detruncat, vt ex def. conſtat. Ideoque debent intelligi ſpirali ſuperficiei deſcendenti circumſcripte ſectorum ſolidorum annulares portiones TF 2 APEL, & LKQ 9 11, & NK 11 21, & cæt. quæ ſingulæ à ſemidiametro APP, & cęt deſcendant arithmeticè deficiendo tamquam quidam gradus altitudine AT in tot partes diuiſa, vt radius 11, quos omnes ſpiralis ſuperficies A 9 11 B 1 tangat in A in 9 in 11. in 21 in B in 41. & cæt. ita quod ſingulorum baſes ſint primo LEFT, ſecunda EKY, tertia YVN, quarta VGC, & cæt.

Progreſſ. 5. Quia itaque iſtæ omnes ſolidítates in figura ſine confuſione exprimi nequeunt, ideo ſeorſim ea omnia expreſſimus in rectãgulo I 13 e, vt eorum ordo, & defectus meliùs capiantur, in quo 13 1. ſuperficies nigra exprimit graſſitudinẽ ET ſingularũ baſiũ ETLF, &c. quæ ſemper craſſitudo in omnibus eſt æqualis. At rectangulum c 72. exprimit primam portionem annularem ſolidam LEFT 2 AP non deſcendentem: ſecundum n. 41. 72 0, in quo partes decreſcant à 72 0. vt deſcendit FIKE, per vnũ gradũ à 2 in 9. à ſumma altitudine 72. vel AT, quod rectangulum ſolidum æquet duas æqualtis annularium ſoliditatũ portiones LEP 2. & 23 KL, quæ primo decremento arithmetico, eodem deficiũt; Tertium ſit 41. 42 n. 40, in quo tamen partes ab eadem altitudine n 41. deſcendant, vt facit ipſa portio VYN annuli ſolidi, cui æquatur, quæ deſcendit à P in 21 per duos gradus 2. & 11. quod rectangulum ſolidum æquetur tribus annularibus portionibus æqualibus inuicem locatis in baſibus EQ, KQ, & KN, & ſic de alijs: Itaque 72 e exprimit, & æquat ſoliditatem in LEFT baſi locatam 72 82 n 0 æquat eam gradatam, quę in EYK, ſic 41 92 40 n, quę in VYN, ſed 42 30 40 61. quæ in VGC, at 13 31 42 22 eam quę in GVC ſita eſt rectangula 42 50 23 41 gradatam ſoliditatem, quę GHCM baſi ſtat; rectangula 51 41 43 72. quę in HSMO fundatur; & tandem rectangulum gradatum 43 62 t gradationem, quæ in SXZI locata eſt, quæ accepta, vt æquealta equãt quoque annulares portiones æqualtas ijſdem baſibus locatas.

Progreſſ. 6. Itaque ſinguli ſectores ſolidi veluti in TKF, & LKI, & KIN, & cæt. baſibus locati deficientes arithmeticè ab inuicem in ſingulis rectangulis prædictis habent ſuam partem correſpõdentem, ita quod prima pars omnium rectangulorum V. g. prima, & vnica in 72. e, prima duarum in 72. n prima trium in 41. 40. & ſic omnes primę partes in quolibet rectangulo ſolido æquentur partibus ſectoris ſolidi in baſi ITF locati, & illæ omnes primę ſint æquales portionibus annulorum quæ ſucceſſiuę decreſcunt in LFET, & LEQY baſibus decreſcentibus. Sic quoque concipies de ſecundis partibus in vno quoque rectangulo ſolido, ita quod ſecunda pars duarum in 72. n ſecunda pars trium in 41 40. ſecunda pars quatuor partium in 42 61, & cęt. portiones ſólidas ſectoris KIL baſi ſitas adæquent, & ſic dicas de tertijs in 41 40; 42 61; 13 42. & cęt quæ æquant portiones ſolidas NIK ſectore locatas.

Progreſſ. 8. Ad hoc vt ergo incipiamus oſtendere, quam proportionem habeant hæ omnes ſoliditates ſimul acceptæ ad totum 13 e, ideſt, quam ſpira ſolida altitudide, baſique deficiens habeat ad ſolidam ſpiram baſi tantùm deficientem: Accipiamus in primis minimas ſingularum gradationũ altitudines, & conſideremus, quod hæ ſingulæ minimæ

nimę altitudines, & vltimæ AT, & L 9. & K 11. & N 21. & CB, & cęt. in vnaquaque portione annuli decreſcunt arithmeticè vſque ad 1; ſuntque in rectangulis portiones illis ãnulis æquales e 71, 82 0, 92 n 30 40, 22 31, 23 42, 43 41. vſque ad nihil t, quæ deficiunt Arithmeticę etiam quoad altitudinem; ſiquidem ex def. vt ſpira appropinquat ad centrum per partes æquales radij decreſcendo, ita ab altitudine per partes æquales altitudinis deficit. Itaque in annulo ſolido LEFT 2 A nulla eſt degradatio, ſed altitudo TA, vel e t, at in annulo ſolido YEQL. iam eſt primus defenſus 9 vnius gradus, vt in rectangulis ſolidis n 82, & ſic ſucceſſiuè in alijs vt ex rectangulis ſolidis melius percipies, in quibus vt diximus progr. 6. omnes primæ partes pertinent ad ſectorem ſolidam in TPI locatum, quorum minimæ, & vltimæ altitudines ſunt, & 72 0, n 82, 40 92. 30 61, 22 42, 34 41, 43 72 vſque ad nihil in t graduatim, & arithmeticę deficientes: Quod autem dicitur de partibus primi ſectoris ſolidi conſiderati iuxta minimas altitudines; hoc item dicendum eſt de partibus ſectoris ſolidi LIK locati iuxta minimas altitudines accepti; In ſingulis enim rectangulis ſolidis minimæ altitudines partibus omnibus rectãgulorum communes ſunt, & deſſignantur per lineas 72 t, 72 82, 82 92, 92 30, & cæt. Itaque iſtæ portiones ſolidorum ſectorum, & rectangulorum ſolidorum illis æqualium duplici decremento arithmetico decreſcunt quoad latitudinem, quidem ſimul cum baſibus decreſcentibus ex progr. 1. & 2. & etiam quoad minimas, & vltimas altitudines: ideoq; rectãgulorũ æqualtorum V. g. primorum in vnoquoque rectangulo ſolido in 72 e in 41 0, & cæt. erunt vtpote æquecraſſa, duo trientes vt ipſę baſes planę ex contextu propoſ. 14. 15. 16. 17. Tract. 28. Et quia vt dictum eſt prog. 6. prima omnia in vnoquoq; rectãgulo æquant ſectoris primi TIF portiones annulares ſolidas; Ideo illę portiones acceptæ, & conſideratæ iuxta vltimas, & minimas altitudines erunt duo trientes ſectoris IFTA 2 eiuſdem æquealti, & graſſi, quod deficit quoad ſingulas partes vnico decremento arithmetico, vt dictum eſt progr. 2. & 3. Si aſferas de omnibus partibus ſecundis rectangulorum ſolidorum, quæ pertinent ad ſolidũ in baſi ILK locatũ, & ſic dicas de omnibus alijs. Ideoq; in ſingulis progreſſionibus arithmeticis horum ſectorum vnico decremento arithmetico deficientium ſolũ longitudine habemus portiones ſolidas deficientes ſecundum minimas altitudines arithmeticè, quare in vnoquoque ſeries deficientium partium ſolidarum duplici arithmeti cò decremento ad ſeriem earum ſolùm vnico defectu deficientium ſe habebunt, vt duo ad tria. Ideoque etiam omnes ſimul ex prop. 17. lib. 5. cum ad ſingulas taliter ſint, erunt, vt duo ad tria, & ita omnia minimæ altitudinis rectangula V. g. 72 e, 82 0, 92 n, 30 40, 42 21, 23 42, 41 43. vſq; ad t erunt totius rectanguli ſolidi 13 e, duo trientes cum in vnaquaq; ſerie V.g. primarum partium deficientium altitudine, & latitudine ſint æqualtarum latitudine deficientium duo trientes, & ſic in ſerie ſecundarum partium, & cęt.

Progreſſ. 8. Nunc quid gradationes ipſæ auferant ab vno quoque rectangulo ſolido, conſiderandum eſt. Ad quod aduertere oportet ſingulas partes ſingulorum rectangulorum vnicã in 72 t, quas in 41 72, tres in 42 82, & cæt. eſſe inuicem æquales, vtpote illę, quarum latitudines æquantur arcubus eodem decremento ab eodem maximo diminutis V. g. vnica in 72 e arcui FT duæ in 41 0 arcubus LE, & LK eodem decremento primo ab arcu FT maximo deficientibus. Tres in 42 n tribus arcubus YQ, & QK, & KN, qui duplici decremento arithmetico eodem deficiunt ab FT maximo eodem. Altitudines verò omnes æquales ſunt 41 82, vel 42 92, vtpote pertinentes ad ſpiram ſolidã altitudine non deficientem. At quatenus terminant in ſpirale corpus decreſcens altitudine quoque, & eius ſpiram deſcendentem; in ſingulis à ſumma altitudine, vt dixi progr. 5. deſcendunt vſque ad minimam altitudinem arithmeticè.

Progreſſ. 9. Cum itaque gradata ſolida rectangula in vnoquoque rectangulo accepto à ſumma vſque ad minimã altitudinem V.g. 72 72 82. 41 92. 42 30. 13 22. 50 23. 51 43. 62 t in ſingulis rectangulis, quorum partes æqualatæ conſtituant progreſſiones arithmeticas vnico decremento arithmetico quoad altitudinem deficientes erunt ſingulorum rectangulorum 72 82, & cęt. dimidium ex prop. 12. Tract. 27. vtpote quod eadem ratio ſit ſolidorum, quorum graſſitudo eadem in omnibus, vt dixi prop. 5. ac baſium, & rectangulorum planorum: Cum ergo ſingula deficientia ſint ad ſua integra, vt 1. ad 2. etiam omnia ex prop. 17. lib. 5. erunt ad omnia ſua integra, vt 1. ad 2.

Prog. 10. Ponatur itaq; quod rectangulum 13 e totum toti ſoliditati ſpiralis, baſis æquale tantũ, ſit partium 6. quia oſtendimus progr. 7. rectangula minimarum, & vltimarum altitudinum 72 e, 82 0, 92 n, 33 40. & cæt. eſſe totius 13 e ſoliditatis duo trientes ſe habebunt ad rectangulum totum, vt quatuor ad ſex. Vnde reſiduum integræ ſoliditatis ablatis illis minimarũ altitudinum rectangulis remanebit duo. At quia hulus reſidui, nẽpe rectãgulorum T 72. 72 82, 41 92, 42 30, & cæt. gradationes ſolidę ſunt dimidium, & ideo, vt 1 ad ſex ad totum ex prop. 39. Tr. 17. Ideo cũ quantitas minimarum altitudinum poſita ſit, vt quatuor, & hæc ponatur vt 1. ad ſex reſpectu totius ex eadem propoſ. 39. Tract. 17. erunt omnes quantitates rectangulorum ſolidæ, quæ æquant ſectorum ſolidas portiones deficientes ob ſpiram baſi, altitudineque deficientem, cui circumſcribũtur ad omnia rectangula ſolida, quæ æquant ſectorum ſolidas portiones ſpirali corporis baſi tantùm circumſcriptas, vt quinque ad ſex.

Hoc ausem totum intelligitur ex prop. 17. tract. 27. ſi hæc rectangula ſubdiuidantur omni poſſibili ſubdiuiſione ſubdupla, ſicut nempe ſpſi annuli, ſeu portiones annulorum corpori ſpirali circumſcriptæ, vel inſcriptæ, quibus rectangula hęc æquatur omni poſſibili numero multiplicatæ ſimiliter intelligi debent. Vnde etiam ipſum corpus ſpirale deficiens, quoad baſim, & altitudinem iſtis rectangulis inſcriptis, vel circumſcriptis, quę omni poſſibili multiplicatione ſubdubla numeroſa tandem ipſum æquant ad ſpirale corpus ſolùm pęnes baſim deficiens annulis prædictis, & ſimiliter multiplicatis inſcriptum, vel circumſcriptum erit, vt 5. ad 6. quod hæc rectangula inſcripta, vel circumſcripta illud tandem æquent, alioquin nouæ inſcriptioni, vel circumſcriptioni daretur locus ex 14. Tract. 33. quæ minorem ea, qua prior inæquatur, molem relinqueret.

COROLLARIVM I.

*HInc enaſcitur, quod ſit ad cylindrum RA ſuper circulum RT eiuſdem altitudinis,

vt 5. ad 18. siquidem spirale corpus deficiens, quoad altitudinem, & basim est ad spirale corpus deficiens tantum quoad basim, vt 5. ad 6. sed corpus spirale deficiens tantum quoad basim ad cylindrum RTA est ex preced. vt 1. ad 3. ideſt, vt 6. ad 18. Ergo ex *æquo* erit spirale corpus vtrinque deficiens ad cylindrum RTA, vt 5. ad 18.

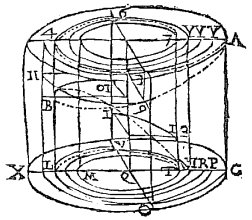
COROLLARIVM II.

HInc quoque fit, quod residuum huius spiralis corporis, quod scilicet decrescit altitudine, dùm spiralis basis crescit latitudine, estque corpus APP 9 B 1 2 3 4 5 6 7 8. quartum genus spirarum, erit ad corpus spirale non deficiens altitudine, vt 1. ad 6. quia compars spirale, nempe corpus ATL 9 BCI est eiusdem corporis altitudine non deficientis 5. ex partibus eius 6. vnde residuum erit 1. & ad prædictam compartem se habebit, vt 1. ad 5.

THEOR. III. PROPOS. LX.

* *Secunda spiralia corpora, & basi, & altitudine spiraliter deficientia sunt ad spiralia corpora secunda basim spiralem tantùm habentia, vt* $2\frac{1}{2}$ *ad* 3.

PRæter primas spiras assignauimus Tract. 30. prop. 57. & 58. & 59. spiras sequentes, & secundos, tertiosque ambitus post primum efficientes. Si ergo intelligantur super has bases corpora eleuari, alterum, quod spiraliter deficiat, etiam quoad altitudinem, vt est A 9 B 1 T super basim COLVT spiralem secundæ spiræ: alterum super eandem basim collocatum COLVT, sed in similem, & parallelam basim terminet, quæ incipiant ab eodem puncto A, illud corpus deficiens spiraliter basi, & altitudine erit ad hoc basi tantùm deficiens, vt $2\frac{1}{2}$ ad 3. vel 7. ad 9.

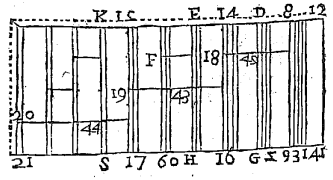


Progress. 1. Quod ostendetur eodem artificio, quo præcedens. Nam CT semiradius, si ponatur TQ altera pars, & radius ad primum circulum pertinens diuisus in quatuor partes æquales; etiam ipse in quatuor partes diuidetur ex 55. Tract. 30. vnde erunt octo, & ita arcus deficient singuli octaua parte, vnde annuli plani erunt æquealti, qui spiram baseos, vel ambiant, vel ipsa ambiantur, decrescuntque vt arcus sectorum arithmeticè ex progr. 1. propos. anteced. singuli octaua parte.

Progr. 2. Ideo ex progr. 2. in singulis sectoribus CQO, OQL circumscribentibus erit instituta series arcuum arithmetico decremento deficientium, & ideo portionum annulorum planarum æqualtarum PCO, & cæt. vsq; ad T in sectore CQO, & pari ratione in alio sectore LQO, & sic in omnibus alijs, quę singulę series continuę incipiant à primo arithmeticè deficiente, V. g. prima CQO ab arcu integro 8. partium, secunda LQO ab arcu septem partium, & sic de alijs. Sed cum hac differentia à progressionibus præced. prop. nam illę deficiebant vsque ad centrum, vsque ad vltimum sui; hę verò deficiunt vsque ad circulum TM dimidium circuli XC, vtpote ex dimidio radio QT, vnde etiam arcus quatuor, in quibus diuisus est, vt est diuisus circulus XC ex prop. 39. lib. 6. dimidium erunt quatuor arcuũ circuli XC V. g. arcus OC: quare arcus tantũ pro dimidio sui deficient, & aliud dimidium ipsorum integrum remanebit in singulis progressionibus, in quibus sectores distributi sunt. Ex 3. verò progr. tales, & etiam erunt portiones annulorum planorum, quos prædicti arcus ambiunt, & idem dicendum de solidis portionibus annularibus æque-eleuatis ex eodem progr. & ex 23. prop. Tract. 34. p. 2.

Progress. 3. Spirali autem corpori etiam quoad altitudinem deficienti intelligantur circumscripti annuli, vt prædicti super bases annulares planas COP LRV, & cæt. quę sint COYA 3 non descendens, & PRL 11 y ab y primo gradu 9 3. descendens, & RHV 10. ab y per duos gradus 39. 11. descendens: Sic yHTM 12. per tres gradus 3 9. 11. I 10. deficiens, & tandem 7 TMT vsque ad vltimum gradum in 12 T post omnes gradus alios peruenientes, sed semper incipientes à summa altitudine AYYŸ 7.

In istis verò annularibus solidis portionibus primò considerandę sunt minimę altitudines 0 3. L 11. V 10. T 12. vt diximus progr. 7. quę deficiunt arithmeticè in vnaquaq; portione annulari V. g. minima altitudo o 3 solidæ portionis annuli in OC basi locatę 0 3. & eius, quę in tota LP annulari basi est L 11. at eius, quę in RLV annulari basi situata est V 10. altitudo minima.



Progress. 5. Sed vt fecimus progr. 5. & 6. melius percipies in rectangulis 41. 8. 8 16. & cæt. quorũ 8 41. æquare præsupponatur primã portionẽ in OC locatam latitudine, vt arcus ipse, & basis ipsa non deficientem: sed nec altitudine cum sit primũ omniũ. At rectangula duo 8 16. quę prima diminutione deficiunt latitudine, portioni solidę æqualia iudicentur sitę in PL. At 14. 17. tria rectãgula putentur portioni solidæ sitæ in RLV æqualia, quæ secunda diminutione deficiunt, & cæt. Vnde in singulis rectangulis primæ partes in sectore COQ sitæ intelligantur, scilicet 8 41. D 31. E 16. K 17. secundæ 14 G, & aliæ secundæ in alijs

alijs rectangulis in LQO collocatæ, intelligendæ sunt; tertiæ vt 15 60. in OLQV. In singulis verò medietas alba rectãguli 8 41. integra latitudine, & & altitudine perseuerat, vt diximus pr. 2. perseuerare integrã medietatẽ arcuum, quæ latitudinẽ eorum mensurant. At altera medietas 8 31. DZ BH secũdũ suas quatuor partes arithmeticè deficit in singulis diminutionibus vnã partem deperdendo: si tamen hæc rectangula cogitentur æqualia illis portionibus solidis, quæ spirale corpus altitudine non deficiens ambiunt spirali tantùm basi situm.

Progress. 6. At si velimus æquari solidis partibus ambientibus spirale corpus, & altitudine, & latitudine: tunc singula rectangula deficient arithmeticè quoad altitudinem, vt diximus progr. 4. deficere portiones solidas corpus spirale ambientes, itaque 8 41. non deficiet: at 18 93. deficiet primo gradu: 19 16. secundo gradu: 20 17. tertio. & cæt. si plura sint, si sumatur secundùm minimas altitudines 8 93. 18 16. 19 17. 20 21. gradus, per quos perueniunt ad illas minimas altitudines non considerando, in illisque pars alba vnico decremento tantum deficiet. nempe quoad altitudinem, ad partes nigræ quoad altitudinem, & etiam, vt diximus quoad latitudinem. Vnde in vnoquoque rectangulo primæ partes 8 41. 45 2. 43 16. 44 17. instituent vnam progressionem arithmeticam rectangulorum quoad medietatem albam altitudine tantùm deficientium, quoad alteram etiam latitudine: Sic quoque secundę partes 18 6, 42 60. & cæt. aliam progressionem similem instituent, sed minoris numeri quoad terminos, nam primi sunt quatuor, secundi sunt tres, & sic dicas de tertijs, vt sunt in sectore COQ quatuor annulares partes, in LQO tres, & cæt.

Progr. 7. Cum ergo istæ singulę progressiones quoad medietatem albam rectangulorum, vt diximus progr. 5. quatenus æquealtę nimirum quatenus æquant solidas portiones corpori spiralis basis tantùm circumscriptas nullo modo deficiant; sed integrę perseuerent, statuantur 6. part. Verùm vt æquantia circumscriptas solidas portiones annulorum spirali corpori etiam altitudine deficienti quoad minimas altitudines, vt dixi progress. 6. deficient vnico decremento arithmetico. Vnde erunt ad non deficientes vllo modo vt 3. ad 6. ex prop. 12. Tract. 27. Altera verò medietas 1 partium in rectangulis 8 41. 8 16. 14 17. & cæt. deficit primo quoad latitudinem, sumpta sc. vt æqualis ambientibus portionibus annulorum corpus spirale basi solùm deficiens. Ideoque æqualta erunt ad integras partes, vt 3. ad 6. ex prop. 12. Tr. 27. sed vt deficientes etiam quoad minimas altitudines erunt, ex pr. 14. vt 2. ad 6. Cõponantur ergo simul 3. & 6. rectangulorum partes nempe illę, quæ nullo defectu, & illæ, quæ tantùm latitudinis, & erunt 9. Ponatur etiam simul illæ, quæ tantùm vnico altitudinis, & quę duplici altitudinis, & latitudinis, & erunt 5. ideoque hę ad illas ex prop. 29. Tract. 27. erunt, vt 5. ad 9. Et quia hoc contingit in singulis primis partibus, quæ quatuor sunt, & idem in secundis, quæ sunt tres, & idem in tertijs, quæ duæ sunt, & cæt. vt diximus progr. 6. rectãgulorum 8 41. 16 8. 14 17. & cæt. quę singulę sunt quędam series Arithmeticè, sed semper numero terminorum minores; ideo ex 17. lib. 5. ita omnes progressiones erunt ad omnes, vt vna ex ipsis, ed vnam, & sic omnia rectangula deficientia secundùm minimas altitudines, & etiam latitudine pro sui dimidio, sc. 8 41. 18 93. 19 16. 20 17. erunt ad omnia latitudine tantùm deficientia 8 41. 16 8. 14 17. 15 21. vt quinque ad nouẽ. Vnde residuũ rectangula 8 18. 14 19. 15 20. erunt, vt 4. ad suũ totum. Verùm illa ob gradationes à summa altitudine ad infimam descendentes pro medietate deficiunt, vt prop. 9. præc. prop. cum in singulis rectangulis V. g. in 18 8. duæ sint æquelatę. & æquealtæ in 14 19. tres, in 15 20. quatuor in quibus singulis gradata rectangula instituunt singulas progressiones arithmeticas vnico tantùm decremento in altitudine deficientes: Ideo gradata rectangula singulorum æquelatorum, & altorum erunt medietas, ex 12. Tract 27. Quamobrem ex 17. lib. 5. omnes quoque series gradatæ ad non gradatas nullo modo deficientes erunt duo ad quatuor, quæ simul cum rectangulis minimarum altitudinum ex 29. Tract. 27. erunt, vt septem ad nouem, vel vt $2\frac{1}{2}$ ad 3. ad omnia rectangula 12 21. sc. ad totũ, & idem dicẽdum de annulis solidis corpori spirali altitudine, & basi in spiram se flectentis, quorũ graduatum defectum rectangula ex effectione imitãtur, vtpote, quod sint inuicem eiusdem latitudinis; similiterque, & per eosdem arithmeticos gradus deficiant respectu annulorum æqualtorum corporis spira baseos tantùm deficientis, vnde multiplicata quantùm multiplicari possunt sicut ipsum corpus spirale non excedent; alioquin nouæ inscriptioni, vel circumscriptioni daretur locus ex 14. Tract. 33. quæ minorem ea, qua prior inæquaretur, molem relinqueret; sic, & cũ semper sint inuicem in eadem ratione 7. ad 9. ipsum spirale corpus, nempe quoad altitudinem, & basim ad spirale corpus tantùm quoad basim erit vt $2\frac{1}{2}$ ad 3. vel vt 7. ad 9.

COROLLARIVM.

HInc faciliter quis videbit, quam proportionem dicat hoc spirale corpus ad cylindrum ambientem, cum enim basis spiralis ad circulum ambientem sit 7. ad 12. si super hanc basim situm sit corpus æquealtum spirale quoad basim tantùm ex 23. Tract. 34. erit ad cylindrum comprehendentem, vt 7. ad 12. vel vt 63 ad 108. nempe vt ipsę bases; At ad hoc corpus spirale se habet corpus altitudine quoque spirale, vt 7. ad 9. ideſt, vt 49. ad 63. ergo ex *æquo* erit corpus spirale ad cylindrum ambientem, vt 49. ad 108. scilicet vt 7. ad 15. $\frac{1}{2}$.

COROLLARIVM II.

INtelliges quoque, quid dicendum sit de tertijs spiralibus corporibus, nam circumscriptę solidę annulares portiones non deficient pro $\frac{1}{2}$, & pro $\frac{1}{3}$ deficient latitudine, vt ambientes spirale corpus basi tantum, ideoq; si non deficientes ponantur simul 12. istæ deficientes erunt 3. & ideo simul 15. Si verò intelligantur ambire corpus spirale altitudine quoque, quæ æquelatæ perseuerant, deficient tamen altitudine. Vnde illarum integrarum, quæ positæ sunt 12. istę deficientes altitudine erunt 6. at illarum, quę latitudine deficiunt, & positæ sunt 3. istę; quę quoque altitudine deficiunt, erunt $\frac{1}{2}$; ideoque cum illis, quæ sunt 6. deficientibus altitudine erunt 8. quare subductæ ab ijs relinquent 7. quarum gradationes medietatem occupant, nempe 3 $\frac{1}{2}$, ideoque cum reliquis erunt 11 $\frac{1}{2}$ ad 15. seu 23. ad 30. Sufficit indicasse, essetque nimis prolixum de singulis velle agere.

TRACTATVS XXXV.

De Corporum comparatione.

REstat vltimus hic labor de Corporum comparatione Tractatus, in quo, & corpora secare, pariterque, augere, minuere, traducere in figuras alias, & tandem mensurare docemus, estque quasi fructus antecedentium Tractatuum, qui de Corporum soliditate discurrunt, & complementum omnium, quæ de punctis, lineis, figuris, planitiebus, & soliditatibus dicta sunt.

EXPENSIO I.

De similitudine Corporum.

AVgmentum plurium corporum in vnum ex eo maxime dependet, quòd describatur corpus simile alteri, & licet id supra tetigerimus, cum de parallelepipedo egimus, ea tamen fuit notitia particularis, quæ solidi rectanguli non excederet cognitionem; Nos autem hic intendimus tradere notitiam generalem similium corporum describendi, vt nedum sciamus corpora similia cognoscere, sed etiam fabricare.

DEFIITNIO I.

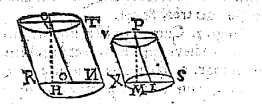
* *Illa quæcumque superficies planæ dicentur similes, quarum describentia ex ordine triangula ab aliquo puncto erunt similia.*

Hæc definitio imitatur definitionem sectionũ conicarũ similiũ, & videtur potiori iure verificari, si enim applicatæ sub eodem angulo ad portiones diametri proportione simili gaudentes ostendunt sectiones similes, quantò magis triangula, quæ secum vehunt laterum proportionem, & angulorum æqualitatem & multiplicata quantùm opus est, totam figuram æquare queunt, saltem quoad sensum, plurimorum quorumcumq; similitudinem exhibebunt. & si Euclides circulum definit, in quo omnes ductæ à centro erunt æquales, similiter, & nos definimus similitudinem planitierum, in quibus omnes ductæ ab assignato puncto sunt similes. Potest qui & esse, quod in planitiebus similibus triangula dissimilia describantur, si tamen omnia erunt similia ex ordine sumpta, semper quoque similes planities erunt, quod definitio intendit.

DEFINITIO II.

* *Quæcumque figura similiter posita indicabitur, quæ axem consequatur, si per normalem, & basim, & axem ductum planũ triangula efficiat similia. Similis autem etiã dicetur, si superficiebus similibus conflet.*

Cum solidæ figuræ globosæ superficies, vt plurimum angulos non consequantur, ideo non poterunt iudicari eodem modo positæ, nisi ab axe; si ergo in plano IPM ducto per normalem PM, & axem PI, & basim SX, ex istis tribus,

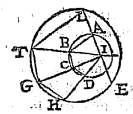


nempe sectione basis; MI normali MP ab axis verticæ ductæ, & axe ipso IP fiat triangulum æquiangulum triangulo QOH ex ijsdem constituto dicetur solidũ similiter constitutũ, vt RT, quod, & verificabitur de parallelepipedis, siue axem in ipsis ducas, siue latus pro axe sumas. Similitudo verò superficierum, quibus vestiuntur, obtinebitur, si duplicatam, aut laterum, aut diametrorum, aut axium proportionem consequantur. Nam, & circuli, qui duplicatam diametrorum proportionem obtinent, similes sunt superficies.

PROBL. I. PROPOS. I.

* *Similem quamcumque superficiem à dato puncto alteri describere.*

SIt data superficies ABCD mixtilinea, vel rectilinea, vel curuilinea, quæcumque, & oporteat ei similem delineare. Eligatur quodcumq; punctũ in ea I, & ab I ad margines planitiei ducantur plurimæ lineę, & si habeat angulos præcipuè ad illos illæ vergant, & producantur vsquedum oportet, aut placet, & inter illas aliqua perueniat ad datum punctum L, deinde fiat, vt IA ad IL, sic IB ad aliud ex prop. 15. lib. 6. & inuenietur IT; sic iterum fiat, vt IA ad IL, sic IC ad IG, & ID ad IH, & sic agatur in omnibus: Deinde per omnia illa puncta multiplicata quantùm sat est, ducatur, vel flexa, vel plurimæ flexæ, vel rectę, secundùm, quod figura exhibita imitanda rectis, vel flexis, vel angulis, vel tantùm curuis constat, & erit factum id, quod desideratur. Nam figura descripta per omnia illa puncta LTGH, & alia plurima erit similis figuræ exhibitæ ABCD.



Probatur. Nam omnia triangula in fig. ABCD sunt similia triangulis in figura LTGH, cùm obtineant latera ambientia eundem angulum apud I proportionalia, cùm effecerimus, vt IA V. g. ad IL, sic IB, & IT, & cæt. Vnde subductis basibus AB, & LT triangula ipsa erunt similia ex 5. 16 & sic de alijs: cum ergo omnia triangula in planitie ABCD sint similia triangulis in planitie LTGHE de scriptibilibus ex def. ipsę planities erunt similes.

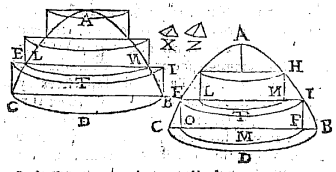
COROLLARIVM.

ELlicitur quod latera quęcumque illa sint, erunt proportionalia. Quoniam enim IT ad BI, vt LT ad AB, & TG ad CB, ex 4 lib. 6. vt GI ad CI, & GI ad CI, vt GH ad CD erit LTad AB, vt TG ad BC, & GH ad DC, vnde ex pr. 17. l. 5. & omnia simul antecedentia LT, & TG, & GH ad omnia consequentia AB BC, & CD eadem proportione gaudebunt, vt vnum antecedens LT ad aliud consequens AB, quæ est eadem, quæ LI ad AI. Quare etiam latera quæcumque formentur ex illa basium multitudine, vt vt liber multiplicata semper erunt proportionalia, & erit vt LT ad BA, sic LTGH ad ABCD.

THEOR. I. PROPOS. II.

* *Ad superficiem cuiuscumpue corporis globosi, cuius omnes sectiones parallelæ ad axem sint similes, eam obtinet proportionem planum per axes basium, & corporis ductum, quam axis basis, ad circumferentiam basis.*

*SIt superficies globosa corporis conoidalis alicuius BACD, & superficies plana ducta per axem CB basis, & AM corporis sit ABC. Dico quòd vt est ABC planum ad ABDC superficiem globosam, sic axis BC ad ambitum BDC corporis ducti, seu recti, seu obliqui, cuius omnes sectiones basi parallelæ sint similes V. g. Ellipses similes.



Inscribantur portiones cylindraceorum corporum OEEI, & LNH, & cęt. æqualtorũ. Singulæ earum superficies ex propos. 4. tract. 31. quæ de quacumque orbita intelligitur, vt constat ex demonstratione, erunt æquales rectangulo ex circumferentia OMF, & altitudine FI, id eoque rectangulum OI per axes dicit ad superficiem cylindracei OFI eam proportionẽ, quam ad rectangulũ illud ex ambitu OMF ellipsis, & altitudine FI, idest axis CB ad ellipsim BDC; & ita dicas de superficie cylindracei LNH, cui HL rectãgulũ dicit eã proportionem, quam LN diameter ad ambitũ LTN. Omnes verò Ellipses BDC, LTN ex thesi similes sunt; Quare vt OI rectangulum ad OEFIM superficiem cylindracei, sic OF axis ad OMF ambitum, vt autem OF axis ad OMF ambitũ, sic LN axis ad LTN ambitũ ob similitudinẽ ellipsiũ; vt autẽ LN ad LTN, sic ex 4. tr. 31. rectãgulũ LH ad LTNH superficiẽ cylindracei; Ergo ex 16. lib. 5. vt OI rectangulum ad OEFIM superficiem cylindracei, sic LH rectangulum ad LTNH superficiem cylindracei; idest vt OF axis ad OMF ambitum, & ita discurras de alijs. Ergo ex 17. lib. 5. ita erunt omnia rectangula OI, & cæt. ad omnes superficies cylindraceas EOMFI, & cæt. vt vnum rectangulum OI ad vnam superficiem cylindraceam EOMFI. Quo posito. Assero quod etiam ABC planum ad ACDB superficiem est, vt BC ad BDC ambitum. Nam si non dicit, eandem proportionem sit maius planum per axem ABC, quàm quod requirat ratio BC ad BDC quantitate X; ita vt si quantitas X abesset ab ipso, tunc ABC planum per axem esset ad globosam superficiem ACDB, vt BC axis ad ambitum BDC, vel OF ad OMF ex thesi.

Inscribantur itaque tot cylindracea; donec superficies ipsorum rectangulorum à globosa superficie differat minùs, quàm quantitas X. Ergo, quia rectangula inscripta minùs differunt à CAB plano quã X, & X est illa differẽtia quà totaliter ablata CAB planum ad globosam superficiem ACDB diceret eandẽ proportionem, vt CB ad CDB; etiam rectangula inscripta OFI; LNH, & cæt. licent maiorem proportionem ad globosam superficiem, quam CB axis ad CDB ambitum. Dicunt autem ad superficiem suam curuam eandem proportionem. Ergo cum eadem rectangula cum superficies ad conuexam CABD corporis exhibiti maiorem proportionem dicat quàm ad cylindraceorum superficiem ex 10 lib. 5. erit maior cylindraceorum inscriptorum superficies, quàm ipsa globosa superficies ABDC: quod est absurdum, cum debeat esse maior, vt pote continens.

Quod si dicas; CAB Planum ad CDBA globosam superficiem dicere minorem proportionem, quam CB ad CDB. Deficiat illis quantitas X, cum qua eandem diceret proportionem, quã CB ad CDB. Tũc autem circumscribantur tot rectangula; donec eorum superficies differat à plano CAB minori quantitate, quam X. Quia ergo tota quantitas X deberet addi; rectangula verò non superant CAB quantitate X, sed minùs; ideo etiam ipsa ad globosam superficiem CABD dicent minorem proportionem, quam CB diameter ad CDB circumferentiam, dicunt autem ad cylindraceorum circumscriptorum superficiem, illam proportionem, quam CB ad CDB; Ergo ad superficiem globosam dicunt minorem proportionem, quàm ad superficiem cylindraceorum, quare ex 10. lib. 5. erit maior superficies corporis CABD, quam circumscriptorum cylindraceorum, quod est absurdum, cùm ergo non possit planum CAB ad superficiem globosam dicere maiorem, aut minorem proportionem, quam CB ad CDB; dicet eandem.

CO-

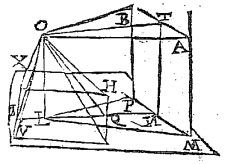
COROLLARIVM.

*HInc modus obtinetur, quò omnium Conorum etiam scalenorum superficies inueniãtur. Nam cognito ellipsis ambitu, vel circuli peripheria, & axe, & triangulo per axem; etiam eorum globosa superficies obtinetur; cùm ita sit, vt axis ad ambitum ellipsis, vel si conus sit circularis, vt diameter ad peripheriam; sic triangulum per axem ad globosam eius superficiem, quæ cognitio deficit tractatui 31. expens. 3. & hic aptiùs ponitur.

PROBL. III. PROPOS. III.

Normalem altitudinem corporum perscrutari, & superficierum intùs latentium, quorum latera in superficie appareant, nec non, & punctum, in quod à vertice cadit normalis inuenire.

*AD corpora similia constituenda in primis est necessaria normalis corporum altitudo, quam hoc modo obtinebimus, non obstante eorum soliditate. Sit datum corpus HVO, cuius altitudo velit inueniri. Extendatur basis HV, & sit MX, vel supposito alio plano, vel alia ratione, eique plano aliud planum OGBA parallelum fiat, electoque puncto M ex 11. tract.22. erigatur normalis AM, & erit altitudo, quæ requiritur.



Probatur. Nam ducto per MA plano AOML per intellectum, & per punctum O, cum plana sint parallela, ex 14. Tract.22. etiam sectiones erunt parallelæ AO, & ML, normalis quoque OL corporis dati HO OV, & MA eidē plano MX extenso normales sunt, ideoque parallelæ ex 7. Tract. 22. ideo MO erit parallelogrammum; quare ex prop.33. lib.1. MA, & LO erunt æquales.

Sit deinde QOI intus latentis superficiei reperienda normalis, quæ debeat cadere in latus L extendatur latus QI in N, & per NQ QO ducatur planum, quod secet AOB, in TO in plano itaque TNOQ, sectioni NQ ducatur normalis NT, & æquabitur normali LO: Patet ex eadem ratione. Nam TO, & NL sunt parallelæ ob plana parallela BOA, & XM.

Sunt quoque parallelæ LO, & TN ex prop.28. lib.1. quod in eodem plano TL si ut lateri NL normales altera ex suppositione altera ex effectione, quare inuicem erunt æquales.

Si tandem debeat reperiri punctum, in quod cadit normalis ab O in basim HV, non obstante soliditate corporis HVO; Ductis vt priùs planis ABO, & MX parallelis, & plano ABMP per AM normalem; erit quoque, & ipsum planum ex 16. tract.22. normale ipsis planis ABO, & MX.

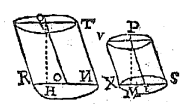
Sectioneſque parallelæ AB, MP ex 14. tract.22. coniungatur deinde BO, & AO, & sumpta æquali ipsi AB in MP sectione ab M, fiat triangulum MPL ex pr.24. lib.1. æquale triangulo ABO, & vertex L erit punctum, in quod cadit normalis.

Probatur. Nam si duo plana concipiantur duci per BO, BP planum PO, & per AO, & AM planum MO erunt normalia plano MX ob normalem MA, & æquidistantem PB ob æquales AB, & MP, & ideo normalem ex 15. tract.22. quare, & ex 16. eiusdem sectio ipsorum OL normalis erit; & ideo parallela ipsis BP, & AM normalibus. Vnde BO, & PL, nec non, & ML, & AO erunt æquales ex prop.33. lib.1. cum etiam sint parallelæ ex 14. Tract.22. Quare triangulũ PLM æquabitur triangulo BOA, & ex 16. lib.1. & erit triangulum iam factum super PM: sed triangulum ab istis sectionibus factum incidit in communem planorum sectionem normalem OL & ideo in L punctum plani, in quo est; ergo etiam triangulum effectum PML, quod est idem, & cuius omnia latera in eundem situm incidunt.

PROB. IV. PROPOS. IV.

Cylindrum super datam basim similem, & similiter positum, ac altus datus ædificare.

SIt cylindrus datus TR, qui sit imitandus cylindro super SX erecto; Ducatur AXIS QO, & ab extremo Q demittatur normalis HQ, perque normalem, & axem, quæ sunt in eodem plano ex prop. 2. tract.22. ducatur planum TR, secans basim: deinde à centro I ducatur IP, quæ faciat eundem angulum cum sectione TX, ac OQ cum sectione OR, deinde fiat, vt OR ad OQ, sic IX ad aliud, & inuenietur IP longitudo, compleatur itaque parallelogrammum SV per axem, simileque erit parallelogrammo TR. Vnde si axe IP, & basi SX fiat cylindrus SV ducta per PV altera basi, erit similis cylindrus SV cylindro TR, & similiter positus, vt ipse est.



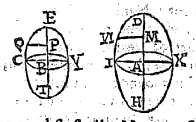
Probatur. Nam positus quidem est SV cylindrus, vt cylindrus TR ob axem IP concludentem cum IX angulum I æqualem angulo O ex def.2. At parallelogrammum per axem SV est simile parallelogrammo per axem TR; vnde superfices cylindros amblentes erunt similes, siquidem ex 11. tr. 31. dicunt proportionem duplicatam peripheriarum, sed ex 21. & 40. l.6. bases quoq; circuli dicunt duplicatam proportionem peripheriarum; Quare erit basis SX ad basim NR, vt curua cylindri SXMV superficies ad curuam NRHT cylindri superficiem, cum ergo

ergo superficies sint similes ex def. 2. tract.33. etiam cylindri similes erunt.

PROBL. V. PROPOS. V.

** Data sphæra sphæroide Parabolico, Hyperbolico, vel Elliptico recto ad axem simile aliud corpus componere.*

FAcilis est constitutio sphæræ, cum omnes sphæræ sint similes, tum positione, tum soliditate, cum sint in triplicata ratione diametrorum, duplicata maximorum circulorum, quibus semper eodem modo sunt collocatæ. Sed vt alia corpora describantur. Super diametrum datæ basis circularis similis ellipsis ellipsi ductæ per axem sphæroidis imitandi, & similis positionis, vel Hyperbola, vel parabola fiat, quod efficietur ex prop. 52. Tr.24. si fiat loquendo de ellipsi, & hyperbola (nam omnes parabolæ ex 51. Tr.34. sunt similes) radius, & applicata AI ad AD axem, ita BC radius basis datæ ad aliud, & inueniatur BE axis, cui applicetur BC rectangulè, vt est AI axi AD, deinde ductis pluribus alijs, fiat vt MD ad MN. sic PE ad PQ. & cæt. Si ergo hæc sectio intelligatur circum suũ axem verti; describetur sphæroides, si sit Ellipsis; Conoides Hyperbolicum si sit Hyperbola: Parabolicum si sit Parabola ex definit. tract.25. Dico itaque quod sphæroides CET y simile fit, & similiter positum, ac sphæroides DIHX.



Probatur quod sit simile. Nam vt est XDIH planum Ellipticum ad superficiem sphæroidis IXDH, ex pr.38 tract.31. ita est diameter XI ad peripheriã XAI basis p centrũ, sed vt XI diameter ad peripheriam XAI, sic yc diameter ad peripheriam YBC ex lib.6 pr.42. vt autem yc diameter ad peripheriam YBC, ita est Ellipsis YECT ex pr.38. tract.31. ad superficiem sphæroidis YECT. Ergo ex *æquo* vt est XDIH planũ ad Ellipsim YECT, ita est superficies XDIH sphæroidis ad superficiẽ sphæroidis IBCT; sed ellipsis XDIH est similis ex effectione superficiei YECT; ergo etiam superficies XDIH sphæroidis superficiei sphæroidis YBCT: sed etiam XAI est basis similis YBC, quod sint ex effectione circuli, & ideo similes: Ergo ex def. 2. tract.23. solida erunt similia cũ circumuestiãtur similibus superficiebus. Positio verò eadem est ob eorum rectitudinem.

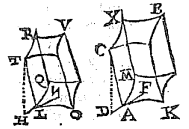
COROLLARIVM.

*HInc est conos similes rectos faciliter posse constitui, si fecerimus triangulum per axẽ describendi coni similem triangulo per axem coni imitandi. Nam ex præcedenti argumento deducto ex prop.38. tract.31. constabit illos conos similes esse; qui superficies circumuolutas habeant similes, vt sunt inuicem similia triangula per axẽ, & idem dicendum de conis ellipticis, dummodo bases ellipticæ similes sint.

PROBL. VI. PROPOS. VI.

** Cylindraceum corpus alteri simile constituere ad datam altitudinem.*

SIt Cylindraceum quoddam corpus AB, quod imitari oporteat. Demittatur à latere AC, quod sẽper rectilineũ est (illo uice axis vtẽdo) normalis CD, & per AC, & CD ducatur planum ACD, quod secet basim productam, & sectio sit AD. Eligaturque in ea sectione quodlibet punctum F, & in altero plano ducta, vtcumque HN, & electa altitudine cylindracei describendi HT; fiat vt DC ad DA, sic HT ad HL, & p punctũ L ad T ducatur latus LT. Deinde fiat, vt AD ad FD, sic LH ad aliud, & reperiatur HN; super latus itaque LN describatur basis OQ similis basi KM. Et ab ea eleuentur latera QR, & cæt. equalia inuicem, & parallela ipsi LT; multiplicando illa iuxta exigentiam, vel angulorum, vel curuorum laterum, per quæ superficies, vel planæ, vel curuæ ducantur, quæ secẽtur TV parallelo plano ipsi plano QO per T, & erit constitutum cylindraceum corpus simile, similiterque positum ac AB.



Quod sit similiter positum patet. Nam def. 2. triangulum LTH, & ACD sunt triangula similia ex effectione. Quod verò sit etiam similibus superficiebus circundatum; patet eo quod basim OQ similem basi KM effecerimus, vnde bases VT superficiebus æquedistantibus ex definitione corporis cylindracei circundata, & ideo æqualis, & simillis basi OQ similis basi MK, & CB, vt autem in basibus similibus quibuscumq; ex prop.1. l.h. Cor. AB ad LN sic quodcumque latus AK ad LO, est autem AF ad LN, vt AC ad LT; Ergo vt latus AK ad latus LO, sic est AC ad LT, & sic dicas de alijs æqualibus; vnde etiam superficies DT, & aliæ similes erunt superficiebus KC, & alijs. Itaque cylindraceum corpus LV erit simile cylindraceo corpori AB.

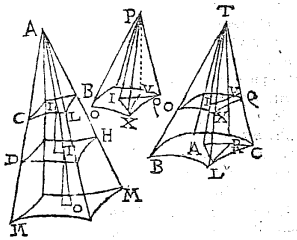
PROBL. VII. PROPOS. VII.

** Pyramidem Conum, seu corpus pyramidem, vel conum referens alteri simile, & similiter positum ponere ad datam altitudinem.*

COrpus pyramidale mixtilineum appellamus illud, quod superficies rectilineas in acumen tendentes habeant, quę non sint planæ, sed curuæ, & à basi, cuius latera curua sint eleuatæ. Sit itaq; conus, vel pyramis, vel etiam pyramidale aliquod corpus TCLB, quod oporteat imitari. Inueniatur ex prop.3. h. punctum R, in quod cadit normalis. Deinde ducta allqua BC, quæ cadat in latus basis CL à puncto R fiat VE RT ad RC sic VP data altitudo

ad

ad VQ. & similiter ductis alijs RL, & cæt. fiat, vt RC ad RL, sic VQ ad VX, & sic fiat de reliquis, eritq; ex æquo TR ad RL, vt PV ad VX, quare bases erunt similes ex prop. 1. h. & sic concludes de omnibus alijs: simulque triangula omnia CTR, TRL erunt similia quodlibet suo correspondenti: triangulis QVP, & PVX: Siquidem angulo recto gaudent, vt pote à normali VP, vel TR effecto ex def. 2. Tr 22.



& latera circa æquales angulos proportionalia sũt: Erit itaq; TC ad CR, vt QP ad QV, at CR est ad RL, vt QV ad VX ex effectione, & RL ad LT ob similitudinem triangulorum TRL, & VPX, vt VX ad XP. Ergo ex æquo, vt TC ad LT, sic QP ad XP, Est autem TC ad CR ob similitudinem triangulorum ostensam, vt QP ad QV. & ob similitudinem basium supra ostensam CR ad CL latus rectum, vel si sit curuum subtensam CL, vt QV basis ad QX latus rectum, seu si sit curuũ ad suam subtensam, quare ex æquo CT erit ad CL latus rectum, siue subtensam, vt QP ad QX. Ideo triangula omnia CTL triangulis QPX erunt similia, & alia omnibus alijs. Quare superficies omnes pyramidis, vel coni, vel corporis pyramidi similis erunt similes cum omnes planæ superficies inscriptibiles, vel circumscriptibiles illis corporibus similes sint: Bases autem sunt similes ex effectione, & ideo est idem numerus in basibus laterum quapropter, & superficierum circũambientium. Ergo duo corpora CLBT, PQXO similia sunt.

COROLLARIVM.

Elicitur autem hinc; quod si corpus aliquod ex prædictis plano parallelo basi secetur V. g. ASM corpus plano DH, quod conus reliquus, vel pyramidale corpus DAH erit simile toti corpori DAH. Ratio est omnino eadem, quæ propositione posita est, quia triangulum RCT est simile triangulo TVQ (ob effectionem eius, VQ plani OQ cum normali VT, & latere TQ effecto in fig. BTC, quia ea sectio VQ parallela sectioni BC est ex 14. tract. 22. & XQ Parallela LC, & cæteræ cæteris, vnde ex propos. 4. lib. 6. omnia triangula erunt similia, siue in basibus, siue in superficiebus ad apicem tendentibus effecta. Ideoque ipsa corpora similia.

THEOR. I. PROPOS. VIII.

Omne corpus regulare in sphæra descriptum est alteri simile, si sit eiusdem generis.

Id faciliter ostenditur. Quia obtinet omnes superficies similes sunt enim; aut triangula æquilatera, & æquiangula inuicem, quæ sunt in dato corpore, & ideo similia illis, quæ sunt in alio corpore, ne dũ inuicem equalia, sed & equiangula triangulis primi corporis, aut quadrata, aut pentagoni, quæ sunt quoque figuræ similes.

Imo etiam corpora omnia in sphæra inscriptibilia, sed figuris in se diuersis constantia eiusdem generis, sunt quoque figuræ similes: quod sint aut triangula æquilatera, & quadrata; aut pentagoni, & triangula æquilatera, & cæt. ideo enim eiusdem generis sunt, quia similibus superficiebus licet duarum specierum tum vnum, tum alterum corpus constet.

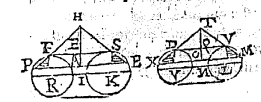
COROLLARIVM.

Hinc patet quomodo corpus regulare simile alteri describas, in data sphæra, aut ad datam altitudinem; Sufficit enim pyramidem super datam basim, aut ad datam altitudinem alteri similem extollere, quæ reperitur in corpore imitando, & illi construere tot pyramides æquales, quæ numerum pyramidum in corpore prototypo existentium exæquent: Nam illæ circa eundem verticem positæ conficient corpus exoptatum: quod patet ex tract. 33. de Inscriptione corporum regularium in sphæra. Nam omnia constant pyramidibus basim habentibus in superficiem sphæræ & verticẽ in centro. In data autẽ sphæra describemus iuxta ea, quæ diximus Tr. eodẽ describendo corpus eiusdem generis, ac propositum, quod imitandum proponitur.

THEOR. II. PROPOS. IX.

Omnes annuli rotundi, vel figurarum regularium sunt similes.

Sit Angulus rotundus MX, & alius quicumque BP, quorum sectiones MVN, & BSI sint circuli. Dico eos esse similes. Nam ducto per centra sectionum circularium plano LY, & KR ducatur ei per similes arcus, plana æquidistantia MX, & BP, eruntque circuli ob annuli figuram, erectisque normalibus ab eorum centris O, & A ab M ducatur MT intercipiens arcum similem arcui RS, quem intercipit BAH, critq; triangulũ MOT simile triangulo BAH cum sit rectãgulũ, & angulũ, M obtineat æquale angulo B ad circũferentia, & sic dicas de triangulis YTQ, & SEH: Vnde si circũuertantur efformabunt conos similes Cor. pr. h. ideoque superficies coni MTX erit ad VTD coni superficiẽ, vt superficies BHP coni ad superficiem coni SHF, & ideo *diuidendo* MTX superficies coni erit ad residuum annulum MVDX, vt BHP coni superficies ad residuum annulum BSFD; Cum ergo idem argumentum de omnibus superficiebus in annulo inscriptis fieri possit etiam rotundæ superficies, quę semper similibus planis sunt inscriptibiles similes erunt, ideoque ipsa corpora vnica superficie contenta. Similia erunt.



duum

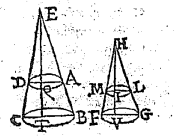
COROLLARIVM.

Omnes quoque annulos cuiuscumque figuræ circulo inscriptibilis esse similes; dummodo ipsæ figuræ inscriptæ similes sint, patet ex præced. cùm quamcumque superficiem circulo inscriptibilem eundem numerum graduum subtendentem similem alteri simlem arcum subtendenti demonstrauerimus: Vnde; si sint plures similes superficies, sed semper æquali numero, quæ similes arcus subtendant in hoc annulo, vt aliæ in alio similes etiam erunt figuræ inscriptę. Quod, & concludetur de annulis, quorum sectiones similes quidem sint; sed tamen circulo non inscriptibiles; quia illæ figuræ, sectioneſque per centrum poterunt diuidi in triangula: quæ semper in circulis inscriptibilia sunt ex prop. 2. lib. 4. elem. quorum latera eundem numerum graduum subtendunt cum ponantur figuræ similes; & ideo triangula in quæ dispartiri queunt, ab vno angulorum ad aliquem alium ductis lineis, similia.

PROBL. VIII. PROPOS. X.

Frusta conorum, vel pyramidum planis parallelis exciſorum quarumcumque similia efficere super datam basim similem basi coni dati.

Sit datum frustum conicum ABCD. compleatur, & sit BEC; sit deinde data basis GF similis basi BC; & super eam erigatur conus, vel pyramis, vel corpus referens conum, vel pyramidem, prout basis data reposcit, simile cono BEC: Deinde fiat altitudo TE ad altitudinem TQ; sic VH ad VI, & per I agatur planum basi parallelum, eritque GLMF frustum simile frusto BADC.



Probatur. BEC superficies corporis imitandi est ad superficiem imitantis corporis GHF, vt AED superficies ad superficiẽ LMH ex pr. 7. h. Cor. Si ergo auferantur AED, & LHM *diuidendo* erit BEC superficies ad reliquam superficiem BADC, vt GHF ad reliquam superficiem GLMF, sed BEC, & GHF sunt similes, ergo etiam BADC, & GLMF superficies similes erunt; sunt autem, & bases similes BC, & GF ex effectione, & AD, & LM, quod AED, & LHM sint coni similes, ergo frusta conorum BADC, & GLMF erunt similia.

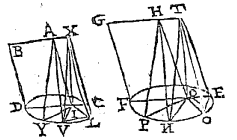
PROBL. IX. PROPOS. XI.

Prisma, vel Prismaticum conum, vel corpus cuiuscumq; basis ea corpora referens simile dato exhibere.

Corpus referens prisma, vel prismaticum conum est corpus à quacumque basi in lineam rectam terminans parallelam basi eleuatum.

Sit itaque constituendum aliquod ex dictis corporibus V. g. XBCD simile, & similiter positum, ac corpus prisma referens EFTG.

Inueniatur punctum Q in quod ab aliquo puncto T cadit normalis. Deinde p lineã terminantẽ TG ab eius T extremo ducto plano EG, quod faciat sectionem in basi EF, & ductis plurimis lineis QO, & cæt. (si sit necesse, quod basis non sit circulus, aut figura regularis, vel saltem rectilinea.) Fiat vt normalis TQ ad QF, & quãlibet ex ipsis OQ, vel QE, sic IX normaliter erecta super planum CD ad libitum assumpta ad ID, & quãlibet aliam IL, & IC, eosdẽ ãgulos claudẽtes & p extrema C, L, D linea ducatur. Itẽ fiat, vt QT normalis ad TG, sic IX ad XB, & vt QT ad TH, sic IX ad XA; Ducantur itaque superficies à basi CLD, quæ terminẽt in lineã XB, & erit corpus prismaticũ CXBD simile corpori dato FGTE.



Prob. Et primo ostendemus, quòd bases sint similes: Siquidem omnes ductæ à puncto Q, & I proportionales sunt. Nam fecimus TQ ad QF, vt IX ad ID: Ideoque *inuertendo* QF ad TQ, vt ID ad IX: sed etiam ex effectione TQ ad QO; vt IX ad IL. Quare ex æquo QF ad QO, vt ID ad IL, & sic dicas de alijs.

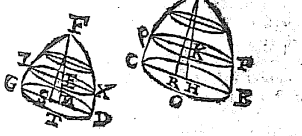
Probatur quoque quod superficies circumambientes sint similes, ex eo quod in eis tot planæ superficies similes inscribi possint, siquidem poterit vtrumque corpus in similes pyramides partiri. Nam ducta EO, & TO, sic CL, & LX. Iam erit pyramis EOQT simillis pyramidi CLXI, est enim ex effectione QT ad EQ, vt XI ad CI, & anguli ad Q, & I recti semper; vnde triangula EQT, & CIX erunt similia, & ita argue de triangulo OQT; quod sit simillis triangulo LIX. Vnde ex 7. h. pyramis EQTO erit similis pyramidi CLXI; erit enim consequenter EO ad ET vel OT, vt CL ad CX, vel LX: Sic dicas, quod OQNT similis sit pyramidi LXVI; Pyramis autem TQNH assimilabitur pyramidi XVIA ob eandem rationem, quod triangula TQN, & TQH sint similia triangulis XIV, & XAI; cùm TH æquetur EQ, & XA ipsi CI ob parallelissimum linearum QH, & ET, nec non, & XC, & AI. Quo ostenso, etiam QHNP cõstabit similis pyramidi IVAY, & sic de alijs. Omnes itaque pyramides in ETGF erunt similes pyramidibus in CXBD. Vnde, & habebunt superficies similes, quæ sunt in BTGF, superficiebus pyramidum in CXBD, quarum extimæ sunt inscriptæ, vt sunt EOT, & ONT, & THN, vel in alio

corpore CLX, & LVX: & cæt. & ſic omnes ſuperficies inſcriptæ in EGFT corpore erunt ſimiles ſuperficiebus inſcriptis in CXED corpore numero æqualibus. Quamobrem ipſa corpora ex def. erunt ſimilia. Non putamus autem neceſſe oſtendere pyramides in iſtis corporibus deſcriptibiles eſſe, nec caſum quo normalis extra cadit replicato argumento oſtẽdere, neq; oſtenſionẽ ſubtiliùs proponere de ſingulis lateribus cuiuſcũq; pyramidis proportiones ſimiles, & angulos æquales demonſtrãdo. Eſſet enim diſcurſus prolixus, qui alioquin patet ex diſcurſu anteced. vel quilibet ex ſe, & caſum fingere, & argumentum texere poteſt.

PROBL. X. PROPOS. XII.

Dato quocumque corpore Conoidali, ſeu ſit conoides obliquum, ſeu rectum, ſeu portio eorum, ſeu quodcumque aliud corpus; dummodo ad proportionales axis partes planis ſimilibus ſecari poſſit, ſimili corpore imitari, & ſimili poſitione.

SIt corpus aliquod BAC, cuius planum per axem ductum, & per normalem baſi; ſeu ſit conoides obliquum, ſeu rectum, aut ſphæroides, ſeu quodcumque aliud corpus ex ſegmentis circulorum, vel etiam ambituum conſtans, & oporteat ei ſimile corpus ponere, fiat ex prop. I. h. DFG ſimile planum BAC plano per axem HA, & per normalẽ AR, in quo plano DFC ſit normalis SF, & axis NF, quæ cum DG ſimile faciat triangulũ ipſi RHA, quam normalem docuimus reperire prop. 3. h perque DG normaliter altitudini SF, ducatur planum DTG, ſicut altitudini RA ductum eſt planum BOC: ſecetur que corpus imitandum in partes planis PQ, & illis, quæ erunt ſimilia baſi BOC ex theſi. Deinde ad partes NE axis ſimiles partibus axis HK ducantur parallela plana XL, & cæt. ſimilia planis PQ, & cæt. Circa verò plana ſimilia ſuperficies curuæ circumſcribantur: ſi enim plana ſint plurima ſuperficies ductæ circa PQ, & alia plana erunt omninò ſimiles ſuperficiebus corporis imitandi BAC, & ſic ex def. ipſa corpora erunt ſimilia.



Probatur. Nam cum ex prop. 2. huius. Sit BAC ſuperficies plana ad globoſam ſuperficiem BADO corporis exhibiti, vt BC diameter ad BOC ambitum: Sit verò ex effectione BC ad BOC, vt DG diameter ad DFC ambitum. At DG ad DTG, ſit, vt DFG plana ſuperficies ex prop. 2. h. ad DFGT globoſam ſuperficiem corporis conſtituti ex æquo erit BAC planum ad DFG planum, vt BOCA globoſa ſuperficies ad DFGT globoſam ſuperficiem. Sed BAC, & DFG ſunt ex effectione ſimilia plana. Ergo etiam globoſæ ſuperficies ſimiles erunt. Itaque ex tract. 34. def. 2. corpora erunt ſimilia cum ſuperficiebus ſimilibus veſtiantur. Poſitio verò ſimilis eo, quod triangulum NSF, ex axe, & normali, & ſectione baſis ſit ſimile triangulo HBA ex axe normali, & ſectione baſis ſimiliter effecto, vt requirit def. 2. h.

EXPENSIO II.

De Transformatione Corporum.

DE Transformatione Corporum doctrina ex dictis facilè eruitur, cum enim Corporum etiam diuerſe ſperiei equalitatem inuenerimus, & proportiones aſſignauerimus, ex illis accliui argumentatione etiam corporum transformatio deriuat.

PROBL. I. PROPOS. XIII.

Dato Parallelepipedo, datæ altitudinis æquale parallelepipedum conſtruere.

SIt datum aliquod Parallelepipedum EF, cuius baſis AE, & altitudo NF; dataque ſit linea quedam OT erecta perpendiculariter ſuper aliquod planum, & oporteat circa eam parallelepipedum dato EF æquale conſtituere.

Fiat itaque, vt altitudo TO ad altitudinem NF, ita baſis AE ad aliud ſcilicet ad rectangulum ex M.



Quod obtinebimus ex 22. lib. 6. Coroll. faciendo ſcilicet vt TO ad NF, ita EN ad y deinde inueniendo inter NE, & y mediam proportionalem M, & conſtituendo ſuper eam ex prop. 23. lib. 6. rectangulum ſimile, ſimiliterque poſitum vt rectangulum EA, diuidaturque in quatuor rectangula æqualia, quorum vni ab r fiat æquale rectangulum TC, duplicẽturque ſingula latera ac compleatur rectangulum CH, & erigantur CV, HL parallelæ TO, & efficiatur parallelepipedum CL. Dico factum eſſe, quod expoſcebatur, & parallelepipedum CL eſſe æquale parallelepipedo EF.

Probatur ex prop. 10. Tr. 34. p. 1. Nam illa ſunt parallelepipeda æqualia, quæ habent baſes altitudinibus reciprocè proportionales; ſed ex effectione TO altitudo eſt ad NF altitudinẽ, vt baſis AE ad baſim CH. Ergo parallelepipeda erunt æqualia.

PROBL. II. PROP. XIV.

Dato Parallelepipedo cubum æqualem conſtituere.

SIt parallelepipedum EH, quod conſequatur baſim EF quadratum (quòd ſi talem non conſequatur, fiat baſis quadrata æqualis ipſi FE, & ſuper eam erigatur parallelepipedum æquealtum EH, quod erit æquale dato parallelepidedo ex prop. 6. Tract.

Tract. 34. Huic igitur conſtituendus ſit cubus æqualis: Inter TE, hoc eſt A latus baſis dati parallelepipedi, & altitudinem FH, ſcilicet D duę mediæ proportionales reperiantur B, & C ex prop. 3. tract. 15. & ex B fiat quadratum, ſuper quod erigatur cubus LN, & erit cubus æqualis ipſi parallelepipedo EH.



Prob. ex propoſ. 12. p. 1. Tr 34. quoniam cubus erectus ex media proximiori ei, quæ conſtituit baſim parallelepipedi, vt eſt B æquatur parallelepipedo ipſi ex baſi quadrata A, & altitudine D.

Quòd ſi forte eueniat exhibitum parallelepipedum obtinere tres dimentiones continuè proportionales, erit cubus ex media conſtitutus æqualis ipſi parallelepipedo ex prop. II. tract. 34.

PROBL. III. PROP. XVI.

Dato cubo æquale parallelepipedum conſtruere in datam altitudinem, vel ſuper datam baſim.

SIt in præced. figura datus cubus LN, & data altitudo HF, & oporteat eleuare ſolidum, quæſitum in altitudinẽ FH. Duabus HF, & IO inueniatur tertia proportionalis ET, & IO fiat æquale latus TF, & ET tertia conſtituat aliud latus baſis EF, eleueturque in altitudinem datam HF, & aſſero hoc parallelepidum cubo LN eſſe æquale, quod patet ex propoſ. II. Tract. 34.

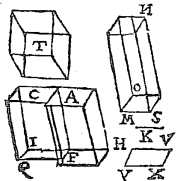
Quòd ſi quis velit parallelepipedum æquale dato cubo ſuper datam baſim fabricari: ſit baſis exibita FE; quę, ſi non eſt parallelogramma reuocetur ad æquale parallelogrammũ: Deinde fiat vt baſis FE ad baſim LO, ità latus IO ad FH, & conſtituatur ſuper FE parallelepipedum æqualis altitudinis ipſi FH, & hoc erit æquale cubo dato. Patet quoniam ſunt baſes effectę altitudinibus reciprocè proportionales. Vnde ex prop. 10. tract. 34. erunt equalia hæc duo ſolida. Inuenietur autem baſis FE ad baſim LO, vt latus IO ad FH: ſi duabus TE, & LI tertia proportionalis inueniatur, deinde fiat, vt TE ad tertiam proportionalẽ repertam: ſic IO ad FH: tunc enim quia eſt FE ad baſim IO, vt TE ad tertiam proportionalem repertam ex Cor. prop. 22. lib. 6. & TE ad tertiam proportionalem repertam, eſt vt IO ad FH, erit etiam ex 16. lib. 5. FE ad baſim LO, vt IO ad FH altitudo ad altitudinem.

PROBL. IV. PROPOS. XVI.

** Dato parallelepipedo ſimile parallelepipedum efficere, ſed æquale alteri dato.*

SIt parallelepipedum A, cui ſimile oporteat facere parallelepipedum aliquod, ſed æquale cubo T, fiat quodcumque parallelepipedum C æquale cubo T, ſed altitudinis æqualis parallelepipedo A; habebuntque parallelepipeda eandem proportionem; quam baſes ex 8. tract. 34.

Redigatur itaque ex 6. prop. tract. 29. baſis FE ad eandem altitudinem XV plani YV; ac baſis HF, habebuntq; baſes planæ eandem proportionem, ac baſes ipſarum lineæ XY ad HF. Ideoq; ex 7. l. 5. QE erit ad FH, vt XY ad FH. Inter duas itaq; XY, & FH inueniantur duæ mediæ proportionales K, & MS, & fiat ſuper MS ex propoſ. 3. tract. 34. part. 1. parallelepipedum MN ſimile, ſimiliterque poſitum, ac parallelepipedum A, eritq; hoc parallelepipedum æquale etiam cubo T.



Probatur. Nam Parallelepipedum MN ad Praralelepipedum A ſibi ſimile habet proportionem triplicatã laterum SM ad HF homologorum ex 9. tract. 34. Ideoque erit vt XY ad HF, cuius proportio eſt triplicata lineę SM ad HF; ſiquidem eſt XY ad K. vt K ad SM, & K ad SM, vt SM ad HF. ſed vt XY ad HF, ita eſt baſis eiuſdem altitudinis YV ad FH, & vt VY ad FH, ita eſt FI ad FH. cum ſint æquales VY, & FI ex conſtruct. ſed vt FI ad IH baſes, ità parallelepipedum C eiuſdem altitudinis ad parallelepipedum A. Ergo vt XY ad HF, ità parallelepipedum C ad parallelepipedum A. Ergo C ad A erit in triplicata proportione SM ad HF, ideſt vt MN parallelpipedum ſimile ad A: Cum itaque eidem parallelepedo A eandem dicat proportionem parallelepipedũ C, & NM parallelepipedum. Ergo ex 9. lib. 5. erunt æqualia, & tamen MN ſimile ipſi A factum eſt, & ideo cubus T ipſi C, & ideo NM inuento æquabitur.

COROLLARIVM.

HInc poterit quis efformare ne dum parallelepipedum, ſed etiam priſma, & pyramidem imò, & conum, & cylindrum, & ea omnia corpora, quæ ad eandem eleuationem ex dicendis extolli poſſunt, & quorum baſes, in baſes æqualis altitudinis rectilineas conuerti.

PROBL. V. PROPOS. XVII.

Priſmati Parallelepipedum æquale conſtruere, vel è contra Priſma æquale parallelepipedo. Sic pyramidem parallelepipedo æqualem, & vicißim parallelepipedum pyramidi æquale ſtatuere.

HOc facilitèr efficietur ex pr. 1. Tr. 29. Fiat parallelogrammũ eiuſdem altitudinis, ſed ſuper dimidiam lineam baſim triãguli, quod priſmati baſim planam ſubſternit, hoc æquale erit triangulo baſis. Quadere, ſi parallelepipedo æqualis priſmati altitudinis hoc parallelogrammũ pro baſi ſubſternatur, parallelepipedum erit æquale ipſi priſmati Quod ſi fiat triangulũ æquale parallelogrãmo operando è cõtra, priſma ſuper illud triangulũ erectũ æquabitur parallelepipedo. Fiat deinde Pyramis ſuper baſim parallelepipedi ſextuplo maiorem ex prop. 27. Tract. 29. & erigatur ad eandem eleuationem, & erit pyramis æqualis parallelepipedo.

E contra vero Pyramidis basis sexta pars assumatur, & super illam erigatur parallelepipedum ad eandem eleuationem, & erit æquale Pyramidi.

Prob. pars 1. Nam prisma est dimidium parallelepipedi æqualis altitudinis collocati super eandem basim ex prop. 2. Tr. 34. p. 1. quare si fiat parallelepipedum aliud super dimidiam basim, cum parallelepipeda æquealta sint, vt bases inuicem erit dimidium parallelepipedi integræ basis. Quare cùm ad prisma super æqualem basim, & ad parallelepipedum super dimidiam basim, parallelepipedum super eandem basim integram se habeat, vt 2 ad 1 erunt prisma, & parallelepipedum aliud dimidię basis æqualia ex prop. 9. lib. 5.

Patet puoque secunda pars eodem argumento.

Tertia, & quarta pars patet, quia Pyramis triangularis basis est tertia pars prismatis ex prop. 22. Tr. 34. p. 1. & ideo sexta parallelepipedi duplũ prismatis super eandem basim erecti ad eandem eleuationem, & ideo si fiat parallelepipedum æquealtum super partem sextam basis prædictæ hoc parallelepipedum ad illud erit, vt basis ad basem nempe, vt 6. ad 1. Vnde ad pyramidem æquealtam super eam basim, & ad parallelepipedum super sextam partem basis æquealtam eandem habebit proportionem.

Quare æquabuntur ex pr. 9. lib. 5. Pyramis eiusdem basis, & parallelepipedum super sextam partem erectum ad eandem eleuationem.

PROBL. VI. PROPOS. XXVIII.

Prismati cuicumque æqualem cylindrum constituere, & viciſſim cylindro æquale prisma ponere; Sicuti, & pyramidem cono, & conum pyramidi erigere.

Fiat basi prismatis æqualis circulus, ex prop. 13. tract 30. & super hunc circu um erigatur æqualis eleuationis cylindrus, & hæc erunt æqualia.

Ita quoque fiet ad inueniendum prisma æquale cylindro. Efficitur enim triangulum circulo æquale ex pr. 14. Tr. 30. & 1. Tr. 29. & super hoc Prisma æqualis altitudinis extollatur.

Sic quoque Conus Pyramidi æqualis fabricabitur, & Pyramis cono const tuendo super æquales bases æqualis altitudinis Pyramidem cono, vel conum Pyramidi.

Hæc autem omnia ostenduntur Coroll. prop. 3. p. 2. Tract. 34. si autem requiratur, quod Prisma, vel pyramis sit basis similis alteri datæ basi: hæc fient ex prop. 27. l. 6. redigendo triangulum æquale circulo in figuram datę figuræ similem.

PROBL. VII. PROPOS. XIX.

Dato Cylindro æqualem conum constituere, & viciſſim æqualem cono cylindrum exhibere. Sicut, & dato Prismati æqualem Pyramidem extruere, & è contrà datæ Pyramidi Prisma æquale erigere.

Cylindri basis triplicetur ex 19. tract. 30. & super eam constituatur conus eiusdem altitudinis, & erit conus cylindro æqualis.

E contrà basis dati coni in tres partes diuidatur ex prop. 19. tract. 30. & tertiæ parti fiat circulus æqualis; & exinde super eam ad eandem altitudinem eleuetur cylindrus, & erit cylindrus dato cono æqualis.

Probatur ex pr. 7. Tr. 34. p. 2. Nam Cylindrus se habet ad conum super eandem basim erectum, vt 3 ad 1. sed etiam Conus ad eandem altitudinem super triplicatam basim erectus est ad illũ conum in basi cylindri situm, vt 3. ad 1. ergo ex prop. 9. lib. 5. sunt æquales cylindrus, & conus; cùm eidem cono sito in subtripla basi coni, eadę quæ cylindro deseruit, eandem dicat proportionem, quam 3. ad 1.

Si verò agatur de prismate pyramidi æquando idem ages: Nam triplicata basis Prismatis dabit pyramidem, quę in eandem altitudinem erecta erit æqualis prismati; Sicut & basis pyramidis tertia parte situm prisma altum, vt est pyramis, ipsam pyramidem exæquabit soliditate.

Ratio est eadem, quòd Pyramis sit tertia pars prismatis in eadem basi sita ex prop. 22. Tract. 34. p. 1. Vnde valebit idem argumentum.

PROBL. VIII. PROPOS. XX.

In Cylindrum datam pyramidem, & in pyramidem cylindrum transfundere. Ita Conum exhibitum in prisma, & prisma in conum deducere.

Fiat Pyramidi datæ æqualis conus ex pr. 28. h. & cono inuento cylindrus æqualis constituatur ex antecedi. Vel è contra fiat cylindrus æqualis cono, huicque cono inuento æqualis pyramis. Nam erit etiam æqualis cylindro, vt patet. Sic cono dato æqualis pyramis fiat ex prop. 28. h. & pyramidi inuentæ prisma æquale constituatur ex prop. antecedi.

E contrà autem fiat Prismati dato æqualis Pyramis, & pyramidi inuentæ æqualis conus, & conus Prismati æqualis erit.

PROBL. IX. PROPOS. XXI.

Conum transmutare in parallelepipedum, & viciſſim parallelepipedum in conum. Item Cylindrum in parallelepipedum, & è contrario parallelepipedũ in cylindrum permutare.

Conus in Pyramidem transmigret ex propos. 28. huius, & pyramis erecta in parallelepipedum transeat ex prop. 27. h. Ita Parallelepipedum in Pyramidem transformetur ex prop. 27. h. & Pyramis ex propos. 28. h. in conum transfundatur, erit effectum id, quod pars 1. propos. postulat.

Altera verò pars eodem modo in opus demandabitur. Si namqre cylindro dato fiat æquale prisma ex pr. h. 28. & huic prismati æquale parallelepipedum ex prop. 27. h. Aut parallelepipedo æquale prisma ex p. h. 27. & prismati æqualis cylindrus ex h. 28. pr. interuum consequemur.

PROBL.

PROBL. X. PROPOS. XXII.

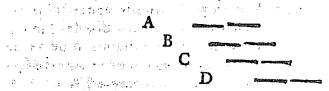
Corpus regulare quodcumque in Pyramidem æqualem traducere, & viciſſim Pyramidem in corpus aliquod regulare transmutare.

Omnibus 12. basibus corporis V. g. dodecaedri pentagonis fiat quadratum æquale transformando priùs in rectangulum aliquam ex ipsis ex 5. prop. Tr. 29. & 12. ex eis vniendo, & hoc rectangulum ex 12. pentagonis constatum reducendo ad quadratum ex 9. eiusdem, & deinde super hãc basim extruatur pyramis altitudinis eiusdem, ac normalis à centro super quamlibet dodecaedri planam basim deductæ: sc. altitudinis vnius pyramidis, in quas diuiditur planis à centro deductis corpus dodecaedri. Eritque hęc pyramis æqualis omnibus pyramidibus corporis dodecaedri in centrum vertice suo terminantibus.

Probatur Ita Pyramis quadrilatera modo erecta ad vnam Pyramidem in centro terminantem dodecaedri est, vt basis quadrata huius ad basim illius, cum sint eiusdem altitudinis ex effectione, Idest vt duodecim pentagoni dodecaedri, quibus æqualis est basis quadrata ad vnum pentagonum ipsius.

Et cum omnes Pyramides dodecaedri ad vnam ipsarum; ita sint, vtpotè eiusdem altitudinis, vt omnes bases duodecim ad vnam ipsarum; sequitur vt Pyramis quadrilatera, & Pyramides omnes dodecaedri ad vnam pyramidem dicant eandem proportionem, quam 12. ad 1. scilicet, quam omnes bases ad vnam; Vnde ex 9. lib. 5. erunt æquales omnes pyramides dodecadri, & pyramis quadrilatera modo erecta.

E contrà verò data pyramide ita fabricabitur corpus regulare aliquod ei æquale.



Sit data pyramis, & eius latus A, cui sit constructum æquale dodecaedrum. Fiat quodcumque dodecaedrum, cuius alicuius basis pentagonæ latus sit B, & fiat huic dodecaedro ex B, ex parte prima prop. h. æqualis pyramis, & huic alia æqualis quidem, sed similis pyramidi A, ex Coroll. prop. 16. huius, cuius latus C: Fiat autem, vt A ad C latera pyramidum, sic B latus dodecaedri ad aliud D, & dodecaedrum ex latere D fabricetur, eritque dodecaedrum fabricatum super basim D æquale pyramidi A.

Probatur, ita est pyramis ex latere A ad Pyramidem ex latere C, vt dodecaedrũ ex latere B ad dodecaedrum ex latere D ex prop. 14. Tr. 34. Cor. sed pyramis ex latere A est æqualis dodecaedro B. Ergo etiam Pyramis C erit æqualis dodecaedro D ex prop. 12. lib. 5. si verò quis cupiat datum corpus aliquod ex quinque regularibus æquale, aut cubo, aut parallelelepipedo, aut culcumque alteri figuræ is pyramidem quadrilateram in æqualem, aut cubum, aut parallelepipedum transfundere poterit.

At si quis exoptet cubo constituere, vel parallelepipedo æquale corpus regulare V. g. Tetaedrũ, cuius latus B. Primò ex 1. part. prop. præc. faciat cubũ æquale, vel parallelepipedum æquale alteri dato corpori regulari eiùs speciei, quæ desideratur, nempe Tetaedro ex B, cuius latus sit A; Deinde constituat cubum, vel faciat parallelepipedũ ex C latere simile illi parallelepipedo A, vt ostens. pr. 6. h. Postea faciat, vt A ad C, ita B ad aliud D, & construat Tetaedrum ex illa linea inuenta D, tanquam latere faciendo ex illa quatuor triangula æqualia, & æquilatera, & simul vniendo, & erit æquale cubo, vel parallelepipedo dato C.

PRORL. XI. PROPOS. XXIII.

Sphærę cubum æqualem ponere.

Cylindrus, cuius altitudo diameter sphęre, cuius basis circulus maximus in sphęra sit, habet proportionẽ ad sphęram ex pr. 37. Cor. 1. & 3. Tr. 24. quã 3. ad 2. Ideo si quis hũc cylindrũ in tres partes secet planis ad axem rectis, & ex tribus huius partibus duas accipiat; erunt hę duę partes æquales sphęrę soliditati; Quia eidem cyliudro sunt parti, quę est 2. & sphęrę habet eandem proportionem, quam 3. ad 2. Sic quia sphęra quadrupla est coni eiusdem altitudinis, ac radii sphęrę, & eiusdem basis ac circulus maximus in sphęra, vt pr. 43. Cor. Tr. 24. p. 2. si ex diametro sphęrę tanquam radio erigatur conus eiusdem altitudinis, ac radius sphęrę erit æqualis sphęrę soliditati.

Si verò huic cylindro, vel cono, aut cubus constituatur æqualis, vel Parallelepipedum, aut pyramis, aut aliquod corpus ex regularibus. Iam illud quodcumque corpus sphęrę æquabitur.

PROBL. XII. PROPOS. XXIV.

* *Annulo ſolido æquale prisma quadratæ basis inuenire.*

Quoniam ex prop. 19. Tr. 34. p. 2. annulus solidus quadratus æquat parallelepipedum, cuius altitudo æquetur annuli solidi altitudini, & basis annulo plano, cui ineſt: Fiat ex prop. 18. tr. 30. annulo plano, qui pro basi annulo solido substernitur circulus æqualis, & huic circulo æquale quadratum, vel rectangulum ex pr 13. tract. 30. super quod erigatur parallelepipedum æqualis altitudinis & erit factum id, quod exposcitur.

Patet autem hęc operatio ex prop. 19. tract. 34. quoniam hoc parallelepipedum, vt ibi ostenditur est æquale annulo solido quadrato.

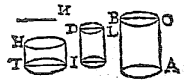
Si verò sit annulus rotundus, fiat cylindrus, cuius altitudo sit peripheria per centrum soliditatis annuli transiens, & basis sit circulus eius sectio, & cylindrus iste æquabitur annulo solido rotũdo, vt constat ex 20. prop. Tract. 34. Quod si annuli sectio non sit rotunda, sed polygona, fiet prisma, cui subdat basim illa polygona annuli sectio; sed peripheria prędicta sit altitudo, & illud prisma polygono æquabitur.

PROBL.

PROBL. XIII. PROPOS. XXV.

* *Cylindrum conum; vel pyramidem, & prisma in basibus datis collocare.*

SIt V. g. Cylindrus LI, cui facienda sit basis æqualis basi OB, ita tamen vt soliditate, & mole idē perseueret, fiat, vt OB basis, LD basim ad sic altitudo DI ad aliud, reperiendo scilicet duabus OB, & LD tertiam proportionalem N, eritque ex 21.l.6. vt OB ad LD bases sic OB ad N. Postea fiat, vt OB ad

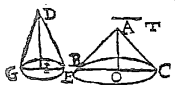


N, sic DI ad aliud, & reperietur altitudo TH. Fiat itaque Cylindrus super basim OB altitudinis HT, & æquabitur cylindro IL: cùm bases effecerimus altitudinibus reciprocè proportionales, & sit OB, ideſt TI ad LD ex effect. vt DI ad HT, vnde ex pr.12. præc. tract. æquabuntur IL, & IH cylindri. Eadem ages de cono Pyramide, & prismate, & parallelepipedo quoque.

PROBL. XIV. PROPOS. XXVI.

* *Pyramidem, vel Conum, Cylindrum, & Prisma in altitudinem datam euehere.*

SIt Conus CAB, & oporteat in altitudinē ID illū extollere, ita quòd sit conus EDG æqualis cono CAB. Fiat vt altitudo ID data ad altitudinem OA dati coni GAB, sic basis BC ad



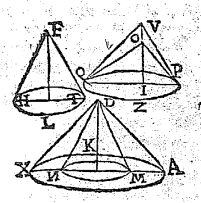
basim EG. Id autem exequetur si fiat ID ad OA, sic BC ad aliud T, & inter CB, & T media proportionalis inueniatur EG. ex qua fiat circulus, qui basis est coni. Nam ex 21. Cor. l.6. erit CB circulus ad EG circulum, vt CB diameter ad tertiam proportionalem T, ideſt ID ad OA ex effect. & ideo ex pr. 12. Tr. 34. p.1. erunt æquales coni CAB, & DEG, cum obtineant bases altitudinibus reciprocè proportionales, & idem dicas de pyramide, cylindro, & prismate.

PROBL. XV. PROPOS. XXVII.

* *Conum æqualem soliditati coni intus euacuati construere.*

CAsus 1. Sit Conus ADX; qui vacuus sit intus cauitate coni eiusdem altitudinis, sed minoris basis capaci MDN; oporteatque constituere conum æqualem soliditati ADXMN.

Fiat circulus THL æqualis annulo AKXMN ex pr. 18. tract. 30. & super illum erigatur conus æqualis altitudinis; ac conus ADX; Et affero hunc conū TFH soliditati concauatæ coni ADX esse æqualē. Prob. Ita est conus ADX ad conum MDN, si adesset; vt basis XKA ad basim MN si extaret: Ergo *diuidendo* ita est conus ADX ad residuum ADXMN dempto cono MDN, vt basis AKX ad residuum annulum MNXKA dempta basi MN: sed vt AKX basis ad AMKXN annuium ita est eadem basis AKX ad TLH basim ex 7. lib. 5. vtpote ad æqualia: At vt AKX basis ad basim TLH; ita est conus ADX ob eandem altitudinem ex pr. 5. tract. 34. p. 2. ex effect. ad conum TFH: Ergo Conus ADX ad soliditatem residuam euacuatam ADXMN, & ad conum TFHL dicit eandem proportionem basis AKX ad TLH, siue ad annulum AKXNM. Ergo erunt æqualia conus HFIL, & soliditas caua XDANM.



Casus 2. Quod si conus sit vacuus spatio, quod impleatur à cono eiusdem basis, & minoris altitudinis fiat, vt altitudo OV ad altitudinem OI, ita basis QP ad aliud, & inueniatur basis TLH operando eodem modo, ac prop. 15. h. super quam rectus conus HLFT constituatur eiusdem altitudinis IV, & erit æqualis soliditati coni FVQ ablato cono POQ.

Probatur. Nam vt altitudo VI ad OI, sic conus PVQ ad conū POQ ex pr. 11. Tr. 34. p. 2. ideoq; *conuerteodo*, vt VI tota ad compartem OV, sic PVQ totus conus ad compartem POVQ residuam ablato cono POQ. Sed vt IV ad OV, sic PZQ basis ad TLH basim & ita conus PVQ ad conū TFH: Ergo PVQ ad conum TFH ad, & residuum POVQ dicet eandem proportionem. Quare erunt æquales soliditas POVQ, & conus TFHL.

Casus 3. Si verò detur aliquis conus cuius vacuum, cono in quo est, sit etiam dissimile, simulq; minoris basis, & minoris altitudinis illud vacuū tamquam si esset conus redigatur ad eandem basim, vel altitudinem, vt docuimus prop. 26. & 27. h. & postea perficiatur opus, vt 1. vel 2. Casu.

COROLLARIVM.

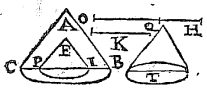
HInc enascitur idem esse dicendum de Pyramide, si aut vacuum pyramidis pyramide basis minoris, sed eiusdem altitudinis capax existat, aut minoris altitudinis, & eiusdem basis. Et idem dicendū est etiam de parallelepipedo, vel cylindro si vacuo basis minoris. & eiusdem altitudinis capax dignoscatur. Si verò vacuum non impleat totum cylindrum, vel parallelepipedum in duo partiemus in vacuatum, & in plenum, & postquam reperimus cylindrum, vel parallelepipedum vacuato æquale ad eandem basim redigemus, & coniungemus cum cylindro, vel parallelepipedo non excauato.

PROBL.

PROBL. XIII. PROPOS. XXVIII.

* *Dato cono vacuo capace similis coni, conum æqualem inuenire.*

SIt conus ABC, cuius vacuum sit capax coni æqualis cono IPE, qui est similis cono exhibito ABC. Et oporteat æqualem conum eius soliditati inuenire. Reperiantur duabus PI, CB duæ proportionales in continua proportione tertia, & quarta, & hæc quarta sit OH; essetque conus PEI, si esset solidus ad conum CAB, si esset solidus totus, vt PI ad OH, scilicet in triplicata ratione diametrorum, eo quod vacuum, & solidum ponantur coni similes, vt ex propos. 9. Tract. 34. constat. Auferatur IP ab OH linea, & sit residuum QH, & erit *diuidendo* IPE ad BAC sublato ipso PEI, cono, scilicet CAB PEI soliditatem, vt PI ad OH sublata ipsa PI, scilicet QH. Inter igitur IP, & QH duæ mediæ proportionales interponantur, ita vt PI, T, K, & QH sint quatuor continuè proportionales ex 3. Tract. 15. fiatque conus ex diametro T immediatè post PI similis cono CAB.



Igitur ex propos. 9. tract. 24. IPE conus erit ad conum T, vt PI ad HQ: sed vt IP ad HQ, sic est IPE conus vacuus ad CAB PEI soliditatem residuam, vt ostendi. Ergo huic residuo CAB PEI, & cono T, idem conus PEI dicit eandem proportionem PI ad QH, scilicet triplicatam PI ad T diametrorum, ergo erunt ex propos. 9. lib. 5. æqualia CAB IPE soliditas, & conus T.

COROLLARIVM.

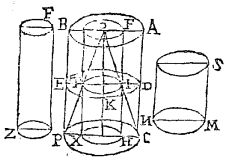
IDem dicendum est de pyramide excauata, si vacuum eius similis pyramidis sit capax, & eodem modo eius soliditati pyramis æqualis inuenietur.

PROBL. XIV. PROPOS. XXIX.

* *Cylindrum vacuatum cono, cui cylindro æqualis sit, reperire.*

CAsus primus. Si conus PCO sit eiusdem basis, & æqualis altitudinis cylindri PA. Fiat circulus ex propos. 19. Tract. 30. qui sit PZ duæ tertiæ partes circuli PC; qui basis est coni, vel cylindri, & super hanc erigatur cylindrus ZF, & erit æqualis soliditati cylindri ablato prædicto cono. Patet. Nam est conus COP tertia pars cylindri, vude reliquum erit $\frac{2}{3}$ cylindri; Quare si erigatur super basim, quæ $\frac{1}{3}$ sit basis CP, cylindrus ZF æqualis altitudinis altitudini CA erit, vt CP basis ad basis duo trientes ZP, ita cylindrus AP ad cylindrum ZF super eam erectum. Vnde erit $\frac{1}{3}$ cylindri AP, & & ideo æqualis soliditati AP vacuatę cono COP.

Casus 2. At si sit coni uacuum TIO eiusdem altitudinis, & basis minoris in cylindro BAED, fiat basis æqualis annulo DEKIT vna cum duobus tertijs circuli IT, & fit MN, & super eam erigatur cylindrus NS eiusdem altitudinis, ac IF, & dico SN cylindrum æqualem esse soliditati cylindri EA ablato cono IOT.



Probatur. Iam si fiat cylindrus ex basi æqualis duabus tertijs IT, basis, & eleuetur ad altitudinem IF erit æqualis soliditati coni FT ablato cono IOT; Item si fiat basis æqualis annulo DEKIT & super eam eleuetur cylindrus æqualis altitudinis, ac DA æquabitur ipsi cylindro EA ablato cylindro TF ex Coroll. propos. 27. huius. Ergo ex propos. 39. Tract. 17. Si componantur isti duo cylindri erit totum EA ad duos cylindros æquantes suum solidum dempto cono IOT, vt ad SN cylindrum, qui ambos simul amplectitur, qunre cylindrus SN prædicto solido æquabitur.

Pro casu 3. Consideretur fig. prop. 25. par. 1. Tract. 34. in qua probauimus frustum pyramidis BA æquari parallelepipedo ex basi YS ad eleuationem MT, & trienti parallelepipedi ex basi BM ad eleuationem eandem euecto, ideoque ad adæquandum parallelepipedum ex basi BC tota in eandem altitudinem eleuatum deficient duo parallelepipeda ex basibus NY, & YO, & duo ex PO, & y basibus, & duo trientes ex BM basi parallelepipedi ad eandem eleuationem extructi. Basis verò PO, y, & BM æquales sunt, sicut & complementa NY, & YO æqualia. Quare si esset frustum triangulare deductum ex prismate normalium laterum super BC dimidiam basim à diagonali bipartitum erecto ad eandem eleuationem. esset residuum eius dimidium vnicum parallelepipedum ex NY, vel YO, & vnicum parallelepipedum BM, & triens eiusdem nempe dimidium supradicti residui. Est autem ex prop. 13. Tract. 34. p. 2. tale frustum coni TIPC æquale pyramidis frusto, cuius basis inferior æquet peripheriam, & semidiametrū inferioris basis coni suis lateribus, quibus sepitur, & basis eiusdem superior circuli superioris frusti coni æquet itē suis lateribus peripheriam, & semidiametrum. At cylindrus EDKPC æquabit ex Cor. prop. 13. Tract 34. par. 2. prisma æque eleuatum, cuius basis triangularis à peripherię, semidiametroq; lateribus æqualibus stipetur ex Cor. pr. 3. Tr. 34. p. 2.

Siquidem ex propos. 3. tract. 30. hæc basis triangularis ex latere æquante peripheriam, & alio æquante semidiametrum circulo eorūdem peripheriæ, & diametri æquatur: Ergo residuum IDC TEP æquabit parallelepipedum, cuius basis ex ID semidifferentiæ diametrorum æquali latere, & alio æquali peripheriæ ex TI constet, & parallelepipedo ex basi semidifferentia ID diametrorum, & semidifferentia peripheriarum constituto, & trienti huius ipsius parallelepipedi, quæ omnia parallelepipeda ad eandem eleuationem extollantur. Basis

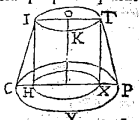
enim

enim NY in fig. prop. 25. Tract. 34. part. 1. ex latere minori, & semidifferentia alterius minoris à maiori homologo constituitur, & BM ex semidifferentijs homologorum laterum: Ideoque si minori peripheriæ æqualis ponatur pro latere, aliud erit latus semidifferentia inter diametros minorem & maiorem: at si semidiameter minor ponatur pro latere, aliud erit latus semidifferentia peripheriarum, cùm hæc duo rectangula æquentur. Etenim, cum sit peripheria ad peripheriam; vt diameter ad diametrum, & vt radius ad radiũ ex 42. lib. 6. erit *dividendo* peripheria minor ad differentiã suã à maiori, vt diameter minor ad differẽtiã suam à maiori, & ideo ad earum dimidium, quare rectangulum ex medijs æquabitur rectangulo ex extremis ex prop. 18. lib. 6. Si ergo fiat rectangulum, cuius vnum latus æquet peripheriam minorem ex TI aliud semidifferentiam diametrorum, vel ex dimidia diametro minori IT, & semidifferẽtia peripherlarum, & huic addatur ex pr. 28. Trac. 29. rectangulum ex semidifferẽtijs diametrorum; & peripheriarum, & huic iterum addatur trienς huius ipsius rectanguli, & super hoc rectangulum parallelepipedum erigatur; erit æquale soliditati IDC TEP cylindri EDFC, coni frustum TIPC ambientis, cui parallelepipedo cylindrus æqualis (vt potest fieri ex prop. 28. h.) æquabitur soliditati prædictæ IDC TEP.

PROBL. XV. PROPOS. XXX.

* *Soliditati frusti coni cylindro vacuatæ conum æqualem ponere.*

SIt frustum coni in præc. fig. TIPC, quod intelligatur vacuatum cono TIXH, & sit reperiendus conus æqualis soliditati PXT IHC. Quoniam propos. 13. Trac. 34. p. 2. (vt in illa fig. intueri licet) frustum coni RATQ æquat frustum pyramidis BLK NCM, & hoc frustum ex Cor. prop. 25. p. 1. est dimidium frusti pyramidis basis quadratę, quod ex contextu eius propos. æquatur parallelepipedo

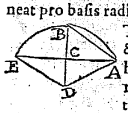


à basi eleuato ex minoribus basis superioris lateribus, & duobus parallelepipedis, ex minori latere, & semidifferentia alterius minoris ab homologo sibi latere maiori, & insuper parallelepipedo ex semidifferentijs homologorum laterum basis supremæ, & infimæ, & eius trienti omnia æqualis eleuationis HI. Ideo frustum pyramidis in hac fig. quod æquet frustum conicum TIPC æquabitur horum dimidio nempe prismati à basi ex TKI peripheria, & IO radio, quod æquat ex Cor. prop. 3. Trac. 34. par. 2. æqualtum cylindrum ob basim TKI ex 3. Trac. 30. æqualem, parallelepipedoq; vnico ex radio, & semidifferentia peripheriarum minoris à maiori, & parallelepipedo dimidio ex semidifferentijs diametrorum, & peripherlarũ minorum à maioribus, & insuper dimidio trienti eiusdem, quæ duo faciunt quatuor sextantes dicti parallelepipedi ex semidifferentijs. Subducto itaque prismate æquante cylindrum XI ex peripheria TKI, & radio OI basi inixo remanebunt prædicta parallelepipeda, nempe ex radio OI, & semidifferentia peripheriarum basi eleuata, & quatuor sextantum parallelepipedi ex basi ex semidifferentijs diametrorum, & peripheriarum consurgentis. Igitur si basis constituatur ex OI radio, & semidifferentia peripheriarum, & ei addantur quatuor sextantes basis ex semidifferentijs prædictis diametrorum TI, & PD, & peripheriæ ex TI ab EXD, & super ipsam in altitudine DC eleuetur parallelepipedum: hoc erit æquale soliditati PTX FTC frusti coni TIPC vacuati cylindro TIXH. Hoc verò parallelepipedum conus fiat, ex pr. 20. h. & verificabitur assumptum.

PROBL. XVI PROPOS. XXXI.

Sectorem, & portionem sphæræ in conum æqualem commutare.

QVoniam sector sphæræ ABED solidus æquat conum cuius altitudo sit radius BD, & obtineat pro basis radio subtensam AB ex Cor. 1. pr. 44. Tr. 34. si fiat circulus radio AB, & super illum extollatur conus habens pro altitudine radiũ sphęrę DB: hic conus æquabit soliditatẽ sphęrę sectoris EBAD. Si verò fiat conus, cuius basis CA radio ducatur, & altitudo sit CD residua radij DB sphęrę ablata sagitta portionis sphæræ BC, qui sit EAD, & hic conus DAE auferatur ab illo, qui æquet sectorem sphęrę, reliqua erit solliditas, quæ redacta in conum æquabit solliditatem portionis sphęrę EBAC.



PROBL. XVII. PROPOS. XXII.

Sphæroidi conum æqualem exhibere.

HOc faciliter fit faciendo conum, qui habeat pro radio axem alterum, alterum pro altitudine. Vel cùm ex pr. 26. Tr. 34. ostenderimus semipheroidem esse duplum coni inscripti, cuius basis circulus ducitur ex semiaxe tamquam radio, & alium semiaxem habeat pro altitudine; sic conficiamus conum duplum faciendo eius duplam basim (quod fit, si inter totum axem, & dimidium media proportionalis inueniatur, & adhibeatur pro radio ex prop. 19. tract. 29.) & eandem altitudinem alterius semiaxis conseruando, erit duplum huius; & ideo æquabit hemisphæroidem, si verò duos conos similes in Rhombũ solidũ cõponamus, vt est ACHD in illa pr. 16. Tr. præc. p. 2. Huic Rhombo erit æqualis ille conus, qui habeat eandem conorum cõpositorum eleuationem, & basim eandem ex eadem prop. vt est ibi GAN: Quare conus habens totũ alterum axem pro radio tum huius, tum alterius cõnorum compositorum æquantium duo hemisphæroides, & basim prędictã erit æqualis Rhombo ex duobus ijsdẽ conis conflato, & ideo toti sphęroidi.

PROBL. XVIII. PROPOS XXXIII.

Frusto sphæroidis, vel sphæræ æqualem conum exhibere.

FRustum sphęroidis, vel sphęrę, quod datur in se concludit centrum, vel terminat in centrum, vel est totum extra centrum; & vt de singulis doceamus modum ea reducendi in conos æquales. Sit primo datum segmentum ABC, quod omninò sit extra centrum. Quoniam ex propos. 38. frustum sphæroidis ABC æquat cylindrum FNHG deducto frusto coni HTLG, si fiat ex pr. 29. huius frusto cylindri HTNLGF, vt in fig. pr. 38. Tr. 34. p. 2. remanentis prisma æquale habebimus intentũ.

Sit deinde data sectio sphæroidis, vel sphæræ, cuius portio terminet in centrum, vt ACDQ, quia hæc ex prop. 38. Tract. 34. æquatur cylindro NDPQ deducta portione coni, seu cono TLE, fiat huic cylindro ex par. 1. prop. 29. h. Conus æqualis, soliditati excauatæ deducto cono LTE, & obtinebimus intentum.

Quod si sit segmentum, quod centrũ comprehendat, vt CAIZ vtere eo tamquam si duo essent, quæ terminarent in centrum, nimirum ADCQ: & DZQY, & in duos conos transformentur, quæ deinde in vnum poterunt conglobari, ex doc. prop. 15. Tract. 34. p. 2. vel ex dicendis.

PROBL. XIX. PROPOS. XXXIV.

Hyperbolicum conoidem in conum æqualem transformare data diametro, & transuersa.

QVoniam ex prop. 30. tract. 34. Hyperbolicum conoides ad conum inscriptum eam consequatur proportionem, quam diameter cum diametro transuersa, & huius dimidio, nempe in illa fig. AE diameter cum AD transuersa, & AD transuersę dimidio, quod est DF ad diametrũ, & transuersam DE. Ideo si duæ mediæ proportionales iaciantur inter EF diametrum transuersam, & eius dimidium, vt vnam lineam EF, & inter DE diametrum. Conus similis cono BAC ex minori, & viciniori ipsi DE erectus erit ad conũ CAB, vt EF ad DE, quia sicuti FE ad DE habet proportionẽ triplicatã eius, quę est inuentę lineę proximiori ipsi DE ad ipsã DF; Sic quoque conus similis, similiterque positus vt BAC super illam erectus proximiorem ipsi DE dicit proportionem triplicatam ex Cor. prop. 14. Tract. 34. Vnde eidem cono BAC dicet eandem proportionem, quam EF ad DB, nempe quam Hyperbolicum conoides ad conum inscriptum, vnde erunt æqualia ex 9. lib. 5.

Idem quoque obtinebimus, si fiat prisma æquans annulum solidum, quod enascitur ablato cylindro eiusdem altitudinis, ac conoides hyperbolicum, à cono asymptotico ipsius conoidis, vt prop. 33. Tr. 34. collegimus.

PROBL. XX. PROPOS. XXXV.

Conoidi Parabolico conum æqualem exhibere.

SIt conus in fig. prop. 34. Tract. 34. p. 2. BAC, basisque circulus AC ex prop. 19. Tract. 30. fiat maior addita ei sui ipsius medietate; ita vt circulus inuentus se habeat ad basim coni BAC, vt 3. ad 2. & super hunc circulum erigatur conus eiusdem altitudinis, ac BAC paraboliço conoidi inscritus, eritque æqualis iste conus conoidi.

Proaatur. Quia conus inuentus ad conum inscriptum obtinet eam proportionem, quam basis illi substrata ad basim coni BAC inscripti: sed hęc est sesquialtera ea scilicet proportione gaudet, quã habet conoides parabolicum cono sibi inscripto: Ergo eidem cono inscripto eandem proportionem dicunt conus inuentus, & conoides parabolicum. ex 9. lib. 5. Quadere erunt æqualia.

* Hoc quoq; operi demadabitur faciendo conum prismaticum eiusdem basis, & altitudinis hunc enim conum parabolico corpori æquari ostendimus prop. 35. tract. 34.

COROLLARIVM.

POstea verò quod hæc corpora in conum transfusa sunt, poterunt in quolibet aliud transfundi, si iuxta præhabita conus ipse cui æquatur, transmutetur in aliam quamcumque solidam figuram.

PROBL. XXI. PROPOS. XXXVI.

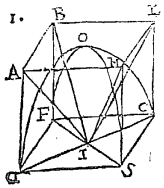
**Sphæram quadriformem, & corpora quæ ex ea nascuntur in corpora æqualia transfundere.*

SPhæræ quadriformi corpus æquale erit duplũ AHFS parallelepipedum circumscriptum ipsius Hemisphærio OFCDS: sed cui demptum fuerit triens ipsius, nẽpe gemina Pyramis BLAHI, quæ vt ibi ostenditur est triens BHFS parallelepipedi, & ideo geminata erit triens ipsius dupli: Hoc autem parallelepipedum debet habere eandem quadratam basim, & eandem altitudinem totius sphæræ quadriformis, vt sit duplum BHFS parallelepipedi ex prop. 20. p. 1. Tract. 34 Quare si fiat basis, quę obtineat duo trientes basis sphæræ quadriformis exhibitæ, & super hanc eleuetur parallelepipedum duplæ altitudinis IO: hoc erit ad parallelepipedum FS basi situm in duplam altitudinem IO vt 2. ad 3. Sed etiam duplum parallelepipedum BSFH vacuatum tamen dupla pyramide BAHLI est æquale sphęroidi quadriformi est ad idem duplum integrum, vt 2. ad 3. Ergo æquantur ex 9. lib. 5. & ideo sphæra quadriformis æquans parallelepipedũ duplum BHFS vacuum dupla pyramide ABLHI parallelepipedo, cuius basis ipsius ABHL duo trientes & eadem eleuatio sit, æquabitur.

Inuolucro verò sphæræ quadriformis inueniẽtur pyramis æqualis.

Si fiat super ABHL pyramis duplæ altitudinis, quam sit OI. Nam sicut

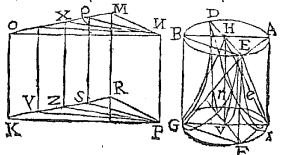
1.



L ABLHI pyramis æquat semi inuolucrum sphæræ; si sit pyramis duplę altitudinis, & eiusdem basis, sc. dupla pyramidis ABLHI æquabit totum inuolucrum ex pr. 51. tr. 34.

Vngulæ cylindricæ æqualis pyramis inuenietur, si fiat pyramis super basim eius quater maiorem, quam sit triangulum, in quo inexistit Vngula, & eiusdem altitudinis, ac eius semidiameter, vt constat ex prop. 49. Tract. 34. dimidiũ enim basis sphæræ quadriformis, cuius est octaua pars, est quater maius, quàm triangulum, cui inexistit vngula, quod est octaua pars basis eiusdem sphæræ:

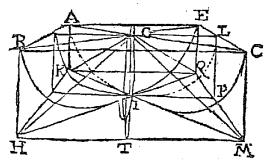
2.



Ideoque dato cylindro BEAGI; si ex basi ABGI eius sectione erigatur pyramis AEBGI erit æqualis vngulę DBGE: siquidem basis ABGI est quadrupla trianguli BHG, cui insistit vngula, & altitudo est EH diametri ED vngulę dimidium.

Lunulę verò pyramis æqualis inuenietur: Si fiat prisma KMOP, cuius basis NMO æquet circulum ADBE; Sc.ex prop.3. Tract.30. NM latus basis triangularis sit EH semidiameter, & MO æquet peripheriam ADBE: Altitudo verò NP sit eadem, ac GE cylindri: In hoc verò prismate sit MQ diametri duo trientes, ex quo fiat parallelogrammum NQRS æquale duobus trientibus plani secti per axem ABGI cylindri, & super ipsum erigatur prisma NMQRSP, quod erit æquale pyramidi ABEGI æquanti vngulam. Namque erit eiusdem altitudinis EH: vnde se habebit ad prisma ABEGFI, vt 2. ad 3. scilicet vt basis rectangulum MQRS ad basim ABGI ex propos.15. Tract.34. p.1. sed etiam pyramis ABEGI est ad idem prisma ABEGFI, vt 2. ad 3. cum sit super basim quadrangulam ex prop.22. Ergo equabūtur ex 9. lib.5.: Fiat rursùs prisma XQNPSZ eiusdem basis ZQ, vt est MS, & eiusdem altitudinis equabit duas pyramides AEBGI, & ideo duas vngulas DEAI, & EDBG. Quare residuum erit duabus Lunulis equale GEBNIF. Diuidatur itaque parallelogrammū XK medium, & fiat prisma IOKP, & erit æquale vnicę lunulę IGENGE.

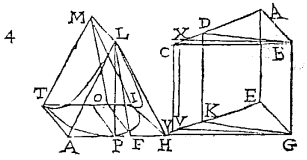
3



Inuolucro vngulę pyramis equalis erit. Si fiat pyramis super quartam partem PITM basis sphęrę quadriformis in altitudinem GI, vt constat ex prop.51. Cor.1. Tract.34. p.2. quę quarta pars est semirectanguli AHVI per axē actū ABFG cylindri.

At verò, si quis cupiat prismā equale inuolucro Lunulę, is transformet fig.2. NPYO prismatis equalis lunulę basim YPK obliquam in rectangulum, cuius latus sit radius RP, & YK aliud latus, & super hoc eleuet prisma ad altitudinem PN: Quod ex 15. tract 34 part 1. equabitur prismati YOPN lunule equali; describatque hoc prisma in prismatę

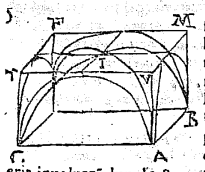
4



lunulam continēte MLHITA (poterit enim describi: siquidem basis habet latus PR, idem quod latus IH radio equale, & YK minori latere, quam HA, & altitudo eadem PQ, quæ prismatis PL;) Sit verò prisma inscriptum lunulę equale AFTOLM remanebit reliquum prisma HFTOLM equale inuolucro lunulę. Quod patet, abstulimus enim corpus equale lunulę: nempe totum prisma equat lunulam, & inuolucrum. Ergo ablato corpore FOTALM equal lunulę solùm ipsi inuolucro remanet corpus, & prisma equale HFIOLM.

Hinc quoque, & fornicis cruciformis TMCB quantitatem consequemur de quo prop. 53. Cor. 1. Tract.34. locutus sum; Constat enim hoc corpus ex quatuor prędictis corporibus lunulam inuoluentibus ex Cor. 1. & 2. prop. 52. componi. Et vt huius rei demus exemplū ITC erit inuolucrū lunulę, & quarta pars sphęrę quadriformis, cui iām docuimus inuenire equale prisma. Quare, si quatuor prismata equalia cōponatur obtinebimus torū fornicē TFVMBC, & ita dicas de pyramide flexis constante, vel meta concaua.

5



COROLLARIVM I.

HInc patet Vngulam cylindri, in quo est, si ponatur ipsius cylindri tota soliditas 22. esse 4. partes, & $\frac{4}{6}$ totius soliditatis, & duas vngulas esse 9. partes, & $\frac{3}{6}$, & ideo Lunulas esse, vt 11. & $\frac{4}{6}$ vtpote residua ex Vngulis, & singulas esse $5\frac{4}{6}$ totius cylindri. Ratio est; quia, si fig.2. latus MO ponatur 22. vt est peripheria respectu diametri ex pr.3. Tract.18. latus MQ erit totius MO $4\frac{4}{6}$ vtpote $\frac{2}{7}$ diametri, qui est 7. part. At vt MO ad MQ latera sic rectangula æquealta MK ad MS, quæ sunt bases, & vt bases ita æquealta prismata MOKNPR ad MQRSNP: ergo etiam prisma MOKRNP, ad MQRSNP erit, vt 22. ad $4\frac{4}{6}$. Ergo ex pr.19. Tract.17. prisma MOKRNP ad duo æqualia NMXZPR erit, vt 22. ad duplicatos numeros $9\frac{4}{6}$. Quare *conuertendo* NMOKRP totum ad reliquū XOKZPN, erit, vt 22. ad reliquum 11. & $\frac{4}{6}$: quare ad dimidiū YKONP erit, vt 22. ad dimidiū prędicti numeri sc.5. & $\frac{4}{6}$ proximè.

COROLLARIVM II.

COlligitur quoq; inuolucrum Vngulæ esse ex 28. partibus cylindrū ambientis parallelepipedi $4\frac{4}{6}$, & inuolucrum lunulæ ex ijs 28. solum æquare $\frac{4}{6}$. Fiat prisma BACGEY in fig 4. cuius basis BGY triāgularis æquet basim cylindrū amblentis parallelepipedi V. g. sit dubla basis THAI, quæ semicirculum basis cylindri ambit, eritque ex pr. 5. tract. 29. YE latus æquale quatuor lateribus AH: Quare prisma CABGEY erectum in eandem altitudinem parallelepipedi cylindrum, ambientis ipsi æquabitur. Igitur ponatur AC quatuor diametros æquans 28. partiū tribuendo singulis partes septē, & esse inscriptum prisma BADKEG fig. 2. eiusdem altitudinis AB situm super basim EADK rectangulam; Item eiusdem altitudinis EA, quæ est cylindri, quæ longitudine lateris AD habeat partes 22. sc. lineam æquantem peripheriam, ideſt diametros tres cum septima parte, remanebit prisma CDBKYG cuius basis DY habebit DC partium 6., & quia ADBKEG æquat cylindrum, reliquum DBCYKG equabit inuolucrum cylindri.

Inuolucrum autem vngulę est equale ex pr.51. Cor.1. pyramidi BHVGE fig.2. (siquidem rectangulum HBVG est quarta pars totius basis sphęrę quadriformis, quę vngulis octo constat, & ideo cum quodlibet rectangulū duas vngulas ferat EGDB, & EBNGD debebit quadruplicari; vt octo vngulas prestet) sed iam dictum est; quod pyramis ABGI æquat prisma NMQPRS, cuius basis habet latus MQ $4\frac{4}{7}$; ergo EHAVG dimidium pyramidis ABEIG habebit latus $2\frac{4}{6}$ manente in basi eadem altitudine, sicut & in prismate: Quare duo inuolucra equa-

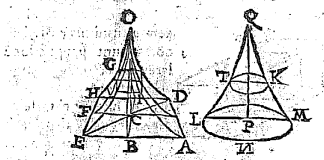
equalia erunt prismati DKRVGB fig.4. cuius latus DX basis æquealtę, ac pyramidis, sit $4\frac{4}{6}$. Remanebit ergo pro inuolucris duobus lunulę prisma XCVYGD, cuius basis erit XCVY, quę erit partis vnius, & $\frac{2}{7}$, quare singula inuolucra erunt $\frac{4}{6}$.

Igitur soliditas inuolucri vngulæ equans dimidium prismatis XCVYBG erit ad totam soliditatem prismatis BACEGY, vt $\frac{4}{6}$ ad 28. quia enim dimidium rectāgulum VXCY est ad rectangulum AEYC, vt dimidium XC ad AC, vtpote quod sint eiusdem altitudinis, erit etiam prismatis dimidium XCBYVG ad prisma BACEGY, vtpote eiusdem altitudinis, vt dimidium XC ad CA, scilicet, vt $\frac{2}{7}$ ad 28. vel 4. ad 168. vel vt 1. ad 42.

PROBL. XIV. PROPOS. XXXVII.

* *Pyramidem æqualē pyramidi flexis superficiebus constanti, & conum æqualem eiusdem generis cono constituere.*

SIt fig. prop.43. & detur pyramis flexis constans HOA, cui æqualis rectis superficiebus secta fadenda sit. Fiat rectangulum ex prop.30. Tract.29. quod se habeat ad rectangulum HA, vt 24. ad 42. vel 4. ad 7. & super illud erigatur pyramis, quę appelletur x equèeleuata, & hęc pyramis x æquabitur pyramidi flexis constanti HOA.



Probatur. Nam sit pyramis quadrata HOA flexis constans, hæc ex 53. tract. 34. quatuor inuolucris lunulæ æquabitur. Eritq; parallelepipedum, ex quo ablatis lunulis, & vngulis duabus, & harum inuolucris duobus formatur conclusum lateribus EB altitudine cylindri, BI, & dupla CO diametris eiusdem cylindri ab eo comprehensi ex Coroll. prop.53. Tract.34. & ECBO erit dimidiatæ lunulæ inuolucrum, cuius vertex E, & EFCO aliud dimidium, ex Cor.1. prop. 52. Ideoque si basis aliqua parallelepipedi V. g. quæ continetur lateribus EB, & BI in 42. partes diuidatur, parallelepipedum super $\frac{1}{4}\frac{1}{2}$ eleuatum in altitudinem duplæ CO, ex Cor. 2. præced. æquabit lunulæ inuolucrum totum FCEBO; & quadruplum $\frac{4}{4}\frac{2}{2}$ totam pyramidem flexis constantem, vtpote quatuor inuolucris lunularum confectam. Sed hoc parallelepipedum fiat Pyramis eiusdem eleuationis duplę CO, & occupabit triplum maioris basis ex prop.17. Tract.h. $\frac{1}{7}\frac{1}{7}$ rursùs diminuatur vsque ad dimidium eleuationis, quæ est CO, & erit ex prop.25. Tr.34. $\frac{1}{7}\frac{1}{7}$, vel $\frac{4}{7}$, nempe fiet duplæ basis, ideoque pyramis x æquans pyramidem flexis constantem erit situata super $\frac{4}{7}$ basis, & eleuata vsque ad eleuationem eandem CO.

Si verò quis cupiat extruere conum æqualem cono superficie curua constanti LQMN fiat circulus ex 19. Tr.30. qui sit habeat ad circulum LNM, vt 4. ad 7. qui dicatur z, & super illum erigatur conus z eleuatus eadē altitudine PQ, & iste conus z æquabitur cono LQMN.

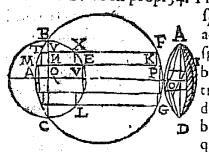
Probatur. Nam Pyramis HOA est ad conum LQMN, quæ flexis constant superficiebus ex prop. 53. Tract.34. vt basis AH rectangulum ad basim LMN circulum, vel ellipsim. Sed vt rectangulum HA ad LHM circulum, vel ellipsim, ita est rectanguli $\frac{4}{7}$ ad circuli, vel ellipsis $\frac{4}{7}$, & ita est pyramis super $\frac{4}{7}$ basis HA erecta ad conum super $\frac{4}{7}$ circuli LNM erectum ad eandem eleuationem. Ergo ex 16.l.5. vt pyramis HOA ad conum LQMN, flexis constantia, sic pyramis super $\frac{4}{7}$ basis HA ad pyramidē super $\frac{4}{7}$ circuli LNM: sed pyramides ex basi HOA flexis constans, & pyramis ex eius $\frac{4}{7}$ æquantur. Ergo etiam conus LQMN flexis constans, & conus ex $\frac{4}{7}$ circuli LNM equabuntur.

PROBL. XV. PROPOS. XXVIII.

* *Metæ quadriformi æqualem ponere pyramidem, & etiam metæ circulari æqualem conum.*

SVper quadruplum rectangulum basis metæ adificetur pyramis eiusdem altitudinis; ac metæ semlaxis QB. Et hanc pyramidem dico esse æqualem metæ quadriformi. Si verò quis cupiat metam circularem, super circulum basim metæ quadruplum ex pr.19. Tract.30. p.2. erigatur ad prędictā eleuationem conus, & erit, quod expetitur operi demandatum.

Prob. Nam ex prop.54. Tract.34. p.2. ita est sphęra quadriformis ad metam, vt basis sphærę quadratum ad basim metæ quadratum, & ita bases quadruplo, quam sphęræ basis maior ad basim quadruplo maiorem, quàm basis metæ; & ita ex pr.28. Tr.34. p.2. pyramis ad eleuationem QB super basim quadruplam, quam sphærę ad pyramidem super basim quadruplam, quam basis metæ ad eandem eleuationem BQ. Ideo ex 16. lib.5. vt est sphæra ad metam, ita pyramis super basim quadruplam basis sphæræ ad pyramidem super basim quadruplam basis metæ in eandem altitudinem euectas: Sed illa super basim quadruplam sphęrę æquat sphęram ex pr.48. Cor. Tr.34. Ergo etiam ex prop.12. lib.5. pyramis hęc quadruplæ basis ad eleuationem QB æquabit metam.



Eodem argumento idem ostendes de cono, quod æquetur metæ circulari.

Idem concludes: si sphæra quadriformis, & meta habeant bases similes. Nam ob parallelissimum omnia plana secantia erunt similia. Vnde ex prop.28. Tr.34 p.2. idem concludes de meta, & sphæra quadriformi. Et ita etiam si sint ellipticæ bases; sed similes, quæ scilicet possint circumscribi rectangulis similibus: nam cum omnia rectangula parallela basi sint similia; etiam omnes ellipses ex propos.27. Tract.30. similes erunt, & ideo ex 28. Tract.34. ipsa corpora erunt in proportione basis ad basim.

PROBL. XVI. PROPOS. XXXIX.

* *Corporibus spiralibus cylindros æquales exhibere, & superficiebus ipsorum normalibus superficiei æquales.*

NAm sit corpus spirale primi generis de quo prop.57. locuti sumus à circulo in altitudinem spiraliter ductum. Cylindri, in quo est meditas ipsum æquabit, sicut, & cuiuscumque eius partis soliditatem sectoris cylindrici solidi meditas

adequabit. Patet ex eadē pr.57.Tr.34.p.2. cum ibi ostendatur corpus tale spirale esse dimidium cylindri comprehendentis.

Si verò sit corpus spirale secundi generis à basi spirali erectum æquealtum. Diuidetur altitudo cylindri cōprehēdentis in tres partes,& tertia pars æquabitur corpori spirali super spiralē basem in æqualē eleuationē producti, vt pr.58. ostendimus.

Si verò sint corpora spiralia secundę spiræ, cum sint, vt bases spirales ad circulos includentes, & illę sint, vt 7. ad 12. si diuidatur altitudo cylindri in 12. partes ex illis assumantur 7. ille cylindrus æquabit corpus spirale.Et ita dicas de alijs tertijs, & quartis spiris,diuisus enim cylindrus secundùm eam proportionem, quam habet basis ad circulum, cylindrum æqualem spirali corpori exhibebit.

Hinc superficies globosa super basim spiralem normaliter erecta corporis spiralis super spiram inixi, & æqualis eleuationis patebit. Siquidem superficies sectorum solidorum circumscriptæ deficient latitudine tantùm: quæ ad sectorum æqualium superficies inuicem æquales se habebūt, vt 0. ad 12 ex pr.12.Tr.27.Quare,& vsitato argumento talis proportionis ipsa spiralis superficies globosa ostendi poterit ad superficiem cylindri, nempe, quod sit, vt 6. ad 12.

Si vero sit corpus spirale tertij generis à basi spirali in spiralem eleuationem erecti; Diuidatur altitudo cylindri comprehendentis in 18. partes, & quinque partes æquabuntur prædicto corpori. Nam tale corpus basis, & eleuationis spiralis est ad corpus spiralis basis, sed æqualis eleuationis, vt 5. ad 6. ex prop.59.Tract.34. at verò spirale corpus ad cylindrum ambientem est, vt 6. ad 18. vel vt 1. ad 3. Ergo ex 23. lib.5. spirale corpus quoad basim, & altitudinem erit ad cylindrum comprehendentem, vt 5. ad 18. sed etiam quinque partes ex 18. cylindri eiusdem est ad ipsum, vt 5. ad 18. Ergo æquantur spirale corpus altitudine,& basi, & quinque partes cylindri comprehendentis ex prop. 9. lib.5. Euclidis.

Si verò sit corpus quarti generis basi spirali, decrescendo eleuatum: tunc diuidetur cylindrus comprehendens in partes 18.& vna pars erit equalis tali corpori.

Probatur. Quia corpus spirale decrescens altitudine, sed crescens basi est ad corpus spiralis basis tantùm, vt 1. ad 6. sed hoc corpus est ad cylindrū comprehendentē, vt 6. ad 18. ergo etiam corpus spirale decrescens altitudine dum basi crescit,erit ad cylindrum comprehendentē vt 1 ad 18. Vnde $\frac{1}{6}$ cylindri ipsius IIIi corpori æquabitur.

Si verò sint secunda spiralia corpora basi, & altitudine decrescentia iam ostendimus se habere ad corpus spiralis basis,sed eiusdem altitudinis 17.ad 42. vel 119.ad 294.sed corpus spiralis basis,& eiusdē altitudinis se habet ex 57. Tract.30. vt 7. ad 12. ideſt, vt 294. ad 504. ideoque ex *æquo* spirale corpus deficiens etiam altitudine se habebit ad cylindrum comprehendentem; vt 119. ad 504. ideo si diuidas cylindrum comprehendentē in partes 504. & ex eis adsumas 129. ille cylindrus partiū 119. ęquabitur corpori in spira siti altitudine deficiētis.

Hinc est superficiem flexam corporis spiralis facilè posse inueniri. Nam illi imaginentur circumscriptæ superficies latæ, vt ipsi arcus deficientes,quę deficiant altitudine arithmeticè,istę erunt ad eiusdem latitudinis superficies corporis basi: sed nō altitudine deficientis, vt 4. ad 6. ex pr.14. Tract.27. par.3. contextu; ideoque toties replicato argumento poterit argui, quod superficies ipsa spiralis flexa deficiens altitudine se habeat ad spiralem altitudine non deficientem, sed quæ sint basi spirali inixæ, vt 4. ad 6. At supra spiralis superficies non deficiens est ad cylindri superficiem,vt 6. ad 12. nempe vt ipsa spira ad circulum; Ergo ex *æquo* ad superficiem cylindricam spiralis superficies altitudine deficiens, & spiralis basis erit, vt 4. ad 12.

EXPENSIO III.

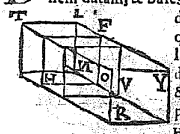
De corporum proportionali diuisione.

VIsa transformatione corporum in alia corpora diuersæ spetiei, modo de eorum diuisione proportionali agendum est non obseruata eadē figura, sed tantū per plana parallela vni lateri; Infra autem agemus de eodem augmento, seu diminutione: sed ea in eadem figura conseruando.

PROBL. I. PROPOS. XL.

Datum cubum, vel parallelepipedum secundùm proportionem datam secare.

DIuidatur latus YL in F secundùm proportionem datam, & bases NH, & OR, vtpote eiusdem altitudinis ex 1. l.6. obtinebunt proportionē laterum sectorum secundùm datam rationem,sed, & hanc habent parallelepipeda equalis altitudinis HL, & FR, vtpote quod eā obtineant proportionem, quæ basium ex prop. 8. Tract.34. p.1. Ergo, & ipsa parallelepipeda secta sunt secundum datam rationem.



COROLLARIVM.

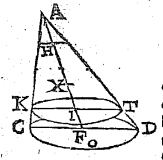
EAdem dicas de prismate, & de cylindro, si altitudo eorum in datas rationes secetur,& per sectionem agatur planum basibus in prismate triangulis in cylindro circulis parallelum. Nam eadem ratione secabuntur, tum prisma, tum cylindrus in datam rationem.

PROBL. II. PROPOS. XLI.

Cono, vel Pyramidi abscindere partem datam.

*SIt ADOC Pyramis, vel conus à quo oporteat abscindere partem versùs acumen, ad quam se habeat residuum, vt 3. ad 1. Diuidatur altitudo coni AF in H tali modo, vt AF sit ad AH, vt 4. ad 1. eritque *diuidendo* HF ad HA, vt 3. ad 1. Interq; AH; & AF duæ medię proportionales AX,& AI ex 3.Tr. 15. inueniantur, quarum maior sit AI, & per punctum I planum parallelum basi coni abscindet conum TAK simile cono ODAC: Erit itaque conus DACO ad conum TAK cum ex pr.7.h. sint similes,vt FA prima ad HA quartam proportionalem nempe ex effect. vt 4. ad 1. Cum ergo sit conus DOCA ad conum TAK,vt 4. ad 1, erit etiam *diuidendo* TDCKG residuum ablato cono TAK ad ipsum conum TAK, vt 4. ad 1. ablato 1. scilicet 3. ad ipsum 1. quæ erat proportio requisita secundùm quam conus debebat diuidi.

Et

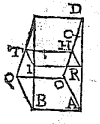


Et ita diuidetur etiam si pyramis, vel conus sit obliquus, & super Ellipsim. Nam semper conus, & pyramis quæcumque parallelo plano basi abscisa similis erit toti. Omnes enim bases,quæ ducantur basi parallelæ sint similes. Ex2. Tract.24. quia sunt circuli, & ex 1. & 4. Tract. 35. si sint ellipses. Triangula etiam quæcumq; per axem similia sunt vt ex prop.2. & 4. lib.6. cum sint anguli ob parallelas in cono KFAT,& CAOD æquales, & latera proportionalia. Vnde etiam superficies conicæ abscisi TAK, & totius ADC similes erunt cum eosdem angulos vbique,& circumquaque cùm basi efficiant, vt ex 7. h. Cor. colligere licet: cum ergo coni abscisus TAK,& totus ADC contineantur superficiebus similibus,similes erunt. Quod & extendes ad corpora coniformia rectis in centrum tendentibus ad modum coni constantia,vt cit.Cor. patet.

PROBL. IV. PROPOS. XLII.

** Prisma triangulare parallelo ductu basi quadratæ in partes datas secare.*

SIt prisma ABQOD per ductum parallelum basi quadratæ secandum, ideo pars erit in acutum D desinens RTD, habebunt verò æqualem altitudinem IR totī ABQOD,& pars RTD,basimq; similem AOD, & RHD ob parallelum planum RHTI,& parallelam sectionem RH, quare ex 2. lib.6. erit AD ad RD, vt OD ad HD, & anguli æquales ex 2. lib.6. DRH, DAO,& DHR,DOA. Vnde ex def.erūt similes. Ideoque obtinebunt proportionem laterum duplicatam, eritque ADO ad DHR in proportione duplicata DO ad DH. Et quia Prismata super eas erecta obtinent eandem basium proportionem, erit itaq; prisma ABDO ad prisma RTD in duplicata ratione lateris DO ad DH. Sit ergo data proportio, secundùm quam Prisma abscindendum est 4.ad 1. diuidaturque DO in quatuor partes, interque prima partē DC, & totā quatuor partiū inueniatur media proportionalis DH; agaturque per DH planum RHT,& erit factū, quod imperatum fuerat.

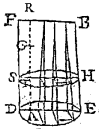


Probatur. Nam DO ad DC habet proportionem duplicatam DO, & DH; ideoque ex 21.lib.6. Cor. basis DOA ad basim DHR habebit proportionem, quam DO ad DC: sed Prisma QBOAD habet eandem proportionem, quam basis ad basim ad prisma partiale TIHRD: Ergo prisma ABOQD erit ad prisma TIHRD vt DO ad DC.

THEOR. I. PROPOS. XLIII.

** Conum prismaticum iuxta datam proportionem per parallelum planum basi resecare.*

DEbeat resecari conus prismaticus BFED in partes iuxta datam proportionem RA ad GR; ita vt sit totus ad suam partem, nempe, vt 3. ad 1. Inueniatur media proportionalis inter RA, & GR, & sit TR in RA normali ad basim ED, perque T agatur planum HS, parallelum basi coni DE. Nam totus conus BEFD se habebit ad conum HSBF, vt AR ad RG, nempe, vt 3. ad 1. vnde compars EHSD se habebit ad compartem, vt 2. ad 1.

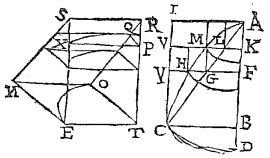


Probatur. Nam omnia prismata in cono FBED inscriptibilia erunt ex præc, tali modo truncata, vt totum singulorum sit ad suam partem, vt 3. ad 1. cumque hec omni possibili multiplicatione aucta, & multiplicata æquent ipsum conum. Etiam ipse conus prismaticus EBFD erit ad suam partem HSBF, vt 3. ad 1.

PROBL. III. PROPOS. XLIV.

** Conoidem parabolicum circulare, vel quadriforme in partes destinatas parallelo ductu basi secare.*

CVm conoides parabolicum quadriforme æquetur prismati eiusdem basis, quod prisma sit eleuatum ad eandem altitudinem ac conoides, conoides quoque parabolicum circulare ex prop. 35. Tract.34. par.2. sit æquale cono prismatico, cuius basis circularis sit æqualis circulari basi conoidis,& altitudo altitudini, singulę quoque partes prismatis singulis partibus conoidis quadriformis parallelo basi plano detruncatis,& sic partes parallelo ductu basi pariter detruncatę conoidis circularis,& coni prismatici æquentur. Hinc est, quod dato V.g. conoide circulari CMAED, si fiat conus prismaticus OETSR eiusdem basis,& altitudinis,& diuidatur iuxta præcedentē plano XQP, & ad eandē eleuationem fiat diuisio MK in conoide parabolico AMCED parallela basi CBD, quod conoides AMCBD erit diuisum iuxta proportionem datam.



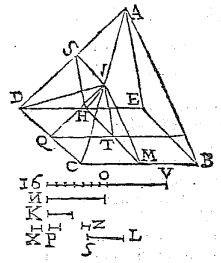
Probatur RSPQX portiq coni prismati est ad RSOET totum in proportione data, sed ex dictis MAK portio conoidis æquat portionem coni prismatici RSPQX, & conoides totum AMCBD totum prisma RSOET, ergo etiam MAK portio conoidis erit ad totum AMCBD in proportione data.

PROBL. V. PROP. XLV.

**Pyramidem diuidere quadrangulam proximè plano superficiei lateralī parallelo secundùm datam rationem.*

HÆc diuisio difficultatem specialem obtinet, eo quia diuisio non fiat in partes similes toti: Sit ergo Pyramis ABCDE diuidenda per ductum HI parallelum superficiei BEA. Iam euidens est partem DSHMC, non esse similem pyramidi: Nam constabit ex IMTCQ pyramide simili toti,& ex prismate

mate DQISHI eiusdem altitudinis ac pyramis NQI, quod diuisum plano IHD constituet pyramidem HQTDI eiusdem altitudinis, quę pyramides inuicem se habebunt ex prop.24.Tr.34.p.1.vt bases MQ ad HQ; bases autem se habent inuicem ex prop. 1. lib 6. cùm sint eiusdem altitudinis CM vt latera CQ ad QD ideſt CM ad MB ob basium similitudinem,vt colligitur ex prop.25.l.6. Ideoque si addatur ei pyramidi DSIH quantitas illa DSHI,qua excedit prisma ID ipsam pyramidem DHIQT, quæ est (cum sit pyramis quadrata dupla triangularis) $\frac{1}{3}$ ex prop.24.Tract.34. ideoque MQI pyramis habebit proportionem ad prisma STID, quam CQ ad QD, vel CM ad MB, & ad $\frac{1}{3}$ ampliùs ex propoſ.29. Tract.17. V.g. si sit pyramis ad pyramidem, vt 2. ad 3. erit pyramidis proportio ad prisma, vt 2. ad $4\frac{1}{3}$; si sit, vt 1. ad 2. erit ad prisma, vt 2. ad 3. & cęt.



Sit ergo data ratio,iuxta quam oporteat piramidem BACDE diuidere plano alicui planitiei lateralium parallelo, V.g. planitiei ipsi BEA plano parallelo SIHM, ita vt pars maior ABE SIHM sit 11. minor sit 5. Addantur 5. & 11. & sint 16. nempe ratio 16. ad 5. totius pyramidis ad partem abscindendam. Accipiatur deinde linea V 16. æqualis lineę BC, quæ ponatur 16. & L sit 5. Eligatur deinde fortuitò linea minor, quam L, quæcumque P, interque P, & 16. duę mediæ proportionales inueniantur N,& K,ex prop.3. Tract. 15. Sitque N immediata, & secunda proportionalis post 16. V. Fiat deinde ex prop.15.lib.6. , N ad excessum OV lineę V 16. Sic P ad aliud, & inueniatur X, cui deinde addantur dimidium Z ipsius X, & videatur, si omnes simul P, X, Z tamquam vna æquent lineam L 5. si æquant benè res se habet, si non æquāt; sed superent linea P accipienda erit minor adhuc,& iteranda operatio, donec tres P, X, Z æquent L 5. saltem proximè, & tunc dico, quod si longitudo N transferatur in BC, & sit MC, & per punctum M agatur planum MS IH parallelum plano BEA, hoc planum abscindere portionem MSID; nempe pyramidem, & prisma tale, quod se habeat ad pyramidem totam BACDE, vt 5. ad 16. & compartem, 5. ad 11.

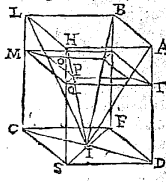
* Probatur. Pyramis tota BACDE est ad suam partem pyramidem similem MIQTC in proportione homologorum laterum triplicata BC ad MC ex pr. 23.Tract.34.prœced. sed proportio triplicata BC ad MC est lineæ 16. V æqualis ex hypothesi ipsi BC ad P siquidem est in triplicata 16. V ad N ex effectione. Ergo pyramis maior BACDE ad partem suam pyramidem sibi similem est, vt 16. V, vel BC ad P. Est autem P ad X, vt N ad OV, sc. MC ad MB ex effectione, vel CQ ad QD ex propoſ 25. lib. 6. ideſt ex dictis, vt MIQ pyramis ad pyramidem TID quæ est $\frac{1}{3}$ prismatis, & ideo ad prisma, vt P ad X, & ad Z dimidium ipsius sicut pyramis MIQ est ad pyramidem TID,& ad residuum ex prismate, quod æquat dimidium pyramidis. Itaque DAB tota pyramis est ad pyramidem QIN partem, vt V 16. ad P. Pyramis verò QIM pars est ad compartem QHI, vt QC ad QD, ideoque, vt CM ad MB, & vt P ad X; ergo ex *æquo* DAB tota pyramis erit ad pyramidem partem QHI, vt 16. V ad X, ideoque *inuertendo* X ad 16. V, vt QIH pyramis compars ad totam pyramidem EDA, itaque QHI ad DBA est, vt X ad 16. V, & QMI pyramis est ad pyramidem eandem DBA, vt P ad 16 V. Ergo ex 25. propoſ. l.5. prima quantitas QHI cum quinta QMI pyramides partiales erit ad secundam DAB pyramidem totam, vt tertia X cum sexta P ad quartam 16. V. Rursus pyramis QIM ad QHI, est vt P ad X; ergo *componendo* QMI cum QHI ad QHI, vt P cum X ad X,& QI ad DHIS est, vt X ad Z, quare ex *æquo* pyramides QMI,& QHI ad DHSI pyramidem erunt P, & X ad Z.

Sunt autem duæ pyramides DIM ad totam DAB, vt X, P ad 16.V, ideo *conuertendo* DAB erit ad DIM, vt 16. V ad X, & P, at DIM duæ pyramides sunt ad pyramidem DSIH, vt X,P ad Z, ergo ex *æquo* tota DAB ad DISH pyramidem partialem erit,vt 16. V ad Z, ideo *inuertendo* pyramis DISH ad totū DAB, vt Z ad 16. V. At DIM duæ pyramides sunt ad totam DAB, vt X, P ad V 16. ergo ex 25. l.6. DSIH cum DIM prima cum quinta erunt ad secundam DAB totam pyramidem, vt P, X tertia cum Z sexta ad quartam 16. V, sed hæ tres P, X, Z æquant 5 L, ergo tres pyramides DHSI,QHI,& QMI, ideſt tota quantitas DMSI erit ad totam pyramidem, vt 5 L ad 16. V, ideſt, vt 5. ad 16. quare *diuidendo* erit pars DSIM ad compartem SIMHEBA, vt 5. ad 11. vel *conuertendo* 5. ad 11. vt SIMHEBA ad DSIM.

COROLLARIVM I.

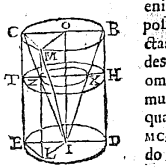
* HInc colligas quomodo cubum vacuatum pyramide proximè, & tentando diuidas per planum basi parallelum, cui incidit vertex pyramidis in partes desideratas.

V.g. sit cubus ABL HDC, cui deficit pyramis ABLHI. Iam vides constare quatuor pyramidibus æqualibus, vt LHSCI, vel AHDIS.& cæt.quæ per planum TM parallelum lateri plano SIC diuidendæ sunt, singulę verò plano MOPQ alijs partialibus æquale. Cum ergo sit eadem proportio partium quæ multiplicium ex propoſ.18.lib.5. si aliqua ex illis diuidatur E. g. LHISC iuxta precedentem doctrinam diuidendo latus LC in M, & per punctum M agendo planum TM omnes quatuor æquales, similesque pyramides sub eadem proportione erunt diuisæ.



COROLLARIVM II.

* ITem colligitur quomodo diuidatur cylindrus BCDELM vacuatus cono BIMC per planū HT: Cū enim talis cylindrus BCDLE possit diuidi per planities ductas ad centrum I in pyramides equales,& similes inuicem omni possibili numerositate multiplicatas, vt est MCLEI quadrangularium basium LEMC, sequitur,vt quælibet modo prædicto plano HT diuidi possit

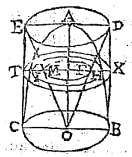


possit secundum rationem exoptatam: Quare, & omnes erunt similiter diuisæ per HT, cum pars in qualibet æqualis alteri pyramidis parti debeat habere eandem rationem ad totum æquale alteri toti ex 17.lib.5. Elem. Quare etiam totus cylindrus BCDLE vacuus cono BIC similiter erit diuisus.

PROBL. VI. PROPOS. XLVI.

* *Sphæram, sphæroidemque etiam si quadriforme proximè saltem in partes destinatas secare.*

SIt semisphæra, vel semisphæroides BAFC, & illi circumscriptus sit cylindrus DEBFC, cui fuerit ablatus conus DOE. Iam certum est ex prop. 39.tract.34.part. 2. totum semisphæroidem, vel hemisphęrium æquari cylindro DEBC, cui ablatus sit conus EOD; singulasq; partes hæmisphęrij HAI, vel hemisphęroidis plano XT detruncatas V.g. IAH æquari singulis eiusdē cylindri segmentis vacuatis segmentis ijsdem coni, scilicet portionibus MTEYXD. Si ergo à cylindro DECB auferatur pars DT secundum proportionem datam agendo planū XT per T punctum parallelū basi CFB ex prop. 45.prœc. obtinebimus partes æquales istis cylindricis partibus hæmisphæræ, vel hemisphæroidis. Quare dicent ad inuicem eandem proportionem, & ad totum, eritque MTEYXD cylindri concaui portio ad EDBC cylindrum, vel ad compartem BXFO MTCS quàm æqualis portio hemisphæræ, vel hæmisphæroidis HAI ad totum hemisphęrium, vel hemisphęroidem CAB æqualem toti cylindro EDCFBO, vel ad compartem IHBC æqualem comparti cylindri excauati TMCOYXB.



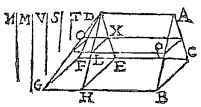
Eadem erit ostensio de hemisphęra, vt hemisphęroide quadriformi, cum idem de ea ostensum sit propoſ.50. Tract. anteced.

THEOR. II. PROP. XLVII.

* *Prisma simul, & Pyramidem idem corpus efficientia in partes datas tentando abscindere parallelo ductu ipsi basi.*

SIt ACBDHE prisma,& pyramis DHEFG æquealta. ipsiusque protensis superficiebus AG, AF, BF operta, quę duo corpora, vtpote vnum conficientia parallelo ductu OQ basi in partes datas sint secanda: Hoc quidem potest fieri; sed tentando ob diuersam proportionem, quam toti dicunt pyramidis frustum, & frustum prismatis; hoc enim dicit ad suum totum laterum proportionem duplicatam; Pyramis verò partialis ad totam triplicatam. Sit ergo data proportio M ad N, iuxta quam ita corpus totum ADBE sit ad suam partem ADOQ, vt M ad N constituendum.

Assumatur aliqua minor,quàm N,& sit T,interq; T, & M duæ mediæ interponantur V, & S, & videatur an S cum linea T; faciāt quantitatem æqualem datæ quantitati N? si facit inuentum erit, quod queritur ad sectionem efficiendam;at si non æqualis,accipiatur adhuc alia, vel minor, vel maior, prout deficere ab N,vel excrescere super N inuenta fuerit,donec sit S, & T,saltem proximè ipsi N æqualis. Fiat deinde ex prop.15.l.6.vt M ad V, sic AB,ad AQ, vel DH æqualis ad LD, & per Q ducatur planum basi æquidistans, & detruncabitur ADQO corpus, cui erit in proportione totum ADBE, vt M ad N.



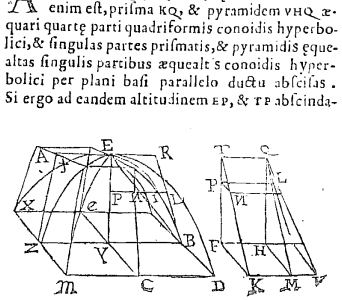
Modo ostendo corpus AF esse sectum iuxta proportionem datam. Nam prisma ADBCHE proportione duplicata lateris AB ad latus AQ respicit prisma AQDLX; sed M ad S est proportio duplicata M ad V, & M ad V est eadem ex effectione proportionis lateris AB ad AQ. Ergo prisma ADBHC, habet eam proportionem ad prisma ADQLX, quam M ad S.

Deinde pyramis DHGFE obtinet proportionem triplicatam lateris HD ad latus LD ad pyramidem DLXO: sed M ad T obtinet proportionem triplicatam DH ad DL eandem, quæ AB ad AQ: Ergo pyramis DHGFE ad pyramidem LODX obtinet proportionem M lineæ ad T. Quadere si coniungantur simul ex 19. prop. Tract 17. prisma totum, & pyramis totalis DHF,& fiat totū ADBF,habebūt ad alterā ex partibus factis V.g.prisma partiale ALXDQ eandem proprortionem, & *conuertendo* ALXDQ ad AEDB prisma, & DEG pyramidem eandem proportionem, quam dicebat priùs ad illas separatas quantitates: Quare cum iam ADFBCG sit quid totum ad illud DQALX prisma, & DLO pyramidem partiales quātitates vnitas dicent eandem proportionem ex prop.19.Tract.27. quam priùs diſiunctę dicebant sc. eam,quam M ad S ad T; scilicet eam, quæ M ad N, quę æquat quantitates S, & T simul sumptas.

THEOR. III. PROPOS. XLVIII.

* *A conoide Hyperbolico partem abscindere experiendo iuxta proportionem datam.*

ADhibeatur fig.prop.56.prœc.Tract.Dictum enim est,prisma KQ, & pyramidem VHQ æquari quartę parti quadriformis conoidis hyperbolici,& singulas partes prismatis,& pyramidis æquealtas singulis partibus æqualē S conoidis hyperbolici per plani basi parallelo ductu abscisas. Si ergo ad eandem altitudinem EP, & TP abscinda-



tur

tur portio IPE à conoide hyperbolico æquabitur parti prismatis,& pyramidis æquealtę. Æqualium verò est eadem proportio. Quadere ita erit QTFV corpus pyramide, prismateq; constans ad partem suam NTL prismate minori pariter constans,atque pyramide, ideſt in proportione duplicata quoad prisma,triplicataque quoad pyramidem lateris FT, vel YE æqualis altitudo ad TP, vel EP æqualia segmenta altitudinum, ac conoides hyperbolicum BEY ad sui partem PIE. Quare diuisa altitudine VE iuxta præc. in P dabit eodem modo partem in data proportione. Cumq; eadem proportio existat vnius partis ad vnam,quam quatuor ad quatuor patet,& totum conoidem extenso plano eodem pacto secari, cuius quarta pars tali modo secatur.

COROLLARIVM.

*IDem autē asseres de Conoide hyperbolico circulari ex propos. enim 33.Tract.34. æquatur frusto coni, cui demptus fuerit cylindrus æquealtus, & singulæ eius conoidis partes singulis partibus huius frusti per planum basi parallelū in æquali eleuatione abscisis: Fruſtum verò tale conicum æquatur frusto pyramidum, prismatumque ex contex. prop.13.Tract.34.p.1. æqualem basim, & æqualem eleuationem obtinentium, ac fruſtum coni cylindro vacui, & singulæ illius partes æquealtæ singulis partibus illius similiter bases parallelas basi habentes, vt faciliter ab ea propositione deduci potest, cum probauerimus in ea omnes bases basi parallelas in frusto pyramidis circulo coni ad eandem eleuationem secanti æquari: Quadere eadem praxi vtemur, cum etiam in conoide hyperbolico circulari partes æquentur partibus frusti pyramidum, prismatumque, ac in quadriformi: sufficit inuisse.

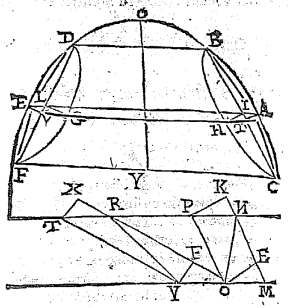
PROBL. VII. PROPOS. XLIX.

A Conoide hyperbolico, seu parabolico, seu sphæroide imperatam partem auferre à dato puncto alteri in eodem corpore æqualem.

*SIt DGFE fruſtum conoidis parabolici,vel hyperbolici, seu etiam sphæroidis FDOBC. Sitque detruncandum à dato puncto B, aliud fruſtum huic æquale.

Secetur conoides, seu sphæroides plano BD, quod datum punctum B connectat cum extremo diametri ellipsis secantis DGF,& ducatur planū per centum L ellipsis DGF; quod sit EGHA parallelū ipsi plano DB. Agaturque aliud planum CF huic pariter parallelum per aliud diametri extremum F,eruntque tria plana æquali interuallo dissita, cùm sint æqualia DL,& LF,vtpote semiaxes. Deinde ducatur per punctum B, & per axem OY planum FDOBC, quod exprimet sectionem ex generatione, & huic plano per punctum B, & C, vbi se secat cum plano DE, & FC in punctis B, & C in superficie conoidis ducatur planum BHC plano FDOBC normale. Nam hoc erit Ellipsis ex prop.10. 14 18. Tract.25. in quocumque corpore ex sectionibus conicis deducto, & exhibebit BHCA æquale segmento DGFE.

Probatur Progr. 1. Quoniam in segmento CAHB, si quęcumque ducantur plana parallela basi similes ellipses sunt, ac ipsa basis ex 11. 15. & Cor. prop 18. Tract. 25. Secundò segmentą hæc FGED, & CHAE bases consequuntur altitudinibus reciprocè proportionales. Ergo hic verificabitur prop.29. part.2. Tract. præced. 34. & inuicem hæc segmenta erunt æqualia. Quod autem bases in istis segmentis altitudinibus reciprocè sint proportionales, sic ostenditur.



Trlangulum BAC, & DEF, quæ inscribuntur in segmentis sunt æqualia. Ergo, bases obtinebunt altitudinibus reciprocè proportionales, vt postea ostendam. Altitudo autem AT ad altitudinem VE (normales sc. super FD, BC bases ab A,& E cadentes,)est vt basis LD ad basim IB;sed basis LD ad basim IB planorum triangulorum DFE,&BAC est, vt basis DGF segmentorum solidorum ad basim BHC, vt dicam; Ergo hæc segmenta obtinent bases DGF ad BHC, vt altitudo AT ad altitudinem EV reciprocè. Quare segmenta DEFG, & BACH solida habentia omnes bases axi parallelas similes erunt æqualia ex præc. prop.39. Tract 34.

Prog. 2. Duo itaque remanent ostendenda triangula æqualia obstinere bases altitudinibus reciprocè proportionales, & quod sit basis LD linea ad lineam BI, vt basis plana DGF ad basim planam BHC.

Probatur illud quod est primo propositum de triangulis.

Sint triangula in figura seorsim exhibita MON, & ORY æqualis altitudinis, vtpote inter parallelas TN, & YM, & basis OY, & OM, ideo inuicem æqualia ex pr.40.l.1.Cor. Ducantur parallelæ TY,& OP vni laterum OR, & alteri MK. Parallelogramma TRYO, & PONM sunt dupla triangulorum suorum super quorum bases sunt YOR, & OMN, & ideo inuicem æqualia: Productis deinde OR in X, & MN in K, & ductis normalibus TX,YF, necnon,& alio triangulo PK, & OB erunt rectangulū TYXF æquale parallelogrammo YTRO, & PKOE parallelogrammo PNOM ex prop.40.lib.1. cùm sint inter easdem parallelas TY, & XO, vel PO, MK, & super eandem basim TY, & PO. Quia ergo hæc rectangula TXYF, & POEK obtinent angulos rectos, & ideo æquales,& sunt inuicē æqualia,cum sint æqualia æqualibus parallelogrammis ex 10. lib.6. propter hoc habebunt latera reciprocè proportionalia. Ideoque TY erit ad PO, vt OE ad FY, sed hæc latera PO,& TI æquant BO,& NM ex prop.33.l.1,bases,& altitudines triangulorum BYO, & NOM sunt YE,& OE, ergo reciprocabuntur, & erit TY, vel BO basis adPO, vel NM basim,vt altitudo OE huius ad altitudinem YE alterius.

Progress. 3. Remanet deinde ostendendum, bases nempe Ellipses DGF,& BHC dicere eandem proportionem, quam DL linea basis trianguli ad basim IB alterius. Ex pr.21.32.43.Tr.30. ostensę sunt æquales AI,& LE,& ex pr.10.14.18.tr.25. planum EGHA trāsiens per axē EA ostensum est ellipsis: Quare ex 6. tr.24. erit rectangulum AI, & IE ad rectangulum AL,& LE; vt quadratum HI ad quadratū LG,quia sc. in ellipsi AHGE reperiuntur, quę transit per axem EA,& facit in ellipsibus normalibus sibi sectiones LG, & HI ad superficiem conoidis, cuius sectio est; & ideo ad eius ambitum pertingentes.

Cum itaque rectangulum AI,& IE æquetur rectangulo AL, & LE ob æqualia latera AI ipsi LE, & AL ipsi IE. Etiam quadrata ex IH,& LG restabunt æqualia. Quamobrem etiam latera HI, & LG erunt æqualia. Cum ergo sit ex prop.26.tract.30. ellipsis DGF ad ellipsim BHC,vt rectangulum ex BI,IH; ad rectangulū LD,LG:rectangula verò ista sint eiusdem altitudinis IH,& LG ex ostēsis,& ideo sint inuicem,vt DL linea ad BI lineam sequitur,vt etiam ellipsis DGF sit ad ellipsim BHC,vt linea DL ad lineā BI, quæ est eadem ob triangula BAI, & DEL æqualia reciprocè altitudinis TA ad altitudinem EV.

Ideo que segmenta conicorum corporum habentia bases altitudinibus reciprocè proportionales erunt æqualia.

EXPENSIO IV.

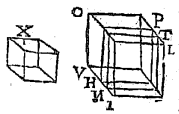
De corporum proportionali tranformatione.

MOdo de transformatione iuncta, cum augmento, vel diminutione corporum agendum est, & docere modū quo aliquid dato corpori detrahatur, aut addatur, & tamen eadem figura maneat; sicut,& residuum quamcumq; figuram inducat.

PROBL. I. PROPOS. L.

Ex maiori cubo detrahere minorem, residuumque cubum æqualem exhibere.

SVper basim NT maioris cubi VT extruatur parallelepipedum IT ex prop.14.h. cubo X minori æquale. Et ex latere cubi maioris abscindatur portio NH æqualis altitudini NI parallelepipedi constructi: perque punctum H ducatur planum NP, & erit residuum VP parallelepipedum, quod in cubum transformabitur ex prop.14.h.



Probatur operatio. Nam cum parallelepipedum NP, sit æquale parallelepipedo IT ob æqualem basim,& altitudinem; ex prop.40. h.Tract. A cubo TV detractus erit cubus exhibitus X mediante ablatione parallelepipedi NP. Vnde residuum redactum in cubum intentum præstabit.

COROLLARIVM.

IDem valet de quacumque alia figura, si rediga-tur in parallelepipedum,& ei detrahatur parallelepipedum dato corpori æquale, vel quæ pars magis placuerit. Nam residuum iterum per ea, quę diximus in Expens. ant. in figuram propositam redactum, & in priorem formam restitutum exhibebit quamlibet figuram propositā diminutā.

PROBL. II. PROPOS. LI.

Addere cubo alium cubum, ita quod cubus remaneat.

NOn aliter,hęc propos. operi consignabitur, ac antecedens. Extruatur itaque super basim NT cubi TV parallelepipedū æquale dato cubo X, & cubus erit adauctus quantitate cubi X, & redactus in parallelepipedum LV. Fiat itaque huic parallelepipedo cubus æqualis ex pr.14. h. & iam consequemur cubum duobus cubis æqualem cubo VT,& cubo X. Patet prop. ex præc. ostensione.

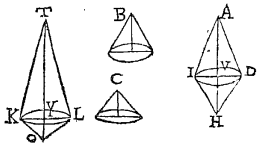
COROLLARIVM.

DEducitur quoque ex hac prop. quod si quodcumque corpus datum in cubum transformetur ex præcedenti expensione, & huic cubo quæcumque data quantitas addatur, & deinde iterum in pristinam figuram reformetur, corpus restitutum figura quidem priori potietur, at magnitudine auctius erit, & maiori mole constabit.

PROBL. III. PROP. LII.

** Duos, aut plures conos rectos in vnicum conum revocare. Vnicumque conum in plures conos distribuere.*

SInt plures coni ADI,B,& C;qui debeant in vnicum componi. Redigatur ex 26.h. B ad candē basim coni DAI,& sit DVI; componanturq; coni in Rhombum conicū ADIH: deinde fiat conus LTK obtinens basim LYK compositorum DI, & altitudinem YT ipsorū HA,& iste æquabitur ex 15. Tr.34. Rhombo DAIH. Deinde redigatur conus C ad eadem basim DVI,vel KYL, & vt iam fecimus,iterū fiat Rhombus solidus LTKO. Postea conus æqualis altitudinis, & basis Rhombo LTKO extolletur, isteque conus tribus conis iam erit æqualis. Nam ex prop.15. æquat Rhombum LTKO; iste verò æquat parte quidem LOK conum C, parte verò LTK Rhombum DAIH; nempe DAI, & B.



Contrario verò modo fiet si de ablatione agatur. Nam conus V. g. LTK in duos conos revocabitur, faciendo conum B, qui auferendus est æqualis basis basi LK coni LTK,& altitudo quę V.g.erit VH auferatur ab altitudine YT, & relinquetur VA, fiat itaque conus DAI altitudinis VA, & basis LK, ideſt æqualis DI, & erit conus DAI residuus à cono LTK ablato cono B.

COROLLARIVM.

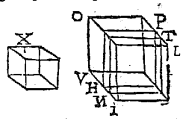
EAdem verò, quæ fiunt de conis possunt fieri de pyramidibus rectis, & quia licet prop.15. Tract.34. non loquatur de pyramidibus; ratio tamen potest ad illas extendi, eadem enim prorsùs est,& efficaciter eodem pacto conuincit. Si ve-

rò dentur pyramides, vel coni non recti ad rectos redigentur æquales, si fiant eiusdem altitudinis ex prop. 4. Tract. 34. p. 2.

PROBL. IV. PROPOS. LIII.

Cylindro, vel parallelepipedo, vel prismati cylindros parallelepipeda, vel prismata minora addere, vel auferre.

ADistam propos. operi demandandam sufficit redigere parallelepipedum X, vel cylindrũ,



qui auferendus est, vel addendus ad eandem basim NT ex prop. 25. h. & deinde, vel alteri PV, cui facienda est additio coniungere IN, vel auferre NH æqualem altitudinem inuenti cylindri altitudini ab eo cylindro, vel parallelepipedo, cui auferendum est, vel addeadum, & VOIL erit totum ex additione resultans si facta est additio, quod si facta fuerit subductio, HVOP est residuũ parallelepipedum ex VNTO deducto parallelepipedo HT æquali dato X.

PROBL V. PROPOS. LIV.

Plures sphæras in vnam sphæram colligere, vel vnicam in plures diuidere. Idem quoque præstare de sphæroide, aequeconoide elliptico, seu parabolico.

CVm ostenderimus suprà, quibus conis ista corpora æquentur: de sphera quidem pr. 43. de sphæroide pr. 36. de conoide parabolico pr. 34. Tract. 34. Si exhibitum quodlibet ex istis corporibus sphæricis, vel conoidalibus in conos æquales redigamus, sicut, & corpora sphærica, vel conoidalia, quę auferẽda sunt, vel addenda, & ex pr. 52. h. conico corpori, cui facienda est additio, addamus alios conos æquales illis corporibus, quæ addenda da sunt, & deinde conum sic adauctum in sphæram, vel sphæroidem, vel conoidem, prout priùs restituamus; habebimus intentum. Et idem de ablatione præstandum erit.

COROLLARIVM.

HInc facilè addisces etiã alia adaugere, etiam si, & intus excauata sint; dummodo aliqua regularitate potiantur, vt ea de quibus supra egimus. Nam aut ad conos, aut ad pyramides, seu prismata redigere poterimus, & ex prop. 52. h. ita augere, vel minuere, & postea in primum statum restituere.

THEOR. I. PROPOS. LV.

Omnia corpora similia triplicatam habent laterum, seu diametrorum proportionem sicut duplicatam basium.

PRobatur. Nam omnia corpora similia cylindris simlibus, vel pyramidibus, vel prismatibus inscribi possunt, quæ triplicatam laterum proportionem dicunt ex propositionibus passim positis, vt pr. 9. tr. 34 p. 1. & 17. & 23. & ex prop. 9. p. 2. h. & etiam ex 1. Expens. vbi corpora multa similia describimus, similes bases describendo, super quas cylindracea similia erigi possint. Ergo etiam ipsa corpora quæcomque ex descriptis triplicatam obtinebunt laterum, vel diametrorum, vel axium, vel ambitum proportionem. & eodem modo probabitur, quod duplicatam basium consequantur proportionem.

COROLLARIVM.

* EX præc. colligitur sphæroidem, conoidemque hyperbolicum, & parabolicum, tàm basis circularis, quàm ellipticæ, tum etiam quadratæ, seu rectangulæ dumodo sint similia corpora esse in triplicata ratione diametrorũ; ne dum ob rationem vniuersalem in propos. tactam, sed etiam, quia omnia ista genera corporum conis inscriptis, quæ eorum basibus inixi erant, & eundem diametrum pro diametro suæ basis obtinebant, & eandẽ altitudinẽ, eis ostensa sunt æqualia, vt prop. 43. 34. 36. Tract. 34. illa verò triplicatam diametrorum, seu altitudinum, cum sint similia, proportionem obtinent. Quare etiam corpora conoidalia, quæ eis sunt æqualia. Idem debemus fateri de conis prismaticis similibus, quia coni eiusdem altitudinis, & basis sesquialter ostensus est: sic de conis ellipticam basim obtinentibus similibus, cum sint æquales conis eandem altitudinem, & æqualem basim obtinentibus. Vnde erunt in triplicata proportione altitudinum, vt coni ipsis æquales; & ita doctrinã, vel generalem, vel specialem applicabis cuicumque corpori simili; quod sit ad aliud simile in triplicata ratione laterum, aut saltem in duplicata basium.

PROBL. VI. PROPOS. LVI.

* *Datum corpus eorum, quæ triplicatam laterum, vel axium, aut diametrorum, vel altitudinum proportionem obtinent iuxta datam proportionem linearum in aliud simile corpus augere.*



SIt datum aliquod corpus, cuius diameter, vel axis, vel latus, vel altitudo A, & debeat aliud corpus constitui, & detur linea B; & vt A ad B; ita sit faciẽdũ corpus aliquod simile corpori ex A; Inter A, & B duæ mediæ proportionales proiiciantur C, & D, vt sint in continua proportione A ad C, & C ad D, & D ad B ex prop. 3. Tract. 15. & ex linea C fiat ex dictis ex Expensione 1. corpus simile alteri dato &, similiter positũ vtendo illa eodem munere, quo fungitur linea A, & erit corpus ex linea C descriptum, vt A ad B.

Probatur. Nam A ad B triplicatam obtinet proportionem eius, quam consequitur A ad C, sed corpus erectum super C ex præced. consequitur proportionem triplicatam eius, quã respicit A lineam C. Ergo, vt A ad B, sic corpus ex A descriptum ad corpus simile, & similiter positum ex C descriptum.

PROBL.

PROBL. VII. PROPOS. LVII.

* *Datum corpus eorum, quæ duplicatam proportionem basium consequuntur, iuxta datam proportione basis ad basim adaugere.*

SIt data basis A, & corpus super illam erectum, & superficies B: Sitque faciendum corpus aliud, cp se habeat ad A corpus, vt A ad B. Ex pr. 33. tract. 29. inter bases A, & B basis reperiatur media proportionalis C, & super illam erigatur corpus simile, similiterque positum, ac corpus datum, & erit operi demandatum, quod precipitur.

Probatur. Quia corpora similia duplicatam habent basium proportionem ex prop. 55. h. sed basis A ad B est duplicata proportio eius, quæ est A ad C. Ergo vt basis A ad basim B, sic est corpus ex A ad corpus ex C ædificatum.

PROBL. VIII. PROPOS. LVIII.

* *Duobus datis corporibus tertium proportionale inuenire.*

DEntur duo corpora, quæ si non sint similia in similem figuram redigantur V. g. parallelepipeda, vt docuimus: quorum diametri, vel axes, vel latera, vel altitudines sint A, & B, & duabus A, & B tertia proportionalis reperiatur C, & illa eodem munere fungatur, & constituat aliquod corpus predictis simile, dico, quod duobus A, & B est tertium corpus proportionale C, quod si hoc C alterius figuræ dessideretur per ea, quę diximus Expens. 2. h. ad aliam figuram reuocari poterit.

Probatur. Nam corpora similia sunt in triplicata ratione laterum suorum: Quare cum sit A ad B, vt B ad C ex effectione. Etiam erit triplicata proportio lateris A ad triplicatam rationem lateris B, vt triplicata ratio lateris B ad triplicatã ratonem lateris C: Triplicatæ verò rationes, quæ continuè procedunt ex prop. 55. sunt corporum ex A, B, & C constructorum similium.

PROBL. IX. PROPOS. LIX.

* *Duobus datis corporibus corpus medium proportionale inuenire.*

SIt datum corpus ex A, & corpus ex B, quorum latera, vel axes, vel diametri, vel altitudines sint A, & B, & inter eas media inueniatur D, & ex ea eodem munere fungente fiat corpus, simile exhibitis duobus similibus; quod dico esse medium proportionale inter corpora exhibita.

Si verò corpora non essent similia oportet ea redigere ad eandem similitudinem cõuertendo ambo data in parallelepipeda, aut aliam similẽ figurã.

Probatur eadem ratione. Nam corporum est triplicata proportio laterum, aut axium, aut diametrorum, aut altitudinum, cumque sit A ad C vt C ad D, etiam triplicata ratio A ad C erit eadem, quæ triplicata ratio C ad D, quæ est illa artio, quam inuicem corpora consequuntur.

PROBL. X. PROPOS. LX.

* *Tribus corporibus datis quartum corpus proportionale reperire.*

SIt datum corpus A, & corpus B, & C, & oporteat reperire corpus D, ita vt sit A ad B, vt C ad D. Reperiatur lateribus corporis A, & B, & C, vel axibus, aut altitudinibus, vel diametris; quarta proportionalis D, & super eam pro eodem officio deseruiente axis, aut lateris, & cet. ædificetur corpus simile corpori C, & obtinebimus intentum.

Ratio est eadem præced. propos. & requiritur tantùm, vt diximus de superficiebus, quòd duo corpora A, & B sint inuicem similia licet dissimilia cum tertio C, quod tamen assimilabitur, tum lateribus, tum positione quarto reperiendo D.

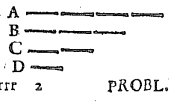
PROBL. XV. PROPOS. LXI.

* *Seriem continuam proportionalium corporum similium, & dissimilium inuenire iuxta datam proportionem.*

SIt data proportio A ad D, & oporteat reperire continuam seriem corporum in ea proportione, quæ est A ad D. Inter A, & D duæ mediæ proportionales interserantur B, & C, ita quod A, B, C, D sint continuè proportionales, & fiat continua progressio linearum A ad B iuxta dicta pr. 2. Tr. 15. superque illas lineas vtendo illis prout corpora cõstituẽda reposcent, vel diametris, vel axibus, vel altitudinibus, vel lateribus corpora similia edificẽtur, & similiter posita, & assero illam seriem corporum obtinere proportionem continuam, quæ est A ad D.

Probatur. Corpus A ad corpus B proportionem obtinet triplicatã eius, quæ est A ad B: sed A ad D proportio est triplicata ipsius A ad B. Ergo, vt A ad D, sic est corpus A ad corpus B, sed corpus B ad corpus C obtinet proportionem triplicatam lateris B ad latus C; Latus verò B ad C est, vt A ad B: latus autem A ad B est triplicata eius proportionis, quam habet A ad D. Ergo etiam corpus B ad corpus C proportionem obtinet, quam A ad D, & sic de alijs.

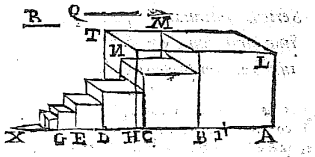
Quod, si libeat seriem à dato corpore incipere, cuius axis, seu latus, seu altitudo, vel diameter notus sit, repertis inter A, & D duabus proportionalibus B, & C fiat A ad B, sic latus V. g. L dati corporis, ad aliud, & reperiatur K: fiatque series continua linearum L ad K, super quas corpora similia construantur vtendo illis pro lateribus, pro vt ponitur linea primo corpori deseruiẽs. Quod si requirantur corpora non similia quecumque elegeris in alia corpora æqualia quidem; sed dissimilia poteris permutare, & sic obtinebis seriem proportionalium corporum continuam; sed dissimilem.



PROBL. XII. PROP. LXII.

Seriei corporum continua proportione procedentium corpus æquale inuenire, datis duobus lateribus corporum duorum primorum.

DEntur Latera, seu etiam axes, aut diametri, aut altitudines duorum corporum primorum in serie illa, cui reperiendum sit corpus æquale, sintq; hæc latera AB, & BC. Reperiatur q; seis quarta proportionalis LE continua, vel ei æqualis BI, fiatque vt AL differentia ad AB; sic AB ad aliud, & reperietur HA. Extruatur igitur super AH parallelepipedum æqualis altitudinis primi termini; si primus terminus sit parallelepipedum, vel tale corpus, quod se habeat ad primum terminum, vt latus AH ipsius ad AB: hocque corpus erit seriei infinitorum terminorum æquale.



Probatur. Nam linea HA est æqualis, ex prop. 16. tract. 16. toti seriei basium imparium procedentium in triplicata proportione AB ad BC; scilicet seriei procedentis in ea proportione, quæ est AB ad LE: & ideo singuli termini illius seriei procedentis in proportione AB ad BL, sunt vt solidum AM ad solidum BN; Quare series tota AX solidorum similium ad AM primum corpus est, vt series in ratione AB ad LE ad primum terminum AB cum singuli termini sint in eadem proportione, quare ex Coroll. 2. propos. 19. lib. 5. omnia vnius seriei erunt ad suum primum, vt omnia alterius ad suum primum; corpus verò AT ad corpus AM ex effectione est, vt latus AH ad latus AB; Latus verò AH ad latus AB est, vt series infinita linearum ad lineam AB, cum toti seriei in ratione AB ad LE sit æqualis linea ex effect. Ideoque erit in eadem proportione corpus AT ad corpus AM; qua infinita series corporum similium AX in ratione AB ad LE ad corpus AM; cum ergo AT corpus corpori AM, & infinita series corporum eidem corpori AM eãdem dicant proportionem AH lateris ad AB erunt inuicem æqualia ex prop. 9. l. 5. quoderat probandum.

PROBL. XIII. PROPOS. LXIII.

** Datum corpus in infinitam seriem corporum distribuere, quod à dato corpore incipiat.*

SIt datum aliquod corpus, quod redigatur facilitatis gratia in cubum AM, & datum corpus, quod debet distribui maius illo, redigatur in parallelepipedum eiusdem altitudinis AT, eiusque basis sit etiam eiusdem altitudinis, ac basis LM ex propos. 25. h.

Deinde fiat, vt AH ad AB; sic A ad aliud, & inueniatur AI; assumatur itaque differentia IB; & inter BI differentiã, & AB duæ mediæ proportionales interponantur, quæ sint Q, R; & deinde instituatur series continua proportionalium in ratione AB ad Q, quæ sit AX, & ex illis ædificentur corpora similia, & similiter posita, vt AM cubus; & erit series cuborum æqualis parallelepipedo AT.

Probatur. Fecimus AH ad AB, vt AB ad AI, Igitur differentia IB lineæ AB, ab AI erit secundus terminus alicuius seriei, cui sit æqualis AH: (liquidem tunc est *conuertendo* AI differentia IB secundi termini à primo AB; (si IB, vt secundus terminus sumatur) ad primum terminum AB, vt AB ad AH: Quare ex 16. Tract. 16. HA æquabit omnes lineas procedentes in proportione AB ad BI: sed in ratione AB ad BI, sic procedunt corpora AM, & BN; quia scilicet corpus BN ædificatum ex Q habet triplicatam proportionem lineæ Q ad AB, & ideo quam linea IB ad AB. Quare omnes termini linearum ad primum suum terminum erunt, vt omnes termini corporum ad primum corpus ex Cor. 2. prop 19. lib. 5.

Quapropter etiam AH æqualis toti seriei linearum in ratione AB ad BI procedentium erit ad AB vt tota series corporum AM; BN ex Q, & cæt. ad corpus AM, vt autem AH ad AB; sic est AT corpus ex effectione ad AM, ergo erit corpus AT ad corpus AM, vt series corporum super AB, & Q, scilicet AM, BN, & cæt. ad idem corpus AM: Erunt ergo corpora æqualia AT, & infinita series corporum ædificatorum super AB, & Q, scilicet AM, & BN, & cæt. vsque ad x terminum.

EXPENSIO VLTIMA.

De corporum calculatione.

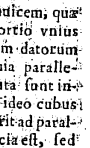
BReuiter nos ab hac tractatione expediemus, siquidem est potius Coroll. prædictorum, quam quod hic sit aliquid ostendendum: Calculare itaque aliquod corpus est corpore quoddam notæ mensuræ illud comparare, & videre, quam proportionem numeris exprimibilem illi obtineat. Verùm, quia non omnia corpora corporibus se accommodant, vt mensura mensurato se accommodare debet; nisi solùm cubus, vel parallelepipedum cubo, vel parallelepipedo; aliæ verò solliditates etiam eiusdem rationis omnia spatia solidorum maiorum implere nequeunt, hinc est quod parallelepipedum, vel cubus ille sit, quibus corpora mensurari possunt. Vnde labor exortus omnia corpora in parallelepipeda, vel cubos conuertendi, vt mensuris subijciantur: Hinceque est quod corpora omnia non in propria forma; sed in cubis, vel parallelelepipedis, quibus æquiualent dimetiantur, & ijs rectangulis, vt facilior mensura sit.

PROBL.

PROBL. I. PROPOS. LXIV.

Cubum, vel parallelepipedum numeris mensurare.

DVo latera basis cubi mensurentur, & sint V. g. alterum 25. vnciarum, alterum 33. & ex inde mensuretur altitudo, & sit 40. Vnciarum. Quia itaque rectangula eam obtinent proportionem, quæ ex proportione laterum componitur ex prop. 22. lib. 6. quadratum vnius vnciæ ad rectangulum habens latera alterum 25. alterum 33. vnciarum erit composita ex proportione 1. ad 25. & 1. ad 33. Itaque adhibenda esset regula, quam tradidimus propos. 9. Tract. 9. part. 1. & multiplicandum esset 1. per 1. & deinde 33. per 25. vt exiret proportio composita rectanguli vnius vnciæ ad rectangulum laterum 25. & 33. vnciarum, sed quia 1. facit 1. ideo remanet sola multiplicatio laterum 25. & 33. inuicem, quæ faciunt 825. vncias. Ideoque proportio vnius quadratj vnius vnciæ est ad rectangulum datorum laterum 25. & 33. vt 1. ad 825. sed quia parallelepipeda sub eadem altitudine constituta sunt inuicem, vt bases ex 8. prop. Tract. 34. ideo cubus cuius altitudo est vncia, & basis vnciæ erit ad parallelepipedum, cuius item altitudo vncia est, sed basis 825. vt basis 1. reperta ad basim 825. super quam constitutum est; ideoque habebimus parallelepipedum constans 825. vnciarum. Verùm, quia parallelepipeda eiusdem basis sunt inuicem vt altitudines ex 20. propos. Tract. 34. ideo solidum vnius vnciæ altitudinis, sed basis rectangulæ 825. vnciarum est ad solidum eiusdem basis 825. vnciarum; sed 40. altitudinis, vt altitudo 1. ad 40. Igitur regula proportionum poterit quæri: si altitudo vnius vnciæ dat vncias 825. soliditatis, idest solidum constans vnciis 825, quid dabit altitudo 40. quadere oportebit multiplicare 825. per 40. vt prodeat solidum, cuius altitudo est vnciarum 40. & facta multiplicatione erit solidum vnciarum 33000. nec hic opus est primum diuidere: quia vnitas diuidens reddit eundem numerum.



PROBL. II. PROP. LXV.

Parallelepipeda obliqua quæcumque mensurare.

QVia parallelepipeda quæcumque basis quadrangulæ sunt ad inuicem, vt bases, si sint æqualis altitudinis, siue ea sint æqualium angulorum, siue inæqualium, siue bases sint similes, siue dissimiles, dummodo, sint æquales capacitate: Capacitate verò illæ bases æquales sunt ex 36. lib 1. quæ habent latus æquale alteri, etiam si Rhombi, siue Rhomboides, & altitudo eadem, hinc est, quod debeant latus mensurari, & normalis altitudo cadens super latus mensuratum. Multiplicata enim longitudo lateris eius, super quod cadit normalis illa, cum ipsa faciet ex præcedenti basim rectangulam æqualem basi datæ, etiamsi non rectangulæ, quia scilicet est eiusdem basis, & altitudinis, & quia quæcumqte parallelepipeda æqualis basis, & altitudinis sunt æqualia ex prop. 4. 5. & 6. tract. 34. p. 1. ideo etiamsi parallelepipedum esset super basim obliquè constitutum erit æquale alteri eiusdem basis, & altitudinis rectè cõstituto, & ideo huic rectangulo parallelepipedo. Detur itaque parallelepipedum, cuius basis sit Rhombus, & mensuretur vnum latus, & sit 13. vnciarum, deinde altitudo basis, nempe normalis, quæ super latus mensuratum cadit, & erit 22. vnciarum, & simul multiplicentur, & basis ei erit 286. Postea altitudo ipsius parallelepipedi obliqui scilicet linea, quæ super Rhombum basis normaliter cadat, & sit 12. & simul cum basi multiplicetur eodem modo hac esset parallelepipedum rectum dabit 3432. eritque parallelepipedum æquale parallelepipedo obliquo.

PROBL. III. PROPOS. LXVI.

Prisma triangularis basis mensuris numericis subijcere.

PRisma triangularis basis, seu rectum, seu obliquum, est dimidium parallelepipedi ex prop. 2. Tract. 34. p. 1. eiusdem altitudinis, ideoque mensurata altitudine triangulj basis 11. vnciarum, & latere, super quod normalis cadit 14. vnciarum fiet rectangulum ex 18. & 19. tract. 29. duplum trianguli basis vnciarum 154. quod multiplicatum in altitudinẽ 7. vnciarum faciet parallelepipedum rectum vnciarum 1078. duplum prismatis, sicut ipsa basis est eius dupla, quod erit æquale cuicumque obliquo prismati æqualis altitudinis, & basis, & ideo duplo cuiuscumque prismatis eiusdem basis item, & altitudinis. Vnde dimidium 539. vnciarum solidum erit æquale exhibito prismati, potest etiam assumi basis 77. nempe non basis dupla: sed æqualis basi prismatis, nam multiplicata per altitudinem id præstabit.

PROBL. IV. PROPOS. LXVII.

Prisma polygonæ basis numeris dimetiri.

CVm prisma polygonæ basis sit ad prisma triangularis, vt basis ad basim ex prop. 19. Tract. 34. quod intelligitur si sit eiusdem altitudinis. Ideo, si diuidatur basis polygona in sua triangula, vt propos. 20. & 21. Tract 19. docuimus, & numerus basis triangularis ducatur per altitudinem prismatis consequemur prisma triangulare ex propos. 66. h. vt ergo basis triangularis ad polygonam basim, sic erit prisma triangulare ad prisma polygonum ex propos. 19. Tract. 34. part. 1. Si ergo basis triangularis sit 15. & altitudo sit 4. prisma triangulare erit 60. Sit verò nota ex propos. 20. cit. basis polygona 45. partium, & adhibeatur regula aurea dicendo; si 15. dant 45. quid 60. & dabit 180. prisma polygonum: Quod, & obtinebimus multiplicando totam basim in vnum collectam per altitudinem.

PROBL.

PROBL. V. PROPOS. LXVIII.

Pyramidem, vel polygonæ, vel triangularis baſis calculo ſubigere.

QVoniam omnis pyramis æqualis altitudinis ſcalena, & obliquè ſita eſt æqualis rectæ æqualis baſis, & altitudinis ex 21. propoſ. Tract. 34. part. 1. & ex 22. omnis triangularis pyramis eſt tertia pars priſmatis, quod eſt dimidium parallelepipedi rectanguli cuiuſcumq; quę omnia cum pyramide ſint eiuſdem baſis, & altitudinis; Ideo omnis pyramis, ſeu recta, ſeu ſcalena triangularis erit ſexta pars parallelepipedi. Menſuretur itaque latus vnum pyramidis, & ſit 15. vnciarum, & altitudo ipſius baſis & ſit 7. & fiat rectangulum numericum, vt prop. 19. Tr. 29. multiplicando inuicem, vt fiant 105. pro baſi rectangula; menſuretur poſtea normalis eleuatio ipſius, & ſit 22. vnciarum, qui numerus multiplicetur cum baſi, & fiat parallelepipedum 2310. cuius numeri ſexta pars 385. eſt ſoliditas pyramidis. At ſi pyramis ſit polygona, cum componatur ex Coroll. propoſ. 25. ex pyramidibus triangularibus in ſua triangula diſpertita baſis, & menſurata, vt ſupra, dabit ſoliditatem ſingularum pyramidum, quæ ſimul aggregatæ pyramidem totalem conſtituent.

PROB. VI. PROPOS. LXVI.

Fruſto pyramidis numericas menſuras adhibere, ſi tamen conſtet baſibus parallelis.

QVoniam fruſtum pyramidis cuius baſis quadrata ex propoſ. 25. part. 1. Tract. 34. æquatur parallelepipedo, cuius latera ſint ſuperioris fruſti baſis latera, & ſemidifferentia homologorum laterũ, cum triente parallelepipedi ex ſemidifferẽtijs, & omnia eiuſdem altitudinis. Hoc autem eſt (quodcumque illud ſit) æquale parallelepipedo rectangulo eiuſdem baſis, & altitudinis: Hinc eſt, quod debeat menſurari latus 16. vnciarum ſuprę-mæ baſis, & altitudo 18. eius; ſicut latus infimum homologum 28. & altitudo eiuſdẽ baſis 26. ſubducatur poſtea altitudo 18. ab altitudine 26. & reſtabunt 8. cuius medietas 4. deinde latus 16. à latere 28. & reſtabunt 12. cuius medietas 6. & altitudo ipſa fruſti pyramidis ſit 33.

Coniungatur differentia altitudinum 4. ipſarum baſium cum minori altitudine, & ſit 22. & differentia laterum 6. cum minori latere 16. & ſit item 22. qui multiplicentur inuicem, & fiant 484. pro baſi parallelepipedi, qui numerus multiplicatus in altitudinẽ 33. dabit 15972. Deinde ſemidifferentiæ 4. & 6. inuicem multiplicentur, & ſint 24. deinde per altitudinem 33. & fient 792. ſolidum rectangulum ſemidifferentiarum; cuius triens eſt 264. quod triens coniunctum cum numero 15972. dat 16236. Parallelepipedum ex lateribus minoribus cum ſemidifferentijs, & triens parallelepipedi ſemidifferentiarũ, quę duo æquant fruſtum pyramidis. Quod ſi ſit fruſtum triangulare accipies ex Coroll. propoſ. 25. prædicti numeri dimidium. Quod ſi ſit multilaterum diuides baſes in fruſta ſua triangularia, & calculabis, vt ſupra.

PROBL. VII. PROPOS. LXVII.

Cylindrum, & Conum acutum, vel priſmaticum, rectum, ſeu obliquum ſitum ſuper baſim circularem, ſeu Ellipticam, ſeu Parabolicam, ſeu ſuper quamcumq; eorum partem, aut quamcumque menſurabilem figuram menſurare.

EX Coroll. propoſ. 3. conſtat cylindrum eſſe æqualem priſmati eiuſdem baſis, & altitudinis, itaque circulum baſis in rectangulum rediges ex 5. vel 7. vel ex 9. propoſ. tract. 30. & ſuper illud rectangulum parallelepipedum eiuſdem baſis; & altitudinis conſtitues. V. g. ſit notus diameter circuli 15. vnciarum, quoniam ex prop. 41. lib. 6. Euclid. omnes circuli ſunt in eadem proportione, ac radij, ideo dicatur ſi 7. dant 22. circumferentiæ in aliquo circulo ex 5. Tract. 18. quid 15. in hoc circulo, & exiet numerus 47. & $\frac{1}{7}$. Multiplicabimus itaque hos numeros ſimul, & ex prop. 5. Tract. 30. efficietur rectangulum quadruplum areæ circuli 707. $\frac{1}{7}$. eius igitur quarta pars erit 176. $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{8}$ areę circuli æquale rectangulum, quod ductum in altitudinem cylindri 29. V. g. vnciarum expromet numerum ſoliditatis cylindri 5126. $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{8}$ hoc autem intelligitur, ſeu rectus ſit cylindrus, ſeu ſcalenus, quia ſunt æquales dummodo ſit eadem baſis, & altitudo ex prop. 4. tr. 34.

At quia conus omnis, ſeu rectus, ſeu ſcalenus in punctum deſinens eſt tertia pars cylindri ex propoſ. 7. Tract. 34. ideo ſi detur conus, qui pro diametro obtineat 15. vncias. & pro altitudine 29. cylindri eius tripli ſoliditas erit 5126. $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{8}$ aſſignata vnciarum cubarum, cuius tertia pars conum præſtabit 1708. $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{4}$.

At quia conus priſmaticus ex prop. 27. part. 2. Tract. 34. eſt $\frac{1}{2}$ coni acuti, ideo ſi detur talis conus, cuius diameter ſit 15. vnciarum, & altitudo 29. eius ſoliditas erit maior numero 854. $\frac{1}{8}$ $\frac{2}{4}$ eiuſdem 1708. $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{4}$ numeri medietate, nempe 2563. $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$.

At ſi cylindrus ſit ellipticus, & maior diameter illius ellipſis, quæ baſim ſubſternit cylindro, ſit 15. minor 12. tunc ellipſis ad rectangulum redigetur, & quia ex prop. 24. Tract. 30. eſt circulus maiori axe deſcriptus ad planum ellipticum, vt axis maior ad minorem dices regula aurea; ſi 15. axis dat 12. axem, quid Area circuli 176. $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{8}$, & offert 141. $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{8}{8}$, ideſt $\frac{12}{7}$, ſed quia omne corpus cylindraceum, vt eſt cylindrus ellipticus eſt ad aliud, vt altitudo ad altitudinem ſi habeant baſes æquales, licet non ſimiles. Ergo cylindrus, cuius baſis erit 141. $\frac{5}{7}$. ellipſis ad cylindrum, eiuſdem baſis, & altitudinis vnciarum 29. erit æqualis.

Quadere ſi multiplicemus in altitudinem 29. vnciarum prędictum numerum 141 $\frac{5}{7}$, & dabit ſoliditatem cylindri elliptici 4110. $\frac{5}{7}$. Quod ſi detur conus ellipticus, iſte ex prop. 27. Tract. 34. part. 2. æquabitur circulari eiuſdem baſis, & altitudinis, at circularis eiuſdem baſis, & altitudinis æquatur tertiæ parti cylindri eiuſdem baſis, & eleuationis. Quare erit tertia pars ſoliditatis inuentæ cylindricæ conus ellipticus, nempe 1367. $\frac{1}{7}$.

Id etiam, & æquo pacto concludit de cylindraceis corporibus quamcumque baſim habentibus, quorum multiplicata planities baſis cognitæ in altitudinem normalem ſoliditatẽ præſtabit. Quadere ſi ſit aliquis cylindrus, qui obtineat baſim parabolam, cuius area prop. 33. tract. 30. ad triangulum, & ideo ad rectangulum reducatur, vel quæcũque eius cognitæ partes ex eadem prop. 36. ſicut & portiones ellipſium, quæ cognoſci poſſunt ex 28. aut etiam circulorum, quæ indagantur ex 4. Tract. 30. quæ ſe ſubſternant pro baſibus alicuius corporis cylindracei ex Coroll. propoſ. 4. & 24. Tract. 34. eodem modo menſurabitur, & eius ſoliditas nota euadet.

PRORL. VIII. PROPOS. LXIX.

Fruſta Conorum quorumcumque numeris ſubigere.

PRimo menſurabitur eodem modo, quo fruſtum pyramidis, vt coni circularis fruſti ſoliditas inueniatur ex 13. Tract. 34. part. 2. Verùm pro lateribus duobus maioribus adhibetur radius, & peripheria baſis maioris inferioris, & pro minoribus baſis ſuperioris, & minoris radius, item, & peripheria, quibus vnita ſemidifferentia diametrorum, & peripheriarũ maioris baſis à minori cõſtituit duo latera priſmatis æquealti fruſto conico æquali cum triente priſmatis, cui ſemidifferentiæ eędem conſtituunt latera baſis triangularis.

Secundò vniuerſaliter. Duo coni ad calculum redigentur, vt præc. prop. quorum conus ſit ſitus ſuper baſim fruſti maiorẽ alius ſitus ſuper baſim fruſti minorem, & inuenta eorum ſoliditate minor à maiore eximetur, & reſtabit cognitum fruſtum, quodcumque: qui modus poterit adhiberi, cum baſes non ſunt parallelæ.

Tertio, quia ex prop. 7. h. coni baſibus parallelis diuiduntur in conos ſimiles, qui ex pr. 55. h. ſunt in triplicata ambitũ ratione, ſeu diametrorũ, ſeu altitudinum: hinc eſt, quod ſi coni, cuius ſegmentum quæritur, conſtet diametro baſis maioris, & minoris poterit triplicari eorum proportio, & ex nota ſoliditate minoris per regulam auream cognoſcere ſoliditatem maioris. Sit ergo prędcdens conus, cuius baſis diameter eſt 15 & conus prolungatus intelligatur, ita quod baſis illius ita prolungati ſit 30. triplicetur hæc proportio 15. ad 30. dabit ſoliditatem maioris coni. Triplicetur itaque dicendo ſi 15. dant 30. quid 30. & dabunt 60. iterumque dices ſi 30. dant 60. quid 60. & dabunt 120. & erit 15. ad 120. triplicata proportio 15. ad 30. Quà acquiſita dices ſi 15 dant 120. quid dabit ſoliditas minoris coni 1708 $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{4}$, & exhibebit ſoliditatem maioris 13671. $\frac{5}{1}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{0}{0}$ ideſt $\frac{1}{8}$ $\frac{6}{4}$, à qua ſoliditate deducta minor ſoliditas minoris coni verſùs acumen 1708 $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{4}$ dabit fruſtum conicum 11962 $\frac{1}{8}$ $\frac{2}{7}$.

Hic verò ſecundus, & tertius modus poterit adhiberi etiam quacumque pyramide, ſecundo quidem ſit ſecta planis non parallelis, tertio ſi planis parallelis ſit ſecta.

PROBL. IX. PROPOS. LXXII.

Rhombum conicum menſura numerica depromere, & reſiduum fruſti coni, vel Rhombi ablato cono inuerſo.

QVoniam ſoliditas Rhombi conici æquatur cono illi, qui habeat altitudinem conorum compoſitorum altitudini æqualem, & baſem baſi compoſitorum eorundem ex 15. tract. 34. ſufficiet hunc conum computare, vt ſupra.

Quod ſi à coni aliquo fruſto intelligatur ablatus conus inuentus adhuc hoc reſiduum calculabimus ex prop. 17. tract. 34. Sit V. g. conus, cuius trianguli per axem latus ſit 25. vnciarum; baſis verò ſupremæ radius 12. alter infimæ, & maioris 20. latus fruſti conici ſit 15. primo reperienda eſt coni ſuperficies ex 32. tract. 31. ſic

Addantur ſimul 12. & 20. & fiant 32. deinde inter 32. & 15. reperiatur numerus medius proportionalis ex 21. tract. 13. part. 2. & erit proxime 22. & hic erit radius: hoc itaque numero 22. tamquam diametro exquiratur peripheria circuli ex 5. tract. 30. dicendo ſi diametri 7. dant 22. peripheriæ in aliquo circulo, quid 44. diametri, & inuenietur peripheria 134. $\frac{2}{7}$, deinde multiplicabimus 44. & 134. $\frac{2}{7}$ ſimul, & poſtea producti accipiemus quartam partem, aut dimidiam peripheriã 74. $\frac{1}{7}$, & radium 22. inuicem multiplicabimus, & erit area 1631. $\frac{1}{7}$ fruſti conici ex 32. tract. 31. Menſurata autem normali à centro maioris baſis cadente in ſuperficiem coni iuxta dicta pr. 13. h. & vt expoſcit pr. 32. cit. ſit 9 $\frac{1}{7}$.

Itaque calculetur conus, cuius altitudo ſit 9 $\frac{1}{7}$, & baſis 1631 $\frac{1}{7}$, & erit ea ſoliditas fruſti coni ablato cono inuerſo, ideſt ſuper baſem eius minorem conſtituto.

Eodem modo exquiretur ſoliditas fruſti Rhombi ablato Rhombo, quòd corpus figura expreſſimus 18. tract. 34. part. 2. Quæ conſtat ex fruſto coni, & ex cono ſuper maiorem baſim conſtituto, deducto cono ſuper minorem baſim. Nam inuenietur ſuperficiei fruſti conici circulus æqualis, & conus eiuſdem baſis, at altitudinis normalis à vertice coni in ſuperficiem oppoſitam productam cadente.



PROBL.

PROBL. X. PROPOS. LXXIII.

Annuli plani ſoliditatem numeris exprimere.

SIt quidam annulus quadrata mole in gyrum ſe flectente conſtans, quem exibuimus prop. 19. tract. 24. part. 2. & circuli maioris diameter notus ſit 15. vnciarum, minoris vero 5. ita quod eius annuli plani latitudo ſit 10. vnciarum, & circumferentia ferè 31. $\frac{1}{2}$ ex prop. itaque 12. tr. 30. multiplicatis iſtis numeris 10. & 31. $\frac{1}{2}$ ſimul producti erit rectãgulũ æquale plano annulo 315. Exhibeatur verò altitudo normalis Annuli, quę ſit V. g. 11. vnc. qui multiplicatus in 315. exhibebit ſoliditatẽ annuli 3465. Quod ſi ſit rotũdus, vel cuiuſcũq; datæ figuræ; ſed eius ſectio exhibeat circulum, aut aliquod polygonum regulare: reperto circulo medio inter maiorem, & minorem circulum ſecundùm quos curuatur, prædicto modo, qui ſit vnc. 63. deinde ſectionis illius reperietur ſuperficies, cuius diameter notus eſt 10. partium, & ideo peripheria 31. vnciarum, & $\frac{3}{7}$, & hic ipſe circuli diſcus vnciarum 78. $\frac{1}{2}$: Si ergo per prædicti circuli 63. ambitum multiplicetur hæc ſuperficies ex prop. illa 20. Tract. 34. part. 2. conſtabit ſoliditas annuli rotundi Vncijs cubis 4952.

Quod autem dicitur de circulo ex ea 20. prop. Tract. 34. part. 2. valet de quocumque annulo polygono dummodo eius ſectionis area conſtet, quę 5. vel 20. prop. Tract. 29. perſcrutari poteſt: ſi ſit figuræ regularis.

THEOR. I. PROPOS. LXXIV.

Omnia corpora, quæ conos, vel pyramides, vel parallelepipeda æqualia, vel cylindros obtinent, calculationi ſubigere.

QVia ſupra diuerſis propoſitionibus Tract. 34. multa corpora cubauimus redigendo ea, aut ad cylindros, aut parallelepipeda, aut pyramides, aut conos, vel omnino ſolidos, vel aliquo alio corpore vacuatos ex prædictis, ideo ſufficiet hic monuiſſe ea corpora menſurare, & numeris ſupponere calculando corpora illis æqualia. Conſideretur itaque quænam corpora illis ſint æqualia, & ea numeris tractentur, & ſimul corpora, quibus æquantur, menſurata erunt.

Gratias, Gratias Deo, & B. V. & cæt. infinitas, immenſas: hic quies.

AMICE LECTOR.

Errores aliqui, qui in characteribus figurarum indicibus occurerunt ex imprimentium fatalitate hic notantur, quos benigniùs corriges.

TRACTATV III.

Mendum	*correctio.*
Def. 10. BCA.	CBA

TRACT. IV.

Pr. 5. l. pen.	BC
Pr. 14. l. 10. DFA.	BAF
P. 29. l. 19. AD.	AB
P. 28. l. 29. DH.	GH

TRACT. VI.

P. 12. l. 3. AOB.	AD
P. 28. l. 39. BAD.	ABD

TRACT. IX. *Pars.* 2.

P. 4. l. 53. N	K
P. 16. l. 51. L.	G
Cor. 2. p. 21. l. 6. AB	AC

TRACT. X.

Pr. 4. C. l. 2. AF.	AP
P. 5. l. 3. DE	DH
P. 10. l. 7. DO.	DB
P. 19. l. 5. G	B
P. 31. l. 35. AB.	YB

TRACT. XII.

Pr. 2. l. 8. E	C
14. l. 10. A	AB
25. l. 33. EL.	BL
33. l. 68. IH.	IK

TRACT. XV.

P. 4. vbiq; PT ad OP.	OP ad TP
l. 34. IP ad NO.	NO ad IP
25. l. 51. OCI.	EFI

TRACT. XVI. *Pars.* 1.

Pr. 5. l. 3. HE	HF
7. l. 4. D ad H.	H ad D
7. l. 5. E ad I.	I ad E
Pars. 2.	
Pr. 1. l. 40. OE.	OR
l. 45. BH.	vt BH
Pr. 5. l. 5. EF.	BF
l. 13. TZ.	TQ
l. 16. ED.	EB
Pr. 7. l. 32. EH.	FH
l. 25. CA.	CE

TRACT. XVIII.

P. 15. l. pen. AER.	R
27. l. 13. TS	TI
29. l. 53. PL.	FL
C. 2. l. 17. XI.	XY

TRACT. XIX.

Pr. 13. l. vlt. BL.	BF

TRACT. XX.

Mendum	*correctio.*
Pr. 7. l. 15. AF	AB
13. l. 2. ABIG.	ABI
9 l. 16. & 17. AF.	AE

TR. XXII.

Pr. l. 5. EF.	BF
13. l. 1. PL.	PR
17. l. 7. LM.	M

TR. XXIII. *Pars.* 2.

Pr. 15. l. 2. BE.	BX
ZI.	ZX
Pr. 24. l. 26. DF.	DE
Pr. 25. l. 12. YL.	XY
& 63. BN.	BE
& C l. 4. AZ.	VZ
Pr. 29. l. 19. VBE.	BVE
& l. 30 in arcu. in D arcus	
Pars. 3.	
Pr. 32. l. 7. F	E
Pr. 36. l. penul. DC.	BC

TR. XXIV.

Pr. 8. l. 40. CX.	HX
Pr. 10. l. vlt. PF.	BF
P. 13. l. 18. NM.	NT
Pr. 23. l. 40. CFH.	GFH
Pr. 54. l. 5. CD.	CA

TR. XXV.

Pr. 1. l. 21. XQZ.	XTZ
Pr. 10. l. vlt. DIS.	OIS
P. 16. l. 19. A.	EA
Pr. 19. l. 20. V.	VF

TR. XXVI. *P.* 1.

Pr. 11. l. 61. DB.	DE
Pars 2.	
P. 7 l. 1. AG.	dele
P. 8. l. 31. VC.	CL

TR. XXVII. *P.* 1.

Pr. 21. l. 4. OP.	RP
OM.	MR
Pr. 15. l. 9. G 53.	G 153
Pars. 2.	
Pr. 16. l. 17. IV.	IO
Pr. 22. l. 4. AE.	AB
Pr. 50. l. 6. QR.	GO
l. 51. E.	F
Pr. 80. l. 30. N.	K

TRACT. XXVIII.

Mendum	*correctio.*
Pr. 8. l. 11. LA.	LV
Pr 13. l. 41. DG.	BG
l. 57. T.	t

TR. XXIX.

Pr. 11. l. 7. in L.	in I
Pr. 19. l. 1. AD.	VD
Pr. 24. l. 13. CV	DV
Pr. 24. l. 19. KL.	KM
P. 25. l. 31. P.	B
P. 28. l. 12. D.	B
Pr. 29. l. 6. K.	KI
l. 11. D	O
Pr. 35. l. 24. & 26.	dele P
Pr. 49. l. 9. CE ad EF.	EF ad EI
P. 47. l. 31. CD.	GE

TR. XXX.

Pr. 24. l. 30. CE.	PE
l. 36. CE.	PE
Pr. 26. l. 8. FD.	FB
Pr. 50. l. 6. BA.	BF
Pr. 60. l. 3. AL C.	adde I

TR. XXXI.

Pr. 14. l. 12. AIM.	AIN
Pr. 19 C. 3. l. 4. ITEX.	It AX
Pr. 21. l. 10. XC.	NC
l. 11. MQS	NQS

TR. XXXIII.

Pr. 1. l. 37. BAE.	BE

TR. XXXIV. *P.* 2.

Pr. 22. l. 12. GC.	GD
Pr. 23. l. 8. FDH.	FGH
Pr. 25. l. 8. NK.	MK
Pars. 2.	
Pr. 12. l. 22. DC.	DCB
Pr. 18. l. 9. RLt.	RST
l. 22. RLT.	RLT
Pr. 19. l. 2. NR.	TR
Pr. 21. l. 29. It.	IT
Pr. 51. C. 2. l. 9. DA.	CA
l. 10. CIH.	CH
P. 56. l. 22. KG.	IG
HT.	KT

TR. XXXV.

Pr. 27. l. 30. OV.	IV
& OI.	VI

VSVS TABVLÆ SEQVENTIS
SINVVM, TANGENTIVM, ET LOGARITHMORVM.

VM iam logarithmicas tabulas excerptas à Canone magno triangulorum seu tabula artificialium Henrici Brigij vulgaverit Caualerius, placuit nobis ipsos Neperianos logarithmos varietatis gratia exhibere, qui ab ipso Nepero inuentore eorum comditi fuere, cuius tabulæ vsus talis est.

Arcus, & angulus si quærendus sit, vel non excedet gradum 45. vel superabit: si non excedat quærendus est in prima columna sinistra reperiendo gradum in fronte; minuta descendendo per ipsam columnam. Si verò superent dati gradus & minuta Gr. 45. quærendi sunt gradus in calce nonæ columnæ & minuta ascendendo. Accipientur autem sinus correspondentes procedendo directè per eandem tesseram à sinistra ad dextram in secunda columna sinistra, si gradus minores quam 45. inuenti fuerint, at si maiores in octaua columna procedendo per eandem tesseram à dextra in sinistram versùs medium areæ Logarithmi verò sinuum in tertia columa, & septima. Tangentes in quarta, & sexta, & logarithmi tangentium in media quintaque columna inuenientur, qui deseruient pro tangentibus graduum non excedentium gr. 45. descendendo; at verò ascendendo pro tangentibus graduum maiorum; quam gradus 45. diuersimodè tamen. Nam descendendo & provt deseruiunt tangentibus sinistris, illis vtemur secundùm regulam V.g. si sit adhibeda subtractio, subtrahemus, si additio, addemus. At si deseruiant tangentibus dextris, & ascendendo repertæ fuerint, cum subtrahendum est, tunc addemus, cum addendum est, subducemus, vt dixi exp. 6. tract. 31.

Sinus si cognoscamus, & vellimus cognoscere angulum; vel arcum reperiemus eos in secunda, vel octaua columna & è regione in eadem tessera inueniemus arcum vel angulum correspendem; Logarithmos verò sinuum in tertia & septima; Tangentes in quarta, & sexta; Logarithmos verò tangentium in media.

Qui pro vt Ill'is vtemur deseruient Gradibus minoribus gr. 45. & eorum tangentibus iuxta regulam adhibiti, contra verò regulam diseruient tangentibus maioribus quam gr. 45. & gradibus correspondentibus.

Si verò, quis cupiat Graduum minutorum, & etiam secundorum sinus, qui in tabula non ponuntur per regulam auream intentum cõsequetur. Nam reperto sinu arcus, & minutorum adhærentium; is subducatur à sinu proximè maiori, & obtinebitur differentia; Dices ergo regula trium: si secunda 60. dant v g secunda 20. quid differentia reperta? & inuenies differentiam secundis datis congruentem, quæ addatur sinui minori reperto, & fiet sinus arcus dati notus nedum quo ad gradus, & minuta, sed etiam quoad secunda. v.g. detur arcus G. 8. 32. S. 20. sinus erit G. 8 M. 32. P. 1483848. at proximè maior G. 8. minut. 33. sinus 1486724. differentia est 2876. Dices itaque si 60. dant 20. quid 2876. differentia? & prodibit proportionalis congruens 958. quæ addita sinui minoris arcus 1483848. constituet sinum 14 4806. G. 8. M 32. S 20. Eodemque modo logarith. sinuum, tangentes, logarithmos; ipsarum vsque ad secunda Graduum obtineri poterunt.

Si verò detur sinus, qui non reperiatur in tabulis, & quis cupiat cognoscere quot Gradus minuta & secunda illi respondeant per eandem regulam auream id consequi poterimus. Nam reperto sinu proximè minori, & à maiori dato subducto restabit differentia: Iterumque eodem subducto à maiori proximè sinu reperto in tabulis restabit alia differentia maior; Dices itaque si hæc differentia maior dat illam minorem, quid dabunt secunda 60 & obtinebis secunda tuæ differentiæ competentia sinus dati à proximè minori v. g. detur sinus 1484810.

Qui non reperitur in tabula sinuum, sed proximè minor est 1483848. qui subductus à maiori dato 1484910. relinquit differentiam 962. subductus verò iterum ipse repertus sinus 1483848. à maiori proximè reperto in tabulis 1486724. relinquit differentiam maiorem 2876. dico itaque si differentia 2876. dat differentiam 962. quid dabunt secunda 60. & restituent sec. 20. & sic agendum est in tangentibus vel logarithmis in tabula non repertis; si quis scrupulosum computum exoptet. Verum tutè semper poterit accipi pro dato sinu proximè minor, si non adeò exacta requiratur supputatio.

Sinus versus reperitur arcus infra Gr 90. si accipiatur dati arcus complementi sinus, & subducatur à sinu toto. Nam residium erit sinus versus illius arcus, at si superet G.90. tunc excessum sup. Gr. 90 illiusque quære sinum, additus enim sinus sinui toti constituet sinum versum illius arcus.

Si verò quis cupiat alicuius dati sinus versi arcum inuenire demat à sinu toto, si ipso minor sit vel vice versa si sit maior & resi lui inueniatur arcus, qui demptus à quadrante in priori casu reliquit illius sinus versi arcum, & in posteriori casu additus quadranti idem præstat.

Tandem si quæratur complementum alicuius arcus quærendus est in altera è regione graduum, & minutorum columna. v.g. si sit quærendum complementum G. 8. M. 30. columnæ primæ sinistræ complementum erat in extrema dextra G. 81. M 30. & vice versa. Et idem asseras de sinubus, tangentibus: atque logarithmis ipsorum, quorum complementa sunt in columna correspondente: sub correspondentibus arcuum complementis.

Ita si sius complementi arcus G.10. M. 15. erit sinus arcus, qui illum cõplet G.79. M.45. qui est 9840407 sicut si sius complementi arcus G 79 M.45 est sinus arcus G.10. M.15. nimirum sinus 1779415.

Denique si quis desideret logarithmos secantium is poterit adhibere logarithmos sinuum; sed semper vtendum est contra regulam, vt dixi tract. 22. propos. 25. Curauimus autem has tabulas omnino ab erroribus absolutas tibi exibere, quibus tuto vti possis, vt exactissimè præstitimus.

TABVLA

TABVLA LOGARITHMICA
EIVSQVE VSVS EXPLICATVS.

DOcuimus coroll. prop. Tr. 22. logarithmos applicatos numeris geometricis in tabulis sinuum, arq; tangẽtium Regulę aureę muneri deseruire, & inuentioni quarti proportionalis, & hoc fieri addendo simul logarithmos, cũ in ea multiplicatio requiritur, vel subducendo, cum diuisio ab ea imperatur: dummodo logarithmi sint eiusdem naturæ, vt dixi pr. 26. Tr. 22. sũma verò est logarithmus abundans, si collecti logarithmi fuere abundantes, at deficiens, si fuere deficientes; sicut, & residuum à subductione, abundans erit; si logarithmi subducti, & is à quo subducitur; fuit abundans: at deficiens, si ijdem fuere deficientes. Scire vero hoc deseruit, vt cognoscamus, cuius naturæ sit quarrus proportionalis, qui ellicitur; stat enim loco sinus summa, vel residuum abundans, cum Problema pro quarto proportionali promittit sinum, vel tangentis minoris quàm grad. 45. si promittat tangentem: stat autem loco secantis: cum est residuũ deficiens, & Prob. secantem promittit, quod si promittat inueniendam tangentem, illa tangens, vt pote deficiens, erit Graduum maiorum quàm G. 45. vt dicimus expen. 6. trac. 21.

At si casus ferat quod vtamur logarithmis diuersæ naturæ, scilicet, quòd sit vnus deficiens, alter abundans, vt logarithmo sinuum, & logarithmo, tangentium Graduum maiorum quã, G. 45 vel logarithm. vt sinuum; & logarithmis ipsis vt secantium, tunc cum regula aurea docet vti multiplicatione, in logarithmis vtendum est subductione, & quod restat à maiori logarithmo, à quo subductio facta est, denominatur, & si ille erat abundans residuum, quoq; est abundans, si deficiens residuum quoq; est deficiens: Cum autem regula aurea vtitur diuisione; si logarithmi sint diuersæ naturæ, vtendum est additione, vt dixi coroll. prop. 26. Tr. 22. & totum quod conflatur à maiori logarithmo additorum, vocatur abundans, vel deficiens: quare si fiat additio residuo à subductione, qui ex dictis apellerur abundans, & istud sit maius summa, quoq; erit abundans, seeus si deficiens. Vnde scies, vt supra cuius, naturæ sit quartus proportionalis, vt ipsũ reperias in Tabulis.

Rario huius rei est, quia si addas logarithmũ, o vnitatibus 3. restat 3. Ergo si addas 2. deficiens, ideſt defectum duarum vnitatum log. 3. oportet, quod restet minus, quam 3. cum ponere rei defectum sit ipsam rem auferre, & ideo remanet 1. abundans. Sic si defectiuo log. Vg. 3. addas 2. logarithmum positiuum oportet, vt remaneat minus quam 3. defectiuum, ideſt 1. quia ponere quid verum, & positiuum est auferre defectum. Vnde addere est idem, ac subducere. At si subducas, o. a 3. log. abundante remanet 3. Ergo si auferas 2. minus quam 0. ideſt defectum duarum vnitatum, oportet, quod crescat & sit 5. quia subducis defectum 2. tollitur autem defectus per rem positiuam, vnde subducere deficientes logarithmos ab abundantibus erit addere abundantibus; ideoque id quod conflatur, erit positiuum, & abundans: Verum si à. 3. defectiuo auferas logarith. positiuum, & abundantẽ nempe 2. facies vtique magis deficientẽ, nempe 5. vnitatibus infra 0. cui enim magis aufertur rei positiuæ, magis deficit. Vnde auferre est idem quod addere, & id quod fit est negatiuum magis. Si verò à negatiuo auferas negatiuum, clarum est quod erit minus negatiuum, & si addas erit magis negatiuum. Vnde solum in additione, vel subductione logarithmorum oppositę naturæ mutatur subductio in additionem, & additio in subtractionem. Ideoque in tangentium logarithmis super, scribitur secundùm regulam; inferiùs contra regulã quia cum, vt deficientes sumantur ferè semper cum abundantibus sinubus, vel tangentibus adhibentur, & idem dicendum est de logaritmhis sinuum, si vsurpentur, vt secantium, ferè enim semper contra regulam adhibendi, quia cum sinibus adhibentur.

MONITVM.

Cum literarius cusor aliquã sibi clam impresserit exemplaria mancha omninò foliisque recusis, & figuris deficientia, Priuilegium à Celsitudine Regali Sabaudię Ducis, &c. obtinere coactus sum, ne alius quam à me destinatus bibliopola, hos nostros libros exponat: Sed quia non vbique locorum hoc Priuilegium extenditur; ideo omnes monere cogor, ne huiusmodi imperfecta volumina, in sui incomodum, meique detrimentum emant; At ne folium sine sua vtilitate libro imponeretur, superiorem doctrinam calculi logarithmici penitus explicatiuam tibi communicaui.

TABVLA SIN-

TABVLA SINVVM, ATQVE TANGENTIVM LOGARITHMIS NEPERIANIS EXORNATA

DILIGENTER EMENDATA,

QVAE OMNI, TVM GEOMETRICAE, TVM ARITHMETICÆ SVPPVTATIONI APPRIME DESERVIT.

M	Sinus	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	0	Infinitum	0000	Infinitum	Infinita	0	10000000	60
1	2909	81425681	2909	81425680	34376070815	1	10000000	59
2	5818	74494213	5818	74494211	17188033688	2	9999998	58
3	8727	70439560	8727	70439560	11458686834	4	9999996	57
4	11636	67562740	11636	67562739	8594012547	7	9999993	56
5	14544	65331315	17544	65331304	6875680006	11	9999989	55
6	17453	63508099	17452	63508083	5729633839	16	9999986	54
7	20362	61966595	20361	61966573	4911098124	22	9999980	53
8	23271	60631284	23270	60631256	4297181900	28	9999974	52
9	26180	59453453	26179	59453418	3819696333	35	9999967	51
10	29088	58399557	29088	58399814	3437829002	43	9999959	50
11	31997	57446759	31996	57446707	3125276745	52	9999950	49
12	34906	56576646	34905	56576584	2864819229	62	9999940	48
13	37815	55776222	37814	55776149	2644433955	73	9999928	47
14	40724	55035148	40723	55035064	2455533838	84	9999917	46
15	43632	54345225	43632	54345129	2291873854	96	9999905	45
16	46541	53699843	46541	53699734	2148619711	109	9999892	44
17	49450	53093600	49450	53093577	2022219818	123	9999878	43
18	52359	52522019	52359	52521881	1909864971	138	9999863	42
19	55268	51981356	55268	51981202	1809337410	154	9999847	41
20	58177	51468431	58177	51468361	1718863124	170	9999831	40
21	61086	50980537	61086	50980450	1637005697	187	9999813	39
22	63995	50515342	63995	50515137	1562590046	205	9999795	38
23	66904	50070827	66904	50070603	1494645462	224	9999776	37
24	69813	49645239	69813	49644995	1432363027	244	9999756	36
25	72721	49237030	72722	49236765	1375082163	265	9999736	35
26	75630	48844826	75631	48844539	1322188681	287	9999714	34
27	78539	48467431	78540	48467122	1273213435	309	9999692	33
28	81448	48103763	81450	48103431	1227736470	332	9999668	32
29	84357	47752759	84359	47752503	1185395877	356	9999644	31
30	87265	47413852	87268	47413471	1145801136	381	9999619	30
31	90174	47085554	90177	47085554	1108932084	407	9999593	29
32	93083	46768049	93086	46768049	1074263399	434	9999566	28
33	95991	46460773	95995	46460312	1041705454	461	9999482	27
34	98901	46162254	98904	46161765	1011062679	489	9999511	26
35	101809	45872392	101814	45871874	982180553	518	9999482	25
36	104718	45590688	104723	45590140	954893332	548	9999452	24
37	107627	45316714	107632	45316135	929081086	579	9999421	23
38	110536	45050041	110541	45049430	904627361	611	9999389	22
39	113445	44790296	113450	44789652	881427652	644	9999357	21
40	116353	44537132	116360	44536455	859395374	677	9999323	20
41	119262	44290216	119269	44289505	838430438	711	9999289	19
42	122171	44049255	122178	44048509	818463792	746	9999254	18
43	125079	43813959	125088	43813177	799432199	782	9999218	17
44	127988	43584078	127997	43583259	781259259	819	9999281	16
45	130896	43359360	130906	43358503	763899813	857	9999143	15
46	133805	43139582	133816	43138686	747289264	896	9999105	14
47	136714	42924534	136725	42923599	731385593	935	9999065	13
48	139622	42714014	139635	42713039	716149676	975	9999025	12
49	142531	42507833	142544	42506817	701531474	1016	9998984	11
50	145439	42305826	145454	42304768	687500739	1058	9998942	10
51	148348	42107812	148363	42106711	674016435	1101	9998900	9
52	151257	41913644	151273	41912499	661050728	1145	9998856	8
53	154164	41723175	154182	41721986	648578536	1189	9998811	7
54	157073	41536271	159092	41535037	636564040	1234	9998766	6
55	159982	41352795	160001	41351515	624990311	1280	9998720	5
56	162891	41172626	162911	41171299	613825994	1327	9998673	4
57	165799	41006643	165820	41005268	603057015	1375	9998625	3
58	168708	40821746	168730	40820322	592655713	1424	9998577	2
59	171616	40650816	171640	40649343	582610426	1473	9998527	1
60	174524	40482764	174550	40481241	572899830	1523	9998477	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	174524	40482764	174550	40481241	57289830	1523	9998477	60
1	177433	40317483	177459	40315900	563504309	1574	9998426	59
2	180341	40154899	180369	40153273	554414914	1626	9998374	58
3	183250	39994918	183279	39993239	545610968	1679	9998321	57
4	186158	39837447	186189	39835715	537085003	1733	9998267	56
5	189066	39682421	189100	39680633	528821258	1788	9998212	55
6	191975	39529765	192010	39527922	520805157	1843	9998157	54
7	194883	39379407	194920	39377598	513030946	1899	9998101	53
8	197792	39231274	197830	39229318	505482730	1956	9998044	52
9	200700	39085307	200740	39083293	498155754	2014	9997986	51
10	203608	38941441	203650	38936368	491038024	2073	9997927	50
11	206517	38799612	206561	38797479	484118353	2133	9997867	49
12	209425	38659767	209471	38657573	477393195	2194	9997806	48
13	212333	38521858	212381	38519603	470852152	2255	9997745	47
14	215241	38385824	215291	38383507	464487853	2317	9997683	46
15	218149	38251613	218201	38249233	458293185	2380	9997620	45
16	221057	38119183	221111	38116739	452261453	2444	9997556	44
17	223965	37988481	224022	37985972	446386310	2509	9997491	43
18	226873	37859471	226932	37856896	440661780	2575	9997425	42
19	229781	37732105	229842	37729464	435082056	2641	9997359	41
20	232689	37606339	232752	37603631	429641796	2708	9997292	40
21	235597	37482135	235663	37479359	424335793	2776	9997224	39
22	238505	37359458	238574	37356613	419159137	2845	9997155	38
23	241413	37238269	241485	37235354	414111295	2915	9997085	37
24	244321	37118532	244395	37115546	409175388	2986	9997014	36
25	247229	37000208	247306	36997150	404359642	3058	9996943	35
26	250137	36883272	250217	36889142	399655828	3130	9996871	34
27	253045	36767690	253128	36764487	395060088	3203	9996798	33
28	255953	36653428	256038	36650151	390568737	3277	9996724	32
29	258861	36540448	258949	36537096	386178258	3352	9996649	31
30	261769	36428748	261859	36425320	381885288	3428	9996573	30
31	264677	36318272	264770	36314768	377686614	3504	9996496	29
32	267585	36209006	267681	36205427	373579199	3582	9996419	28
33	270493	36100924	270592	36097264	369560062	3660	9996341	27
34	273401	35994000	273503	35990261	365626388	3739	9996262	26
35	276308	35888207	276414	35884388	361776788	3819	9996182	25
36	279216	35783520	279325	35779620	358006024	3900	9996101	24
37	282124	35679917	282237	35755935	354312962	3982	9996019	23
38	285032	35577380	285148	35575316	350695255	4064	9995937	22
39	287940	35475892	288059	35471745	347150587	4147	9995854	21
40	290847	35375415	290970	35371184	343677949	4231	9995770	20
41	293755	35275935	293882	35271619	340272744	4316	9995685	19
42	296663	35177444	296794	35173042	336934467	4402	9995599	18
43	299570	35079909	299705	35075420	333661982	4489	9995512	17
44	302478	34983320	302617	34978743	330451272	4577	9995424	16
45	305385	34887652	305528	34882987	327302782	4665	9995336	15
46	308293	34792895	308439	34788141	324212583	4754	9995247	14
47	311200	34699029	311351	34794185	321181137	4844	9995157	13
48	314108	34606036	314202	34601101	318204757	4935	9995066	12
49	317015	34413899	317174	34508872	315283945	5027	9994974	11
50	319922	34422606	320085	34417486	312416191	5120	9994881	10
51	322830	34332140	322997	34326926	309599077	5214	9994787	9
52	325737	34242484	325909	34237176	306833212	5308	9994693	8
53	328645	34153629	328821	34148226	304115322	5403	9994598	7
54	331552	34076549	331733	34071050	301445987	5499	9994502	6
55	334459	33978346	334645	33972650	298823024	5596	9994405	5
56	337367	33891701	337558	33886007	296244357	5694	9994307	4
57	340274	33805893	340470	33800100	263710598	5793	9994208	3
58	343181	33720820	343382	33714927	291219764	5893	9994109	2
59	346088	33636464	346295	33630476	288770746	5993	9994009	1
60	348994	33552817	349207	33546723	286362498	6094	9993908	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	348995	33552817	349207	33546723	286362498	6094	9993908	60
1	351902	33469860	352120	33463664	283994009	6196	9993806	59
2	354809	33387588	355033	33381289	281664304	6299	9993703	58
3	357716	33305993	357945	33299590	279372435	6403	9993599	57
4	360623	33225056	360858	33218849	277117516	6507	9993495	56
5	363530	33144770	363770	33138158	274898633	6612	9993490	55
6	366437	33065128	366683	33058410	272714927	6718	9993284	54
7	369344	32986107	369596	32979282	270565570	6825	9993177	53
8	372251	32907712	372508	32900779	268449755	6933	9993069	52
9	375158	32829923	375421	32822881	266366704	7042	9992960	51
10	378065	32752740	378334	32745588	264316358	7152	9992850	50
11	380971	32676149	381247	32668887	262296605	7262	9992740	49
12	383878	32600139	384160	32592866	260307416	7373	9992629	48
13	386785	32524706	387073	32517221	258348100	7485	9992517	47
14	389692	32449837	389987	32442239	256417991	7598	9992404	46
15	392598	32375526	392900	32367814	254517088	7712	9992290	45
16	395505	32301761	395814	32293934	252643455	7827	9992175	44
17	398412	32228539	398727	32220596	250797165	7943	9992060	43
18	401318	32155852	401641	32147793	248978216	8059	9991944	42
19	404225	32083692	404554	32075516	247184785	8176	9991827	41
20	407131	32012045	407468	32000751	245417543	8294	9991709	40
21	410038	31940909	410382	31932496	243674732	8413	9991590	39
22	412944	31870276	413295	31861743	241957021	8533	9991470	38
23	415851	31800141	416209	31791887	240262714	8654	9991349	37
24	418757	31730492	419123	31721716	238592501	8776	9991228	36
25	421663	31661332	422037	31652434	236945285	8898	9991106	35
26	424570	31592644	424951	31583623	235320041	9021	9990983	34
27	427476	31524424	427866	31515279	233717425	9145	9990859	33
28	430382	31456672	430780	31447402	232146427	9270	9990734	32
29	433288	31389371	433694	21379975	230576614	9396	9990608	31
30	436194	31322524	436609	31313001	229037584	9523	9990482	30
31	439100	31256121	439523	31246471	227518902	9650	9990355	29
32	442006	31190158	442438	31180380	226020167	9778	9990227	28
33	444912	31124626	445353	31114719	224540987	9907	9990098	27
34	447818	31059521	448267	31049484	223080983	10037	9989968	26
35	450724	30994841	451182	30984673	221639784	10168	9989837	25
36	453630	30930577	454097	30920277	220217049	10300	9989706	42
37	456536	30866722	457012	30856290	218812405	10432	9989574	23
38	459442	30803277	459927	30792712	217425507	10565	9989441	22
39	462348	30740230	462842	30729531	216056022	10699	9989307	21
40	465253	30677578	465757	30666744	214704085	10834	9989172	20
41	468159	30615317	468672	30604347	213368514	10970	9989036	19
42	471065	30553442	471588	30542335	212049271	11107	9988899	18
43	473970	30491949	474503	30480704	210746693	11245	9988761	17
44	476876	30430834	477419	30419451	209459545	11383	9988623	16
45	479781	30370090	480335	30358568	208188402	11522	9988484	15
46	482687	30309715	483251	30298053	206932111	11662	9988344	14
47	485592	30249702	486166	30237899	205691260	11803	9988203	13
48	488498	30190049	489082	30178104	204464726	11945	9988061	12
49	491403	30130749	491997	30118661	203253093	12088	9987918	11
50	494308	30071797	494913	30059565	202055705	12232	9987775	10
51	497214	30013193	497829	30000817	200871878	12376	9987631	9
52	500119	29954933	500745	29942412	199702191	12521	9987486	8
53	503024	29897014	503662	29884347	198545993	12667	9987340	7
54	505929	29839424	506578	29826610	197403054	12814	9987193	6
55	508835	29782165	509495	29769203	196273146	12962	9987045	5
56	511740	29725236	512411	29712125	195155685	13111	9986897	4
57	514645	29668628	515328	29655367	194051200	13261	9986748	3
58	517550	29612331	518244	39598920	192959095	13411	9986598	2
59	520455	29556458	521161	29542796	191879163	13562	9986447	1
60	524360	29500706	524078	29486992	160811200	13714	9986295	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	523360	29500706	524078	29486992	190811200	13714	9986295	60
1	526265	29445354	526995	29431487	189755028	13867	9986143	59
2	529170	29390307	529911	29376286	188710414	14021	9985989	58
3	532075	29335565	532828	29321389	187677207	14176	9985835	57
4	534980	29281122	535745	29266791	186655202	14331	9985680	56
5	537884	29226973	538663	29212486	185644562	14487	9985524	55
6	540789	29173115	541580	29158471	184644417	14644	9985367	54
7	543694	29119548	544498	29104746	183654941	14802	9985209	53
8	546598	29066270	547415	29051309	182676299	14961	9985050	52
9	549503	29013273	550333	28998152	181707670	15121	9984891	51
10	552407	28960557	553251	28945276	180749537	15281	9984731	50
11	555312	28908117	556169	28892675	179801085	15442	9984570	49
12	558216	28855951	559087	28850347	178862806	15604	9984408	48
13	561120	28804057	562005	28788290	177934219	15767	9984245	47
14	564024	28752430	564923	28736499	177015180	15931	9984081	46
15	566928	28701071	567841	28684975	176105555	16096	9983917	45
16	569832	28649975	570759	28633714	175205183	16261	9983752	44
17	572736	28599142	573678	28582715	174313925	16427	9983586	43
18	575640	28548570	576596	28531976	173431641	16594	9983419	42
19	578544	28498247	579514	28481485	172558198	16762	9983251	41
20	581448	28448177	582433	28431246	171693461	16931	9983082	40
21	584352	28398354	585352	28381253	170837304	17101	9982912	39
22	587256	28348782	588270	28331510	169989613	17272	9982742	38
23	590160	28298459	591189	28282015	169150247	17444	9982571	37
24	593064	28250377	594108	28232761	168319085	17616	9982399	36
25	595967	28201535	597028	28183746	167496287	17789	9982226	35
26	598871	28152930	599947	28134967	166681172	17963	9982052	34
27	601775	28104561	602866	28086423	165873906	18138	9981877	33
28	604678	28056428	505786	28038114	185074651	18314	9981701	32
29	607582	28008424	608705	27990033	164282764	18491	9981525	31
30	610485	27960848	611625	27942178	163498660	18670	9981348	30
31	613389	27913400	614544	27894552	162721698	18848	9981170	29
32	616292	27866180	617464	27847158	161952305	19027	9980991	28
33	619196	27819184	620384	27799977	161189849	19207	9980811	27
34	622099	27772408	623304	27753020	160434770	19388	9980631	26
35	625052	27725848	626225	27706278	159686753	19570	9980450	25
36	627905	27679504	629145	27659752	158945509	19752	9980268	24
37	630808	27633374	632066	27613439	158211136	19935	9980085	23
38	633711	27587457	634986	27567338	157483474	20119	9979901	22
39	636614	27541753	637907	27521449	156762433	20304	9979716	21
40	639517	27496257	640828	27475767	156047923	20490	9979530	20
41	642420	27450968	643749	27430291	155339855	20677	9979343	19
42	645323	27405885	646671	27385020	154638158	20865	9979156	18
43	648226	27361003	649592	27339950	153942729	21053	9978968	17
44	651129	27316323	652514	27295081	153253487	21242	9978779	16
45	654031	27271843	655435	27250411	152570581	21432	9978589	15
46	656934	27227563	658357	27205940	151893462	21623	9978398	14
47	659837	27183476	661278	27161661	151222301	21815	9978207	13
48	662739	27139581	664100	27117573	150557233	22008	9978015	12
49	665642	27095878	667121	27073676	149897753	22202	9977822	11
50	668544	27052373	670043	27029976	149244148	22397	9977628	10
51	671447	27009057	672965	26986465	148595987	22592	9977433	9
52	674349	26965926	675888	26943138	147953611	22788	9977237	8
53	677251	26922980	678810	26899995	147316726	22985	9977040	7
54	680153	26880218	681733	26857035	146685275	23183	9976843	6
55	683055	26837639	684656	26812757	146059175	23382	9976645	5
56	685957	26795243	687578	26771661	145438358	23582	997644	4
57	688859	26753027	690501	26729244	144822775	2378	9976243	3
58	691761	26710988	693423	26687003	144212307	23985	9976044	2
59	69466	26669126	696346	26644939	143606943	24187	9975842	1
60	697565	26627442	699269	26603052	143006601	24390	9975640	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	697563	26627442	699209	26603052	14300660 1	24390	9975640	60
1	700467	26585929	702193	26561335	142411234	24594	9975437	59
2	703369	26544587	805116	26519788	141820765	24799	9975233	58
3	706270	26503416	708039	26478411	141235335	25005	9975028	57
4	709172	26462418	710962	26437207	140654481	25211	9974822	56
5	712073	26421589	713886	26396171	140078545	25418	9974615	55
6	714975	26380927	716809	26355301	139507087	25626	9974408	54
7	717876	26340428	719733	26314593	138940429	25835	9974200	53
8	720777	26300094	722657	26284050	138378319	26044	9973991	52
9	723678	26259923	725580	26233669	137820702	26254	9973781	51
10	726579	26219913	728504	26193448	137267523	26465	9973570	50
11	729480	26180067	731428	26153390	136718731	26677	9973358	49
12	732381	26140377	734353	26113487	136174272	26890	9973145	48
13	735282	26100842	737277	26073738	135634096	27104	9972931	47
14	738183	26061465	740202	26034146	1350981 53	27319	9972717	46
15	741084	26022244	743127	25994709	134566419	27535	9972502	45
16	743985	25983176	746052	25955424	1340388 04	27752	9972286	44
17	746886	25944260	748978	25916290	1335156636	27970	9972069	43
18	749787	25905496	751903	25877308	132995769	28188	9971851	42
19	752688	25866884	754829	25838477	1324802 97	28407	9971633	41
20	755588	25828423	757754	25799796	131968930	28627	9971414	40
21	758589	25790110	760680	25751262	131461286	28848	9971194	39
22	761589	25751942	763606	25722872	130957670	29070	9970973	38
23	764490	25713920	766532	25684727	130457692	29293	9970751	37
24	767190	25676043	769459	25646527	129991652	29516	9970528	36
25	770090	25638310	772385	25608570	129469305	29740	9970304	35
26	772991	25600722	775311	25570757	128980531	29965	9970079	34
27	775891	25563273	778238	25533082	128495548	30191	9969854	33
28	778791	25525966	781164	25495548	128014165	30418	9969628	32
29	781691	25488798	784091	25458152	127536541	30646	9969401	31
30	784591	25451769	787017	25420894	127062036	30875	9969173	30
31	787491	25414876	789944	25383772	126591211	31104	9968944	29
32	790391	25378119	792871	25346785	126123842	31334	9968715	28
33	793291	25341498	795799	25309933	125659878	31565	9968485	27
34	796191	25305013	798726	35273216	125199280	31797	9968254	26
35	799090	25268662	801653	25236632	124742169	32030	9968022	25
36	801990	25232442	804581	25200178	124288195	32264	9967789	24
37	804889	25196355	807509	25163857	123837634	32498	9967555	23
38	807789	25160399	81043	25127666	123390142	32733	9967320	22
39	810688	25124571	813365	25091602	122946003	32969	9967085	21
40	813587	25088870	816293	25055664	122505017	33206	9966849	20
41	816486	25053298	819221	25019854	122067151	33444	9966612	19
42	819385	25017853	822150	24984170	121632370	33683	9966374	18
43	822284	24982533	825079	24948610	121200643	33923	9966135	17
44	825183	24947340	828008	24913177	120771937	34163	9965895	16
45	828082	24912272	830937	24877866	120346235	34404	9965655	15
46	830981	24877326	833866	24842680	119923488	34646	9965414	14
47	833880	24842502	836795	23807613	119503669	34889	9965172	13
48	836778	24807799	839724	24772666	119086890	35133	9964929	12
49	839677	24773219	842653	24737841	118672834	35378	9964685	11
50	842575	24738761	845583	24703138	118261757	35623	9964440	10
51	845474	24704420	848513	24668551	117853346	35869	9964194	9
52	848372	24670196	851443	24634080	117447864	36116	9963948	8
53	851271	24636090	854374	24599726	117044995	36364	9963701	7
54	854169	24602100	857304	24565487	116644985	36613	9963453	6
55	857067	24568228	860234	24531365	116247668	36863	9963204	5
56	859965	24534473	863164	24497359	115853017	37114	9962954	4
57	862863	24500829	86 6095	24463463	115461005	37366	9962703	3
58	865761	24467298	869 025	24429679	115071619	37619	9962452	2
59	868659	24433880	871 956	24396008	114684819	37872	9962200	1
60	871557	24400578	874886	24362452	114300579	38126	9961947	0 M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	871557	24400578	874886	24362452	114300579	38126	9961947	60
1	874455	24367384	877817	24329003	113918875	38381	9961693	59
2	877353	24334302	880748	24295665	113539681	38637	9961438	58
3	880250	24301329	883680	24262435	113163656	38894	9961183	57
4	883148	24268467	886611	24229316	112788878	39151	9960927	56
5	886045	24235712	889543	24196303	112417202	39409	9960670	55
6	888943	24203064	892475	24163396	112047814	39668	9960412	54
7	891840	24170523	895407	24130595	111680940	39928	9960153	53
8	894737	24138089	898339	24097900	111316432	40189	9959893	52
9	897634	24105760	901271	24065309	110954164	40451	9959632	51
10	900531	24073540	904204	24032827	110594415	40713	9959370	50
11	903428	24041422	907137	24000446	110236764	40976	9959107	49
12	906325	24009408	910070	23968168	109881598	41240	9958844	48
13	909222	34977495	913003	23935990	109528589	41505	9958580	47
14	912119	23945985	915936	23903914	109177805	41771	9958315	46
15	915016	23913978	918870	23871940	108829233	42038	9958049	45
16	917913	23883273	921804	23840067	108482852	42306	9957782	44
17	920809	23850867	924738	23808292	108138767	42575	9957515	43
18	923706	23819460	927761	23776615	107796712	42845	9957247	42
19	926602	23788153	930605	23745038	107456902	43115	9956978	41
20	929498	23756943	933539	23713557	107119198	43386	9956708	40
21	932395	23725832	936473	23682174	106783466	43658	9956437	39
22	935291	23694818	939407	23650887	106449917	33931	9956165	38
23	938187	23663900	942343	23619695	106118428	44205	9955893	37
24	941083	2363308c	945277	23588601	105788969	44479	9955620	36
25	943979	23602355	948212	23557601	105461519	44754	9955346	35
26	946875	23571725	951147	23526695	105136063	45030	9955071	34
27	949771	2354119c	954083	23495883	104812581	45307	9954793	33
28	952667	23510748	957019	23465163	104491055	45585	9954518	32
29	955563	23480290	959954	23434535	104171468	45864	9954240	31
30	958458	2345014:	962890	23403999	103853919	46144	9953962	30
31	961354	2341998c	965826	23373556	103538166	46424	9953683	29
32	964249	23389908	968763	23343203	103224405	46705	9953403	28
33	967144	23359927	971699	23312940	102912514	46987	9953122	27
34	970039	23330036	974636	23282766	102602473	47270	9952840	26
35	972934	23300235	977573	23252681	102294266	47554	9952557	25
36	975829	23270525	980509	23222686	101987889	47839	9952274	24
37	978724	23240903	983446	23192778	101683314	48125	9951990	23
38	981619	23211368	986383	23162956	101380525	48412	9951705	22
39	984514	23781920	989320	23133220	101079507	48700	9951419	21
40	987408	23152560	992257	23103572	100780346	48988	9951132	20
41	990303	23123287	995195	23074010	100482822	49277	9950844	19
42	993198	23094100	998133	23044533	100187022	49567	9950555	18
43	996092	23064999	1001072	23015141	99893042	49858	9950266	17
44	998987	23035985	1004010	22985836	99600655	50149	9949976	16
45	1001881	23007056	1006949	22956615	99310047	50441	9949685	15
46	1004775	22978212	1009887	22927478	99021104	50734	9949395	14
47	1007669	22949449	1012825	22898421	98733810	51028	9949100	13
48	1010563	22920769	1015763	22869446	98448162	51323	9948807	12
49	1013457	22892172	1018702	22840553	98164135	51619	9948513	11
50	1016351	22863658	1021641	22811742	97881716	51916	9948218	10
51	1019245	22835227	1024580	22783013	97600790	52214	9947922	9
52	1022139	22806878	1027519	22754366	97321746	52512	9947625	8
53	1025032	22778609	1030459	22725798	97044063	52811	9947327	7
54	1027926	22750420	1033399	22697309	96767939	53111	9947028	6
55	1030819	22722311	1036339	22668899	96493467	53412	9946729	5
56	1033713	22694283	1039279	22640569	96220411	53714	9946429	4
57	1036606	22666333	1042219	22612316	95948971	54017	9946128	3
58	1039499	22638461	1045160	22584140	95679034	54321	9945825	2
59	1042392	22610667	1048101	22556041	95410585	54626	9945523	1
60	1045285	22582951	1051042	22528019	95143611	54932	9945219	0 M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	1045285	22382951	1051042	21528019	95143611	54932	9945218	60
1	1048178	22355313	1053983	21500075	94878103	55238	9944914	59
2	1051070	22327752	1056924	21472207	94614053	55545	9944609	58
3	1053963	22300267	1059866	22444414	94351448	55853	9944303	57
4	1056857	22272859	1062808	21416697	94090170	56162	9943996	56
5	1059749	22245527	1065750	21389055	93830595	56472	9943688	55
6	1062642	22218272	1068692	21361490	93572238	56782	9943379	54
7	1065534	22191091	1071634	22333998	93315361	57093	9943069	53
8	1068426	22163984	1074576	21306579	93059875	57405	9942759	52
9	1071318	22136951	1077518	22279233	92805759	57718	9942448	51
10	1074210	22109991	1080461	21251959	92553036	58032	9942136	50
11	1077102	22083104	1083404	22224757	92301618	58347	9941823	49
12	1079994	22056290	1086347	21197627	92051546	58663	9941509	48
13	1082886	22029549	1089291	22170570	91802810	58979	9941194	47
14	1085778	22002881	1092234	22143585	91555401	59296	9940879	46
15	1088669	22176285	1095178	22116671	91309309	59614	9940563	45
16	1091561	22149762	1098122	22089819	91064526	59933	9940246	44
17	1094452	22123308	1101066	22063055	90821043	60253	9939928	43
18	1097344	22096925	1104010	22036351	90578848	60574	9939609	42
19	1100235	22070612	1106954	22009717	90337927	60895	9939290	41
20	1103126	22044368	1109899	21983151	90098268	61217	9938970	40
21	1106017	22018195	1112844	21956655	89859858	61540	9938649	39
22	1108908	21992090	1115789	21930226	89622688	61864	9938327	38
23	1111795	21966054	1118734	21903865	89386745	62189	9938004	37
24	1114690	21940086	1121680	21877571	89152021	62515	9937680	36
25	1117580	21914186	1124625	21851344	88918508	62842	9937355	35
26	1120471	21888355	1127571	21825185	88686196	63170	9937029	34
27	1123356	21862590	1130517	21799091	88455079	63499	9936702	33
28	1126252	21836892	1133463	21773064	88225146	63828	9936376	32
29	1129142	21811261	1136409	21747103	87996394	64158	9936048	31
30	1132032	21785698	1139355	21721209	87768816	64489	9935719	30
31	1134922	21760199	1142302	21695378	87542404	64821	9935389	29
32	1137812	21734767	1145249	21669613	87317150	65154	9935058	28
33	1140702	21709400	1148196	21643912	87093043	65488	9934727	27
34	1143592	21684100	1151144	21618278	86870072	65822	9934395	26
35	1146482	21658865	1154092	21592708	86648225	66157	9934062	25
36	1149372	21633695	1157040	21567202	86427493	66493	9933728	24
37	1152261	21608586	1159988	21541756	86207866	66830	9933393	23
38	1155151	21583540	1162936	21516372	85989335	67168	9933057	22
39	1158042	21558557	1165884	21491050	85771891	67507	9932720	21
40	1160921	21533639	1168832	21465793	85555525	67846	9932385	20
41	1163818	21508781	1171781	21440595	85340229	68186	9932046	19
42	1166707	21483986	1174730	21415459	85125995	68527	9931707	18
43	1169595	21459254	1177679	21390385	84912817	68869	9931367	17
44	1172484	21434585	1180628	21365373	84700687	69212	9931025	16
45	1175374	21409979	1183577	21340423	84489598	69556	9930685	15
46	1178262	21385434	1186527	21315533	84279571	69901	9930342	14
47	1181151	21360949	1189478	21290702	84070565	70247	9930000	13
48	1184040	21336524	1192427	21265931	83862572	70593	9929655	12
49	1186928	21312160	1195377	21241220	83655585	70940	9929310	11
50	1189816	21287855	1198328	21216567	83449598	71288	9928964	10
51	1192704	21263609	1201279	21191972	83244610	71637	9928617	9
52	1195592	21239423	1204230	21167436	83040614	71987	9928270	8
53	1198480	21215297	1207181	21142959	82837603	72338	9927922	7
54	1201368	21191230	1210132	21118540	82635570	72690	9927573	6
55	1204255	21167222	1213084	21094179	82434508	73043	9927223	5
56	1207143	21143273	1216036	21069877	82234410	73396	9926872	4
57	1210031	21119381	1218988	21045631	82035268	63750	9926521	3
58	1212918	21095546	1221940	21021441	81837074	74105	9926169	2
59	1215805	21071769	1224892	20997308	81639821	74461	9925816	1
60	1218693	21048049	1227845	20973231	81443502	74818	9925462	0
M								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	1218693	21048049	1227846	20973231	81443502	74818	9925461	60
1	1221580	21024385	1230798	20949209	81248110	75176	9925106	59
2	1224467	21000779	1233751	20925245	81053639	75534	9924750	58
3	1227354	20977230	1236704	20901337	80860083	75893	9924393	57
4	1230241	20953738	1239658	20877485	80667435	76253	9924036	56
5	1233128	20930302	1242612	20853688	80475688	76614	9923678	55
6	1236015	20906922	1245566	20829946	80284835	76976	9923319	54
7	1238901	20883595	1248520	20806256	80094869	77339	9922959	53
8	1241788	20860323	1251474	20782620	79905783	77703	9922598	52
9	1244674	20837106	1254428	20759038	79717572	78068	9922236	51
10	1247560	20813945	1257383	20735512	79530231	78433	9921874	50
11	1250446	20790838	1260338	20712039	79343754	78799	9921511	49
12	1253332	20767785	1263293	20688619	79158136	79166	9921147	48
13	1256218	20744785	1266249	20665251	78973371	79534	9920782	47
14	1259104	20721838	1269205	20641935	78789454	79903	9920416	46
15	1261990	20698946	1272161	20618946	78606379	80272	9920049	45
16	1264876	20676107	1275117	20595465	78424142	80642	9919682	44
17	1267761	20653321	1278073	20572308	78242737	81013	9919314	43
18	1270647	20630588	1281029	20549203	78062159	81385	9918945	42
19	1273532	20607906	1283986	20526148	77882402	81758	9918575	41
20	1276417	20585278	1286943	20503146	77703459	82132	9918204	40
21	1279302	20562701	1289900	20480194	77525324	82507	9917832	39
22	1282187	20540176	1292857	20457293	77347991	82883	9917459	38
23	1285072	20517703	1295815	20434444	77171455	83259	9917086	37
24	1287957	20495281	1298773	20411645	76995710	83636	9916712	36
25	1290841	20472909	1301731	20388895	76820751	84014	9916337	35
26	1293726	20450587	1304689	20366194	76646573	84393	9915961	34
27	1296610	20428316	1307648	20343543	76473170	84773	9915584	33
28	1299494	20406096	1310607	20320942	76300536	85154	9915206	32
29	1302378	20383925	1313566	20298389	76128666	85536	9914828	31
30	1305262	20361806	1316525	20275887	75957554	85919	9914449	30
31	1308146	20339737	1319485	20253435	75787195	86302	9914069	29
32	1311030	20317717	1322445	20231031	75617584	86086	9913688	28
33	1313914	20295748	1325405	20208675	75448716	87071	9913306	27
34	1316798	20273822	1328365	20186365	75280586	87457	9912923	26
35	1319681	20251947	1331325	20164103	75113189	87844	9912540	25
36	1322564	20230120	1334285	20141888	74946521	88232	9912156	24
37	1325447	20208341	1337246	20119720	74780577	88621	9911771	23
38	1328330	20186611	1340207	20097600	74615354	89011	9911385	22
39	1331213	20164931	1342168	20075530	74450847	89401	9910998	21
40	1334096	20143301	1346129	20053509	74287052	89792	9910610	20
41	1336979	20121717	1349891	20031533	74123964	90184	9910221	19
42	1339862	20100180	1352453	20009603	73961579	90577	9909832	18
43	1342744	20078689	1355015	19987718	73799892	90971	9909442	17
44	1345627	20057245	1357977	19965880	73638898	91365	9909051	16
45	1348509	20035846	1360940	19944086	73478593	91760	9908659	15
46	1351392	20014494	1363903	19922338	73318972	92156	9908266	14
47	1354274	19993189	1366866	19900036	73160031	92553	9907873	13
48	1357156	19971931	1369830	19878980	73001766	92951	9907479	12
49	1360038	29950718	1372793	19857368	72844173	93350	9907084	11
50	1362920	19929552	1375757	19829852	72687247	93750	9906688	10
51	1365802	19908432	1378721	19814281	72530983	94151	9906291	9
52	1368683	19887357	1381686	19792805	72375376	94552	9905893	8
53	1371564	19866327	1384650	19771373	72220422	94954	9905494	7
54	1374446	19845341	1387615	19749984	72066117	95357	9905095	6
55	1377327	19824400	1390580	19728639	71912459	95761	9904695	5
56	1380208	19803504	1393545	19707338	71759440	96166	9904294	4
57	1382089	19782652	1396510	19686080	71607058	96572	9903892	3
58	1385970	19761844	1399476	19664865	71455313	96979	9903489	2
59	1388851	19741081	1402442	19643694	71304198	97387	9903084	1
60	1391731	19720362	1405408	19622566	71156707	97796	9902681	0
M.								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	1391731	19720362	1405408	19622566	71153706	97796	9902681	60
1	1394612	19699687	1408374	19601482	71003833	98295	9902276	59
2	1397492	19679054	1411341	19580429	70854576	98615	9901870	58
3	1400373	19658464	1414308	19455438	70705932	99026	9901463	57
4	1403253	19637917	1417275	19538479	70557898	99438	9901055	56
5	1406133	19617413	1420242	19517562	70410470	99851	9900646	55
6	1409013	19596952	1423210	19496687	70263645	100265	9900237	54
7	1411893	19576535	1426178	19475756	70117419	100679	9899827	53
8	1414772	19556160	1429146	19455066	69971789	101094	9899416	52
9	1417652	19535827	1432115	19434317	69826751	101510	9899004	51
10	1420531	19515538	1435084	19413611	69682302	101927	9898591	50
11	1423410	19495290	1438053	19392945	69538439	102345	9898177	49
12	1426289	19475084	1441022	19372320	69395158	102764	9897762	48
13	1429168	19454918	1442992	19351734	69252455	103184	9897347	47
14	1432047	19434794	1446961	19331190	69110326	103604	9896931	46
15	1434926	19414711	1449931	19310686	68968768	104025	9896514	45
16	1437805	19334669	1452901	19290222	68827777	104447	9896096	44
17	1440684	19374668	1455871	19269798	68687250	104870	9895677	43
18	1443562	19354705	1458842	19249414	68547438	105394	9895257	42
19	1446441	19334787	1461813	19229068	68408173	105719	9894837	41
20	1449319	19314908	1464784	19208765	68269416	106145	9894416	40
21	1452197	19295052	1467755	19188501	68131209	106071	9893994	39
22	1455075	19275237	1470727	19168277	67993549	106998	9893571	38
23	1457953	19255511	1473699	19148091	67856423	107426	9893147	37
24	1460831	19235790	1476671	19127943	67719855	107855	9892723	36
25	1463708	19216118	1479644	19107833	67583815	108285	9892298	35
26	1466586	19196487	1482617	19087761	67448309	108716	9891872	34
27	1469463	19176875	1485590	19067727	67313334	109148	9891445	33
28	1472340	19157313	1488563	19047732	67178887	109581	9891017	32
29	1475217	19137792	1491536	19027777	67044965	110015	9890588	31
30	1478094	19118310	1494510	19007861	66911564	110449	9890159	30
31	1480971	19098865	1497484	18987981	66778681	110884	9889729	29
32	1483848	19079459	1500458	18968139	66646313	111320	9889298	28
33	1486724	19060091	1503433	18908334	66514457	111757	9888866	27
34	1489601	19040761	1506408	18928566	66383110	112195	9888433	26
35	1492477	19021469	1509383	18908835	66252268	112634	9887999	25
36	1495353	19002215	1512358	18889141	66121928	113074	9887564	24
37	1498229	18982999	1515334	18869485	65992087	113514	9887128	23
38	1501104	18963822	1518310	18849867	65862743	113955	9886692	22
39	1503981	18944682	1521286	18830285	65733894	114397	9886255	21
40	1506857	18925581	1524262	18810741	65605537	114840	9885817	20
41	1509733	18906517	1527239	18791233	65477669	115284	9885378	19
42	1512608	18887489	1530216	18771760	65350287	115729	9884938	18
43	1515484	18868498	1533193	18752323	65223388	116175	9884498	17
44	1518359	18849543	1536170	18732921	65096969	116622	9884057	16
45	1521234	18830625	1539148	18713556	64971028	117069	9883615	15
46	1524109	18811744	1542126	18694227	64845563	117517	9883172	14
47	1526984	18792899	1545104	18674933	64720571	117966	9882728	13
48	1529859	18774090	1548082	18655674	64596049	118416	9882283	12
49	1532734	18755318	1551061	18636451	64471994	118867	9881838	11
50	1535608	18736581	1554040	18617262	64348404	119319	9881392	10
51	1538482	18717882	1557019	18598111	64225276	119771	9880945	9
52	1541356	18699218	1559999	18578994	64102607	120224	9880497	8
53	1544230	18680589	1562979	18559911	63980394	120678	9880048	7
54	1547104	18661995	1565959	18540862	63858635	121133	9879598	6
55	1549978	18643437	1568939	18521848	63737327	121589	9879148	5
56	1552755	18624915	1571920	18502869	63616468	122046	9878697	4
57	1555725	18606428	1574901	18483924	63496056	122504	9878245	3
58	1558599	18587975	1577882	18465013	63376089	122962	9877792	2
59	1561472	18569557	1580863	18446136	63256564	123421	9877338	1
60	1564345	18551174	1583844	18427293	63137478	123881	9876883	0
M.								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	1564345	18551174	1583844	18427293	63137478	123881	9876883	60
1	1567218	18532826	1586826	18408484	63018829	124342	9876427	59
2	1570091	18514511	1589808	18389707	62900615	124804	9875971	58
3	1572964	18496231	1592791	18370964	62782833	125267	9875514	57
4	1575837	18477984	1595774	18352253	62665481	125731	9875056	56
5	1578709	18459772	1598757	18333576	62548556	126196	9874597	55
6	1581681	18441594	1601740	18314933	62432056	126661	9874137	54
7	1584453	18423451	1604723	18296324	62315979	127127	9873677	53
8	1587325	18405341	1607707	18277747	62200323	127594	9873216	52
9	1590197	18387265	1610691	18259203	62085085	128062	9872754	51
10	1593069	18369223	1613675	18240692	61970263	128531	9872291	50
11	1595941	18351214	1616660	12222213	61855854	129001	9871827	49
12	1598812	18333237	1619645	18203765	61741856	129472	9871362	48
13	1601684	18315294	1622630	18185351	61628267	129943	9870897	47
14	1604555	18297384	1625615	18166969	61515085	130415	9870431	46
15	1607426	18279507	1628601	18148619	61402307	130888	9869964	45
16	1610297	18261663	1631587	18130301	61289930	131362	9869496	44
17	1613168	18243851	1634573	18112014	61177952	131837	9869027	43
18	1616038	18226071	1637560	18093758	61066370	132313	9868557	42
19	1618909	18208323	1640547	18075533	60955184	132790	9868087	41
20	1621779	18190606	1643534	18057338	60844392	133268	9867616	40
21	1624629	18172624	1646522	18039177	60733992	133747	9867144	39
22	1627519	18155273	1649510	18021047	60623981	134226	9866671	38
23	1630389	18137655	1652499	18002948	60514358	134706	9866197	37
24	1633259	18120067	1655488	17984885	60405121	135187	9865722	36
25	1636129	18102511	1658477	17966842	60296268	135669	9865246	35
26	1638999	18084987	1661466	17948835	60187796	136152	9864770	34
27	1641868	18067495	1664456	17930859	60079705	136636	9864293	33
28	1644738	18050034	1667446	17912913	59971987	137121	9863815	32
29	1647607	18032604	1670436	17894997	59864646	137607	9863336	31
30	1650476	18015207	1673426	17877114	59757678	138094	9862856	30
31	1653345	17997839	1676417	17859259	59651081	138580	9862376	29
32	1656214	17980501	1679408	17841435	59544852	139068	9861895	28
33	1659082	17963198	1682399	17823641	59438989	139557	9861413	27
34	1661951	17945922	1685390	17805875	59333490	140047	9860930	26
35	1664819	17928677	1688382	17788139	59228353	140538	9860446	25
36	1667687	17911463	1691374	17770433	59123576	141030	9859961	24
37	1670555	17894281	1694366	17752759	59019157	141522	9859475	23
38	1673423	17877128	1697358	17735113	58915095	142015	9858989	22
39	1676291	17860006	1700351	17717497	58811388	142509	9858502	21
40	1679159	67842915	1703344	17699911	58708035	143004	9858014	20
41	1682027	17825852	1706337	17682352	58605034	143500	9857525	19
42	1684894	17808820	1709331	17664823	58502385	143997	9857035	18
43	1687761	17791817	1712325	17647322	58400087	144493	9856544	17
44	1690628	17774843	1715319	17629849	58298138	144994	9856053	16
45	1693495	17757899	1718313	17612406	58196536	145493	9855561	15
46	1696362	17740985	1721308	17594992	58095279	145993	9855068	14
47	1699229	17724100	1724304	17577606	57994366	146494	9854574	13
48	1702095	17707244	1727300	17560248	57893795	146996	9854079	12
49	1704962	17690418	1730296	17542919	57793564	147499	9853583	11
50	1707828	17673622	1733292	17525619	57693670	148003	9853087	10
51	1710694	17656856	1736287	17508349	57594111	148507	9852590	9
52	1713560	17640118	1739284	17491106	57494885	149012	9852092	8
53	1716426	17623408	1742281	17473890	57395990	149518	9851593	7
54	1719292	17606726	1745278	17456701	57297425	150025	9851093	6
55	1722157	17590073	1748275	17439540	57199188	150533	9850593	5
56	1725022	17573448	1751273	17422406	57101277	151042	9850092	4
57	1727887	17556851	1754271	17405299	57003690	151552	9849590	3
58	1730753	17540283	1757270	17388220	56906425	152063	9849087	2
59	1733617	17523744	1760269	17371169	56809480	152575	9848583	1
60	1736482	17507234	1763268	17354146	56712854	153088	9848078	0
M.								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	1730452	17507234	1763268	17354146	36712854	153088	9848078	60
1	1739347	17490751	1766268	17337150	56616545	155601	9847572	59
2	1742211	17474296	1769268	17320181	56520550	154115	9847066	58
3	1745075	17457869	1772268	17303239	56424868	154630	9846559	57
4	1747939	17441470	1775269	17286324	56239498	155146	9846051	56
5	1750803	17425098	1778270	17269435	56234439	155663	9845542	55
6	1753667	17408754	1781271	17252573	56139689	156181	9845032	54
7	1756531	17392438	1784272	17235738	56045247	156700	9844521	53
8	1759394	17376149	1787274	17218929	55951112	157220	9844010	52
9	1762258	17359887	1790276	17202147	55857283	157740	9843498	51
10	1765121	17343652	1793278	17185391	55763759	158261	9842985	50
11	1767984	17327444	1796281	17168661	55670539	158783	9842471	49
12	1770847	17311263	1799284	17151957	55577622	159306	9841956	48
13	1773710	17295109	1802287	17135279	55485007	159830	9841440	47
14	1776573	17278982	1805291	17118627	55392692	160355	9840924	46
15	1779435	17262882	1808295	17182001	55300676	160881	9840407	45
16	1782298	17246809	1811299	17085401	55208958	161408	9839889	44
17	1785160	17230762	1814303	17068827	55117535	161935	9839370	43
18	1788022	16214742	1817308	17052279	55029406	162463	9838850	42
19	1790884	17198749	1820313	17035757	54935569	162992	9838329	41
20	1793746	17182783	1823318	17019261	54845022	163522	9837808	40
21	1796608	1716684:	1826324	17002790	54754764	164053	9837286	39
22	1799469	17150929	1829329	16986344	54664793	164585	9836763	38
23	1802331	1713504.	1832335	16969924	54575107	165117	9836239	37
24	1805192	17119179	1835342	16953529	54485705	165650	9835714	36
25	1808053	17103342	1838349	16937158	54396586	166184	9835189	35
26	1810914	17087531	1841357	16920812	54307748	166719	9834663	34
27	1813774	17071746	1844365	16904491	54219190	167255	9834136	33
28	1816634	17055987	1847373	16888195	54130911	167792	9833608	32
29	1819495	17040154	1850382	16871924	54042909	168330	9833079	31
30	1822355	17024547	1853391	16855678	53955183	168869	9832549	30
31	1825215	17008866	1856400	16839458	53867731	169408	9832019	29
32	1828075	16993210	1859409	16823262	53780552	169948	9821488	28
33	1830935	16977579	1862419	16807090	53693644	170489	9830956	27
34	1833795	16961973	1865429	16790942	53607006	171031	9830423	26
35	1836654	16946392	1868439	16774818	53520637	171574	9829889	25
36	1839513	16930836	1871449	16758718	53434536	172118	9829354	24
37	1842372	16915305	1874460	16742642	53348702	172663	9828818	23
38	1845231	16899799	1877471	16726590	53263134	173209	9828282	22
39	1848090	16884317	1880482	16710561	53177831	173756	9827744	21
40	1850949	16868860	1883494	16694557	53092792	174303	9827206	20
41	1853808	16853428	1886506	16678577	53008016	174851	9826667	19
42	1856666	16838021	1889518	16662621	52923503	175400	9826128	18
43	1859524	16822638	1892531	16646688	52839251	175950	9825587	17
44	1862382	16807280	1895544	16630779	52755259	176501	9825046	16
45	1865240	16791946	1898558	16614893	52671525	177053	9824504	15
46	1868098	16776636	1901572	16599030	52588048	177606	9823961	14
47	1870956	16761351	1904586	16583191	52504826	178160	9823417	13
48	1873813	16746090	1907601	16567375	52421857	178715	9822872	12
49	1876670	16730853	1910616	16551583	52339140	179270	9822227	11
50	1879527	16715640	1913632	16535814	52256673	179826	9821781	10
51	1882384	16700451	1916648	16520068	52174455	180383	9821234	9
52	1885241	16685286	1919664	16504345	52092485	180941	9820686	8
53	1888098	16670145	1922680	16488645	52010762	181500	9820137	7
54	1890954	16655028	1925697	16472968	51929285	182060	9819587	6
55	1893810	16639934	1928714	16457313	51848053	182621	9819037	5
56	1896666	16624864	1931731	16441681	51767065	183183	9818486	4
57	1899522	16609817	2934749	16426072	51686321	183745	9817934	3
58	1902378	16594794	1937767	16410486	51605820	184308	9817381	2
59	1905234	16579794	1940785	16394922	51525561	184872	9816827	1
60	1908090	16564818	1943803	16379381	51445543	185437	9816272	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	1908090	16564818	1943803	16379381	51445543	185437	9816272	60
1	1910945	16549865	1946822	16363862	51365765	186003	9815716	59
2	1913800	16534935	1949841	16348365	51286225	186570	9815160	58
3	1916655	16520028	1952861	16332890	51206922	187138	9814603	57
4	1919510	16505144	1955881	16317458	51127855	187706	9814045	56
5	1922365	16490283	1658901	16302008	51049023	277175	9813486	55
6	1925220	16475445	1961922	16286600	50970425	188845	9812926	54
7	1928074	16460630	1964943	16271214	50892060	189416	9812366	53
8	1930928	16445837	1967964	16255849	50813927	189986	9811850	52
9	1933782	16431067	1970985	16240506	50736025	190561	9811243	51
10	1936636	16416320	1974007	16225185	50658353	191135	9810680	50
11	1939490	16401596	1977029	16209886	50580910	191710	9810116	49
12	1942344	16386895	1980052	16194610	50503695	192285	9809551	48
13	1945197	16372216	1983075	16179355	50426707	192861	9808986	47
14	1948050	16357559	1986098	16164121	50349935	193438	9808420	46
15	1950903	16342924	1989122	16148908	50273407	194016	9807853	45
16	1953756	16328311	1992146	16133716	50197092	194595	9807285	44
17	1956609	16313720	1995171	16118545	50120999	195175	9806716	43
18	1959462	16299151	1998196	16103395	50045127	195756	9806147	42
19	1962314	16284604	2001221	16088266	49969475	196338	9805577	41
20	1965166	16270079	2004247	16073159	49894042	196920	9805006	40
21	1968018	16255576	2007273	16058073	49818827	197503	9804434	39
22	1970870	16241095	2010299	16043008	49743829	198087	9803861	38
23	1973722	16226636	2013326	16027964	49669047	198672	9803287	37
24	1976574	16212198	2016353	16012940	49594481	199258	9802712	36
25	1979425	16197782	2019380	15997937	4952013c	199845	9802137	35
26	1982276	16183388	2022408	15982955	49445993	200433	9801561	34
27	1985127	16169016	2025436	15967994	49372069	201022	9800984	33
28	1987978	16154665	2028464	15953053	49298357	201612	9800406	32
29	1990829	16140336	2031493	15938133	49224856	202203	9799827	31
30	1993679	16126028	2034522	15923233	49151565	202793	9799247	30
31	1996530	15111742	2037552	15908355	49078483	203387	9798667	29
32	1999380	16097477	2040582	15893497	49005610	203980	9798086	28
33	2002230	19083232	2043612	15878658	48932945	204574	9797504	27
34	2005080	16069008	2046643	15863839	48860488	205169	9796921	26
35	2007930	16054805	2049674	15849040	48788238	205765	9796337	25
36	2010780	16040623	2052705	15834261	48716193	206362	9795753	24
37	2013629	16026462	2055737	15819502	48644352	206960	9795168	23
38	2016478	16012322	2058769	15804764	48572714	207558	9794582	22
39	2019327	15998203	2061801	15790046	48501278	208157	9793995	21
40	2022176	15984105	2064834	15775348	48430043	208757	9793407	20
41	2025025	15970028	2067867	15760670	48359008	209358	9792818	19
42	2027874	15955972	2070900	15746012	48288171	209960	9792228	18
43	2030722	15941936	2073934	15731373	48217531	210163	9791638	17
44	2033570	15927921	2076968	15716754	48147088	211167	9791047	16
45	2036418	15913926	2080002	15702154	48076841	211772	9790455	15
46	2039266	15899951	2083037	15687573	48006790	212378	9789862	14
47	2042114	15885996	2086073	15673012	47936934	212984	9789268	13
48	2044962	15872062	2089109	15658461	47867274	213591	9788674	12
49	2047809	15858148	2092145	15643949	47797809	214199	9788079	11
50	2050656	15844254	2095182	15629446	47728538	214808	9787483	10
51	2053503	15830371	2098219	15614953	47659460	215418	9786886	9
52	2056350	15816518	2101256	15600489	47590575	216029	9786288	8
53	2059197	15802685	2104293	15586044	47521882	216641	9785689	7
54	2062043	15788871	2107331	15571617	47453380	217254	9785090	6
55	2064889	15775077	2110369	15557210	47385067	217867	9784490	5
56	2067735	15761303	2113407	15542822	47316942	218481	9783889	4
57	2070581	15747559	2116446	15528463	47249003	219096	9783287	3
58	2073427	15733824	2119485	15514112	47181249	219712	9782684	2
59	2076272	15720109	2122525	15499780	47113680	220329	9782080	1
60	2079117	15706414	2125565	15485467	47046295	220947	9781476	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2079137	15706414	2125565	15485467	47046295	220947	9781476	60
1	2081962	15692738	2128605	15471172	46979093	221866	9780871	59
2	2084807	15679082	2141646	15456896	46912075	222186	9780265	58
3	2087652	15665445	2134687	15442639	46845240	222806	9779658	57
4	2090497	15651828	2137729	15428401	46778587	223427	9779050	56
5	2093342	15638230	2140771	15414181	46712115	224049	9778442	55
6	2096180	15624651	2143814	15399979	46645823	224672	9777833	54
7	2099030	15611092	2146857	15385796	46579711	225296	9777223	53
8	2101874	15597552	2149900	15371632	46513778	225921	9776612	52
9	2104718	15584031	2152944	15357484	46448023	226547	9776000	51
10	2107562	15570530	2155988	15343356	46382445	227174	9775387	50
11	2110405	15557048	2159032	15329246	46317043	227802	9774773	49
12	2113248	15543585	2162077	15315155	46251817	228430	9774157	48
13	2116091	15530141	2165122	15301062	46186767	229052	9773544	47
14	2118934	15516715	2168167	15287026	46121892	229689	9772928	46
15	2121777	15503308	2171213	15272988	46057192	230320	9772311	45
16	2124620	15489920	2174259	15258968	45992666	230953	9771693	44
17	2127462	15476551	2177306	15244966	45928314	231585	9771075	43
18	2130304	15463200	2180352	15230981	45864135	232219	9770456	42
19	2133146	15449868	2183400	15217014	45800128	232854	9769836	41
20	2135988	15436554	2186448	15203064	45736291	233490	9769215	40
21	2138830	15423259	2189496	15189133	45672623	234126	9768593	39
22	2141671	15409982	2192544	15175219	45609123	234763	9767970	38
23	2144512	15396724	2195593	15161323	45545790	235401	9767347	37
24	2147353	15383484	2198642	15147444	45482623	236040	9766723	36
25	2150194	15370262	2201692	15133582	45419621	236680	9766098	35
26	2153035	15357059	2204742	15119738	45356785	237321	9765472	34
27	2155876	15343874	2207792	15105911	45294114	237963	9764845	33
28	2158716	15330708	2210843	15092102	45231607	238600	9764217	32
29	2161556	15317560	2213894	15078310	45169263	239250	9763589	31
30	2164396	15304430	2216946	15064535	45107083	239895	9762960	30
31	2167236	15291319	2219998	15050779	45045065	240540	9762330	29
32	2170076	15278226	2223051	15037040	44983211	241186	9761699	28
33	2172916	15265150	2226104	15023317	44921521	241833	9761067	27
34	2175755	15252092	2229157	15009611	44859993	242481	9760435	26
35	2178594	15239052	2232211	14995922	44798626	243130	9759802	25
36	2181433	15226030	2235265	14982250	44737419	243780	9759168	24
37	2184272	15213025	2238319	14968594	44676371	244431	9758533	23
38	2187111	15200038	2241374	14954955	44615481	245083	9757897	22
39	2189948	15187068	2244429	14941333	44554749	245735	9757260	21
40	2192787	15174116	2247485	14927728	44494174	246388	9756623	20
41	2195625	15161182	2250541	14914140	44433756	247042	9755985	19
42	2198463	15148266	2253597	14900569	44373494	249697	9755346	18
43	2201300	15135367	2256654	14887014	44313387	248353	9754706	17
44	2204137	15122485	2259711	14873475	44253435	249010	9754065	16
45	2206974	15109621	2262769	14859953	44193637	249668	9753423	15
46	2209811	15096774	2265827	14846447	44133992	250327	9752781	14
47	2212648	15083944	2268885	14832957	44074501	250987	8752138	13
48	2215485	15071132	2271944	14819485	44015263	251647	9751494	12
49	2218322	15058337	2275003	14806029	43955977	252308	9750849	11
50	2221158	15045559	2278063	14792589	43896942	252970	9750203	10
51	2223994	15032799	2281123	14779166	43838057	253633	9749557	9
52	2226830	15020056	2284183	14765759	43779321	254297	97489.0	8
53	2229666	15007330	2287244	14752368	43720733	254962	9748262	7
54	2232502	14994620	2290305	14738992	43662293	255628	9747613	6
55	2235337	14981927	2293367	14725632	43604000	256295	9746962	5
56	2238172	14969251	2296429	14712288	43545855	256963	9746312	4
57	2241007	14956592	2299492	14698960	43487857	257632	9745660	3
58	2243842	14943950	2302555	14685649	43430006	258301	9745008	2
59	2246677	14931325	2305618	14672354	43372301	258971	9744355	1
60	2249511	14918717	2308682	14659075	43314742	256942	9743700	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	2249511	14918717	2308682	14659075	43314749	259642	9743001	60
1	2252345	14906126	2311746	14645812	43257328	260314	9743045	59
2	2255179	14893551	2314810	14632564	43200060	260987	9742389	58
3	2258013	14880993	2317875	14619332	43142947	261661	9741733	57
4	2260847	14868452	2320940	14606116	43085958	262336	9741076	56
5	2263680	14855927	2324006	14592916	43029122	263011	9740418	55
6	2266513	14843419	2327072	14579732	42972429	263687	9739759	54
7	2269346	14830928	2330139	14566564	42915878	264364	9739099	53
8	2272179	14818453	2333206	14553411	42859468	265042	9738439	52
9	2275012	14805995	2336273	14540274	42803199	265721	9737778	51
10	2277844	14793553	2339341	14527152	42747070	266401	9737116	50
11	2280676	14781128	2342419	14514046	42691080	267082	9736453	49
12	2283508	14768719	2345478	14500955	42635228	267764	9735789	48
13	2286340	14756325	2348547	14487878	42579514	268447	9735124	47
14	2289172	14743947	2351616	14474817	42523937	269130	9734459	46
15	2292004	14731585	2354686	14461771	42468497	269814	9733793	45
16	2294835	14719239	2357757	14448740	42413193	270499	9733126	44
17	2297666	14706909	2360828	14435724	42358025	271185	9732458	43
18	2300497	14694595	2363899	14422723	42302993	271872	9731789	42
19	2303328	14682297	2366971	14409737	42248096	272560	9731120	41
20	2306159	14670015	2370043	14396766	42193334	273249	9730450	40
21	2308989	14657749	2373116	14383810	42138706	273939	9729779	39
22	2311819	14645498	2376189	14370868	42084211	274630	9729107	38
23	2314649	14633263	2379263	14357941	42029848	275322	9728434	37
24	2317479	14621044	2382337	14345029	41975617	276015	9727760	36
25	2320309	14608841	2385411	14332132	41921518	276709	9727085	35
26	2323138	14596654	2388486	14319250	41867550	277404	9726409	34
27	2325967	14584483	2391561	14306384	41813712	278099	9725733	33
28	2328796	14572328	2394636	14293533	41760003	278795	9725056	32
29	2331625	14560189	2397712	14280697	41706424	279492	9724378	31
30	2334454	14548066	2400788	14267876	41652974	280190	9723699	30
31	2337282	14535958	2403865	14255069	41599653	280889	9723020	29
32	2340110	14523866	2406942	14242277	41546464	281589	9722340	28
33	2342938	14511789	2410020	14229500	41493407	282289	9721659	27
34	2345766	14499727	2413098	14216737	41440480	282990	9720977	26
35	2348594	14487680	2416176	14203988	41387683	283692	9720294	25
36	2351421	14475648	2419255	14191253	41335015	284395	9719610	24
37	2354248	14463632	2422334	14178533	41282475	285099	9718926	23
38	2357075	14451631	2425414	14165827	41230062	285804	9718241	22
39	2359902	14439645	2428494	14153135	41177775	286510	9717555	21
40	2362729	14427674	2431574	14140457	41125614	287217	9716868	20
41	2365555	14415718	2434655	14127793	41073577	287925	9716180	19
42	2368381	14403777	2437736	14115143	41021663	288934	9715491	18
43	2371207	14391851	2440818	14102507	40969871	289344	9714802	17
44	2374033	14379941	2443900	14089887	40918201	290054	9714112	16
45	2376859	14368046	2446983	14077281	40866652	290765	9713421	15
46	2379684	14356166	2450066	14064689	40815224	291477	9712729	14
47	2382509	14344301	2453150	14052111	40763917	292190	9712036	13
48	2385334	14332451	2456234	14039547	40712731	292904	9711343	12
49	2388159	14320616	2459319	14026997	40661665	293619	9710649	11
50	2390983	14308796	2462404	14014461	40610718	294335	9709954	10
51	2393808	14296991	2465490	14001939	40559890	295052	9709258	9
52	2396632	14285200	2468576	13989430	40509183	295770	9708561	8
53	2399456	14273424	2471662	13976935	40458596	296489	9707863	7
54	2402280	14261662	2474749	13964453	40408129	297209	9707165	6
55	2405104	14249915	2477836	13951986	40357781	297929	9706466	5
56	2407927	14238182	2480924	13939532	40307552	298650	9705766	4
57	2410750	14226464	2484012	13927092	40257440	299372	9705065	3
58	2413574	14214761	2487101	13914666	40207446	300095	9704363	2
59	2416396	14203072	2490191	13902253	40157569	300819	9703660	1
60	2419219	14191398	2494280	13889854	40107808	301544	9702957	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2419219	14191398	2493280	13889854	40107809	301544	9702957	90
1	2422041	14179738	2490370	13877468	40058165	302270	9702253	59
2	2423863	14168092	2499411	13865095	40008633	302997	9701548	58
3	2427685	14156461	2502552	13852737	39959218	303724	9700842	57
4	2430507	14144844	2505643	13840392	39909917	304452	9700135	56
5	2433329	14133242	2508735	13828061	39860729	305181	9699428	55
6	2436150	14121654	2511827	13815743	39811654	305911	9698720	54
7	2438971	14110081	2514920	13803439	39762695	306642	9698011	53
8	2441792	14098522	2518013	13791148	39713852	307374	9697301	52
9	2444613	14086977	2521106	13778870	39665124	308107	9696590	51
10	2447434	14075447	2524200	13766606	39616509	308841	9695879	50
11	2450254	14063931	2527294	13754355	39568006	309576	9695167	49
12	2453074	14052429	2530389	13742117	39519614	310312	9694454	48
13	2455894	14040940	2533484	13729891	39471331	311049	9693740	47
14	2458714	14029465	2536580	13717679	39423158	311786	9693025	46
15	2461533	14018004	2539676	13705480	39375094	312524	9692309	45
16	2464352	14006557	2542773	13693294	39327139	313263	9691593	44
17	2467171	13995124	2545870	13681121	39279294	314003	9690876	43
18	2469990	13983705	2548968	13668961	39231557	314744	9690158	42
19	2472809	13972300	2552066	13656814	39183929	315486	9689439	41
20	2475628	13960909	2555165	13644680	39136409	316229	9688719	40
21	2478446	13949532	2558264	13632559	39088998	316973	9687998	39
22	2481264	13938168	2561364	13620450	39041695	317718	9687277	38
23	2484082	13926818	2564464	13608354	38994501	318464	9686555	37
24	2486900	13915482	2567564	13596272	38947416	319210	9685832	36
25	2489717	13904159	2570665	13584202	38900438	319957	9685108	35
26	2492534	13892850	2573766	13572145	38853567	320705	9684383	34
27	2495351	13881554	2576868	13560100	38806801	321454	9683657	33
28	2498168	13870272	2579970	13548068	38760139	322204	9682931	32
29	2500984	13859004	2583073	13536049	38713580	322955	9682204	31
30	2503800	13847749	2586176	13524042	38667125	323707	9681476	30
31	2506616	13836508	2589280	13512048	38620772	324460	9680747	29
32	2509431	13825280	2592384	13500066	38574525	325214	9680017	28
33	2512248	13814066	2595489	13488097	38528384	325969	9679287	27
34	2515064	13802865	2598594	13476141	38482347	326724	9678556	26
35	2517879	13791678	2601700	13464198	38436414	327480	9677824	25
36	2520694	13780504	2604806	13452267	38390584	328237	9677091	24
37	2523509	13769343	2607912	13440348	38344857	328995	9676357	23
38	2526324	13758195	2611019	13428441	38299232	329754	9675623	22
39	2529138	13747061	2614126	13416547	38253708	330514	9674888	21
40	2531952	13735940	2617234	13404665	38208285	331275	9674152	20
41	2534766	13724833	2620342	13392796	38162963	332037	9673415	19
42	2537580	13713739	2623451	13380939	38117740	332800	9672677	18
43	2540391	13702658	2626560	13369094	38072616	333564	9671938	17
44	2543206	13691590	2629670	13357262	38027592	334328	9671199	16
45	2546019	13680535	2632780	13345442	37982666	335093	9670459	15
46	2548831	13669493	2635891	13333634	37937838	335859	9669718	14
47	2551645	13658464	2639002	13321838	37893109	336626	9668976	13
48	2554458	13647448	2642114	13310054	37848479	337394	9668233	12
49	2557270	13636445	2645226	13298282	37803948	338163	9667490	11
50	2560082	13625454	2648339	13286521	37759515	338933	9666746	10
51	2562894	13614476	2651452	13274772	37715180	339704	9666001	9
52	2565706	13603511	2654566	13263035	37670943	340476	9665255	8
53	2568517	13592559	2657680	13251310	37626803	341249	9664508	7
54	2571328	13581620	2660795	13239597	37582760	342023	9663761	6
55	2574139	13570694	2663910	13227896	37538814	342798	9663013	5
56	2576950	13559781	2667026	13216208	37494964	343573	9662264	4
57	2579760	13548880	2670142	13204531	37451210	344349	9661514	3
58	2582570	13537992	2673258	13192866	37407551	345126	9660763	2
59	2585380	13527117	2676375	13181213	37363987	345904	9660011	1
60	2588190	13516255	2679492	13165572	37320517	346683	9659258	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	2588190	13516255	2679492	13165572	37320517	346683	9659258	60
1	2591000	13505406	2682610	13157943	37277141	347463	9658505	59
2	2593810	13494570	2685728	13146326	37233859	348244	9657751	58
3	2596618	13483746	2688847	13134720	37190670	349026	9656996	57
4	2599427	13472934	2691966	13125126	37147574	349808	9656240	56
5	2602236	13462435	2695086	13111544	37104570	350591	9655484	55
6	2605045	13451348	2698206	13099973	37061659	351375	9654727	54
7	2607853	13440573	2701327	13088413	37018840	352160	9653969	53
8	2610661	13429810	2704448	13076864	36976114	352946	9653210	52
9	2613469	13419060	2707570	13065327	36933479	353733	9652450	51
10	2616277	13408322	2710693	13053801	36890936	354521	9651689	50
11	2619084	13397596	2713816	13042286	36848483	355310	9650927	49
12	2621891	13386183	2716940	13030783	36806121	356100	9950165	48
13	2624698	13376182	2720064	13019291	36763849	356891	9649402	47
14	2627505	13365493	2723189	13007810	36721666	357683	9648638	46
15	2630312	13354817	2726314	12996341	36679574	358476	9647873	45
16	2633118	13344153	2729439	12984883	36637572	359270	9647108	44
17	2635924	13333502	2732565	12973438	36595659	360064	9646342	43
18	2638730	13322863	2735691	12962004	36553836	360859	9645575	42
19	2641536	13312237	2738818	12950582	36512103	361655	9644807	41
20	2644342	13301623	2741945	12939171	36470459	362452	9644038	40
21	2647147	13291022	2745073	12927772	36428903	363250	9643268	39
22	2649952	13280432	2748201	12916383	36387437	364049	9642498	38
23	2652757	13269854	2751330	12905005	36346060	364849	9641727	37
24	2655562	13259288	2754459	12893638	36304771	365650	9640955	36
25	2658366	13248734	2757589	12882282	36263570	366452	9640182	35
26	2661170	13238191	2760729	12870936	36222456	367255	9639408	34
27	2663974	13227660	2763850	12859601	36181427	368059	9638633	33
28	2666777	13217141	2766981	12848278	36140483	368863	9637858	32
29	2669580	13206633	2770113	12836965	36099623	369668	9637082	31
30	2672383	13196137	2773245	12825663	36058848	370474	9636305	30
31	2675186	13185653	2776378	12814372	36018156	371281	9635527	29
32	2677989	13175181	2779511	12803092	35977550	372089	9634748	28
33	2680792	13164721	2782645	12791823	35937029	372898	9633969	27
34	2683595	13154273	2785779	12780565	35896593	373708	9633189	26
35	2686397	13143837	2788914	12769318	35856241	374516	9632408	25
36	2689199	13133413	2792050	12758082	35815973	375331	9631626	24
37	2692001	13123000	2795186	12746856	35775789	376144	9630843	23
38	2694802	13112599	2798323	12735641	35735689	376958	9630059	22
39	2697603	13102210	2801460	12724438	35695692	379772	9629275	21
40	2700404	13091833	2804597	12713246	35655739	378587	9628490	20
41	2703205	13081468	2807735	12702065	35615888	379403	9627704	19
42	2706005	13071114	2810873	12690894	35576121	380220	9626917	18
43	2708805	13060771	2814012	12679733	35536438	381038	9626129	17
44	2711605	13050440	2817151	12668583	35496838	381857	9625341	16
45	2714405	13040120	2820291	12657443	35457320	382677	9624552	15
46	2717204	13029812	2823432	12646314	35417883	283498	9623762	14
47	2720003	13019515	2826573	12635195	35378528	384320	9622971	13
48	2722802	13005229	2829714	12624086	35339253	385143	9622179	12
49	2725601	12998955	2832856	12612988	35300059	385967	9621387	11
50	2728400	12988692	2835999	12601901	35260945	386791	9620594	10
51	2731198	12978441	2839142	12590825	35221911	387616	9619800	9
52	2733996	12968291	2842286	12579759	35182956	388442	9619005	8
53	2736794	12957972	2845430	12568793	35144080	389269	9618209	7
54	2639592	12947755	2848575	12557658	35105283	390097	9617413	6
55	2742389	12637549	2851720	12546623	35066565	390926	9616616	5
56	2745186	12927354	2854866	12535598	35027925	391756	9615818	4
57	2747983	12917171	2858012	12524584	34989364	392587	9615019	3
58	2750789	12906999	2861159	12513580	34950881	393419	9614219	2
59	2753577	12896838	2864306	12502586	34912477	394252	9613418	1
60	2756373	12886689	2867454	12491603	34874151	395086	9612617	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2730373	12886089	2867453	12491603	34874151	395086	9612617	60
1	2759169	12876551	2870601	12480630	34835903	395921	9611815	59
2	2701965	12866423	2873749	12459667	34797733	396756	9611012	58
3	2764761	12856306	2876898	12458714	34759640	397592	9610208	57
4	2767556	12846200	2880048	12447771	34721625	398429	9609403	56
5	2770351	12836105	2883198	12436838	34683686	399267	9608598	55
6	2773146	12826021	2886349	12425915	34645824	400106	9607792	54
7	2775941	12815948	2889501	12415002	34608038	400946	9606985	53
8	2778735	12805886	2892653	12404099	34570327	401787	9606177	52
9	2781529	12795835	2895806	12393206	34532692	402629	9605368	51
10	2784323	12785795	2898960	12382323	34495132	403472	9604559	50
11	2787117	12775766	2902114	12371450	34457647	404316	9603749	49
12	2789911	12765748	2905268	12360587	34420237	405161	9602938	48
13	2792704	12755741	2908423	12349734	34382903	406007	9602126	47
14	2795497	12745745	2911578	12338891	34345644	406884	9601313	46
15	2798290	12735760	2914734	12328059	34308459	407701	9600499	45
16	2801082	12725785	2917890	12317236	34271348	488549	9599685	44
17	2803874	12715821	2921047	12306423	34234310	409398	9598870	43
18	2806666	12705868	2924204	12295620	34197345	410248	9598054	42
19	2809458	12695926	2927362	12284827	34160453	411099	9597237	41
20	2812250	12685995	2930520	12274044	34123634	411951	9596419	40
21	2815041	12676075	2933679	12263271	34086888	412804	9595600	39
22	2817832	12666166	2936839	12252508	34050215	413658	9594781	38
23	2820623	12656267	2939999	12241754	34013615	414513	9593961	37
24	2823414	12646379	2943160	12231010	33977088	415369	9593140	36
25	2826203	12636501	2946321	12220275	33940634	416226	9592318	35
26	2828994	12626633	2949483	12209550	33904252	417083	9591495	34
27	2831784	12616776	2952645	12197835	33867942	317941	9590672	33
28	2834574	12606929	2955808	12188129	33831703	418800	9589848	32
29	2837364	12597093	2958971	12177433	33795535	419660	9589023	31
30	2840153	12587267	2962135	12166746	33759438	420521	9588197	30
31	2842942	12577452	2965299	12156069	33723410	421383	9587371	29
32	2845731	12567647	2968464	12145401	33687453	422246	9586544	28
33	2848520	12557853	2971629	12134743	33651566	423110	9585716	27
34	2851308	12548069	2974795	12124094	33615750	423975	9584887	26
35	2854095	12538296	2977962	12113455	33580005	424841	9584057	25
36	2856884	12528533	2981129	12102825	33544330	425708	9583226	24
37	2859672	12518780	2984297	12092204	33508725	426576	9582395	23
38	2862459	12509038	2987465	12081593	33473188	427445	9581563	22
39	2865246	12499306	2990634	12070992	33437720	428314	9580730	21
40	2868033	12489585	2993804	12060401	33402321	429184	9579896	20
41	2870819	12479874	2996973	12049819	33366990	430055	9579061	19
42	2873606	12470174	3000143	12039247	33331728	430927	9578225	18
43	2876391	12460484	3003314	12028684	33296534	431800	9577389	17
44	2879177	12450804	3006486	12018130	33261408	432674	9576552	16
45	2881963	12441134	3009658	12007585	33226351	433549	9575714	15
46	2884748	12431474	3012831	11997949	33191362	434425	9574875	14
47	2887533	12421824	3016004	11986522	33156441	435302	9574036	13
48	2890318	12412184	3019178	11976004	33121588	436189	9573196	12
49	2893103	12402554	3022353	11965495	33086802	437059	9572355	11
50	2895888	12392934	3025528	11954996	33052082	437938	9571513	10
51	2898672	12383324	3028703	11944506	33017427	438818	9570670	9
52	2901456	12373724	3031879	11934025	32982839	439699	9569826	8
53	2904240	12364134	3035055	11923553	32948317	440581	9568982	7
54	2907023	12354554	3038232	11913090	32913862	441464	9568137	6
55	2909806	12344984	3041410	11902636	32879487	442348	9567291	5
56	2912589	12335425	3044588	11892192	32845153	443233	9566444	4
57	2915371	12325876	3047767	11881757	32810898	444119	9565596	3
58	2918153	12316337	3050946	11871330	32776709	445007	9564747	2
59	2920935	12306808	3054126	11860912	32742586	445896	9563898	1
60	2923717	12297289	3057307	11850503	32708528	446786	9563048	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	2923717	12297289	3057307	11850503	32708528	446786	9563048	60
1	2926499	12287780	3060487	11840104	32674536	447676	9562197	59
2	2929280	12278280	3063669	11829713	32640597	448567	9561345	58
3	2932061	12268790	3066851	11819331	32606731	449459	9560492	57
4	2934842	12259310	3070034	11808958	32572937	450352	9559639	56
5	2937623	12249840	3073218	11798594	32539196	451246	9558785	55
6	2940403	12240379	3076402	11788239	32505517	452140	9557930	54
7	2943183	12230928	3079587	11777893	32471901	453035	9557074	53
8	2945953	12221487	3082772	11767556	32438348	453931	9556217	52
9	2948743	12212056	3085958	11757228	32404858	454828	9555360	51
10	2951523	12202634	3089144	11746908	32371430	455726	9554502	50
11	2954302	12193222	3092331	11736597	32338074	456625	9553643	49
12	2957081	12183820	3095518	11726295	32304762	457525	9552783	48
13	2959860	12174427	3098706	11716001	32271534	458426	9551922	47
14	2962630	12165044	3101895	11705716	32238349	459328	9551061	46
15	2965416	12155671	3105084	11695440	32205237	460231	9550199	45
16	2968194	12146308	3108274	11685173	32172187	461135	9549336	44
17	2970972	12136954	3111464	11674914	32139200	462040	9548472	43
18	2973750	12127610	3114655	11664695	32106275	462945	9547607	42
19	2976527	12118276	3117846	11654425	32073413	463851	9546742	41
20	2979304	12108952	3121038	11644194	32040613	464758	9545876	40
21	2982080	12099637	3124230	11633971	32007875	465666	9545009	39
22	2984857	12090332	3127423	11623757	31975197	466575	9544141	38
23	2987633	12081036	3130617	11613551	31942580	467485	9543272	37
24	2990409	12071749	3133811	11603353	31910024	468396	9542403	36
25	2993185	12062472	3137006	11593164	31877528	469308	9541533	35
26	2995960	12053204	3140201	11582983	31845093	470221	9540662	34
27	2998735	12043945	3143397	11572810	31812717	471135	9539790	33
28	3001510	12034696	3146594	11562646	31780401	472050	9538917	32
29	3004284	12025456	3149791	11552490	31748144	472966	9538043	31
30	3007058	12016225	3152989	11542341	31715946	473884	9537169	30
31	3009832	12007004	3156187	11532202	31683807	474802	9536294	29
32	3012606	11997792	3159386	11522071	31651727	475721	9535418	28
33	3015380	11988589	3162585	11511948	31619705	476641	9534541	27
34	3018153	11979396	3165785	11501835	31587742	477561	9533664	26
35	3020926	11970212	3168986	11491730	31555838	478482	9532786	25
36	3023699	11961037	3172187	11481633	31523992	479404	9531907	24
37	3026472	11951872	3175389	11471545	31492205	480327	9531027	23
38	3029244	11942716	3178591	11461465	31460476	481251	9530146	22
39	3032016	11933569	3181794	11451393	31428805	482176	9529264	21
40	3034788	11924431	3184998	11441329	31397191	483102	9528382	20
41	3037559	11915303	3188202	11431274	31365636	484029	9527499	19
42	3040339	11906184	3191407	11421227	31334138	484957	9526615	18
43	3043101	11897074	3194613	11411188	31302698	485886	9525730	17
44	3045872	11887973	3197819	11401157	31271315	486816	9524844	16
45	3048643	11878881	3201026	11391134	31239989	487747	9523958	15
46	3051413	11869798	3204233	11381119	31208720	488679	9523071	14
47	3054183	11860724	3207441	11371113	31177508	489611	9522183	13
48	3056953	11851659	3210649	11361115	31146352	490544	9521294	12
49	3059723	11842603	3213858	11351125	31115252	491478	9520404	11
50	3062492	11833557	3217067	11341144	31084208	492413	9519514	10
51	3065261	11824520	3220277	11331171	31053221	493349	9518623	9
52	3068030	11815492	3223488	11321206	31022289	494286	9517731	8
53	3070798	11806473	3226699	11311249	30991413	495224	9516838	7
54	3073566	11797463	3229911	11301300	30960593	496163	9515944	6
55	3076334	11788461	3233124	11292358	30929828	497103	9515050	5
56	3079102	11779468	3236337	11281424	30899119	498044	9514155	4
57	3081869	11770484	3239551	11271498	30868465	488986	9513255	3
58	3084636	11761509	3242766	11261580	30837866	499929	9512362	2
59	3087403	11752543	3245981	11251670	30807323	509873	9511464	1
60	3090170	11743586	3249197	11241768	30776834	501818	9510565	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	3090170	11743380	3249197	11241708	30776834	501818	9510505	60
1	3092936	11734638	3252413	11231874	30746400	502764	9509666	59
2	3095702	11725699	3255630	11221988	30716020	503711	9508766	58
3	3098468	11716768	3258848	11212109	30685695	504659	9507865	57
4	3101234	11707846	3262066	11202239	30655423	505607	9506963	56
5	3103999	11698933	3265285	11192377	30625205	506556	9506061	55
6	3106764	11690029	3268504	11182523	30595041	507506	9505158	54
7	3109529	11681133	3271724	11172676	30564930	508457	9504254	53
8	3112294	11672246	3274944	11162837	30534872	509409	9503349	52
9	3115058	11663368	3278165	11153006	30504867	510362	9502443	51
10	3117822	11654499	3281387	11143184	30474915	511316	9501536	50
11	3120586	11645638	3274609	11133367	30445015	512271	9500629	49
12	3123349	11636786	3287832	11123559	30415169	513227	9499721	48
13	3126112	11627943	3291055	11113759	30385375	514184	9498812	47
14	3128875	11619199	3294280	11103967	30355635	515142	9497902	46
15	3131639	11610283	3297505	11094182	30325947	516101	9496991	45
16	3134400	11601466	3300731	11084405	30296312	517061	9496080	44
17	3137162	11592658	3303957	11074637	30266730	518021	9495168	43
18	3139924	11583858	3307184	11064876	30237200	518982	9494255	42
19	3142686	11575067	3310411	11055123	30207723	519944	9493341	41
20	3145448	11566285	3313639	11045378	30178299	520907	9492427	40
21	3148209	11557511	3316868	11035640	30148927	521871	9491512	39
22	3150970	11548746	3320097	11025910	30119605	522836	9490596	38
23	3153731	11539989	3323327	11016178	30090334	523802	9489679	37
24	3156491	11531240	3326558	11006471	30061113	524769	9488761	36
25	3159251	11522500	3329789	10996763	30031943	525737	9487842	35
26	3162011	11513768	3333020	10987062	30002823	526706	9486923	34
27	3164770	11505045	3336252	10977369	29973753	527676	9486003	33
28	3167529	11496330	3339485	10967683	29944734	528647	9483082	32
29	3170288	11487624	3342719	10958004	29915765	529620	9484160	31
30	3173047	11478926	3345953	10948332	29886847	530594	9483237	30
31	3175805	11470237	3349188	10938669	29857978	531568	9482314	29
32	3178563	11461556	3352423	10929013	29829160	532543	9481390	28
33	3181321	11452883	3355659	10919364	29800392	533519	9480465	27
34	3184079	11444219	3358896	10909723	29771674	534496	9479539	26
35	3186837	11435563	3362133	10900090	29743006	536473	9478612	25
36	3189594	11426915	3365371	10890464	29714388	536451	9477685	24
37	3192351	11418275	3368610	10880845	29685822	537430	9476757	23
38	3195107	11409644	3371850	10871234	29657301	538410	9475828	22
39	3197864	11401021	3375090	10861630	29628831	539391	9474898	21
40	3200620	11392406	3378331	10852033	29600411	540373	9473967	20
41	3203374	11383800	3381572	10842444	29572041	541356	9473035	19
42	3206130	11375202	3384814	10832862	29543719	542340	9472103	18
43	3208885	11366612	3388057	10823287	29515446	543325	9471170	17
44	3211640	11358030	3391300	10813819	29487221	544311	9470236	16
45	3214395	11349456	3394544	10804158	29459043	545298	9469301	15
46	3217150	11340891	3397788	10795605	29430913	546286	9468366	14
47	3219904	11332334	3401033	10785059	29402831	547275	9467430	13
48	3222658	11323785	3404279	10775520	29374807	548265	9466493	12
49	3225410	11315244	3407524	10765988	29346811	549256	9465555	11
50	3228164	11306711	3410771	10756462	29318873	550249	9464616	10
51	3230917	11298186	3414029	10846944	29290982	551242	9463677	9
52	3233671	11289670	3417267	10737434	29263139	552236	9462737	8
53	3236412	11281162	3420516	10727931	29235343	553231	9461796	7
54	3239174	11272662	3423766	10718436	29207595	554226	9460854	6
55	3241926	11264170	3427016	10708948	29179895	555222	9459911	5
56	3244678	11255686	3430266	10699467	29152243	556219	9458968	4
57	3247429	11247210	3433518	10689993	29124638	557217	9458024	3
58	3250180	11238742	3436770	10680526	29097080	558216	9457079	2
59	3252932	11230282	3440023	10671066	29069569	559216	9456133	1
60	3255682	11221830	3443276	10661623	29042105	560217	9455186	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3255682	11221830	3443276	10661613	29042109	560217	9455186	60
1	3258432	11213386	3446530	10652167	29014688	561219	9454239	59
2	3261182	11204950	3449785	10642728	28987318	562222	9453291	58
3	3263931	11196522	3453040	10633296	28959988	563226	9452342	57
4	3266681	11188102	3456296	10623871	28932707	564231	9451392	56
5	3269430	11179690	3459553	10614453	28905472	565237	9450441	55
6	3272179	11171286	3462810	10605042	28878283	566244	9449490	54
7	3274927	11162889	3466068	10595637	28851139	567252	9448538	53
8	3277675	11154500	3469326	10586239	28824040	568291	9447585	52
9	3280423	11146119	3472585	10576849	28796987	569270	9446631	51
10	3283171	11137746	3475845	10567466	28769979	570280	9445676	50
11	3285918	11129381	3479105	10558090	28743015	571291	9444720	49
12	3288665	11121024	3482366	10548721	28716096	572303	9443764	48
13	3291412	11112675	3485628	10539359	28689222	573316	9442807	47
14	3294159	11104334	3488891	10530004	28662393	574330	9441849	46
15	3296906	11096000	3492154	10520655	28635608	575345	9440890	45
16	3299652	11087674	3495418	10511313	28608868	575361	9439931	44
17	3302398	11079356	3498683	10501997	28582172	577370	9438971	43
18	3305144	11071046	3501949	10492648	28555520	578398	9438010	42
19	3307889	11062744	3505215	10483326	28528913	579418	9437048	41
20	3310634	11054449	3508482	10474010	28502350	580439	9436085	40
21	3313379	11046162	3511749	10464702	28475832	581460	94 5122	39
22	3316123	11037883	3515017	10455401	28449357	582482	9434158	38
23	3318867	11029612	3518286	10446107	28422926	583505	9433193	37
24	3321611	11021348	3521555	10436819	28396539	584529	9432227	36
25	3324355	11013092	3524825	10427538	28370195	585554	9431260	35
26	3327098	11004845	3528096	10518263	28343895	586580	9430293	34
27	3329841	10996602	3531368	10408995	28317638	587607	9429325	33
28	3332585	10988368	3534640	10399733	28291424	588635	9428356	32
29	3335327	10980142	3537913	10390479	28265253	589663	9427386	31
30	3338069	10971923	3541186	10381231	28239125	590692	9426415	30
31	3340811	10963712	3544460	10371990	28213040	591722	9425444	29
32	3343553	10955509	3547735	10362756	28186998	592753	9424472	28
33	3346294	10947313	3551010	10353528	28160999	593785	9423499	27
34	3349035	10939125	3554286	10344307	28135043	594818	9422525	26
35	3351776	10930944	3557563	10335092	28109129	595852	9421550	25
36	3354516	10922771	3560840	10325884	28083258	596887	9420575	24
37	3357256	10914606	3564118	10316682	28057429	597924	9419599	23
38	3359996	10906448	3567397	10307486	28031642	598962	9418622	22
39	3362736	10898298	3570676	10298297	28005898	600001	9417644	21
40	3365475	10890156	3573956	10289115	27980196	601041	9416665	20
41	3368214	10882021	3577237	10279940	27954536	602081	9415685	19
42	3370953	10873894	3580519	10270772	27928917	603122	9414705	18
43	3373691	10865774	3583801	10261610	27903339	604264	9413724	17
44	3376429	10857661	3587084	10252454	27877803	605207	9412742	16
45	3379167	10849555	3590367	10243304	27852308	606251	9411760	15
46	3381905	10841457	3593651	10234161	27826855	607296	9410777	14
47	3384642	10833366	3596936	10225024	27801443	608342	9409793	13
48	3387379	10825282	3600221	10215893	27776072	609389	9408808	12
49	3390116	10817206	3603507	10206770	27750742	610436	9407822	11
50	3392852	10809137	3606794	10197653	27725453	611484	9406836	10
51	3395588	10801075	3610082	10188542	27700204	612533	9405849	9
52	3398324	10793021	3613370	10179438	27674995	613583	9404861	8
53	3401060	10784974	3616659	10170340	27649827	614634	9403872	7
54	3403795	10776934	3619949	10161248	27624699	615686	9402882	6
55	3406530	10768902	3623239	10152162	27599612	616740	9401891	5
56	3409265	10760877	3626530	10143082	27574565	617795	9400900	4
57	3411999	10752860	3629822	10134009	27549559	6188 51	9399908	3
58	3414733	10744850	3633115	10124942	27524592	619908	9398915	2
59	3417467	10736847	3636408	10115881	27499665	620966	9397921	1
60	3420201	10728852	3639702	10106827	27474777	622025	9396926	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	3420201	10288512	3639702	10100827	27474777	622025	9396920	60
1	3422934	10720865	3642997	10097781	27449929	623084	9395931	59
2	3425667	10712885	3646293	10088741	27425120	624144	9394935	58
3	3428400	10704912	3649589	10079707	27400350	625205	9393938	57
4	3431133	10696945	3652886	10070678	27375620	626267	9392940	56
5	3433865	10688984	3656183	10061654	27350929	627330	9391941	55
6	3436597	10681030	3659481	10052636	27326278	628394	9390942	54
7	3439329	10673085	3662780	10043626	27301667	629459	9389942	53
8	3442060	10665147	3666079	10034822	27277095	630525	9388941	52
9	3444791	10657216	3669379	10025624	27252563	631592	9387939	51
10	3447522	10649292	3672680	10016632	27228070	632660	9386937	50
11	3450253	10641375	3675982	10007646	27203616	633729	9385934	49
12	3452983	10633465	3679284	9998666	27179200	634799	9384930	48
13	3455713	10625562	3682587	9989692	27154823	635870	9383925	47
14	3458442	10617667	3685891	9980725	27130484	636942	9382919	46
15	3461171	10609779	3689195	9971764	27106184	638015	9381913	45
16	3463900	10601898	3692500	9962810	27081922	639088	9380906	44
17	3466629	10594024	3695806	9953862	27057698	640162	9379898	43
18	3469357	10586157	3699113	9944920	27033511	641237	9378889	42
19	3472085	10578297	3702420	9935984	27009362	642313	9377880	41
20	3474813	10570444	3705728	9927054	26985251	643390	9376870	40
21	3477540	10562598	3709037	9918130	26961177	644468	9375859	39
22	3480267	10554760	3712347	9909213	26937141	645547	9374847	38
23	3482994	10546929	3715657	9900302	26913143	646627	9373834	37
24	3485721	10539104	3718968	9891396	26889183	647708	9372820	36
25	3488447	10531286	3722279	9882496	26865260	648790	9371806	35
26	3491173	10523474	3725591	9873601	26841383	64987	9370791	34
27	3493899	10515669	3728904	9864711	26817535	650958	9369775	33
28	3496624	10507871	3732218	9855827	26793726	652044	9368758	32
29	3499349	10500080	3735533	9846949	26769942	653131	9367740	31
30	3502074	10492295	3738848	9838076	26746206	654219	9366722	30
31	3504799	10484516	3742164	9829209	26722507	655307	9365703	29
32	3507523	10476745	3745480	9820349	26698845	656396	9364683	28
33	3510247	10468981	3748797	9811495	26675220	657486	9363662	27
34	3512971	10461225	3752115	9802648	26651631	658577	9362640	26
35	3515694	10453476	3755434	9793807	26628079	659669	9361618	25
36	3518417	10445734	3758753	9784972	26604563	660762	9360595	24
37	3521140	10437999	3762073	9776143	26581084	661856	9359571	23
38	3523862	10430271	3765394	9767320	26557641	662951	9358546	22
39	3526584	10422550	3768716	9758503	26534234	664047	9357521	21
40	3529306	10414836	3772038	9749693	26510863	665143	9356495	20
41	3532027	10407129	3775361	9740889	26487528	666240	9355468	19
42	3534748	10399429	3778685	9732091	26464229	667338	9354440	18
43	3537469	10391735	3782010	9723298	26440966	668437	9353411	17
44	3540190	10384047	3785335	9714510	26417738	669537	9352382	16
45	3542910	10376366	3788661	9705728	26394546	670638	9351352	15
46	3545630	10368692	3791988	9696951	26371390	671741	9350321	14
47	3548350	10361024	3795315	9688179	26348270	672845	9349289	13
48	3551070	10353362	3798643	9679412	26325185	673950	9348257	12
49	3553789	10345706	3801972	9670650	26302135	675056	9347224	11
50	3556508	10338057	3805302	9661894	26279120	676163	9346190	10
51	3559227	10330415	3808632	9653144	26256141	677271	9345155	9
52	3561945	10322780	3811963	9644400	26233196	678380	9344119	8
53	3564663	10315152	3815295	9635662	26210286	679490	9343082	7
54	3567380	10307531	3818628	9626930	26187411	680601	9342045	6
55	3570097	10299916	3821961	9618204	26164571	681712	9341007	5
56	3572814	10292308	3825295	9609484	26141766	682824	9339968	4
57	3575531	10284707	3828630	9600770	26118996	683937	9338928	3
58	3578247	10277113	3831966	9592062	26096260	685051	9337887	2
59	3580963	10269526	3835303	9583360	26073559	686166	9336847	1
60	3583679	10261946	3838640	9574664	26050893	687282	9335804	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	3583679	10261946	3838640	9574664	26050893	687282	9335804	60
1	3586395	10254372	3841978	9565973	26028264	688399	9334761	59
2	3589110	10246804	3845316	9557287	26005663	689517	9333717	58
3	3591825	10239243	3848655	9548607	25983099	690636	9332673	57
4	3594540	10231688	3851995	9539932	25960569	691756	9331628	56
5	3597254	10224140	3855336	9531263	25938073	692877	9330582	55
6	3599968	10216598	3858678	9522599	25915610	693999	9329535	54
7	3602682	10209063	3862020	9513941	25893181	695122	9328488	53
8	3605395	10201534	3865363	9505288	25870786	696246	9327440	52
9	3608108	10194012	3868707	9496642	25848424	697370	9326391	51
10	3610821	10186496	3872052	9488001	25826096	698495	9325341	50
11	3613533	10178987	3875397	9479366	25803801	699621	9324290	49
12	3616245	10171484	3878743	9470736	25781540	700748	9323238	48
13	3618957	10163988	3882090	9462111	25759312	701877	9322186	47
14	3621669	10156498	3885438	9453491	25737118	703007	9321133	46
15	3624380	10149015	3888787	9444877	25714957	704138	9320079	45
16	3627091	10141538	3892136	9436268	25692830	705270	9319024	44
17	3629802	10134067	3895486	9427664	25670736	706403	9317969	43
18	3632512	10126603	3898837	9419066	25648675	707537	9316913	42
19	3635222	10119145	3902188	9410473	25626647	708672	9315856	41
20	3637932	10111694	3905540	9401886	25604651	709808	9314798	40
21	3640642	10104249	3908893	9393305	25582688	710944	9313739	39
22	3643351	10096811	3912247	9384730	25560758	712081	9312680	38
23	3646060	10089379	3915601	9376160	25538860	713219	9311620	37
24	3648768	10081953	3918956	9367595	25516995	714358	9310559	36
25	3651476	10074533	3922312	9359035	25495162	715498	9309497	35
26	3654184	10067120	3925669	9350481	25473362	716639	9308434	34
27	3656892	10059713	3929027	9341931	25451594	717782	9307371	33
28	3659599	10052312	3932385	9333386	25429858	718926	9306307	32
29	3662306	10044918	3935744	9324847	25408154	720071	9305242	31
30	3665012	10037530	3939104	9316313	25386482	721217	9304176	30
31	3667718	10030148	3942465	9307784	25364841	722364	9303109	29
32	3670424	10022773	3945826	9299261	25343232	723512	9302042	28
33	3673130	10015404	3949188	9290744	25321655	724660	9300974	27
34	3675835	10008041	3952551	9282232	25300110	725809	9299905	26
35	3678541	10000685	3955915	9273726	25278597	726959	9298836	25
36	3681246	9993335	3959280	9265215	25257116	728110	9297766	24
37	3683951	9985991	3962646	9256729	25235666	729262	9296695	23
38	3686655	9978653	3966012	9248238	25214248	730415	9295623	22
39	3689359	9971322	3969379	9239753	25192861	731569	9294550	21
40	3692062	9963997	3972746	9231273	25171506	732724	9293476	20
41	3694765	9956678	3976114	9222798	25150183	733880	9292401	19
42	3697468	9949366	3979483	9214326	25128891	735037	9291326	18
43	3700170	9942060	3982853	9205865	25107629	736195	9290250	17
44	3702872	9934760	3986224	9197406	25086398	737354	9289173	16
45	3705574	9927466	3989596	9188952	25065198	738514	9288096	15
46	3708276	9920178	3992969	9180503	25044029	739675	9287018	14
47	3710977	9912896	3996342	9172059	25022890	740837	9285939	13
48	3713678	9905620	3999716	9163620	25001782	742000	9284859	12
49	3716379	9898350	4003090	9155186	24980705	743164	9283778	11
50	3719080	9891086	4006465	9146757	24959659	744329	9282697	10
51	3721780	9883828	4009841	9138333	24938644	745495	9281615	9
52	3724480	9876577	4013217	9129915	24917659	746662	9280532	8
53	3727179	9869332	4016594	9121502	24896704	747830	9279448	7
54	3729878	9862093	4019972	9113094	24875780	748999	9278363	6
55	3732577	9854860	4023351	9104691	24854887	750169	9277278	5
56	3735275	9847633	4026731	9096293	24834024	751340	9276192	4
57	3737973	9840412	4030112	9087900	24813191	752512	9275105	3
58	3740671	9833192	4033494	9079512	24792387	753685	9274017	2
59	3743369	9825988	4036877	9071129	24771613	754859	9272928	1
60	3746066	9818785	4040262	9062752	24750869	756033	9271839	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3746006	9818785	4040262	9062752	24750869	756033	9271839	60
1	3748763	9811589	4043647	9054381	24730154	757208	9270749	59
2	3751460	9804399	4047031	9046015	24709469	758384	9269658	58
3	3754156	9797215	4050416	9037654	24688814	759561	9268566	57
4	3756852	9790036	4053802	9029296	24668189	760740	9267474	56
5	3759548	9782863	4057189	9020943	24647594	761920	9266381	55
6	3762243	9775696	4060577	9012595	24627028	763101	9265287	54
7	3764938	9768535	4063966	9004252	24606492	764283	9264192	53
8	3767633	9761380	4067356	8995914	24585986	765466	9263096	52
9	3770327	9754231	4070747	8987581	24565509	766650	9262000	51
10	3773021	9747088	4074139	8979253	24545061	767835	9260903	50
11	3775715	9739950	4077531	8970929	24524642	769021	9259805	49
12	3778408	9732818	4080924	8962610	24504252	770208	9258706	48
13	3781101	9725693	4084318	8954297	24483891	771396	9257606	47
14	3783794	9718574	4087713	8945989	24463559	772585	9256506	46
15	3786486	9711461	4091109	8937686	24443256	773775	9255405	45
16	3789178	9704354	4094506	8929388	24422981	774966	9254303	44
17	3791870	9697353	4097903	8921196	24402735	776157	9253200	43
18	3794562	9690158	4101301	8912809	24382518	777349	9252097	42
19	3797253	9683069	4104699	8904527	24362329	778542	9250993	41
20	3799944	9675986	4108097	8896259	24342169	779736	9249888	40
21	3802635	9668908	4111497	8887977	24322037	780931	9248782	39
22	3805325	9661836	4114898	8879709	24301937	782127	9247676	38
23	3808015	9654770	4118300	8871446	24281860	783324	9246569	37
24	3810704	9647709	4121703	8863187	24261815	784522	9245461	36
25	3813393	9640654	4125107	8854933	24241798	785721	9244352	35
26	3816082	9633605	4128511	8846683	24221809	786922	9243242	34
27	3818771	9626562	4131916	8838438	24201849	788124	9242131	33
28	3821459	9619525	4135322	8830198	24181917	789327	9241020	32
29	3824147	9612494	4138728	8821963	24162013	790531	9239908	31
30	3826834	9605468	4142135	8813732	24142137	791736	9238795	30
31	3829521	9598448	4145544	8805506	24122289	792942	9237682	29
32	3832208	9591434	4148953	8797285	24102468	794149	9236568	28
33	3834895	9584426	4152363	8789069	24082675	795357	9235453	27
34	3837581	9577424	4155773	8780859	24062910	796565	9234337	26
35	3840267	9570427	4159184	8772653	24043172	797774	9233220	25
36	3842953	9563436	4162596	8764452	24023462	798984	9232103	24
37	3845638	9556451	4166009	8756256	24003779	800195	9230985	23
38	3848323	9549472	4169423	8748065	23984124	801407	9229866	22
39	3851008	9542498	4172838	8739878	23964496	802620	9228746	21
40	3853692	9535530	4176255	8731696	23944895	803834	9227625	20
41	3856376	9528567	4179672	8723518	23925320	805049	9226504	19
42	3859060	9521610	4183090	8715345	23905773	806265	9225382	18
43	3861743	9514659	4186509	8707177	23886254	807482	9224259	17
44	3864426	9507713	4189928	8699013	23866762	808700	9223135	16
45	3867109	9500373	4193348	8690854	23847297	809919	9222010	15
46	3869791	9493839	4196769	8682700	23827859	811139	9220884	14
47	3872473	9486911	4200191	8674551	23808448	812360	9219758	13
48	3875155	9479988	4203613	8666405	23789064	813583	9218631	12
49	3877837	9473071	4207036	8658264	23769706	814807	9217504	11
50	3880518	9466160	4210460	8650128	23750375	816032	9216376	10
51	3883199	9459254	4213885	8641996	23731071	817258	9215247	9
52	3885880	9452354	4217311	8633870	23711793	818484	9214117	8
53	3888560	9445460	4220738	8625749	23692542	819711	9212986	7
54	3891240	9438571	4224165	8617632	23673318	820939	9211855	6
55	3893919	9431688	4227593	8609520	23654121	822168	9210723	5
56	3896598	9424810	4231022	8601412	23934950	823398	9209590	4
57	3899277	9417938	4234452	8593509	23675805	824629	9208456	3
58	3901955	9411071	4237883	8585210	23596687	825861	9207323	2
59	3904633	9404210	4241315	8577116	23577595	827094	9206185	1
60	3907311	9397354	4244748	8569026	23558529	828328	9205049	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	3907311	9397354	4244748	8569026	23558529	82831	9205049	60
1	3909989	9390504	4248182	8560941	23539489	829563	9203912	59
2	3912666	9383660	4251617	8552861	23520475	830799	9202774	58
3	3915343	9376821	4255052	8544785	23501486	832036	9201635	57
4	3918020	9369988	4258488	8536714	23482523	833274	9200496	56
5	3920696	9363160	4261925	8528647	23463586	834513	9199356	55
6	3923372	9356337	4265363	8520584	23444674	835753	9198215	54
7	3926048	9349520	4268801	8512525	23425788	836995	9197073	53
8	3928723	9342708	4272240	8504470	23406927	838238	9195931	52
9	3931398	9335902	4275680	8496420	23388092	839482	9194788	51
10	3934072	9329101	4279121	8488374	23369282	840727	9193644	50
11	3936746	9322306	4282563	8480333	23350498	841973	9192499	49
12	3939420	9315516	4286006	8472296	23331740	843220	9191353	48
13	3942093	9308731	4289450	8464263	23313012	844468	9190207	47
14	3944766	9301952	4292895	8456236	23294302	845716	9189060	46
15	3947439	9295178	4296340	8448213	23275621	846965	9187912	45
16	3950112	9288410	4299786	8440195	23256965	848215	9186763	44
17	3952784	9281647	4303233	8432181	23238335	849466	9185614	43
18	3955456	9274890	4306681	8424172	23219730	850718	9184464	42
19	3958128	9268138	4310130	8416167	23201151	851971	9183313	41
20	3960799	9261392	4313580	8408167	23182597	853225	9182161	40
21	3963470	9254651	4317031	8400171	23164068	854480	9181009	39
22	3966140	9247915	4320482	8392179	23145565	855736	9179856	38
23	3968810	9241185	4323934	8384192	23127086	856993	9178702	37
24	1971480	9234460	4327387	8376209	23108632	858251	9177547	36
25	3974149	9227741	4330841	8368231	23090203	859510	9176391	35
26	3976818	9221027	4334296	8360257	23071798	860770	9175235	34
27	3979487	9214319	4337752	8352288	23053418	862031	9174078	33
28	3982155	9207616	4341209	8344322	23035062	863294	6172920	32
29	3984823	9200918	4344666	8339360	23016731	864558	9171761	31
30	3987491	9194226	4348124	8328403	22998424	865823	9170601	30
31	3990159	9187539	4351583	8320450	22980141	867089	9169440	29
32	3992826	9180857	4355043	8312501	22961883	868356	9168279	28
33	3995493	9174181	4358504	8304558	22943650	869623	9167117	27
34	3998159	9167510	4361966	8296616	22925441	870891	9165955	26
35	4000825	9160844	4365429	8288684	22907256	872160	9164792	25
36	4003491	9154183	4368893	8280753	22889096	873430	9163628	24
37	4006156	9147528	4372357	8272827	22870960	874701	9162463	23
38	4008821	9140878	4375822	8264905	22852848	875973	9161297	22
39	4011486	9134233	4379288	8256987	22834760	877246	9160131	21
40	4014150	9127593	4382755	8249073	22816696	878520	9158964	20
41	4016814	9120959	4386223	8241164	22798656	879795	9157796	19
42	4019478	9114330	4389692	8233259	22780639	881071	9156627	18
43	4022141	9107706	4393162	8225358	22762646	882348	9155457	17
44	4024804	9101087	4396633	8217461	22744676	883626	9154286	16
45	4027467	9094473	4400105	8209568	22726730	884905	9153115	15
46	4030130	9087865	4403578	8201679	22708808	886186	9151943	14
47	4032792	9081262	4407051	8193794	22690909	887468	9150770	13
48	4035454	9074664	4410525	8185913	22673034	888751	9149597	12
49	4038115	9068071	4414000	8178036	22655183	890035	9148423	11
50	4040776	9061483	4417476	8170163	22637355	891320	9147248	10
51	4043437	9054901	4420953	8162295	22619551	892606	9146072	9
52	4046097	9048324	4424431	8154431	22601771	893893	9144895	8
53	4048757	9041752	4427910	8146571	22584014	895181	9143718	7
54	4051416	9035185	4431390	8138715	22566281	896470	9142540	6
55	4054075	9028623	4434871	8130863	22548571	897760	9141361	5
56	4056734	9022066	4438352	8123015	22530885	899051	9140181	4
57	4059392	9015514	4441834	8115172	22513222	900342	9139001	3
58	4062050	9008968	4445317	8107334	22495582	901634	9137820	2
59	4064708	9002427	4448801	8099500	22477965	902927	9136638	1
60	4067366	8995891	4452286	8091670	22460371	904221	9135455	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	4067300	8995891	4432280	8091670	22460371	904221	9135455	60
1	4070023	8989300	4435772	8083844	22442800	905516	9134271	59
2	4072680	8982834	4439259	8076022	22425252	906812	9133087	58
3	4075337	8976313	4462747	8068204	22407726	908109	9131902	57
4	4077993	8969797	4466236	8060389	22390223	909408	9130716	56
5	4080649	8963286	4469726	8052578	22372742	910708	9129529	55
6	4083305	8956780	4473216	8044771	22355284	912009	9128342	54
7	4085960	8950280	4476707	8036969	22337848	913311	9127154	53
8	4088615	8943785	4480199	8029171	22320435	914614	9125965	52
9	4091269	8937295	4483692	8021377	22303044	915918	9124775	51
10	4093923	8930810	4487186	8013587	22285675	917223	9123584	50
11	4096577	8924330	4490681	8005801	22268328	918529	9122493	49
12	4099231	8917855	4494177	7998019	22251004	919836	9121200	48
13	4101884	8911385	4497674	7990241	22233703	921144	9120007	47
14	4104537	8904920	4501172	7982467	22216424	922453	9118814	46
15	4107189	8898460	4504671	7974697	22199168	923763	9117620	45
16	4109841	8892005	4508171	7966931	22181935	925074	9116425	44
17	4112493	8885555	4511672	7959169	22164725	926386	9115229	43
18	4115144	8879110	4515173	7951411	22147537	927699	9114032	42
19	4117795	8872670	4518675	7943657	22130372	929013	9112835	41
20	4120446	8866235	4522178	7935908	22113229	930327	9111637	40
21	4123096	8859804	4525682	7928161	22096109	931643	9110438	39
22	4125746	8853379	4529187	7920419	22079011	932960	9109238	38
23	4128395	8846959	4532693	7912681	22061934	934278	9108038	37
24	4131044	8840544	4536200	7904947	22044879	935597	9106837	36
25	4133693	8834134	4539708	7897217	22027846	936917	9105635	35
26	4136341	8827729	4543217	7889491	22010834	938238	9104432	34
27	4138989	8821329	4546727	7881769	21993845	939560	9103228	33
28	4141637	8814934	4550238	7874051	21976874	940883	9102024	32
29	4144285	8808544	4553750	7866337	21959926	942207	9100819	31
30	4146932	8802159	4557264	7858627	21943000	943532	9099613	30
31	4149579	8795779	4560778	7850921	21926094	944858	9098406	29
32	4152226	8789404	4564293	7843219	21909210	946185	9097198	28
33	4154872	8783033	4567809	7835520	21892348	947513	9095990	27
34	4157518	8776667	4571326	7827825	21875508	948842	9094781	26
35	4160163	8770306	4574843	7820134	21858689	950172	9093572	25
36	4162808	8763959	4578361	7812446	21841892	951503	9092362	24
37	4165453	8757599	4581880	7804764	21825116	952835	9091151	23
38	4168097	8751253	4585400	7797085	21808362	954168	9089939	22
39	4170741	8744912	4588921	7789409	21791629	955503	9088726	21
40	4173385	8738575	4592443	7781736	21774918	956839	9087512	20
41	4176028	8732243	4595966	7774067	21758228	958176	9086297	19
42	4178671	8725916	4599490	7766402	21741559	959514	9085082	18
43	4181313	8719594	4603015	7758741	21724911	960853	9083866	17
44	4183955	8713277	4606541	7751084	21708283	962193	9082649	16
45	4186597	8706965	4610068	7743431	21691676	963534	9081432	15
46	4189239	8700657	4613596	7735782	21675090	964875	9080214	14
47	4191880	8694354	4617125	7728137	21658525	966217	9078995	13
48	4194521	8688056	4620654	7720496	21641981	967560	9077775	12
49	4197162	8681763	4624184	7712859	21625458	968904	9076555	11
50	4199802	8675475	4627715	7705226	21608956	970249	9075334	10
51	4202442	8669192	4631247	7697597	21592475	971595	9074112	9
52	4205081	8662913	4634780	7689970	21576015	972943	9072889	8
53	4207720	8656639	4638314	7682347	21559575	974292	9071665	7
54	4210359	8650370	4641849	7674281	21543155	975642	9070441	6
55	4212999	8644106	4645385	7667113	21526756	976993	9069215	5
56	4215635	8637846	4648922	7659501	21510377	978345	9067989	4
57	4218273	8631591	4652460	7651893	21494019	979698	9066763	3
58	4220910	8625341	4655999	7644289	21477681	981052	9065535	2
59	4223547	8619096	4659540	7636689	21461364	982407	9064307	1
60	4226183	8612856	4663081	7629093	21445067	983763	9063078	0
								M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithm. Sinuum.	Sinus	
0	4226183	8612856	4663081	7629093	21445067	983763	9063078	60
1	4228819	8606620	4666623	7621500	21428790	985120	9061848	59
2	4231455	8600389	4670166	7613611	21412534	986478	9060618	58
3	4234090	8594163	4673710	7606326	21396298	987837	9059387	57
4	4236725	8587942	4677255	7598745	21380083	989197	9058155	56
5	4239360	8581725	4680801	7591167	21363888	990558	9056922	55
6	4241994	8575513	4684348	7583593	21347713	991920	9055688	54
7	4244628	8569306	4687896	7576022	21331558	993282	9054454	53
8	4247262	8563103	4691444	7568450	21315423	994647	9053219	52
9	4249895	8556951	4694993	7560893	21299308	996012	9051983	51
10	4252528	8550712	4698543	7553333	21283213	997379	9050746	50
11	4255161	8544523	4702094	7545776	21267138	998747	9049508	49
12	4257793	8538339	4705646	7538223	21251083	1000116	9048270	48
13	4260425	8532160	4709199	7530674	21235048	1001486	9047031	47
14	4263056	8525985	4712753	7523129	21219032	1002856	9045791	46
15	4265687	8519815	4716308	7515588	21203036	1004227	9044551	45
16	4268318	8513650	4719864	7508051	21187059	1005599	9043310	44
17	4270949	8507489	4723422	7500517	21171102	1006972	9042068	43
18	4273579	8501333	4726981	7492987	21155164	1008346	9040825	42
19	4276209	8495181	4730541	7485460	21139246	1009721	9039582	41
20	4278838	8489034	4734102	7477937	21123347	1011097	9038338	40
21	4281467	8482892	4737664	7470418	21107468	1012474	9037093	39
22	4284096	8476754	4741227	7462902	21091609	1013852	9035847	38
23	4286724	8470621	4744790	7455389	21075769	1015232	9034600	37
24	4289352	8464493	4748354	7447880	21059949	1016613	9033353	36
25	4291979	8458369	4751919	7440374	21044148	1017995	9032105	35
26	4294606	8452250	4755485	7432872	21028367	1019378	9030856	34
27	4297233	8446135	4759052	7425373	21012605	1020762	9029606	33
28	4299859	8440025	4762620	7417878	20996863	1022147	9028356	32
29	4302485	8433919	4766189	7420386	20981140	1023533	9027105	31
30	4305111	8427818	4769759	7402898	20965436	1024920	9025853	30
31	4307736	8421722	4773330	7395414	20949752	1026308	9024600	29
32	4310361	8415630	4776902	7387933	20934086	1027697	9023347	28
33	4312986	8409543	4780475	7380456	20918439	1029087	9022093	27
34	4315610	8403560	4784049	7372982	20902811	1030478	9020838	26
35	4318234	8397382	4787624	7365512	20887202	1031870	9019582	25
36	4320858	8391308	4791200	7358045	20871612	1033263	9018326	24
37	4323481	8385239	4794777	7350582	20856040	1034657	9017069	23
38	4326104	8379174	4798355	7343122	20840487	1036052	9015811	22
39	4328726	8373114	4801934	7335665	20824953	1037449	9014552	21
40	4331348	8367059	4805515	7328212	20809438	1038847	9013292	20
41	4333970	8361008	4809096	7320762	20793941	1040246	9012031	19
42	4336591	8354962	4812678	7313316	20778463	1041646	9010770	18
43	4339212	8348920	4816261	7305873	20763004	1043047	9009508	17
44	4341833	8342883	4819845	7298434	20747564	1044449	9008245	16
45	4344453	8336850	4823430	7290998	20732142	1045852	9006982	15
46	4347073	8330822	4827016	7283566	20716739	1047256	9005718	14
47	4349693	8324798	4830603	7276138	20701355	1048660	9004453	13
48	4352312	8318778	4834191	7268713	20685989	1050065	9003187	12
49	4354931	8312763	4837780	7261292	20670642	1051471	9001921	11
50	4357549	8306752	4841371	7253874	20655313	1052878	9000654	10
51	4360167	8300746	4844962	7246459	20640003	1054287	8999386	9
52	4362785	9294744	4848554	7239047	20624711	1055697	8998117	8
53	4365402	8288747	4852147	7231639	20609437	1057108	8996848	7
54	4368019	8282754	4855741	7224234	20594182	1058520	8995578	6
55	4370635	8276765	4859336	7216832	20578945	1059933	8994307	5
56	4373251	8270781	4862932	7209434	20563726	1061347	8993035	4
57	4375867	8264801	4866529	7202039	20548526	1062762	8991763	3
58	4378482	8298826	4870127	7194648	20533344	1064178	8990489	2
59	4381097	8252855	4873726	7187260	20518180	1065595	8989215	1
60	4383712	8246889	4877328	5179875	20503034	1067014	8987940	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4383712	8246889	4877328	7179875	20503034	1067014	8987940	60
1	4386326	8240927	4880930	7172493	20487906	1068434	8986664	59
2	4388940	8234970	4884533	7165115	20472797	1069855	8985388	58
3	4391554	8229017	4888137	7157740	20457706	1071277	8984111	57
4	4394167	8223068	4891742	7150368	20442633	1072700	8982833	56
5	4396780	8217124	4895347	7143001	20427577	1074123	8981555	55
6	4399392	8211184	4898953	5135637	20412539	1075547	8980276	54
7	4402004	8205249	4902560	7128277	20397519	1076972	8978996	53
8	4404616	8199318	4906168	7120920	20382516	1078398	8977715	52
9	4407227	8193391	4909777	7113566	20367531	1079825	8976433	51
10	4409838	8187469	4913387	7106216	20352563	1081253	8975151	50
11	4412449	8181551	4916998	7098868	20337613	1082683	8973868	49
12	4415059	8175638	4920610	7091524	20322681	1084114	8972584	48
13	4417669	8169729	4924223	7084183	20307767	1085546	8971299	47
14	4420278	8163824	4927838	7076845	20292870	1086979	8970013	46
15	4422887	8157923	4931454	7069510	20277991	1088413	8968727	45
16	4425496	8152027	4935071	7062179	20263130	1089848	8967440	44
17	4428104	8146135	4938689	7054851	20248286	1091284	8966152	43
18	4430712	8140247	4942308	7047526	20233460	1092721	8964864	42
19	4433320	8134364	4945928	7040205	20218651	1094159	8963575	41
20	4435927	8128485	4949549	7032887	20203860	1095598	8962285	40
21	4438534	8122610	4953171	7025572	20189086	1097038	8960994	39
22	4441140	8116739	4956794	7018260	20174329	1098479	8959702	38
23	4443746	8110873	4960418	7010952	20159590	1099921	8958410	37
24	4446352	8105011	4964043	7003647	20144868	1101364	8957117	36
25	4448957	8099153	4967669	6996345	20130163	1102808	8955824	35
26	4451562	8093299	4971296	6989045	20115475	1104254	8954530	34
27	4454167	8087450	4974924	6981749	20100805	1105801	8953235	33
28	4456771	8081605	4978553	6974456	20086152	1107149	8951939	32
29	4459375	8075764	4982184	6967166	20071516	1108598	8950642	31
30	4461978	8069927	4985816	6959879	20056898	1110048	8949344	30
31	4464581	8064095	4989448	6952596	20042297	1111499	8948045	29
32	4967184	8058267	4993081	6945316	20027709	1112951	8946746	28
33	4469786	8052443	4996716	6938039	20013142	1114404	8945446	27
34	4472388	8046623	5000352	6930765	19998591	1115858	8944146	26
35	4474990	8040808	5003989	6923495	19984057	1117313	8942845	25
36	4477591	8034997	5007627	6916228	19969540	1118769	8941543	24
37	4480192	8029190	5011266	6908964	19955039	1120226	8940240	23
38	4482792	8023387	5014906	6901703	19940555	1121684	8938936	22
39	4485392	8017589	5018547	6894546	19926088	1123143	8937632	21
40	4487992	8011795	5022189	6887191	19911637	1124604	8936327	20
41	4490591	8006005	5025832	6879939	19897203	1126066	8935021	19
42	4493190	8000219	5029476	6872690	19883786	1127529	8933717	18
43	4495788	7994437	5033121	6865444	19868386	1128993	8932406	17
44	4498386	7988660	5036767	6858202	19854002	1130458	8931098	16
45	4500984	7982887	5040414	6850963	19839635	1131924	8929789	15
46	4503582	7977118	5044062	6843727	19825285	1133391	8928479	14
47	4506179	7971353	5047712	6836494	19810951	1134859	8927169	13
48	4508776	7965592	5051363	6829265	19796634	1136327	8925858	12
49	4511372	7959835	5055015	6822039	19782333	1137796	8924546	11
50	4513968	7954083	5058668	6814817	19768048	1139266	8923234	10
51	4516563	7948335	5062322	6807597	19753780	1140738	8921921	9
52	4519158	7942591	5065977	6800380	19739528	1142211	8920607	8
53	4521753	7936851	5069633	6703166	19725293	1143685	8919292	7
54	4524347	7931115	5073290	6785955	19711074	1145160	8917976	6
55	4526941	7925383	5076948	6778747	19696872	1146636	8916659	5
56	4529535	7919655	5080607	6771542	19682686	1148113	8915341	4
57	4532128	7913932	5084267	6764340	19668516	1149592	8914023	3
58	4534721	7908213	5087928	6757141	19654362	1151072	8912704	2
59	4537313	7902498	5091590	6749945	19640225	1152553	8911385	1
60	4539905	7896787	5095254	6742752	19626104	1154035	8910065	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4539905	7896787	5095254	6742752	19626104	1154035	8910065	60
1	4542497	7891080	5098919	6735562	19611999	1155518	8908744	59
2	4545088	7885377	5102585	6728375	19597910	1157002	8907422	58
3	4547679	7879678	5106252	6721191	19583837	1158487	8906099	57
4	4540270	7873983	5109920	6714010	19569780	1159973	8904776	56
5	4552860	7898292	5113589	6706832	19555639	1161460	8903452	55
6	4555450	7862605	5117259	6699657	19541714	1162948	8902127	54
7	4558039	7856923	5120930	6692486	19527704	1164437	8900802	53
8	4560628	7851245	5124602	6685318	19513710	1165927	8899476	52
9	4563216	7845571	5128275	6678153	19499732	1167418	8898149	51
10	4565804	7839901	5131949	6670991	19485770	1168910	8896821	50
11	4568392	7834235	5135625	6663832	19471824	1170403	8895492	49
12	4570979	7828573	5139302	6656676	19457894	1171897	8894163	48
13	4573566	7822915	5142980	6649523	19443980	1173392	8892833	47
14	4576153	7817261	5146659	6642373	19430081	1174888	8891502	46
15	4578739	7811611	5150339	6635225	19416198	1176386	8890171	45
16	4581325	7805965	5154020	6628080	19402331	1177885	8888839	44
17	4583911	7800323	5157702	6620938	19388480	1179385	8887506	43
18	4586496	7794685	5161385	6613799	19374644	1180886	8886172	42
19	4589081	7789051	5165069	6606663	19360824	1182388	8884838	41
20	4591665	7783422	5168755	6599531	19347019	1183891	8883503	40
21	4594249	7777797	5172442	6592402	19333230	1185395	8882167	39
22	4596833	7772176	5176130	6585276	19319456	1186900	8880830	38
23	4599416	7766558	5179819	6578152	19305698	1188406	8879492	37
24	4601999	7760944	5183509	6571031	19291955	1189913	8878154	36
25	4604581	7755334	5187200	6563913	19278228	1191421	8876815	35
26	4607163	7749728	5190892	6556797	19264516	1192931	8875475	34
27	4609744	7744126	5194585	6549684	19250819	1194442	8874134	33
28	4612325	7738528	5198279	6542574	19237138	1195954	8872793	32
29	4614906	7732934	5201974	6535467	19223472	1197467	8871451	31
30	4617486	7727344	5205670	6528363	19209821	1198981	8870108	30
31	4620066	7721757	5209368	6521261	19196185	1200496	8868765	29
32	4622646	7716174	5213067	6514162	19182565	1202012	8867421	28
33	4625225	7710596	5216767	6507067	19168960	1203529	8866076	27
34	4627804	7705022	5220468	6499975	19155370	1205047	8864730	26
35	4630382	7699452	5224170	6492886	19141795	1206566	8863383	25
36	4632960	7693886	5227873	6485800	19128235	1208086	8862035	24
37	4635538	7688324	5231577	6478717	19114691	1209607	8860687	23
38	4638115	7682766	5235283	6471637	19101162	1211129	8859338	22
39	4640692	7677212	5238990	6464560	19087648	1212652	8857989	21
40	4643268	7671662	5242698	6457485	19074149	1214177	8856639	20
41	4645844	7666116	5246407	6450413	19060665	1215703	8855288	19
42	4648420	7660574	5250117	6443344	19047196	1217230	8853936	18
43	4650995	7655035	5253828	6436277	19033741	1218758	8852583	17
44	4653570	7649500	5257540	6429213	19020301	1220287	8851230	16
45	4656145	7643969	5261254	6422152	19006876	1221817	8849876	15
46	4658719	7638442	5264969	6415094	18993466	1223348	8848521	14
47	4661293	7632919	5268685	6408039	18980070	1224880	8847165	13
48	4663866	7627400	5272402	6400987	18966689	1226413	8845809	12
49	4666439	7621885	5276120	6393938	18953323	1227947	8844452	11
50	4669012	7616374	5279839	6386893	18939972	1229481	8843095	10
51	4671584	7610867	5283559	6379850	18926636	1231017	8841737	9
52	4674156	7605363	5287280	6372809	18913314	1232554	8840378	8
53	4676727	7599863	5291003	9365771	18900007	1234092	8839018	7
54	4679298	7592367	5294727	6358735	18886715	1235632	8837657	6
55	4681869	7588875	5298452	6351702	18873437	1237173	8836295	5
56	4684439	7583387	5302178	6344672	18860174	1238715	8834932	4
57	4687009	7577903	5305905	6337645	18846925	1240258	8833569	3
58	4689578	7572422	5309634	6330620	18833691	1241802	8832205	2
59	4692147	7566945	5313363	6323598	18820471	1243347	8830841	1
60	4694716	7561472	5317094	6316578	18807265	1233894	8829476	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	4694716	7561472	5317094	6316578	18807265	1244394	8329476	60
1	4697284	7556003	5320826	6309561	18794074	1246442	8828110	59
2	4699852	7550538	5324559	6302547	18780897	1247991	8826743	58
3	4702419	7545076	5328293	6295535	18767735	1249541	8835375	57
4	4704986	7539618	5332028	6288526	18754587	1251092	8824007	56
5	4707553	7534164	5335765	6281520	18741454	1252644	8822638	55
6	4710119	7528714	5339503	6274517	18728335	1254197	8821268	54
7	4712685	7523268	5343242	6267517	18715231	1255751	8819898	53
8	4715250	7517826	5346982	6260521	18702140	1257305	8818527	52
9	4717815	7512388	5350723	6253528	18689064	1258860	8817155	51
10	4720380	7506954	5354465	6246528	18676002	1260416	8815783	50
11	4722944	7501524	5358209	6239550	18662954	1261974	8814408	49
12	4725508	7496097	5361954	6232564	18649920	1263533	8813034	48
13	4728071	7490674	5365700	6225581	18636900	1265093	8811659	47
14	4730634	7485255	5369447	6218601	18623894	1266654	8810285	46
15	4733197	7479840	5373195	6211624	18610902	1268216	8808907	45
16	4735759	7474428	5376944	6204649	18597925	1269779	8807530	44
17	4738321	7469020	5380694	6197676	18584962	1271344	8806152	43
18	4740882	7463616	5384445	6190706	18572013	1272910	8804773	42
19	4743443	7458216	5388198	6183739	18559078	1274477	8803394	41
20	4746004	7452819	5391952	6176774	18546157	1276045	8802014	40
21	4748564	7447426	5395707	6169812	18533250	1277614	8800633	39
22	4751124	7442037	5399463	6162853	18520357	1279184	8799251	38
23	4753683	7436651	5403221	6155896	18507478	1280755	8797869	37
24	4756242	7431269	5406980	6148942	18494612	1282327	8796486	36
25	4758801	7425891	5410740	6141991	18481760	1283900	8795102	35
26	4761359	7420517	5414501	6135063	18468922	1285474	8793717	34
27	4763917	7415146	5418263	6128096	18456094	1287050	8792332	33
28	4766474	7409779	5422026	6121152	18443287	1288627	8790946	32
29	4769031	7404416	5425791	6114211	18430490	1290205	8789559	31
30	4771588	7399057	5429557	6107273	18417707	1291784	8788171	30
31	4774144	7393701	5433324	6100337	18404938	1293364	8786782	29
32	4776700	7388349	5437092	6093404	18392182	1294945	8785393	28
33	4779255	7383001	5440861	6086474	18379440	1296527	8784003	27
34	4781810	7377657	5444632	6079547	18366712	1298110	8782613	26
35	4784365	7372316	5448404	6072622	18353997	1299694	8781222	25
36	4786919	7366979	5452177	6065700	18341296	1301279	8779830	24
37	4789473	7361646	5455951	6058781	18328608	1302865	8778437	23
38	4792026	7356316	5459726	6051863	18315934	1304453	8777044	22
39	4794579	7350990	5463503	6044948	18303273	1306042	8775650	21
40	4797132	7345668	5467281	6038036	18290626	1307632	8774255	20
41	4799684	7340349	5471060	6031126	18277992	1309223	8772859	19
42	4802236	7335034	5474840	6024219	18265372	1310815	8771462	18
43	4804787	7329723	5478621	6017315	18252765	1312408	8770065	17
44	4807338	7324415	5482404	6010413	18240171	1314002	8768667	16
45	4809888	7319111	5486188	6003514	18227591	1315597	8767267	15
46	4812438	7313811	5489975	5996618	18215024	1317193	8765868	14
47	4814988	7308514	5493759	5989723	18202470	1318791	8764468	13
48	4817537	7303221	5497546	5982831	18189930	1320390	8763068	12
49	4820086	7297931	5501335	5975941	18177403	1321990	8761665	11
50	4822633	7292645	5505125	5969054	18164889	1323591	8760263	10
51	4825183	7287363	5508916	5962170	18152388	1325193	8758860	9
52	4827731	7282084	5512708	5955288	18139901	1326796	8757456	8
53	4830278	7276809	5516501	5948409	18127427	1328400	8756051	7
54	4832825	7271538	5520296	5941533	18114966	1330005	8754646	6
55	4835371	7266270	5524092	5934659	18102518	1331611	8753240	5
56	4837917	7261006	5527889	5927787	18090084	1333219	8751833	4
57	4840462	7255746	5531687	5920918	18077663	1334828	8750425	3
58	4843007	7250489	5535487	5914051	18065255	1336438	8749016	2
59	4845552	7245236	5539288	5907187	18052860	1338049	8747607	1
60	4848096	7239987	5543090	5900326	18040478	1339661	8746197	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	4848096	7239987	5543090	5900326	18040478	1339661	8746197	60
1	4850640	7234712	5546893	5893468	18028109	1341274	8744787	59
2	4853184	7229500	5550697	5886612	18015753	1342888	8743376	58
3	4855727	7224262	5554503	5879759	18003410	1344503	8741964	57
4	4858270	7219027	5558310	5872906	17991079	1346119	8740551	56
5	4860812	7213795	5562118	5866059	17978761	1347736	8739137	55
6	4863354	7208567	5565927	5859213	17966456	1349354	8737722	54
7	4865895	7203342	5569738	5852368	17954164	1350974	8736307	53
8	4868436	7198121	5573550	5845526	17941885	1352595	8734891	52
9	4870977	7192903	5577363	5838686	17929618	1354217	8733475	51
10	4873517	7187689	5581177	5831849	17917364	1355840	8732058	50
11	4876057	7182478	5584993	5825014	17905123	1357464	8730640	49
12	4878596	7177271	5588810	5818182	17892894	1359089	8729221	48
13	4881135	7172068	5592628	5811353	17880678	1360715	8727801	47
14	4883674	7166868	5596447	5804526	17868475	1362342	8726381	46
15	4886212	7161672	5600268	5897701	17856285	1363971	8724960	45
16	4888750	7156480	5604090	5790879	17844107	1365601	8723538	44
17	4891287	7151291	5607913	5784059	17831942	1367232	8722116	43
18	4893824	7146106	5611737	5777242	17819790	1368864	8720693	42
19	4896361	7140924	5615562	5770427	17807651	1370497	8719269	41
20	4898897	7135746	5619388	5763615	17795524	1372131	8717844	40
21	4901433	7130572	5623216	5756806	17783410	1373766	8716418	39
22	4903968	7125401	5627045	5749999	17771309	1375402	8714992	38
23	4906503	7120234	5630875	5743195	17759220	1377039	8713565	37
24	4909037	7115070	5634707	5736392	17747143	1378678	8712138	36
25	4911571	7109909	5638540	5729591	17735079	1380318	8710710	35
26	4914105	7104752	5642374	5722793	17723027	1381959	8709281	34
27	4916638	7099598	5646210	5715997	17710987	1383601	8707851	33
28	4919171	7094448	5650047	5709204	17698960	1385244	8706420	32
29	4921703	7089301	5653885	5702413	17686945	1386888	8704989	31
30	4924235	7084158	5657725	5695625	17674941	1388533	8703557	30
31	4926767	7079018	5661566	5688839	17662951	1390179	8702124	29
32	4929298	7073882	5665408	5682056	17650972	1391826	8700691	28
33	4631829	7068749	5669251	5675275	17639006	1393474	8699257	27
34	4934359	7063620	5673096	5668496	17627052	1395123	8697822	26
35	4936889	7058494	5676942	5661719	17615111	1396775	8696386	25
36	4939418	7053372	5680789	5654945	17603182	1398427	8694949	24
37	4941947	7048253	5684637	5648173	17591266	1400080	8693512	23
38	4944476	7043138	5688486	5641404	17579362	1401734	8692074	22
39	4947004	7038026	5692337	5634637	17567470	1403389	8690636	21
40	4949532	7032918	5696189	5627873	17555591	1495045	8689197	20
41	4952059	7027814	5700043	5621111	17543724	1406703	8687757	19
42	4954586	7022713	5703898	5614351	17531869	1408362	8686316	18
43	4957113	7017615	5707754	5607593	17520026	1410022	8684873	17
44	4959639	7012521	5711611	5600838	17508189	1411683	8683431	16
45	4962165	7007430	5715469	5594085	17496369	1413345	8681988	15
46	4964690	7002342	5719329	5587334	17484559	1415008	8680544	14
47	4967215	6997258	5723190	5580586	17472764	1416672	8679100	13
48	4969740	6992177	5727052	5573840	17460981	1418337	8677655	12
49	4972264	6987099	5730916	5567095	17449210	1420004	8676209	11
50	4974788	6982025	5734781	5560353	17437451	1421672	8674762	10
51	4977311	6576954	5738647	5553613	17425704	1423341	8673314	9
52	4979834	6971886	5742515	5546875	17413969	1425011	8671866	8
53	3982356	6966822	5746384	5540140	17402246	1426682	8670417	7
54	4984878	6961761	5750254	5533407	17390534	1428354	8668968	6
55	4987399	6956704	5754125	5526677	17378834	1430027	8667518	5
56	4989920	6951650	5757998	5519949	17367146	1431701	8666067	4
57	4992441	6946600	5761872	5513224	17355469	1433376	8664615	3
58	4994961	6941553	5765747	5506500	17343804	1435053	8663162	2
59	4997481	6936509	5769624	5499778	17332150	1436731	8661708	1
60	5000000	6931469	5773502	5493059	17320508	1438410	8660254	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5000000	6931409	5773502	5493059	17320508	1438410	8660254	60
1	5002519	6926432	5777381	5486342	17308878	1440090	8658799	59
2	5005038	6921399	5781262	5479628	17297258	1441771	8657344	58
3	5007556	6916369	5785144	5472916	17285651	1443453	8655888	57
4	5010074	6911342	5789027	5466206	17274056	1445136	8654431	56
5	5012591	6906319	5792911	5459498	17262473	1446821	8652972	55
6	5015108	6901299	5796797	5452792	17250902	1448507	8651514	54
7	5017624	6896282	5800684	5446088	17239342	1450194	8650055	53
8	5020140	6891269	5804572	5439387	17227794	1451882	8648595	52
9	5022656	6886259	5808462	5432688	17216258	1453571	8647134	51
10	5025171	6881253	5812353	5425992	17204734	1455261	8645673	50
11	5027686	6876250	5816245	5419298	17193222	1456952	8644211	49
12	5030200	6871250	5820139	5412605	17181721	1458645	8642748	48
13	5032714	6866254	5824034	5405915	17170231	1460339	8641284	47
14	5035227	6861261	5827930	5399227	17158752	1462034	8639820	46
15	5037740	6856271	5831828	5392541	17147285	1463730	8638355	45
16	5040253	6851285	5835727	5385858	17135829	1465427	8636889	44
17	5042765	6846302	5839627	5379177	17124384	1467125	8635423	43
18	5045277	6841323	5843528	5372499	17112950	1468824	8633956	42
19	5047788	6836347	5847431	5365822	17101527	1470525	8632488	41
20	5050299	6831374	5851335	5359147	17090115	1472227	8631019	40
21	5052809	6826405	5855241	5352475	17078714	1473930	8629549	39
22	5055319	6821439	5859148	5345805	17067325	1475634	8628079	38
23	5057829	6816476	5863056	5339137	17055957	1477339	8626608	37
24	5060338	6811516	5866966	5332471	17044591	1479045	8625137	36
25	5062847	6806560	5870877	5325808	17033236	1480752	8623665	35
26	5065355	6801607	5874789	5319147	17021892	1482460	8622192	34
27	5067863	6796657	5878702	5312488	17010560	1484169	8620718	33
28	5070370	6791710	5882617	5305831	16999239	1485879	8619243	32
29	5072877	6786767	5886533	5299177	16987929	1487590	8617768	31
30	5075384	6781827	5890450	5292525	16976631	1489302	8616292	30
31	5077890	6776890	5894369	5285874	16965344	1491016	8614815	29
32	5080396	6771956	5898289	5279225	16954068	1492731	8613338	28
33	5082901	6767026	5902211	5272579	16942803	1494447	8611860	27
34	5085406	6762099	5906134	5265934	16931549	1496165	8610381	26
35	5087911	6757175	5910058	5259291	16920306	1497884	8608901	25
36	5090415	6752255	5913984	5252651	16909074	1499604	8607420	24
37	5092919	6747338	5917911	5246013	16897853	1501325	8605939	23
38	5095422	6742424	5921839	5239377	16886644	1503047	8604457	22
39	5097925	6737513	5925769	5232743	16875446	1504770	8602975	21
40	5100427	6732606	5929700	5226112	16864259	1506494	8601492	20
41	5102929	6727702	5933633	5219482	16853083	1508220	8600008	19
42	5105430	6722802	5937567	5212855	16841918	1509947	8598523	18
43	5107930	6717905	5941502	5206230	16830764	1511675	8597037	17
44	5110431	6713011	5945438	5199607	16819621	1513404	8595551	16
45	5112931	6708120	5949376	5192986	16808489	1515134	8594064	15
46	5115431	6703232	5953315	5186367	16797367	1516865	8592577	14
47	5117930	6698348	5957255	5179751	16786256	1518597	8591089	13
48	5120429	6693467	5961197	5173137	16775156	1520330	8589600	12
49	5122927	6688589	5965140	5166525	16764067	1522064	8588110	11
50	5125425	6683714	5969084	5159914	16752989	1523800	8586619	10
51	5127922	6678842	5973030	5153305	16741922	1525537	8585127	9
52	5130419	6673974	5976776	5146699	16730866	1527275	8583635	8
53	5132916	6669109	5980926	5140095	16719820	1529014	8582142	7
54	5135412	6664247	5984876	5133493	16708785	1530754	8580649	6
55	5137908	6659388	5988827	5126892	16697760	1532496	8579155	5
56	5140403	6654532	5992780	5120293	16686746	1534239	8577660	4
57	5142898	6649680	5996734	5113697	16675742	1535983	8576164	3
58	5145393	6644831	6000690	5107103	16664749	1537728	8574668	2
59	5147887	6639985	6004647	5100511	16653766	1539474	8573171	1
60	5150381	6635142	6008606	5093921	16642794	1541221	8571673	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5150381	6635142	6008606	5093921	16642794	1541221	8571673	60
1	5152874	6630302	6012566	5087332	16631833	1542970	8570175	59
2	5155367	6625465	6016528	5080745	16620882	1547720	8568676	58
3	5157859	6620631	6020491	5074160	16609942	1546471	8567176	57
4	5160351	6615801	6024455	5067578	16599013	1548223	8565675	56
5	5162843	6610974	6028420	5060998	16588094	1549976	8564173	55
6	5165333	6606150	6032387	5054420	16577186	1551730	8562671	54
7	5167825	6601329	6036355	5047844	16566289	1553485	8561168	53
8	5170315	6596512	6040324	5041271	16555402	1555241	8559664	52
9	5172805	6591698	6044295	5034700	16544526	1556998	8558160	51
10	5175294	6586887	6048267	5028130	16533660	1558757	8556655	50
11	5177783	6582079	6052241	5021562	16522805	1560517	8555149	49
12	5180271	6577275	6056216	5014997	16511960	1562278	8553643	48
13	5182759	6572474	6060193	5008434	16501126	1564040	8552136	47
14	5185246	6567676	6064171	5001873	16490302	1565803	8550628	46
15	5187733	6562881	6068150	4995313	16479488	1567568	8549119	45
16	5190220	6558089	6072131	4988755	16468685	1569334	8547609	44
17	5192706	6553300	6076113	4982199	16457892	1571101	8546099	43
18	5195192	6548514	6080096	4975645	16447109	1572869	8544588	42
19	5197676	6543731	6084081	4969093	16436337	1574638	8543077	41
20	5200162	6538951	6088067	4962543	16425575	1576408	8541565	40
21	5202646	6534174	6092055	4955994	16414824	1578180	8540052	39
22	5205130	6529400	6096044	4949447	16404083	1579953	8538538	38
23	5207614	6524629	6100035	4942902	16393352	1581727	8537024	37
24	5210097	6519862	6104027	4936360	16382631	1583502	8535509	36
25	5212580	6515098	6108020	4929820	16371920	1585278	8533993	35
26	5215062	6510337	6112015	4923282	16361219	1587055	8532476	34
27	5217544	6505580	6116011	4916747	16350528	1588833	8530958	33
28	5220025	6500826	6120009	4910213	16339847	1590613	8529440	32
29	5222506	6496075	6124008	4903681	16329176	1592394	8527921	31
30	5224986	6491327	6128008	4897151	16318516	1594176	8526402	30
31	5227466	6486583	6132010	4890624	16307866	1595959	8524882	29
32	5229946	6481842	6136013	4884098	16297226	1597744	8523361	28
33	5232425	6477103	6140018	4877573	16286596	1599530	8521839	27
34	5234904	6472367	6144024	4871050	16275976	1601317	8520317	26
35	5237382	6467634	6148032	4867529	19265366	1603105	8518794	25
36	5239860	6462904	6152041	4858010	16254766	1604894	8517270	24
37	5242337	6458177	6156052	4851493	16244176	1606684	8515745	23
38	5244814	6453453	6160064	4844978	16233597	1608475	8514220	22
39	5247290	6448732	6164077	4838465	16223028	1610267	8512094	21
40	5249766	6444014	6168092	4831954	16212469	1612060	8511167	20
41	5252241	6439299	6172108	4825444	16201920	1613855	8509639	19
42	5254716	6434588	6176126	4818937	16191381	1615651	8508111	18
43	5257191	6429880	6180145	4812432	16180852	1617448	8506582	17
44	5259665	6425175	6184168	4805929	16170332	1619246	8505052	16
45	5262139	6420473	6188190	4799427	16159822	1621046	8503522	15
46	5264612	6415774	6192213	4792927	16149322	1622847	8501991	14
47	5267085	6411078	6196237	4786429	19138832	1624649	8500459	13
48	5269557	6406385	6200263	4779933	16128351	1626452	8498927	12
49	5272029	6401695	6204290	4773439	16117880	1628256	8497394	11
50	5274501	6397008	6208319	4766947	16107419	1630061	8495860	10
51	5276972	6392324	6212350	4760456	16096968	1631868	8494326	9
52	5279443	6387643	6216382	4753967	16086527	1633676	8492791	8
53	5281913	6382965	6220416	4747480	16076095	1635485	8491255	7
54	5284383	6378290	6224451	4740995	16065673	1637295	8489718	6
55	5286852	6373618	6228488	4734512	16055261	1639106	8488180	5
56	5289321	6368949	6232526	4728031	16044859	1640918	8486641	4
57	5291789	6364283	6236566	4721552	16034466	1642731	8485102	3
58	5294257	6359620	6240607	4715074	16024083	1644546	8483562	2
59	5296725	6354961	6244649	4708599	16013710	1646362	8482022	1
60	5299192	6350305	6248693	4702126	16003347	1648179	8480481	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5299192	6350305	6248693	4702120	16003347	1648179	8480481	60
1	5301659	6345652	6252738	4695655	15992994	1649997	8478939	59
2	5304125	6341002	6256785	4689186	15982651	1651816	8477397	58
3	5306591	6336354	6260834	4682717	15972315	1653637	8475854	57
4	5309056	6331709	6264884	4676240	15961992	1655459	8474310	56
5	5311521	6327067	6268935	4669785	15951676	1657282	8472765	55
6	5313985	6322428	6272988	4663322	15941370	1659106	8471219	54
7	5316449	6317792	6277042	4656861	15931073	1660931	8469673	53
8	5318913	6313159	6281098	4750402	15920785	1662757	8468126	52
9	5321376	6308529	6285155	4643944	15910507	1664585	8466579	51
10	5323839	6303902	6289214	4637488	15900238	1666414	8465031	50
11	5326301	6299278	6293274	4631034	15889979	1668244	8463482	49
12	5328763	6294657	6297336	4624582	15879729	1670075	8461932	48
13	5331224	6190039	6301399	4618131	15869489	1671908	8460381	47
14	5333685	6285424	6305464	4611682	15859259	1673742	8458830	46
15	5336145	6280812	6309530	4605235	15849038	1675577	8457278	45
16	5338605	6276203	6313598	4598790	15838827	1677413	8455725	44
17	5341065	6271597	6317667	4592347	15828625	1679250	8454172	43
18	5343524	6266994	6321738	4585906	15818433	1681088	8452618	42
19	5345983	6262394	6325810	4579467	15808251	1682927	8451064	41
20	5348441	6257797	6329883	4573030	15798078	1684767	8449509	40
21	5350898	6253203	6333958	4566594	15787915	1686609	8447953	39
22	5353355	6248612	6338034	4560160	15777761	1688452	8446396	38
23	5355812	6244024	6342112	4553728	15767616	1690296	8444838	37
24	5358268	6239439	6346191	4547298	15757480	1692141	8443280	36
25	5360724	6234857	6350272	4540859	15747353	1693988	8441721	35
26	5363179	6230278	6354355	4534442	15737235	1695836	8440161	34
27	5365634	6225702	6358439	4528017	15727127	1697685	8438600	33
28	5368088	6221129	6362525	4521594	15717028	1699535	8437039	32
29	5370542	6216559	6366613	4515172	15706938	1701387	8435477	31
30	5372996	6211992	6370702	4508752	15696857	1703240	8433915	30
31	5375449	6207427	6374792	4502333	15686786	1705094	8432352	29
32	5377902	6202865	6378884	4495916	15676724	1706949	8430788	28
33	5380354	6198306	6382977	4489501	15666671	1708805	8429223	27
34	5382806	6293750	6387072	4483088	15656627	1710662	8427658	26
35	5385258	6189197	6391169	4476676	15646592	1712521	8426092	25
36	5387709	6184647	6395267	4470266	15636566	1714381	8424525	24
37	5390159	6180100	6399366	4463858	15626549	1716242	8422957	23
38	5392609	6175556	6403467	4457452	15616541	1718104	8421389	22
39	5395058	6171015	6407569	4451048	15606542	1719967	8419820	21
40	5397507	6166477	6411673	4444646	15596552	1721831	8418250	20
41	5399855	6161942	6415779	4438245	15586571	1723697	8416679	19
42	5402403	6157409	6419886	4431845	15576599	1725564	8415108	18
43	5404851	6152879	6423995	4425447	15566636	1727432	8413536	17
44	5407298	6148352	6428105	4419051	15556682	1729301	8411963	16
45	5409745	6143828	6432216	4412656	15546738	1731172	8410390	15
46	5412191	6139307	6436329	4406263	15536803	1733044	8408816	14
47	5414637	6134789	6440444	4399872	15526877	1734917	8407241	13
48	5417082	6130274	6444560	4393483	15516960	1736791	8405666	12
49	5419527	6125762	6448678	4387096	15507052	1738666	8404090	11
50	5421972	6121253	6452798	4380711	15497153	1740542	8402513	10
51	5424416	6116747	6456919	4374327	15487263	1742420	8400935	9
52	5426859	6112244	6461042	4367945	15477382	1744299	8399357	8
53	5429302	6107744	6465166	4361565	15467510	1746179	8397778	7
54	5431743	6103246	6469292	4355186	15457646	1748060	8396199	6
55	5434186	6098751	6473419	4348809	15447791	1749942	8394619	5
56	5436629	6094259	6477548	4342433	15437945	1751826	8393038	4
57	5439070	6089770	6481678	4336059	15428108	1753711	8391456	3
58	5441510	6085284	6485809	4329687	15418280	1755597	8389873	2
59	5443950	6080800	6489942	4323316	15408461	1757484	8388290	1
60	5446390	6076319	6494076	4316947	15398651	1759372	8386706	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5446390	6076319	6494076	4316947	15398651	1759372	8386706	60
1	5448829	6071841	6498212	4310579	15388850	1761262	8385121	59
2	5451268	6067366	6502350	4304213	15379057	1763153	8383536	58
3	5453707	6062894	6506489	4297849	15369273	1765045	8381950	57
4	5456145	6058425	6510630	4291487	15359497	1766938	8380303	56
5	5458583	6053958	6514773	4285126	15349730	1798832	8378776	55
6	5461020	6049494	6518917	4278766	15339972	1770728	8377188	54
7	5463456	6045033	6523063	4272408	15330222	1772625	8375599	53
8	5465892	6040575	6527210	4266052	15320481	1774523	8374009	52
9	5468328	6036120	6531359	4259698	15310748	1776422	8372419	51
10	5470763	6031668	6535510	4253346	15301024	1778322	8370828	50
11	5473198	6027218	6539662	4246994	15291309	1780224	8369236	49
12	5475632	6022771	6543816	4240644	15281603	1782127	8367644	48
13	5478066	6018327	6547971	4234296	15271905	1784031	8366051	47
14	5480499	6013886	6552128	4227950	15262216	1785936	8364457	46
15	5482932	6009448	6556287	4221605	15252535	1787843	8362862	45
16	5485364	6005013	6560447	4215262	15242863	1789751	8361266	44
17	5487796	6000580	6564609	4208920	15233200	1791660	8359670	43
18	5490228	5996150	6568772	4202580	15223545	1793570	8358073	42
19	5492659	5991723	6572937	4196241	15213899	1795482	8356476	41
20	5495090	5987299	6577103	4189904	15204261	1797395	8354878	40
21	5497520	5982878	6581271	4183569	15194632	1799309	8353279	39
22	5499950	5978460	6585440	4177236	15185011	1801224	8351680	38
23	5502379	5974044	6589611	4170904	15175398	1803140	8350080	37
24	5504808	5969631	6593784	4164573	15165794	1805058	8348479	36
25	5507236	5965221	6597958	4156244	15156199	1806977	8346877	35
26	5509664	5960814	6602134	4151917	15146612	1808897	8345274	34
27	5512091	5956409	6606312	4145591	15137034	1810818	8343671	33
28	5514518	5952007	6610491	4139267	15127464	1812740	8342067	32
29	5516944	5947608	6614672	4132944	15117903	1814664	8340463	31
30	5519370	5943212	6618855	4126623	15108351	1816589	8338858	30
31	5521795	5938829	6623039	4120314	15098807	1818515	8337252	29
32	5524220	5934438	6627225	4113996	15089271	1820442	8335646	28
33	5526645	5930050	6631413	4107680	15079744	1822370	8334039	27
34	5529069	5925665	6635603	4101366	15070225	1824299	8332431	26
35	5531493	5921273	6639792	4095043	15060714	1826230	8330822	25
36	5533916	5916893	6643984	4088731	15051211	1828162	8329212	24
37	5536338	5912516	6648178	4082421	15041717	1830095	8327602	23
38	5538760	5908142	6652373	4076113	15032231	1832029	8325991	22
39	5541182	5903771	6656570	4069807	15022753	1833964	8324380	21
40	5543603	5899402	6660768	4063501	15013283	1835901	8322768	20
41	5546024	5895036	6664968	4057197	15003821	1837839	8321155	19
42	5548444	5890673	6669170	4050895	14994368	1839778	8319541	18
43	5550864	5886313	6673373	3044594	14984923	1841719	8317927	17
44	5553283	5881955	6677578	4038294	14975486	1843661	8316312	16
45	5555702	5877600	6681785	4031996	14966058	1845604	8314696	15
46	5558120	5873248	6685994	4025700	14956638	1847548	8313079	14
47	5560538	5868899	6690204	4019405	14947226	1849494	8311462	13
48	5562956	5864552	6694416	4013111	14937822	1851441	8309844	12
49	5565373	5860208	6698630	4006819	14928426	1853389	8308226	11
50	5567790	5855867	6702845	4000529	14919038	1855338	8306607	10
51	5570206	5851529	6707062	3994241	14909659	1857288	8304987	9
52	5572622	5847193	6711281	3987953	14900288	1859240	8303367	8
53	5575037	5842860	6715501	3981667	14890925	1861193	8301746	7
54	5577452	5838530	6719723	3975383	14881570	1863147	8300124	6
55	5579866	5834203	6723946	3969101	14872223	1865102	8298501	5
56	5582280	5829878	6728171	3962819	14862884	1867059	8296877	4
57	5584693	5825556	6732397	3956535	14853553	1869017	8295253	3
58	5587105	5821237	6736625	3950261	14844230	1870976	8293628	2
59	5589518	5816920	6740854	3943984	14834916	1872936	8292002	1
60	5591929	5812606	6745085	3937709	14825610	1874897	8290376	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5591929	5812606	6745085	3937709	14825610	1874897	8290376	60
1	5594340	5808295	6749318	3931435	14816312	1876860	8288794	59
2	5596751	5803987	6753553	3925163	14807022	1878824	8287121	58
3	5599161	5799681	6757789	3918892	14797740	1880789	8285493	57
4	5601571	5795378	6762027	3912623	14788466	1882755	8283864	56
5	5603981	5791078	6766267	3906355	14779200	1884723	8282234	55
6	5606390	5786780	6770508	3900088	14769941	1886692	8280603	54
7	5608798	5782485	6774751	3893823	14760690	1888662	8278972	53
8	5611206	5778192	6778996	3887559	14751447	1890633	8277340	52
9	5613614	5773902	6783243	3881297	14742212	1892605	8275708	51
10	5616021	5769615	6787491	3875036	14732985	1894579	8274075	50
11	5618427	5765330	6791741	3868776	14723765	1896554	8272441	49
12	5620833	5761048	6795993	3862518	14714553	1898530	8270806	48
13	5623239	5756769	6800246	3856261	14705349	1900508	8269170	47
14	5625644	5752493	6804501	3850006	14696153	1902487	8267534	46
15	5628049	5748219	6808758	3843752	14686965	1904467	8265897	45
16	5630453	5743948	6813016	3837500	14677785	1906448	8264259	44
17	5632857	5739680	6817276	3831249	14668613	1908431	8262621	42
18	5635260	5735414	6821538	3824999	14659449	1910415	8260982	42
19	5637663	5731151	6825801	3818751	14650293	1912400	8259343	41
20	5640066	5726891	6830066	3812505	14641146	1914386	8257703	40
21	5642468	5722634	6834333	3806261	14632007	1916373	8256062	39
22	5644869	5718379	6838602	3800017	14622875	1918362	8254421	38
23	5647270	5714127	6842872	3793775	14613750	1920352	8252779	37
24	5649670	5709878	6847144	3787538	14604633	1922343	8251136	36
25	5652070	5705631	6851417	3781296	14595523	1924335	8249492	35
26	5654469	5701387	6855692	3775059	14586421	1926328	8247847	34
27	5656868	5697145	6859969	3768822	14577327	1928323	8246202	33
28	5659266	5692906	6864247	3762587	14568241	1930319	8244556	32
29	5661665	5688670	6868527	3756354	14559162	1932316	8242909	31
30	5664062	5684436	6872809	3750122	14550091	1934314	8241262	30
31	5666459	5680205	6877093	3743891	14541028	1936314	8239614	29
32	5668856	5675976	6881379	3737661	14531972	1938315	8237965	28
33	5671252	5671750	6885666	3731433	14522924	1940317	8236316	27
34	5673648	5667527	6889955	3725206	14513883	1942321	8234666	26
35	5676043	5663306	6894246	3718980	14504850	1944326	8233015	25
36	5678438	5659088	6898539	3712756	14495825	1946332	8231363	24
37	5680832	5654872	6902833	3706532	14486807	1948340	8229711	23
38	5683226	5650659	6907129	3700310	14477797	1950349	8228058	22
39	5685619	5646449	6911426	3694090	14468794	1952359	8226405	21
40	5688012	5642241	6915725	3687871	14459799	1954370	8224751	20
41	5690404	5638036	6920026	3681653	14450812	1956383	8223096	19
42	5692796	5633834	6924329	3675437	14441833	1958398	8221440	18
43	5695187	5629635	6928634	3669223	14432861	1960412	8219784	17
44	5697578	5625438	6932940	3663010	14423896	1962428	8218127	16
45	5699968	5621244	6937248	3656799	14414939	1964445	8216469	15
46	5702358	5617052	6941558	3650588	14405990	1966464	8214810	14
47	5704747	5612863	6945869	3641379	14397048	1968484	8213151	13
48	5707136	5608676	6950182	3638171	14388113	1970505	8211491	12
49	5709524	5604492	6954497	3634965	14379186	1972527	8209831	11
50	5711912	5600311	6958813	3625761	14370266	1974550	8208170	10
51	5714299	5596132	6963131	3619557	14361354	1976575	8206508	9
52	5716686	5591956	6967451	3613355	14352451	1978601	8204846	8
53	5719072	5587782	6971773	3607154	14343552	1980628	8203183	7
54	5721458	5583611	6976097	3600954	14334662	1982657	8201519	6
55	5723844	5579443	6980423	3594756	14325780	1984687	8199854	5
56	5726229	5575277	6984750	3588559	14316905	1986718	8198188	4
57	5728613	5571114	6989079	3582364	14308037	1988750	8196522	3
58	5730997	5566953	6993409	3576169	14299177	1990784	8194855	2
59	5733381	5562795	6997741	3569976	14290325	1992819	8193188	1
60	5735764	5558639	7002075	3563784	14281480	1994855	8191520	0
								M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	5735764	5558639	7002075	3563784	14281480	1994855	8191520	60
1	5738147	5554486	7006411	3557594	14272643	1996892	8189851	59
2	5740529	5550336	7010749	3551405	14263813	1998931	8188182	58
3	5742911	5546188	7015088	3545217	14254990	2000971	8186512	57
4	5745292	5542043	7019429	3539031	14246174	2003012	8184841	56
5	5747672	5537900	7023772	3531846	14237365	2005054	8183170	55
6	5750052	5533760	7028117	3526662	14228563	2007098	8181498	54
7	5752432	5529622	7032463	3520479	14219769	2009143	8179825	53
8	5754811	5525487	7036811	3514298	14210982	2011189	8178151	52
9	5757190	5521354	7041161	3508118	14202202	2017236	8176477	51
10	5759568	5517224	7045513	3501939	14193429	2015285	8174802	50
11	5761946	5513096	7049867	3495761	14184663	2017335	8173126	49
12	5764323	5508971	7054223	3489585	14175904	2019386	8171449	48
13	5766700	5504849	7058581	3483410	14167153	2021439	8169772	47
14	5769076	5500729	7062940	3477236	14158409	2023493	8168094	46
15	5771452	5466612	7067301	3471064	14149672	2025548	8166416	45
16	5773827	5492497	7071664	3464892	14140943	2027605	8164737	44
17	5776202	5488385	7076029	3458722	14132221	2029663	8163057	43
18	5778576	5484275	7080395	3452553	14123506	2031722	8161376	42
19	5780950	5480168	7084763	3446386	14114798	2033782	8159695	41
20	5783324	5476063	7089133	3440219	14106097	2035844	8158013	40
21	5785697	5471961	7093505	3434054	14097402	2037907	8156330	39
22	5788069	5467861	7097879	3427890	14088715	2039971	8154647	38
23	5790441	5463764	7102254	3421728	14080035	2042036	8152963	37
24	5792812	5459669	7106631	3415566	14071363	2044103	8151278	36
25	5795183	5455577	7111010	3409406	14062699	2046171	8149593	35
26	5797553	5451488	7115391	3403248	14054040	2048240	8147907	34
27	5799923	5447401	7119773	3397090	14045389	2050311	8146220	33
28	5802292	5443317	7124157	3390934	14036746	2052383	8144532	32
29	5804661	5439235	7128543	3384779	14028110	2054456	8142844	31
30	5807030	5435156	7132931	3378626	14019481	2056530	8141155	30
31	5809398	5431079	7137321	3372473	14010859	2058606	8139465	29
32	5811766	5427005	7141713	3366422	14002244	2060683	8137775	28
33	5814133	5422933	7146106	3360172	13993636	2062761	8136084	27
34	5816499	5418864	7150501	3354024	13985035	2064840	8134393	26
35	5818865	5414797	7154898	3347877	13976441	2066920	8132701	25
36	5821230	5410733	7159297	3341731	13967853	2069002	8131008	24
37	5823595	5406671	7163698	3335586	13959272	2071085	8129314	23
38	5825959	5402612	7168100	3329443	13950698	2073169	8127620	22
39	5828323	5398555	7172504	3323300	13942131	2075255	8125925	21
40	5830687	5394501	7176910	3317159	13933571	2077342	8124229	20
41	5833050	5390449	7181318	3311019	13925017	2079430	8122532	19
42	5835412	5386400	7185728	3304880	13916470	2081520	8120835	18
43	5837774	5382353	7190140	3298742	13907930	2083611	8119137	17
44	5840136	5378308	7194554	3292605	13899397	2085703	8117439	16
45	5842497	5374266	7198970	3286470	13890872	2087796	8115740	15
46	5844858	5370226	7203387	3280335	13882354	2089891	8114040	14
47	5847218	5366189	7207806	3274202	13873843	2091987	8112339	13
48	5849578	5362154	7212227	3268070	13865339	2094084	8110638	12
49	5851937	5358122	7216650	3261939	13856842	2096183	8108936	11
50	5854295	5354093	7221075	3255810	13848352	2098283	8107234	10
51	5856653	5350067	7225502	3249683	13839869	2100384	8105531	9
52	5859010	5346043	7229931	3243557	13831392	2102486	8103827	8
53	5861367	5342021	7234362	3237431	13822922	2104590	8102122	7
54	5863724	5338002	7238794	3231307	13814459	2106695	8100417	6
55	5866080	5333985	7243228	3225184	13806002	2108801	8098711	5
56	5868436	5329970	7247664	3219061	13797552	2110909	8097004	4
57	5870791	5325958	7252102	3212940	13789109	2113018	8095296	3
58	5873145	5321948	7256541	3206820	13780673	2115128	8093588	2
59	5875499	5317940	7260982	3200700	13772243	2117240	8091879	1
60	5877852	5313935	7265424	3194582	13763820	2119353	8090170	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	5877852	5313935	7365424	3194582	13703820	2119353	8090170	60
1	5880205	5309932	7269869	3188465	13755403	2121467	8088460	59
2	5882558	5305932	7274316	3182350	13746993	2123582	8086749	58
3	5884910	5301935	7278765	3176236	13738590	2125699	8085038	57
4	5887262	5297940	7283216	3170123	13730194	2127817	8083325	56
5	5889613	5293947	7287669	3164011	13721805	2129936	8081613	55
6	5891964	5289957	7292124	3157900	13713422	2132057	8079899	54
7	5894314	5285969	7296581	3151790	13705046	2134179	8078185	53
8	5896664	5281984	7301040	3145682	13696677	2136302	8076470	52
9	5899013	5278001	7305501	3139575	13688315	2138426	8074754	51
10	5901361	5274020	7309963	3133468	13679959	2140552	8073038	50
11	5903709	5270042	7314427	3127363	13671610	2142679	8071321	49
12	5906056	5266066	7318893	3121259	13663268	2144807	8069603	48
13	5908403	5262092	7323361	3115155	13654932	2146937	8067885	47
14	5910750	5258121	7327831	3109053	13646602	2149068	8066166	46
15	5913096	5254152	7332303	3102952	13638279	2151200	8064446	45
16	5915442	5250186	7336777	3096853	13629963	2153333	8062726	44
17	5917787	5246222	7341253	3090754	13621653	2155468	8061005	43
18	5920132	5242261	7345731	3084657	13613350	2157604	8059283	42
19	5922476	5238302	7350210	3078561	13605054	2159741	8057561	41
20	5924820	5234346	7354691	3072466	13596764	2161880	8055838	40
21	5927163	5230392	7359174	3066372	13588481	2164020	8054114	39
22	5929505	5226441	7363659	3060280	13580204	2166161	8052389	38
23	5931847	5222492	7368146	3054188	13571934	2168304	8050664	37
24	5934189	5218545	7372635	3048097	13563670	2170448	8048938	36
25	5936530	5214601	7377126	3042008	13555413	2172593	8047212	35
26	5938871	5210659	7381619	3035919	13547162	2174740	8045485	34
27	5941211	5206720	7386114	3029832	13538918	2176888	8043757	33
28	5942551	5202783	7390611	3023749	13530680	2179037	8042028	32
29	5945890	5198848	7395110	3017660	13522449	2181188	8040299	31
30	5948228	5194916	7399610	3011576	13514224	2183340	8038569	30
31	5950566	5190986	7404112	3005493	13506006	2185493	8036838	29
32	5952904	5187059	7408616	2999412	13497794	2187647	8035107	28
33	5955241	5183134	7413122	2993331	13489589	2189803	8033375	27
34	5957578	5179211	7417630	2987251	13481390	2191960	8031642	26
35	5959914	5175291	7422140	2981173	13473197	2194118	8029909	25
36	5962250	5171373	7426652	2975095	13465011	2196278	8028175	24
37	5964585	5167457	7431167	2969018	13456832	2198439	8026440	23
38	5966919	5163544	7435684	2962943	13448659	2200601	8024705	22
39	5969253	5159633	7440203	2956868	13440492	2202765	8022969	21
40	5971586	5155724	7444724	2950794	13432331	2204930	8021232	20
41	5973919	5151818	7449246	2944722	13424177	2207096	8019494	19
42	5976251	5147914	7453770	2938650	13416029	2209264	8017756	18
43	5978583	5144012	7458296	2932579	13407888	2211433	8016017	17
44	5980915	5140113	7462824	2926510	13399753	2213603	8014278	16
45	5983246	5136216	7467354	2920442	13391624	2215774	8012538	15
46	5985577	5132322	7471886	2914375	13383502	2217947	8010797	14
47	5987907	5128430	7476420	2908309	13375386	2220121	8009056	13
48	5990237	5124540	7480956	2902244	13367276	2222296	8007314	12
49	5992566	5120653	7485494	2896180	13359172	2224473	8005571	11
50	5994894	5116768	7490033	2890117	13351075	2226651	8003828	10
51	5997222	5112886	7494574	2884056	13342984	2228830	8002084	9
52	5999549	5109006	7499117	2877995	13334899	2231011	8000339	8
53	6001876	5105128	7503663	2871935	13326821	2233193	7998593	7
54	6004202	5101253	7508211	2865877	13318749	2235376	7996847	6
55	6006528	5097380	7512761	2859819	13310683	2237561	7995100	5
56	6008853	5093509	7517313	2853762	13302624	2239747	7993352	4
57	6011178	5089641	7521867	2847706	13294571	2241935	7991604	3
58	6013502	5085775	7526423	2841651	13286524	2244124	7989855	2
59	6015826	5081911	7530981	2835597	13278483	2246314	7988105	1
60	6018150	5078050	7535541	2829544	13270448	2248506	7986355	0

M.

M	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6018150	5078050	7535541	2829544	13270448	2248506	7986355	60
1	6020473	5074191	7540103	2823492	13262419	2250699	7984604	59
2	6022796	5070334	7544667	2817441	13254396	2252893	7982852	58
3	6025118	5066470	7549233	2811391	13246380	2255088	7981100	57
4	6027439	5062627	7553801	2805342	13238369	2257285	7979347	56
5	6029760	5058777	7558371	2799234	13230365	2259483	7977593	55
6	6032080	5054929	7562943	2793247	13222367	2261682	7975838	54
7	6034400	5051084	7567517	2787201	13214375	2263883	7974084	53
8	6036719	5047241	7572093	2781156	13206390	2266085	7972328	52
9	6039038	5043401	7576670	2775113	13198411	2268288	7970572	51
10	6041357	5039563	7581249	2769071	13190438	2270492	7968815	50
11	6043675	5035727	7585830	2763029	13182472	2272698	7967057	49
12	6045992	5031894	7590413	2756989	13174512	2274905	7965299	48
13	6048309	5028063	7594999	2750949	13166558	2277114	7963540	47
14	6050625	5024234	7599587	2744910	13158610	2279324	7961780	46
15	6052940	5020408	7604177	2738873	13150668	2281535	7960020	45
16	6055255	5016584	7608769	2732836	13142732	2283748	7958259	44
17	6057570	5012762	7613363	2726800	13134802	2285962	7956497	43
18	6059884	5008942	7617959	2720764	13126877	2288178	7954735	42
19	6062198	5005125	7622557	2714730	13118958	2290395	7952972	41
20	6064511	5001310	7627157	2708696	13111045	2292614	7951208	40
21	6066824	4997497	7631759	2702663	13103138	2294834	7949443	39
22	6069136	4993687	7636363	2696632	13095237	2297055	7947678	38
23	6071448	4989879	7640969	2690602	13087343	2299277	7945912	37
24	6073759	4986073	7645577	2684573	13079455	2301500	7944146	36
25	6076069	4982270	7650187	2678545	13071573	2303725	7942379	35
26	6078379	4978469	7654799	2672518	13063697	2305951	7940611	34
27	6080688	4974670	7659413	2666492	13055827	2308178	7938842	33
28	6082997	4970873	7664030	2660467	13047963	2310406	7937073	32
29	6085306	4967079	7668649	2654444	13040105	2312635	7935303	31
30	6087614	4963287	7673270	2648421	13032253	2314866	7933533	30
31	6089922	4959497	7677893	2642399	13024407	2317098	7931762	29
32	6092229	4955710	7682518	2636378	13016567	2319332	7929990	28
33	6094536	4951925	7687145	2630358	13008732	2321567	7928218	27
34	6096842	4948142	7691774	2624338	13000903	2323804	7926445	26
35	6099147	4944361	7696405	2618319	12993080	2326042	7924671	25
36	6101452	4940582	7701038	2612301	12985263	2328281	7922896	24
37	6103756	4936806	7705673	2606284	12977457	2330522	7921121	23
38	6106060	4933032	7710310	2600268	12969647	2372764	7919345	22
39	6108364	4929260	7714949	2594252	12961848	2335008	7917569	21
40	6110667	4925490	7719590	2588237	12954055	2337253	7915792	20
41	6112970	4921723	7724233	2582224	12946267	2339499	7914014	19
42	6115272	4917958	7728878	2576211	12938485	2341747	7912235	18
43	6117573	4914195	7733525	2570199	12930709	2343996	7910456	17
44	6119873	4910435	7738175	2564189	12922939	2346246	7908676	16
45	6122173	4906677	7742827	2558179	12915175	2348498	7906896	15
46	6124473	4902921	7747481	2552170	12907417	2350751	7905114	14
47	6126772	4899168	7752137	2546163	12899665	2353005	7903332	13
48	6129071	4895417	7756795	2540156	12891919	2355261	7901550	12
49	6131369	4891668	7761455	2534150	12884179	2357518	7899767	11
50	6133667	4887921	7766117	2528145	12876445	2359776	7897983	10
51	6135964	4884177	7770781	2522141	12868717	2362036	7896198	9
52	6138261	4880435	7775447	2516138	12860994	2364297	7894413	8
53	6140557	4876695	7780116	2510136	12853277	2366559	7892627	7
54	6142853	4872957	7784787	2504134	12845565	2368823	7897841	6
55	6145148	4869222	7789460	2498134	12837859	2371088	7889054	5
56	6147442	4865489	7794135	2492135	12830159	2373354	7887266	4
57	6149746	4861758	7798812	2486136	12822465	2375622	7885477	3
58	6152030	4858029	7803491	2480138	12814776	2377891	7883688	2
59	6154323	4854302	7808172	2474140	12807093	2380162	7881898	1
60	6156615	4850578	7812856	2468144	12799416	2382434	7880107	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6150015	4850578	7812856	2468144	12799416	2382434	7880108	60
1	6158907	4846856	7817542	2462149	12791745	2384707	7878317	59
2	6161198	4845136	7822330	2456154	12784080	2386982	7876525	58
3	6163489	4839418	7826920	2450160	12776420	2389258	7874732	57
4	6165781	4835702	7831612	2444167	12768765	2391535	7872939	56
5	6168070	4831989	7836306	1438175	12761116	2393814	7871145	55
6	6170259	4828278	7841002	2432184	12753473	2396094	7869350	54
7	6172648	4824569	7845700	2426193	12745835	2398376	7867555	53
8	6174936	4820862	7850400	2420203	12738203	2400659	7865759	52
9	6177224	4817158	7855102	2414215	12730577	2402943	7863963	51
10	6179512	4813456	7859807	2408227	12722956	2405229	7862166	50
11	6181799	4809756	7864514	2402240	12715341	2407516	7860368	49
12	6184085	4806058	7869223	2396254	12707732	2409804	7858569	48
13	6186371	4802363	7873934	2390269	12700128	2412094	7856770	47
14	6188656	4798670	7878647	2384285	12692530	2414385	7854970	46
15	6190940	4794979	7883363	2378301	12684937	2416678	7853169	45
16	6193224	4791290	7888081	2372318	12677350	2418972	7851368	44
17	6195508	4787603	7892801	2366336	12669769	2421267	7849566	43
18	6197791	4783919	7897523	2360355	12662194	2423564	7847764	42
19	6200074	4780237	7902247	2354375	12654624	2425862	7845961	41
20	6202356	4776557	7906973	2348396	12647060	2428161	7844157	40
21	6204638	4772880	7911702	2342418	12639501	2430462	7842352	39
22	6206919	4769205	7916433	2336441	12631948	2432764	7840547	38
23	6209199	4765532	7921166	2330465	12624400	2435067	7838741	37
24	6211479	4761861	7925901	2324489	12616858	2437372	7836935	36
25	6213758	4758192	7930638	2318514	12609321	2439678	7835128	35
26	6216037	4754525	7935378	2312539	12601790	2441986	7833320	34
27	6218315	4750860	7940120	2306565	12594265	2444295	7831511	33
28	6220593	4747198	7944864	2300593	12586746	2446605	7829702	32
29	6222870	4743538	7949610	2294621	12579232	2448917	7827892	31
30	6225146	4739880	7954358	2288650	12571724	2451230	7826082	30
31	6227422	4736224	7959109	2282680	12564222	2453544	7824271	29
32	6229698	4732571	7963862	2276711	12556725	2455860	7822459	28
33	6231973	4728920	7968617	2270743	12549234	2458177	7820647	27
34	6234248	4725271	7973374	2264775	12541746	2460496	7818834	26
35	6236522	4721624	7978133	2258808	12534264	2462816	7817020	25
36	6238796	4717979	7982895	2252842	12526787	2465137	7815205	24
37	6241069	4714336	7987659	2246876	12519316	2467460	7813390	23
38	6243342	4710695	7992425	2240911	12511850	2466784	7811574	22
39	6245614	4707056	7997193	2234946	12504389	2472110	7809758	21
40	6247885	4703419	8001963	2228982	12496934	2474437	7807941	20
41	6250156	4699785	8006736	2223020	12489484	2476765	7806123	19
42	6252426	4696153	8011511	2217058	12482039	2479095	7804304	18
43	6254696	4692523	8016288	2211097	12474600	2481426	7802485	17
44	6256966	4688895	8021067	2205136	12467167	2484759	7800665	16
45	6259235	4685269	8025849	2199176	12459739	2486093	7798845	15
46	6261503	4681645	8030633	2193217	12452317	2488428	7797024	14
47	6263771	4678024	8035419	2187259	12444900	2490765	7795202	13
48	6266038	4674405	8040207	2181302	12437489	2493103	7793380	12
49	6268305	4670788	8044997	2175345	12430083	2495443	7791557	11
50	6270572	4667173	8049790	2169389	12422683	2497784	7789733	10
51	6272838	4663561	8054585	2163435	12415288	2500126	7787909	9
52	6275103	4659951	8059382	2157481	12407900	2502470	7786084	8
53	6277368	4656343	8064181	2151528	12400515	2504815	7784258	7
54	6279632	4652737	8068983	2145575	12393136	2507162	7782432	6
55	6281895	4649133	8073787	2139623	12385762	2509510	7780605	5
56	6284158	4645531	8078593	2133672	12378394	2511859	7778777	4
57	6286420	4641931	8083401	2127721	12371031	2514210	7776949	3
58	6288682	4638334	8088212	2121772	12363673	2516562	7775120	2
59	6290943	4634739	8093025	2115824	12356320	2518915	7773290	1
60	6293204	4631146	8097840	2109876	12348972	2521270	7771460	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes.	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6293204	4631146	8097840	2109876	12348972	2521270	7771460	60
1	6295464	4627555	8102658	2103929	12341630	2525626	7769629	59
2	6297724	4623966	8107478	2097982	12334293	2525984	7767797	58
3	6299983	4620379	8112300	2092036	12326961	2528343	7765965	57
4	6302242	4616794	8117124	2086091	12319635	2530703	7764132	56
5	6304501	4613211	8121951	2080146	12312314	2533065	7762299	55
6	6306759	4609630	8126780	2074202	12304998	2535428	7760465	54
7	6309016	4606052	8131611	2068259	12297687	2537793	7758630	53
8	6311273	4602476	8136444	2062317	12290381	2540159	7756794	52
9	6313529	4598902	8141280	2056376	12283081	2542526	7754958	51
10	6315784	4595330	8146118	2050435	12275786	2544895	7753121	50
11	6318039	4591760	8150958	2044495	12268496	2547265	7751283	49
12	6320293	4588292	8155801	2038555	12261212	2549637	7749445	48
13	6322547	4584627	8160646	2032617	12255933	2552010	7747606	47
14	6324800	4581064	8165493	2026679	12246659	2554385	7745766	46
15	6327053	4577503	8170343	2020742	12239390	2556761	7743926	45
16	6329305	4573944	8175195	2014806	12232126	2559138	7742085	44
17	6331557	4570387	8180049	2008870	12224867	2561517	7740244	43
18	6333808	4566832	8184905	2002935	12217613	2563897	7738402	42
19	6336059	4563279	8189764	1997000	12210364	2566279	7736559	41
20	6338310	4559728	8194625	1991066	12203121	2568662	7734716	40
21	6340560	4556179	8199488	1985133	12195883	2571046	7732872	39
22	6342809	4552632	8204354	1979200	12188650	2573432	7731028	38
23	6345058	4549088	8209222	1973269	12181422	2575819	7729183	37
24	6347305	4545546	8214092	1967338	12174199	2578208	7727337	36
25	6349553	4542006	8218965	1961408	12166981	2580598	7725490	35
26	6351800	4538468	8223840	1955478	12159768	2582990	7723642	34
27	6354046	4534932	8228717	1949549	12152561	2585383	7721794	33
28	6356292	4531398	8233597	1943621	12145359	2587777	7719945	32
29	6358537	4527866	8238479	1937693	12138162	2590173	7718096	31
30	6360782	4524336	8243363	1931766	12130970	2592570	7716246	30
31	6363026	4520808	8248250	1925839	12123783	2594969	7714395	29
32	6365270	4517282	8253139	1919913	12116601	2597369	7712544	28
33	6367513	4513758	8258031	1913988	12109424	2599770	7710692	27
34	6369756	4510236	8262925	1908063	12102252	2602173	7708839	26
35	6371999	4506717	8267821	1902140	12095085	2604577	7706986	25
36	6374241	4503200	8272720	1896217	12087923	2606983	7705132	24
37	6376482	4499685	8277621	1890295	12080766	2609390	7703277	23
38	6378722	4496172	8282524	1884373	12073614	2611799	7701422	22
39	6380962	4492661	8287429	1878452	12066467	2614209	7699566	21
40	6383201	4489152	8292337	1872531	12059325	2616621	7697710	20
41	6385440	4485645	8297247	1866611	12052188	2619034	7695853	19
42	6387678	4482140	8302160	1860692	12045056	2621448	7693995	18
43	6389916	4478637	8307075	1854773	12037929	2623864	7692137	17
44	6392153	4475136	8311992	1848855	12030809	2626281	7690278	16
45	6394390	4471637	8316912	1842937	12023690	2628700	7688418	15
46	6396626	4468140	8321834	1837020	12016578	2631120	7686558	14
47	6398862	4464646	8326759	1831105	12009472	2633541	7684697	13
48	6401097	4461154	8331686	1825190	12002370	2635964	7682835	12
49	6403332	4457664	8336615	1819276	11995274	2638388	7680973	11
50	6405566	4454176	8341547	1813363	11988183	2640813	7679110	10
51	6407799	4450690	8346481	1807450	11981097	2643240	7677246	9
52	6410032	4447206	8351418	1801537	11974015	2645669	7675382	8
53	6412264	4443724	8356357	1795625	11966938	2648099	7673517	7
54	6414496	4440244	8361298	1789714	11959866	2650530	7671652	6
55	6416728	4436766	8366242	1783803	11952799	2652963	7669786	5
56	6418959	4433290	8371188	1777893	11945737	2655397	7667919	4
57	6421189	4429816	8376136	1771983	11938680	2657833	7666051	3
58	6423419	4426344	8381087	1766074	11931628	2660270	7664183	2
59	6425648	4422875	8386040	1760166	11924580	2662709	7662314	1
60	6427876	4419408	8390996	1754259	11917537	2665149	7660445	0
								M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6427870	4419408	8390990	1754259	11917537	2665149	7660445	60
1	6430104	4415943	8395954	1748353	11910499	2667590	7658575	59
2	6432331	4412480	8400915	1742447	11903466	2670033	7656704	58
3	6434558	4409019	8405878	1736542	11896438	2672477	7654833	57
4	6436785	4405560	8410844	1730637	11889417	2674923	7652961	56
5	6439011	4402103	8415812	1724733	11882397	2677370	7651088	55
6	6441236	4398648	8420782	1718829	11875383	2679819	7649215	54
7	6443461	4395195	8425754	1712926	11868374	2682269	7647341	53
8	6445685	4391745	8430729	1707022	11861370	2684721	7645466	52
9	6447909	4388293	8435706	1701119	11854371	2687174	7643591	51
10	6450132	4384845	8440686	1695216	11847377	2689629	7641715	50
11	6452355	4381399	8445668	1689314	11840388	2692085	7639838	49
12	6454577	4377955	8450653	1683412	11833404	2694543	7637960	48
13	6456799	4374514	8455640	1677512	11826424	2697002	7636082	47
14	6459020	4371075	8460630	1671613	11819449	2699462	7634204	46
15	6461240	4367638	8465622	1665714	11812479	2701924	7632325	45
16	6463460	4364203	8470617	1659816	11805514	2704387	7630445	44
17	6465679	4360770	8475614	1653918	11798553	2706852	7628564	43
18	6467898	4357339	8480614	1648021	11791597	2709318	7626683	42
19	6470116	4353910	8485617	1642124	11784646	2711786	7624802	41
20	6472333	4350483	8490622	1636228	11777700	2714255	7622920	40
21	6474550	4347058	8495629	1630332	11770758	2716726	7621037	39
22	6476766	4343635	8500639	1624437	11763821	2719198	7619153	38
23	6478982	4340214	8505651	1618542	11756889	2721672	7617269	37
24	6481198	4336795	8510666	1612648	11749962	2724147	7615384	36
25	6483413	4333378	8515683	1606755	11743039	2726623	7613498	35
26	6485628	4329963	8520703	1600862	11736121	2729101	7611612	34
27	6487842	4326550	8525725	1594970	11729208	2731580	7609725	33
28	6490055	4323993	8530750	1589078	11722300	2734061	7607837	32
29	6492268	4319730	8535777	1583187	11715396	2736543	7605949	31
30	6494480	4316323	8540806	1577296	11708497	2739027	7604060	30
31	6496692	4312919	8545838	1571407	11701602	2741512	7602170	29
32	6498903	4309517	8550872	1565518	11694712	2743999	7600280	28
33	6501114	4306116	8555909	1559629	11687827	2746487	7598389	27
34	6503324	4302717	8560949	1553740	11680947	2748977	7596498	26
35	6505533	4299320	8565991	1547852	11674071	2751468	7594606	25
36	6507742	4295925	8571036	1541964	11667200	2753961	7592713	24
37	6509950	4292532	8576083	1536077	11660334	2756455	7590819	23
38	6512158	4289141	8581133	1530191	11653472	2758950	7588925	22
39	6514365	4285752	8586185	1524305	11646615	2761447	7587031	21
40	6516572	4282365	8591239	1518420	11639763	2763945	7585136	20
41	6518778	4278980	8596296	1512535	11632915	2766445	7583240	19
42	6520984	4275597	8601355	1506651	11626072	2768946	7581343	18
43	6523189	4272226	8606417	1500767	11619234	2771449	7579446	17
44	6525394	4268837	8611482	1494884	11612401	2773953	7577548	16
45	6527598	4265460	8616549	1489001	11605572	2776459	7575650	15
46	6529801	4262085	8621619	1483119	11598748	2778966	7573751	14
47	6532004	4258712	8626692	1477237	11591928	2781475	7571851	13
48	6534206	4255341	8631767	1471356	11585112	2783985	7569951	12
49	6536408	4251972	8636845	1465476	11578301	2786496	7568050	11
50	6538609	4248605	8641926	1459596	11571494	2789009	7566148	10
51	6540809	4245240	8647009	1453717	11564691	2791523	7564246	9
52	6543009	4241877	8652095	1447838	11557893	2794039	7562343	8
53	6545208	4238516	8657183	1441960	11551100	2796556	7560439	7
54	6547407	4235157	8662273	1436082	11544312	2799075	7558535	6
55	6549606	4231800	8667366	1430205	11537529	2801595	7556630	5
56	6551804	4228445	8672461	1424328	11530751	2804117	7554724	4
57	6554001	4225092	8677559	1418451	11523977	2806641	7552818	3
58	6556198	4221741	8682659	1412575	11517208	2809166	7550911	2
59	6558394	4218392	8687762	1406699	11510444	2811693	7549004	1
60	6560590	4215044	8692867	1400823	11503684	2814221	7547096	0

M

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6560590	4215044	8692867	1400823	11503684	2814221	7547096	60
1	6562785	4211698	8697975	1394947	11496929	2816751	7545187	59
2	6564979	4208354	8703085	1389072	11490178	2819282	7543277	58
3	6567173	4205012	8708198	1383197	11483431	2821815	7541367	57
4	6569367	4201672	8713314	1377323	11476688	2824349	7539457	56
5	6571560	4198334	8718433	1371450	11469950	2826884	7537546	55
6	6573753	4194999	8723555	1365578	11463216	2829421	7535634	54
7	6575945	4191666	8728679	1359707	11456487	2831959	7533721	53
8	6578130	4188339	8733806	1353836	11449762	2834499	7531808	52
9	6580526	4185006	8738935	1347966	11443042	2837040	7529894	51
10	6582516	4181679	8744067	1342097	11436326	2839582	7527980	50
11	6584705	4178354	8749201	1336228	11429615	2842126	7526065	49
12	6586894	4175030	8754338	1330358	11422908	2844672	7524149	48
13	6589082	4171708	8759478	1324489	11416206	2847219	7522233	47
14	6591270	4168388	8764620	1318620	11409508	2849768	7520316	46
15	6593458	4165070	8769764	1312752	11402815	2852318	7518398	45
16	6595645	4161754	8774911	1306884	11396126	2854870	7516480	44
17	6597831	4158440	8780061	1301017	11389442	2857423	7514561	43
18	6600016	4155128	8785214	1295150	11382762	2859978	7512642	42
19	6602201	4151818	8790369	1289284	11376086	2862534	7510722	41
20	6604386	4148510	8795527	1283418	11369415	2865092	7508801	40
21	6606570	4145204	8800688	1277553	11362748	2867651	7506879	39
22	6608753	4141900	8805851	1271688	11356086	2870212	7504957	38
23	6610936	4138598	8811017	1265824	11349428	2872774	7503034	37
24	6613118	4135298	8816186	1259960	11342774	2875338	7501111	36
25	6615300	4132000	8821357	1254097	11336125	2877903	7499187	35
26	6617481	4128703	8826531	1248233	11329480	2880470	7497262	34
27	6619661	4125408	8831708	1242370	11322899	2883038	7495336	33
28	6621841	4122115	8836887	1236507	11316203	2885608	7493410	32
29	6624021	4118824	8842069	1230645	11309571	2888179	7491484	31
30	6626200	4115535	8847253	1224783	11302944	2890752	7489557	30
31	6628379	4112248	8852440	1218922	11296321	2892326	7487629	29
32	6630557	4108963	8857630	1213061	11289702	2895902	7485700	28
33	6632734	4105680	8862822	1207201	11283088	2898479	7483771	27
34	6634911	4102399	8868017	1201341	11276478	2901058	7481842	26
35	6637087	4099120	8873215	1195482	11269873	2903638	7479912	25
36	6639263	4095843	8878415	1189623	11263272	2906220	7477981	24
37	6641438	4092567	8883628	1183763	11256675	2908804	7476049	23
38	6643612	4089293	8888824	1177904	11250082	2911389	7474117	22
39	6645786	4086021	8894033	1172045	11243494	2913976	7472184	21
40	6647959	4082751	8899244	1166187	11236910	2916564	7470251	20
41	6650132	4079483	8904458	1160329	11230330	2919154	7468317	19
42	6652304	4076217	8909675	1154472	11223755	2921745	7466382	18
43	6654476	4072953	8914894	1148615	11217184	2924338	7464447	17
44	6656647	4069691	8920116	1142759	11210617	2926932	7462511	16
45	6658817	4066431	8925341	1136904	11204054	2929527	7460574	15
46	6660987	4063173	8930568	1131049	11197496	2932124	7458637	14
47	6663156	4059917	8935798	1125195	11190942	2934722	7456699	13
48	6665325	4056663	8941031	1119341	11184392	2937322	7454761	12
49	6667493	4053410	8946267	1113487	11177846	2939923	7452822	11
50	6669661	4050159	8951506	1107633	11171305	2942526	7450882	10
51	6671828	4046910	8956747	1101780	11164768	2945130	7448941	9
52	6673994	4043663	8961991	1095927	11158235	2947736	7447000	8
53	6676160	4040418	8967238	1090074	11151706	2950343	7445058	7
54	6678326	4037175	8972487	1084222	11145182	2952951	7443116	6
55	6680491	4033934	8977739	1078370	11138662	2955564	7441172	5
56	6682655	4030695	8982994	1072518	11132146	2958177	7439229	4
57	6684818	4027458	8988252	1066667	11125634	2960791	7437284	3
58	6686981	4024223	8993512	1060816	11119126	2963407	7435339	2
59	6689144	4020990	8998775	1054966	11112623	2966024	7433394	1
60	6691306	4017759	8004040	1049116	11106124	2968643	7431448	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6691300	4017759	9004040	1049116	11106124	2968643	7431448	60
1	6693408	4014529	9009308	1043209	11099629	2971263	7429501	59
2	6695629	4011301	9014579	1037406	11093138	2973885	7427553	58
3	6697789	4008075	9019853	1031567	11086652	2976508	7425605	57
4	6699949	4004851	9025130	1025718	11080170	2979133	7423657	56
5	6702108	4001629	9030410	1019870	11073692	2981759	7421708	55
6	6704267	3998409	9035693	1014023	11067218	2984386	7419758	54
7	6706425	3995191	9040978	1008176	11060748	2987015	7417807	53
8	6708582	3991974	9046266	1002329	11054283	2989645	7415856	52
9	6710739	3988759	9051557	996482	11047822	2992277	7413905	51
10	6712895	3985546	9056850	990636	11041365	2994910	7411953	50
11	6715051	3982335	9062146	984790	11034912	2997545	7410000	49
12	6717206	3979126	9067445	978944	11028463	3000182	7408046	48
13	6719361	3975919	9072747	973099	11022018	3002820	7406092	47
14	6721515	3972714	9078052	967254	11015577	3005460	7404137	46
15	6723668	3969511	9083360	961409	11009140	3008102	7402181	45
16	6725821	3966310	9088670	955565	11002708	3010745	7400225	44
17	6727973	3963110	9093983	949720	10996280	3013390	7398268	43
18	6730125	3959912	9099299	943876	10989856	3016036	7396311	42
19	6732276	3956716	9104618	938032	10983436	3018684	7394353	41
20	6734427	3953522	9109940	932189	10977020	3021333	7392394	40
21	6736577	3950330	9115265	926346	10970608	3023984	7390435	39
22	6738726	3947140	9120593	920504	10964200	3026636	7388475	38
23	6740875	3943951	9125923	914661	10957796	3029290	7386515	37
24	6743024	3940764	9131256	908819	10951396	3031945	7384554	36
25	6745172	3937579	9136592	902977	10945000	3034602	7382592	35
26	6747319	3934396	9141930	897135	10938608	3037261	7380629	34
27	6749465	3931215	9147271	891294	10932221	3039921	7378666	33
28	6751611	3928036	9152615	885453	10925838	3042583	7376702	32
29	6753757	3924859	9157962	879613	10919459	3045246	7374738	31
30	6755902	3921684	9163312	873773	10913084	3047911	7372773	30
31	6758047	3918511	9168665	867934	10906713	3050577	7370807	29
32	9760191	3915339	9174021	822094	10900346	3053245	7368841	28
33	6762334	3912169	9179380	856255	10893983	3055914	7366874	27
34	6764477	3909001	9184741	850416	10887624	3058585	7364907	26
35	6766619	3905835	9190105	844577	10881269	3061258	7362939	25
36	6768760	3902671	9195472	838759	10874918	3063932	7360970	24
37	6770901	3899509	9200842	832901	10868571	3066608	7359001	23
38	6773041	3896348	9206215	827063	10862228	3069285	7357031	22
39	6775181	3893189	9211590	821225	10855889	3071964	7355061	21
40	6777320	3890032	9216968	815388	10849554	3074644	7353090	20
41	6779459	3886877	9222349	809551	10843222	3077326	7351118	19
42	6781597	3883723	9227733	803714	10836895	3080009	7349145	18
43	6783734	3880571	9233120	797877	10830572	3082694	7347173	17
44	6785871	3877421	9238510	792041	10824253	3085380	7345199	16
45	6788007	3874273	9243903	786205	10817938	3088068	7343225	15
46	6790143	3871127	9249299	780369	10811627	3090758	7341250	14
47	6792278	3867983	9254698	774534	10805320	3093449	7339274	13
48	6794413	3864841	9260100	768699	10799017	3096142	7337298	12
49	6796547	3861701	9265505	762865	10792718	3098836	7335322	11
50	6798681	3858563	9270913	757031	10786423	3101522	7333345	10
51	6800814	3855426	9276324	751197	10780132	3104229	7331367	9
52	6802946	3852291	9281738	745363	10773845	3106928	7329388	8
53	6805078	3849158	9287155	739529	10767562	3109629	7327409	7
54	6807209	3846027	9292574	733696	10761282	3112331	7325429	6
55	6809340	3842898	9297996	727863	10755006	3115035	7323449	5
56	6811470	3839770	9303421	712029	10748734	3117741	7321468	4
57	6813599	3836644	9308849	716196	10742466	3120448	7319486	3
58	6815728	3833520	9314280	710363	10736202	3123157	7317504	2
59	6817856	3830398	9319714	704530	10729942	3125868	7315521	1
60	6819984	3827278	9325151	698698	10723686	3128580	7313537	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes.	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus.	
0	6819984	3827278	9325151	698698	10723686	3128580	7313537	60
1	6822111	3824160	9330591	692866	10717434	3131294	7311553	59
2	6824237	3821044	9336034	687035	10711186	3134009	7309568	58
3	6826363	3817929	9341480	681203	10704942	3136726	7307583	57
4	6828489	3814816	9346929	675372	10698702	3139444	7305597	56
5	6830614	3811705	9352381	669541	10692466	3142164	7303610	55
6	6832738	3808596	9357835	663711	10686233	3144885	7301623	54
7	6834861	3805488	9363292	657880	10680004	3147608	7299635	53
8	6836984	3802382	9368752	652050	10673779	3150332	7297647	52
9	6839107	3799278	9374215	646221	10667558	3153057	7295658	51
10	6841229	3796176	9379682	640392	10661341	3155784	7293668	50
11	6843350	3793075	9385152	634562	10655128	3158513	7291678	49
12	6845471	3789976	9390625	628732	10648919	3161244	7289687	48
13	6847591	3786879	9396101	622903	10642713	3163976	7287695	47
14	6849711	3783784	9401580	617074	10636511	3166710	7285703	46
15	6851830	3780691	9407062	611246	10630313	3169445	7283710	45
16	6853949	3777600	9412547	603418	10624119	3172182	7281716	44
17	6856067	3774510	9418034	599589	10617929	3174921	7279722	43
18	6858184	3771422	9423524	593760	10611742	3177662	7277728	42
19	6860301	3768336	9429017	587932	10605559	3180404	7275733	41
20	6862417	3765252	9434513	582104	10599380	3183148	7273737	40
21	6864533	3762170	9440012	576277	10593205	3185893	7271741	39
22	6866648	3759090	9445514	570450	10587034	3188640	7269744	38
23	6868762	3756011	9451019	564622	10580867	3191389	7267746	37
24	6870876	3752934	9456528	558795	10574703	3194139	7265748	36
25	6872989	3749859	9462040	552968	10568543	3196891	7263749	35
26	6875102	3746786	9467555	547142	10562387	3199644	7261749	34
27	6877214	3743714	9473073	541315	10556235	3202399	7259748	33
28	6879325	3740644	9478594	545489	10550087	3205155	7257747	32
29	6881436	3737576	9484118	529663	10543942	3207913	7255746	31
30	6883546	3734510	9489645	523838	10537801	3210672	7253744	30
31	6885656	3731446	9495175	518013	10531664	3213435	7251741	29
32	6887765	3728383	9500708	512187	10525531	3216196	7249737	28
33	6889874	3725322	9506244	506361	10519401	3218961	7247733	27
34	6891982	3722263	9511783	500536	10513275	3221727	7245739	26
35	6894089	3719206	9517325	494711	10507153	3224495	7243724	25
36	6896196	3716150	9522870	488886	10501034	3227264	7241718	24
37	6898302	3713096	9528419	483061	10494919	3230035	7239712	23
38	6900408	3710044	9533971	477236	10488808	3232808	7237704	22
39	6902513	3706994	9539526	471411	10482701	3235583	7235697	21
40	6904617	3703946	9545084	465587	10476597	3238359	7233689	20
41	6906721	3700899	9550645	459762	10470497	3241137	7231681	19
42	6908824	3697854	9556209	453938	10464401	3243916	7229672	18
43	6910927	3694811	9561776	448114	10458309	3246697	7227662	17
44	6913029	3691770	9567346	442291	10452220	3249479	7225651	16
45	6915131	3688730	9572919	436467	10446135	3252263	7223639	15
46	6917232	3685692	9578495	430644	10440054	3255048	7221627	14
47	6919332	3682656	9584074	424821	10433976	3257835	7219614	13
48	6921432	3679622	9589656	418999	10427902	3260623	7217601	12
49	6923531	3676590	9595241	413177	10421832	3263413	7215588	11
50	6925630	3673559	9600830	407355	10415765	3266204	7213574	10
51	6927728	3670530	9606422	401533	10409702	3268997	7211559	9
52	6929825	3667503	9612017	395711	10403643	3271792	7209543	8
53	6931922	3664478	9617615	389889	10397587	3274589	7207527	7
54	6934018	3661454	9623216	384067	10391535	3277387	7205511	6
55	6936114	3658432	9628820	378245	10385487	3280187	7203494	5
56	6938209	3655412	9634427	372423	10379443	3282989	7201476	4
57	6940303	3652394	9640037	366602	10373402	3285792	7199457	3
58	6942397	3649377	9645651	360780	10367365	3288597	7197438	2
59	6944491	3646362	9651268	354958	10361332	3291404	7195418	1
60	6946584	3643349	9656888	349136	10355302	3294213	7193398	0

M.

M.	Sinus.	Logarithmi Sinuum.	Tangentes	Differentiæ & Logarit. Tangent.	Tangentes	Logarithmi Sinuum.	Sinus	
0	6946584	3643349	9656888	349136	10355302	3294213	7193398	60
1	6948676	3640338	9662511	343315	10349276	3297023	7191377	59
2	6950767	3637329	9668137	337494	10343253	3299835	7189355	58
3	6952858	3634321	9673766	331673	10337234	3302648	7187333	57
4	6954949	3631315	9679399	325852	10331219	3305463	7185310	56
5	6957039	3628311	9685034	320032	10325207	3308279	7183287	55
6	6959128	3625308	9690674	314211	10319199	3311097	7181263	54
7	6961216	2622307	9696315	308390	10313194	3313917	7179238	53
8	6963304	3619308	9701960	302570	10307193	3316738	7177213	52
9	6965392	3616311	9707609	296750	10301196	3319561	7175187	51
10	6967479	3613315	9713261	290930	10295202	3322385	7173161	50
11	6969565	3619321	9718916	285110	10289212	3325211	7171134	49
12	6971651	3607329	9724574	279290	10283225	3328039	7169106	48
13	6973736	3604338	9730235	273469	10277242	3330869	7167078	47
14	6975821	3601349	9735900	267649	10271262	3333700	7165049	46
15	6977905	3598362	9741568	261829	10265286	3336533	7163019	45
16	6979988	3595377	9747239	256009	10259314	3339368	7160989	44
17	6982071	3592394	9752913	250190	10253345	3342204	7158958	43
18	6984153	3589412	9758591	244370	10247380	3345042	7156927	42
19	6986235	3586432	9764272	238550	10241418	3347882	7154895	41
20	6988316	3583454	9769956	232731	10235460	3350723	7152863	40
21	6990396	3580478	9775643	236912	10229506	3353566	7150830	39
22	6992476	3577504	9781334	221093	10223555	3356411	7148796	38
23	6994555	3574531	9787028	215274	10217607	3359257	7146762	37
24	6996634	3571560	9792725	209455	10211663	3362105	7144727	36
25	6998712	3568590	9798425	203635	10205722	3364955	7142691	35
26	7000789	3565622	9804128	197616	10199785	3367806	7140655	34
27	7002866	3562656	9809835	191997	10193852	3370659	7138618	33
28	7004942	3559691	9815545	186178	10187922	3373513	7136581	32
29	7007018	3556728	9821257	180359	10181996	3376369	7134543	31
30	7009093	3553767	9826974	174541	10176073	3379226	7132504	30
31	7011167	3550808	9832694	168723	10170154	3382085	7130465	29
32	7013241	3547851	9838417	162905	10164239	3384946	7128425	28
33	7015314	3544895	9844143	157087	10158327	3387808	7126385	27
34	7017387	3541941	9849872	151269	10152418	3390672	7124344	26
35	7019459	3538989	9855605	145451	10146513	3393538	7122303	25
36	7021530	3536038	9861341	139633	10140611	3396406	7120261	24
37	7023601	3533089	9867080	133814	10134713	3399275	7118218	23
38	7025671	3530142	9872822	127996	10128818	3402146	7116175	22
39	7027741	3527197	9878568	122178	10122926	3405019	7114131	21
40	7029810	3524243	9884317	116359	10117038	3407894	7112086	20
41	7031879	3521311	9890069	110541	10111153	3410770	7110041	19
42	7033947	3518371	9895826	104723	10105272	3413648	7107995	18
43	7036014	3515432	9901583	98904	10099394	3415528	7105949	17
44	7038081	3512495	9907347	93886	10093520	3419409	7103402	16
45	7040147	3509560	9913113	87268	10087649	3422292	7101854	15
46	7042213	3506626	9918882	81450	10081782	3425176	7099806	14
47	7044278	3503694	9924654	75632	10075918	3428062	7097757	13
48	7046342	3500764	9930430	69824	10070058	3430940	7095708	12
49	7048406	3497835	9936209	64006	10064201	3433829	7093658	11
50	7050469	3494908	9941991	58178	10058347	3436730	7091607	10
51	7052532	3491983	9947777	52360	10052497	3439623	7089556	9
52	7054594	3489060	9953566	46543	10046651	3442517	7087504	8
53	7056655	3486139	9959359	40726	10040808	3445413	7085852	7
54	7058716	3483219	9965155	34908	10034968	3448311	7083399	6
55	7060776	3480301	9970954	29090	10029132	3451211	7081345	5
56	7062836	3477385	9976756	23273	10023299	3454112	7079291	4
57	7064895	3474470	9982562	17455	10017469	3457015	7077236	3
58	7066953	3471557	9988371	11637	10011643	3459920	7075181	2
59	7069011	3468645	9994184	5818	10005820	3462827	7073125	1
60	7071068	3465735	1000000	0	10000000	3465735	7071068	0

M.

INDEX

Propositionum totius Operis.

A

Accomodatio.

Accomodatio lineæ in circulo, quæ 83. d. 7. Vt fiat. pr.1. pag. 84

Addere.

Minutias simul addere. pr.12. 211
Addere cuicumque figuræ solidæ, ita quod in eadem figura perseuerent pr. 51. Coroll.
Vt corpora augeantur? pr.52. Cor.
Cylindro, Parallelepipedo, Prismati alia similiter addere pr.52.
Corpus eorum, qui duplicatam habent rationem basium, & cæt. iuxta datam proportionem basi ad basim augere.
Addere circulo, vide circulus.
Corpus aliquod eorum, quæ triplicatam laterum, axium, & cæt. habent rationem iuxta datam proportionē in simile corpus augere pr.56.
Cubo alium cubum addere, ita quod cubus remaneat pr.51.
Additio numerorum quænam? pr.5. 96
Quinam numeri addendi? pr. 3. 96
Datum parallelogrammum dissimile, altero augere pr.30. 513
Rationis datę multiplicem assignare pr.30. 280
Triangulum ex multis coagmentatum fabricare pr.23. 509
Triangulo datam partem addere, vel auferre manente eadem figura pr.24. 509
Vide compositio.

Æqualitas.

Corporum, vide corpora.
Circulorum vide circulos.
Linearum vide lineæ, rectæ, latera crura.
Annulorum vide annulos.
Superficierum vide superficies.

Æquidistantia.

Æquidistantia circulorum à centro def.10. 350

Æqualitas angulorum.

Triangula habentia crura proportionalia sunt æquiangula prop.5. 136
Triangula habentia circa vnum æqualem angulum crura proportionalia æquiangula sunt pr.6.136
Quæ vno angulo æquantur, & reliqua crura habent proportionalia, & cęt. æquiangula sunt. prop. 7. 137
Vide anguli.

Æquipotentia linearum.

Rectangula segmentorum, vt æquent quadratum, vel rectangulum totius pr.3. 4. & 6. pag.54.55
Vt æquent se inuicem prop.5. & 9. 55. & 57
Segmentis duarum partium æqualium, & inæqualium constituta rectangula, vt se æquent p.7.56
Linea alteri addita, quid possit prop.7.& 10.57
Æquipotentia crurum triangulorum basis in rect. triangulo æquè potest, vt ambo crura pr.11. 58
In Ambligonio, quid possit magis pr.13. 60
In Oxigonio, quid possit minus pr.14. 60
Æquepotentes lineas reperire pr.15.& 16. 61
Segmenta linearum se secantium circulo possunt æqualiter pr.35. 79
Æquipotentia numeri, vtcumque secti pr.1. 176
etiam multiplicatus in se,& etiam cum alio numero Cor. 2. etiam si in plures partes Cor. 2. & pr.2. & 3. pag. 177
Æquipolentia numeri bifariam secti cum alterius numeri additione pr.4. 177
Æquipotentia numeri in partes æquales,& inequales secti pr.5. 178
Numero dato æquipotentes numeros inuenire pr.29. 222

Aggregatio.

Aggregata proportionis numero æqualia sunt in continua proportione pr.3. 257
Rationes in vnam summam aggregare pr.32. 281
Numerorum aggregatio vide summa, numerus.

Alterna ratio.

Alterna ratio in numeris pr.13. 159
Alterna ratio quid sit? def.16. 115
Alterna ratio ostenditur prop.19. 126

Algorithmus.

Algorithmus rationum. 280. & seqq.

Altitudo.

Altitudo figuræ, quæ def.4. 132
Altitudo corporum, vt inueniatur pr.3. 662
Corpus datum, vt cylindrum conum Pyramidem in altitudinem datam euehere prop.26. 668

Ambitus.

Ambitus polygoni in circulis sunt inuicem, vt diameter ad diametrum pr.42. 133

Analysis.

Analysis quid sit. 45

Anguli rectilinei, mixtilinei, solidi, sphærici.

Anguli in eodem segmento æquales pr.24. 74
In circulo quadrilaterorum anguli aduersi duobus rectis æquales pr.25. 75
Angulo semicirculo rectus in maiori segmento minor recto, in minori maior recto pr.28. 76
De angulis diuidendis in ratione data 302
Anguli æqualium crurum æquales pr.27. 75
De angulis in ordine ad latera 300.& seq.
Vide diuidere.
Angulum in duo diuidere pr.4. 34
Angulum datum mediante quadratrice diuidere pr. 8. 302
Angulos constituere in triangulo proportionis datæ pr.10. 303
Anguli normalium quadranti insistunt Cor.2. 75
Angulus sectus bifariam facit basi segmentum ad crus eiusdem proportionis, quam duo crura ad basim totam pr.2. 283
Anguli insistentium linearum æquant duos rectos Cor. 36
Anguli se secantium linearum æquales pr.12. 37
A contactu ductę, & tangentis anguli, quibus æquentur

quentur pr.29. pag. 77
Segmentum lateris ad aliud habet maiorem proportionem anguli ad angulum insistentium in rectangulo propos.2. 300
etiamsi remotiùs angulo recto Cor.& pr.4. 301
Anguli in eadem proportione,ac sectores arcus in circulis æqualibus pr.39. 152
Quæ secat bifariam angulum trianguli,secat basim in partes cruribus proportionales pr.3. 134
Anguli equales cùm faciant basis segmenta continuè proportionalia? pr.7. 302
Vide basim. Segmentum. Latus.
Angulus ad centrum duplus anguli ad peripheriam super eundem arcum pr.23. 73
Angulus contactus omni rectilineo minor, & semicirculi omni rectilineo ãgulo maior p.18. 70
In semicirculo angulus trianguli duplus reliqui, vt faciat crura ad basim proportionalia propos. 4. 288
Anguli crura proportionaliter secare à dato puncto pr.11. 203
In eo ducere lineam per datum punctum, quæ in eo puncto sit secta proportionaliter pr.12. 244
De angulis quoad latera. 203.& seq.
Extra angulum ducere lineam, quę proportionaliter secta remaneat à cruribus eius pr.13. 304
Angulus. def. 8. 27
Rectilineus. def. 9. 28
Rectus. def.10. Obtusus 11. Acutus def. 12.
Anguli sphærici quinam? & mensura,quę d.3.360
Rectus. ibid.
Anguli circulorum se secantium sunt æquales pr.2. 361
Anguli ad verticem ipsorum equales pr.3. 361
Anguli equales equalia latera subtendunt in triangulo pr.6. 38
Anguli trianguli vide triangulum.
Angulus segmenti circuli quinam? def.6. 64
Anguli in segmento circuli quinam? def.7. 64
Solidi anguli duo anguli reliquo maiores p.1. 598
Omnis solidus angulus continetur minus, quam quatuor rectis pr.2. 598
Ex quibus angulis possit angulus solidus constitui pr.3. 599
Angulum solidum fabricare pr.3. 599
Solidus angulus quinam sit? def.4. 597

Annulus.

Dato circulo annulum equalem ponere, & è contrà pr.18. 532
Annulus solidus quadratus,cui equetur? p.29.627
Annulus solidus rotũdus, cui equetur? pr.20. 627
Annulos equales reperire pr.21. 628
Annuli plani aream cognoscere pr.12. 530
Annulum planum mensurare pr.73. 686
Annulo solido equale prisma efficere pr.24. 667
Omnes annuli rotundi solidi similes pr.9. 662
etiam cuiuscumque figurę Coroll.
Cylindri in annulum flexi superficies planas inuenire pr.41. 595
Quomodo superficies istæ inuicem crescant Coroll. 596

Apotome.

Apotome quenam pr.23. 192
Apotomarum sex species inueniuntur pr.2. 192
Apotomarum sex species pr.24. 193
Apotome mediæ commensurabilis linea apotome media est pr.53. 105
Apotome media prima pr.32 pag. 196
secunda pr.34. 197
Apotome commensurabilis linea apotome est. pr.51. 205
Media, & extrema ratione lineę sectę segmenta sunt apotome pr.40. 200

Applicata spatia.

Parallelogrammum applicare alicui lineę cum defectu pr.30. pag. 148
idem agere cum excessu pr.31.
Applicare parallelogrammum cum excessu,& cum defectu alicui lineę pr.30. 148. & 149. pr.31. & 198. pr.36.
Parallelogrãmum maximum applicatorum quodnam sit pr.29. 147

Applicatę lineę quadratrici.

Applicata quadratricis def.4.& prop.18.& 19.294
Applicata, cum est radius est media proportionalis inter sagittam,& quadrantem Cor.1.& 2. 295
Applicata in quadratrici,cui arcui sit equalis Coroll.3. 296

Sectionum Conicarum Applicatę.

Quadrata applicatarum in ellipsi, & hiperbola, sunt,vt rectangula ex segmentis diametri pr.6. extenditur doc. in Cor. 393
Applicatas reperire in sectionibus conicis propos.4. 392
Quadrata applicatarum in parabola sunt inuicem, vt intercepte diametri portiones pr.5. 393
Quadrata applicatarum equalia quibus rectangulis in parabola? pr.8. 394
In ellipsi, & hyperbola, quibus rectangulis sint equalia quadrata applicatarum pr.8. 395
Applicatarum in Asymptotum terminantium rectangula, quę, & cuinam quadrato sint equalia pr.46. 418
Applicatas inuenire in ellipsi Cor. 2. 412
Vide diameter.

Area.

Aream cuiuslibet figurę regularis in equale parallelogrammum redigere pr.5. 504
Cui rectangulo circuli area equetur pr.3. 528
Aream circuli ex data diametro, & peripheria proximè inuenire pr.5. 529
Area circuli est ad quadratum diametri vt 11. ad 14. proxime pr.6. 529
Vide circulus.
Ex diametro noto aream circuli proximè inuenire pr.7. pag. 529. & alio modo pr.9.
Area Isoperimetrũ figuratum. Vide Isoperimetre.
Area annuli vide annulus.
Areã cuiuslibet trianguli reperire pr.18.& 19. 508
Aream cuiuslibet figurę regularis reperire propos.20. 508
Aream figurę Irregularis inuenire pr.21. 509
& etiam Geometricè pr.22.
Vide nomen figurę cuius aream cupis.

Arcus.

Arcum detruncare equalem alteri pr.1. 360
Arcum circuli describere, cuius centrum haberi nequeat pr.1. 286
Arcus equali diminutione decrescentes simul dimidiũ integrorũ equant excluso vno pr.10. 291
Arcus tertius proportionalis duabus rectis pr.20. & 21. Cor.3. 296
arcus linea equalis pr.22. & 24. 297
Maior arcus habet maiorẽ proportionem ad minorem,quam chorda maioris ad chordam minoris pr.3. pag. 301
Arcus similis circuli ad arcum similem est, vt chorda ad chordam, & è contra pr.45. 133
Arcus, ac sectores proportionales sunt in circulis æqualibus pr.39. 152
Arcus insistentes sibi, aut rectos,aut rectis duobus ãgulos equales faciunt pr.4. 361
Arcus vide triangula sphærica.

Argumenta Mathematica.

Modi argumentandi 116
Alterna Inuersa Ex equali Enumeratio,Collectio, Resiuatio, Replicatio, Detractio, Diuisio, Compositio, Conuersio, quæ vide suis locis.
Modi arguendi in proportionibus 278. & seq.
Argumeta mathematica extremo, maiori, minori medio termino constant pr.13. 115

Arithmetica.

Arithmetica est scientia ostensiua, & eius obiectum assignatur pr.5. 23

Arithmeticæ series.

Arithmeticæ proportionis proprietates 237
in exordio expens.
Arithmetica linearum proportiõ pr.24. 255
Arithmeticum numerum in partes arithmeticas distribuere pr.18. 241
Seriem similem seriei arithmeticæ inuenire propos.19. 242
Arithmeticus multiplicatus per numerum interuallorum, quem numerum gignat in arithmetica serie pr.6. & Cor. 239
Numeri Arithmeticè procedentes æqualiter ab ab extremis distiti, vt sint æquales pr.8. 239
Arithmeticam seriem in summam colligere propos.9. 239
Arithmeticam seriem proportionalium extendere pr.10, 240
Arithmeticum tertium, & vltimum reperire prop. 11. 12. & 13. 240
Vide summa, interuallum, medium.

Arithmeticorum spatiorum series.

Rectangula Arithmeticè decrescentia sunt dimidium integrorum vno excluso pr.12. 499
Rectangula duplici arithmetico decremento deficientia ad integra sunt maiora suis residuis propos.13. 498
Suntque ad integra excluso vno minus, quam 1. ad 3. pr.14. 500
& magis incluso maximo vtrinque pr.15.
Sed semper quò in dictis rectãgulis duplici arithmetico decremento deficientibus est minutior diuisio fit accessus ad proportionem 1.ad 3. propos.16. 501
Si sit infinita subdiuisio dictorum rectangulorum se habent ad integra, vt 1. ad 3. pr.16. 501
Quod si non accedant vsque ad vltimam diminutionem, quam proportionem seruent pr. 18. & 19. 502
Cui rectangulo ea, series rectangulorum duplici arithmetico decremento minutorum æquetur? Coroll. 502

Asymptotus.

Asymptotos inuenire pr.47. 418
Asymptotos linea curua p.22,pag.296.& p.27.298
Asymptoti Hyperbolæ in conoide hyperbolico descriptæ quinam pr.20. 442
Asymptota quænam sectio ostendatur circa hyperbolam pr.44. 417
Quadratum tangentis verticem in Asymptotum terminantis, cui æquetur pr.45. 417
In Asymptotico cono, quæ lineæ tangentes equales pr.31. 635
Frustum Asymptotici coni,quę cylindrum equet? pr.32. 635
Asymptoticæ series planitierum, & corporum, vide series.
Quæ parallelæ Asymptotis hyperbolicis includant spatia æqualia pr.47. 543

Axis.

Axis coni def.3. pag.390.& eius sectionum d.11.
Axes duo in cono scaleno Cor.pr.2. 437
Axes in ellipsi inuenire pr.33. 412
Axem principalem in hyperbola inuenire propos.31. 411
Axem inuenire in parabola pr.36. 413
Axis quadratricis def. 3. 293
Axis sphæræ quid def.3. 354
Axis sphæroidis def.2. 439

B

Basis.

Basis diuisa bifariam in triangulo, quos angulos efficiat maiores pr.1. 300
Triangulum, vel parallelogrammum ad maiorem basem, seu altitudinem seruata æqualitate redigere pr.6. 504
Maior proportio lateris ad latus, quàm basis ad basim, quos faciat angulos maiores pr.5. 302
Maior proportio lateris ad latus, quàm basis ad basim angulum verticalem facit maiorem, &c. pr.6. pag.302. & pr.15. pag.313.
Duorum triangulorum æquiangulorum bases vna linea fiunt compositæ, si reliqua crura sint parallela pr.9. 138
Corpus aliquod, vt cylindrum, conum, pytamidem, prisma in basibus datis locare pr.25. 668
Bases harmonicæ quænam def. 3. 267

Binomium.

Binomium à quibus lineis nascatur pr.10. 189
Binomium primum pr.17.pag.190. secundum pr. 18. tertium pr.19. pag.191. quartum prop.20. quintum 21. sextum pr.22. pag.192.
Binomio medio commensurabilis linea binomium medium est pr.52. 205
Binomio commensurabilis linea binomium est pr.50. 205
Binomium medium primum pr.31.pag.196.secundum pr.33. pag.196.
Bina media potens, vt fiat pr.46. 203

C

Centrum.

Centrum harmonicum quodnam def.1. 263
Centrum circuli reperire pr.1. 64
Quorum circulorum sit idem centrum pr.2. 64
pr.3. 65
in qua linea sit centrum Cor. 64
Lineę plures æquales in idem punctum conspirantes in circulo ostendunt centrum pr.4. 65
A centro Linearum æquidistantia def.4. 63
Centrum sectionum conicarum quodnam d.13. 391
Centrum hyperbolæ inuenire pr.30. 411

Centrum in ellipſi inuenire Coroll. 2. 412
Sphæræ centrum inuenire pr. 5. 356

Chorda.

Chorda quid ſit def. 1. 307
Chorda, lineaque in circulo conſungens duo puncta peripheriæ eſt intra circulum pr. 12. 68
Quæ chordæ æqualiter, magiſue diſtent à centro, ſeu minus prop. 16. pag. 69. & proo. 17. pag. 70.
Quæ æquales pr. 33. 68
Rectangulum ex contingente, & chorda circuli, cui rectangulo æquetur pr. 13. 555
Chorda ad chordam ſimilis arcus, vt diameter ad diametrum pr. 44 333
Chordæ parallelæ in circulo ſimul, ad diametrum, quam habeant rationem pr. 39. 567
Differentiæ chordarum à circuli ſextante pariter remotarum, cui ſinui æquentur pr. 23. 321
Quæ maximæ lineæ, quæ minimæ, vel quæ maiores in circulo ab aliquo puncto, at non centro ad peripheriam ductæ pr. 15. 69
Arcus tertiæ partis chora data inuenire chordam totius arcus pr. 20. 319
Radius vt ſe habeat ad chordam quadrantem ſuperantem pr. 21. 320
Per auream regulam chordas inuenire Coroll. pr. 21. 320
Tres ſubtenſæ arcui, & duplo, & triplo ſunt tres continuè proportionales pr. 22. 320
Cuiuſcumque arcus tripli, quadrupli, aut quintupli chordas inuenire pr. 32. Cor. 320
Chordas inuenire Cor. 3. pag. 312. & Cor. 313. Sinum inuenire pr. 2. 312
Ex ſinus duorum arcuum chordam amborum inuenire, & ſinum pr. 12. 312
Quadratum chordæ duorum arcuum, quibus quadratis æquetur pr. 13 & 14. 313
Chorda vnius gradus ſenſibiliter non differt ab arcu ſuo Cor. pr. 15. 173
Chordam vnius gradus inuenire Cor. 2. pag. 114. & ſinum minutorum 15. Cor. 3.
Chordas ſine extractione radicis quadratæ inuenire exceſſus arcus ſuper alium, vel ſummæ duorum arcuum Cor. 1. & 2. pag. 317. vel tripli vnius arcus, vel è contra Cor. 3. & 4. pag. 318 & quintupli Cor. 5.
Chordæ vide ſubtenſæ.

Cyclica linea.

Cyclicam deſcribere pr. 29. 299

Circumſcriptio.

Circumſcriptio quænam def. 1. 83
Rectilinei circulo def. 4. 83
Circuli rectilineo def. 6. 83
Trianguli circa circulum pr. 1. 84
Circuli circa triangulum pr. 5. 85
Quadrati circulo pr. 7. 86
Circuli quadrato pr. 9. 87
Pentagoni circulo pr. 12. 88
Circumſcriptio figuræ ſimilis inſcriptæ circulo, Cor. 89
Pentagoni circa circulum pr. 14. 89
Cuicumque figuræ curuilineæ, mixtilineæque rectangula tot circumſcribi poſſunt, donec relinquant quantitatem qualibet data minorem propoſ. 1. 527
Figura omnis circulo circumſcripta eſt maioris ambitus, inſcripta minoris pr. 2. 528

Circulus.

Circuli quinam æquales def. 1. 63
Circulus datis tribus punctis deſcribitur Cor. 1. pag. 186
Circulus alium non ſecat, niſi in duobus punctis in ſphera pr. 5. 65
Vide tactus, tangens, ſecans, ſegmentum.
Circuli areæ æquale quadratum ponere pr. 530
Vide area.
Circulos proportionaliter augere, vel minuere pr. 19. 533
Circulus, in quo conueniat cum ellipſi, & parabola Cor. 3. 396
Circulorum per punctum intra circulum, & non per polum ductorum, qui arcus ſint maiores in ſphæra, & cæt. pr. 22. 389
Vide Tactus, maximus, ſubtenſæ.
Circuli vide ſectores arcus, ſegmenta, Anguli ſpherici, chordæ, ſecantes, ſubtenſæ, tangentes, radius, diameter.
Circuli inter ſe ſunt, vt quadrata diametrorum pr. 41. 153
Circulus in quot partes diuidatur 307
Circuli proiectio vide orthographia, ſtereographia.

Circumferentia.

Circumferentia cuiuſlibet circuli diametrum continet ter, & magis, quàm eius octauam partem pr. 5. 288
Proportio peripheriæ ad diametrum, inter quas rationes conſiſtat Cor. 289
Circumferentiæ inter ſe ſunt, vt diametri pr. 43. pag. 353
Deſcriptio circumferentiæ, & menſura 286. & ſeq.
Cuiuſlibet circuli peripheria eſt tripla diametri, & parte ſeptima paulò minor pr. 3. 287

Collectio.

Collectio rationis def. 20. 116
Collectio oſtenditur Cor. 2. 127

Commenſurabilitas.

Commenſurabilium maximam communem menſuram inuenire pr. 1. & 2. 183. & 184
Quę duas magnitudines metitur communem quoque maximam menſuram dimetitur Cor. pr. 1. & Cor. pr. 2. 183
Commenſurabilium ratio eſt, quæ numeri ad numerum, & incommenſurabilium nequaquam pr. 3. 184
Commenſurabilium quadrata, numericorum quadratorum proportionem habent, & è contra pr. 14. 184
Inuenire rectas, quorum quadrata ſe habeant, vt numerus ad numerum pr. 11. 187
Commenſurabiles inuenire Cor. pr. 11. 188
Commenſurabiles magnitudines compoſitę, partibus commenſurabiles pr. 9. 186
Vide incommenſurabiles.
Quæ lineæ commenſurabiles longitudine, quæ potentia Coroll. 185
Commenſurabiles magnitudines, quæ? def. 1. 182
Latera exceſſuum quadratorum ſegmentorum quando ſunt commenſurabilia pr. 38. 189

Compoſitio rerum.

Datis pluribus rectilineis ea in vnicum conglobare pr. 28. 512

Com-

Compoſiti numeri, & inter ſe compoſiti def. 13. & 14. 93
Duos aut plures conos in vnum coadunare propoſ. 52. 679
Vide addere.

Compoſitio rationum.

Proportio compoſita geniti ex minutijs pr. 15. 212
Compoſitio rationis def. 25. 117
Proportionem compoſitam agnoſcere pr. 10. 112
Ratio ex rationibus compoſita def. 27. 118
Compoſitio rationis in proportionalitatibus propoſ. 25. 279
Compoſitio rationis pr. 21. 128
Compoſitam proportionem in lineis agnoſcere prop. 5. 250
Compoſita ratio numerica, quæ? def. 4. 154
Lineam compoſitam proportionem ad aliam habentem reperire pr. 4. 249
Plani numeri ratio compoſita pr. 10. 171
Compoſitio rationis in numeris pr. 24. 161

Conchilis.

Conchilem deſcribere pr. 26, & 28. 298
Eſt Aſymptotos pr. 27. 298
Diuidit trifariam angulum pr. 10. 303

Coniforme corpus.

Coniformia corpora æqualta ſunt inuicem, vt baſes pr. 28. 632
Quod ſi ſint æqualium baſium ſe referunt, vt altitudines pr. 28. Cor. 632
Et reciprocas altitudines baſibus habentia, æqualia pr. 29. 632
Conum cono flexis conſtanti æquare pr. 71. 673

Conoides.

Conoides hyperbolicum quid ſit? def. 1. 441
Conoides hyperbolicum, quam habeat proportionem ad conum inſcriptum pr. 30. 633
Conoides hyperbolicum quadriforme æquat frustum pyramidis, & cæt. pr. 56. 652
In conoide Hyperbolico quænam ſectio ſit parabola? pr. 17. pag. 441. quænam ſit hyperbola pr. 19. quænam ellipſis pr. 18. 442
Conoides cui ſpatio aſymptotici coni æquetur pr. 33. 35
Vt facilè ſolidtas ipſius colligitur in Cor.
Conoides parabolicum quadriforme, cui ſoliditati æquetur pr. 55. 652
cui ſoliditati eius partes? Cor. pr. 55. ibid.
Conoides parabolicum quid? def. 1. 440
Conoidis parabolici ſectio parallela baſi circulo circulus pr. 12. 440
Quodcumque corpus conoidale alteri dato etiam obliquo aſſimilare pr. 12. 664

Continuatio.

Continuatio ſerierum proportionalium. Vide ſeries.
Continuatio rationum. 283. & ſeq.

Coni ſuperficies.

Superficies coni recti, cui ſectori æquetur, & cui triangulo in Coroll. pr. 34. 560
Cui ſuperficiei cylindricæ pr. 25. 560
Cui circulo æquetur pr. 26. 561
Conicam ſuperficiem coni recti tranſmutare Coroll. 561
Superficies coni recti ad ſuperficiem recti cylindri, quam habeat rationem? pr. 27. 561
Superficies coni recti, quę? & cuius duplo æquetur? pr. 28. 561
Vide conus.
Superficies coni recti ſe habet ad ſuum circulum, vt latus ad radium pr. 30. 562
Simlium rectorum conorum ſuperficies, vt ſint ad inuicem? pr. 33. quam proportionem compoſitam habeant? pr. 34. 532
Superficies rectorum conorum æquealtorum, vt ſint ad inuicem pr. 35. 563
Vide ſuperficies.
Superficies conorum ſcalenorum, & quorumcumque corporum obliquorum ſuperficiem globoſam inueſtigare Cor. pr. 2. 662
Portionis figuræ conicæ ſuperficies ſphæræ circumſcriptę, qua circuli ſit maior pr. 44. pag. 569. & inſcriptæ minor pr. 45. 570
Omnis parabolici, & hyperbolici conoidis ſuperficies, vt ſe habeat ad planum per axem, & quecumque talis figura pr. 38. & Cor. 566
Coni ſuperficiem rectanguli inuenire pr. 16. 582
Superficiem coni ad datam baſim terminantis inuenire pr. 17. 582
Coni ſuperficie concaua ſecti ſuperficiem extendere pr. 18. 583
Coni priſmatici ſuperficiem in planam deducere pr. 20. ibid.
Coni obliqui ſuperficiem inuenire à cylindro ſecti pr. 21. 584
Coni ſecti à ſuperficie plana axi non normali in planum extendere pr. 22. 585
Coni ſeu obliqui, ſeu elliptici ſuperficiem plano conſignare pr. 23. 586
Coni lenticularis baſis ſuperficiem extendere propoſ. 24. 587
Coni cuiuſcumque irregularis ſuperficiem inuenire pr. 25. ibid.

Coni ſoliditas.

Conus priſmaticus ad conum eſt, vt 2. ad 3. propoſ. 26. 631
Conus Ellipticæ baſis, quem æquet conum æqualtum pr. 27. ibid.
Æqualis baſis, & altitudinis æquantur pr. 27. Coroll. 1. 632
Et ſi habeant baſes altitudinibus reciprocè proportionales Cor. 2. ibid.
Sunt æqualis baſis inuicem, vt altitudines Coroll. 3. ibid.
Conus quid ſit def. 1. pag. 390. & oppoſiti quinam def. 5. rectus, ſcalenus def. 4. 391
Cono, vel pyramidi abſcindere partem datam propoſ. 41. 675
Conum pyramidi æqualem efficere pr. 19. 666
Cono æqualem cylindrum ponere pr. 19. ibid.
Conum æqualem ſoliditati coni intus vacuati ponere pr. 27. 668
Etiam cùm eſt vacuus ſimili ſolido pr. 28. ibid.
Conica corpora vide corpora.
Coni iſoſcelles quinam æquales pr. 9. 625
Conus eſt trigens cylindri pr. 7. 622
Conum diuidere vide diuidere.
Vt ſe ad inuicem referant pr. 8. 622
Similes in triplicata ratione ſunt diametrorum pr. 9. 613
Vide Cylindrus.
Conum mutare in parallelepipedum pr. 21. 666
Conum in priſma mutare pr. 20. 666
Coni ſectio per axem triangulum def. 4. 391

Co-

Conoides.

Conoides hyperbolicum vide hyperbolicum, Parabolicum vide parabolicum.

Conuersio.

Conuersio rationis def.27. 117
Conuersa ratio in proportionalitatibus pr.27.279
Conuersio rationis Cor.2. 128
Conuersio rationis ostenditur in numeris p.22. 161
Conuersio rationis in numeris pr.25. 162

Corpora.

Corporibus spiralibus cuiuscumque generis cylindros æquales erigere pr.39. 674
Corporis conici sphere inscripti omnes superficies, cui circulo æquentur pr.40. 567
Omnia corpora, quibus conos, vel pyramides, vel parallelepipeda æqualia exhiberi possint numeris examinare pr.74. 686
Ex proportionalibus dimensionibus corpora effecta, quæ æquentur pr.22. 629

Crus.

Crus rectanguli est medium proportionale inter totam basim, & segmentum sibi vnitum Cor.2. pag. 138
Crus vide latera, recte, triangula, & similia.
Ex notis cruribus rectanguli duobus tertium inuenire pr.17. 507

Cubus.

Dato cubo æquale parallelepipedum construere ad datam altitudinem, vel super datam basim pr.15. 665
Datum cubum, vel parallelepipedum iuxta datam proportionem secare pr.40. 675
Cubum, parallelepipedumq; vacuatum pyramide diuidere pr.43. Coroll.1. 677
Cubum constituere, & sphæra complecti, & de diametri ad eius latus ratione pr.8. 601
Cubum, vel Parallelepipedum calculationi subigere pr.64. 683
Cubũ in corpus regulare transfundere pr.22. 667
Cubi numeri definitio def.4. 161
Cubus numerus cubũ, ductus in se facit pr.9. 179
& etiam multiplicans alium cubum, ibid.
Et inuertendo si faciat cubum, ipse est cubus pr.2. ibid.
Cuborum triplicata ratio pr.19. 174

Cum Rationali linea.

Cum rationali medium totum efficiens, vt fiat pr.48. 204
Cum medio medium totum efficiens, vt fiat pr.49. ibid.

Cylindrus.

Cylindrus ad cylindrum, vt axis ad axem, quinam? pr.10. 623
Æqualium basium sunt inuicem, vt altitudines pr.11. 624
Æqualium reciprocantur bases, & altitudines pr.12. ibid.
Coni, & cylindri æquealti sunt inuicem, vt bases pr.3 621
Quinam sint æquales pyramidi, & prismati pr.3. Coroll. ibid.
Quinam sint inuicem æquales pr.4. & quænam partes ipsorum in Cor. ibid.
Æquealti se referunt vt bases pr.5. 622
Cylindrus spheroide circumscriptus, vt se habeat ad spheroidem pr.37. 639
Etiam si Ellipticæ sectionis Cor.3.
Cylindrum in parallelepipedum erigere p.21. 666
Cylindri ellipticiæquales qui? pr.25. Cor. 630
Cylindrum alteri similem ponere pr.3. 662
Cylindro æquale facere prisma pr.18. 666
Cylindro æqualem conum constituere pr.19. ibid.
Cylindrum vacuum cono, cui cylindro æquetur? reperire pr.29. 669
Coni cylindro vacuati æqualem conum reperire pr.30. 670
Cylindrum in pyramidem mutare pr.20. 666
Cylindrum vacuatum pyramide iuxta datam rationem diuidere pr.43. Coroll.2. 677
Cylindrum, seu conum etiam prismaticum quodcumque calculis examinare pr.67. 684

Cylindri superficies.

Cylindri superficies, cui æquetur. 551
Quomodo extendatur. 173. & seq.
Vide superficies.

Cylindraceum corpus.

Cylindracea corpora æquealta sunt inuicem, vt bases pr 23. 529
Et vt altitudines, si sint æqualis basis pr.24. 630
Æqualia quorum reciprocæ bases, & altitudines pr.25. ibid.
Cylindraceum corpus alteri simile ponere pr.6. pag. 663

D

Defectus.

EX maiori cubo detrahere minorem residuo cubo manente pr.50. 679
Detrahere à quacumque figura solida pr.50. Coroll. 679
Deficere parallelogrammi quid? def.5. 133
Vide partire, segmentum, pars, diuidere
Datam proportionem minorem à maiori deducere pr.33. 281
Detractio rationis ostenditur pr.6. pag. 120
& Coroll. 130
Detractio rationis quid? def.23. 117

Definitio.

Definitiones quid sint? 24

Denominator.

Denominator proportionis continuæ, vt habeatur pr.10. 232
Diuersa genera Denominatorum, Cor. 284
Vide proportiones, series, Geometrica, Musica.
Denominatores proportionum musicarum in qualibet proportione crescunt ab vnitate pr.14. 233
Minutiam ad minorem denominationem reducere pr.10. 210
Proportio numeratoris ad denominatorem, quid exprimat, Cor. 214

Descriptio.

Describere figuras in ellipsibus similes illis, quæ sunt in circulo quoad proportionem ad totum Cor. prop.29. 537
Super datam diametrum describere ellipsim circulo æqualem pr.30. & singula eius segmenta Coroll. 537
Describere parabolas æquales Cor.2. 540
Triangulum æquale parabolę pr.37. ibid.
Vide ea, quæ cupis describere.
Vide inscriptio, seu circumscriptio.

Diameter.

Circuli in sphæra diametrum inuenire pr.9. 317
Diameter sphęrę, & circuli basim ambientis ad latera Tetaedri, & normalem comparatur pr. 6. & Coroll. 1. & 2. pag. 600
Diametri sphærę mensuram inuenire pr.10. 357
Diameter sectionum conicarum, & diameter transuersa quænam? def. 11. & 12. 391
Diametri secundariæ sunt axes Cor.1.pr.29. 310
In parabola diametrum ducere pr.36. 413
Diametrum coniugatam in parabola inuenire 37. pag. 413
Diametros coniugatas inuenire in Hyperbola pr.30. 411
In Ellipsi diametrorum quamlibet coniugationem inuenire pr.32. 411
Coniugatas diametros æquales in Ellipsi inuenire pr.34. 412
Quadrata applicatarum ad diametros coniugatas æqualia sunt rectangulis ex diametri portionibus pr.35. ibid.
Diameter parallelogrammi quid? def.35. 30
Diameter parallelogrammi bifariam illud secat pr.34. 47
æquè potest, ac latera Cor.1. & 2. 59

Differentiæ.

Differentiæ, & termini in progressione Geometrica linearum, vt se habeant pr.4. 257
& pr.5. 258
Vide termini.
Ex differentijs tres proportionales suas inuenire pr.7. & 8. 250
Differentię harmonicę quando sint incommensurabiles, & irrationales pr.17. 268
Differentiæ sunt in eadem proportione, ac ipsi proportionales pr.8. 231
Differentiæ coaceruatę in numero radicali faciunt vltimum pr.9. 232
Differentiæ in progressione geometrica linearum se respiciunt, vt termini pr.1. 257
Differentiæ proportionales terminos proportionales habent pr.2. ibid.
Differentiæ musicę possunt omni data quantitate fieri minores pr.22. 270
Quecumque infinita differentiarum series æquat primum terminum pr.23. ibid.
Differentia qua augescit logarithmus à sinu toto, si progressio incipit à 0. est ipse logarithmus pr.13. 333
Differentiæ Geometricorum, vt sint inuicem in serie, cui Logarithmi applicandi pr.14. & 15. 334
Differentiam arithmeticam inuenire pr.15. 241

Diuidere.

Diuidere lineas, superficies, corpora. Vide hæc
Diuidere angulos diuersis modis. Vide angulus Chonchilis.
Diuidere numerorum quid sit. def.16. 94
Numerus omnis maior per numerum alium diuidi potest, at si sit minor pr.18. 100
Minor per maiorem potest diuidi pr.19. 100
semper supereſt aliquid pr.21. 101
Et est pars numeri diuidentis pr.22. Ibid.
Minor sumptus in minori proportione diuidi potest pr.23. ibid.
Vt numerus datus diuidatur pr.24. 101

Diuisio rationis.

Diuisio rationis def.26. 117
Diuisio rationis ostenditur pr.20. 127
Diuisio rationis in numeris ostenditur pr.23. 160
Diuisio rationis in proportionalitatibus pr. 26. pag. 279
Rationem partiri in datas rationes pr.38. 282
Vide proportio Geometrica.
Datam rationem diuidere pr.39. 282

Diuisio rerum.

Diuisio lineæ proportionalis docetur p. 12. 140
Secare, vt alia secta est pr.13. ibid.
& secundùm proportionem quãcumque datam in Cor. ibid.
Vnicum rectilineum in plura partiri manente eadem figura in partibus pr. 29. & Cor. 512
Vnicum conum in plures distribuere pr.52. 679
Datam ellipsim diuidere pr.29. 536
Lineam ita secare, vt singulæ partes proportionem musicam seruent pr.1. 163
Diuidere lineam in partes incommensurabiles pr.39. 189
Minutiam per minutiam diuidere pr.29. 213
Vide ea, quæ diuidenda sunt, vide extrema, & media ratio.

Dodecaedrum.

Dodecaedrum constituere, & sphæra complecti, & ostenditur latus eius linea irrationalis p.19. pag. 602
Latus dodecaedri comparatur cum latere cubi Coroll.1. 604

Duplicata proportio.

Æquiangula parallelogramma habent proportionem laterum duplicatam p.22.& triangulo Cor. 1. & 2. 144
Duplicata, triplicataque ratio in numeris quænam def.3. 154
Duplicata ratio inter similia triangula, & polygona pr.20. & 21. 143
Plani ad planum est laterum ratio duplicata pr.11. 172

E

Elementa.

ELementa quid sint. 23
Elementa alternata, & alternantia p.6. 32
Elementorum ordo pr.7. ibid.
Authores. ibid.

Ellipsis.

Ellipsis quid def.9. 391
Diuisio Ellipsis in partes subduplas Coroll. 534
Diameter ad diametrum est, vt ellipsis ad circulũ maiori diametro descriptum pr.24. 534
Quinam circulus equalis ellipsi pr.26. 535
Ellipsis quælibet ad quemlibet circulum est, vt rectangulum ex diametris ad quadratum circuli pr.26. ibid.
Ellipsis ad ellipsim, quam consequatur proportionem pr.27. & Cor.2. ibid.
Describere ellipsim æqualem ellipsi pr.27. Coroll. 536
Omnis sectio sphæroidis ad axem recta circulus est pr.9. & axi obliqua ellipsis. 439
Ellipses parallelæ in cono similes pr.4. 437

Quæ-

Quænam ellipſes, ſeu hyperbolæ ſimiles pr.52.& 53. &Cor. & 54. & Corollarijs. 421
In omni cylindro, ſeu circulari, ſeu elliptico ones ſectiones axi obliquæ ſunt ellipſes p.22. 443. at axi obliqua in conoidale Parabolico ellipſis eſt pr.14. 440
Dato circulo ellipſim deſcribere pr.27. pag.431.& 432. pr.73. Item parabolam pr.74. 433
Item Hyperbolam pr.75. ibid.
Ellipſim deſcribere pr.67. pag.429. & pr.68. 430

Enumeratio.
Enumeratio rationum def.19. 116
Enumeratio rationis modus arguendi oſtenditur in numeris pr.12. 158
Enumeratio rationis pr.17. 126

Eſſentia.
Quantitatis eſſentia quæ ſit? pr.1. 1

Exagonum.
Exagoni latus æquat ſemidiametrum Cor.1. 90
Exagoni deſcriptio, vide Inſcriptio.

Exceſſus.
Exceſſum rationum inuenire pr.40. 283
Excedere parallelogrammi quid def.6. 133

Ex æquali Ratio.
Ex æquali ratio def.18. 116
Ex æqualitate ratio in numeris pr.14. 159
Ex æqualitate ratio oſtenditur pr.3. pag.119. & pr. 24. pag.130. & pr.23. 129
Ex æqualitate ratio perturbata in numeris oſtenditur pr.21. 161

Extrema Ratio.
Lineam diuiſam extrema,& media ratione ſecare pr.23. 254
Aggregatum extremarum in ſuas extremas diſtinguere pr.6. 250
Partire numerum in extrema proportionalia dato numero pr.25. 226
Vide Ratio, ſecare, diuidere.

F

Figura.
Figura quid def.14. 28
Figuræ rectilineæ def.19. 29
Trilineæ def.20. Quadrilineę def.21. Multilateręe def.22.
Vide Multilaterum, Polygonum, Rectilineum, Triangulum, & cæteras ſpecies figurarum.
De angulis figurarum rectilinearum 305.& ſeq.
Quot angulos contineat figura rectilinea pr.15. pag. 305
Quot angulis anguli figuræ rectilineæ æquentur pr.15. ibid.
Externi quatuor rectos æquant pr.17. ibid.

Figura ſolida.
Figura conica ſphęræ inſcripta, cui cono æquetur pr. 41. 643. & ſector cui ſectori. Et quo cono minor ſit pr.42. 644
A quacumq; figura ſollda detrahere partem manente reliduo figurato, vt priùs pr.50. Cor.679
Vide Multilaterum, Regularis, diuidere addere.

Finitum.
Finiti ad infinitum nulla proportio pr.2. 108

Fornix.
Fornicis cruciformis ſolidꝰtas, quæ Cor.1. 671

Fractio.
Fractio quid ſitꝰdef.1. 207
Minutia quid ſitꝰdef.1. ibid.
Minutia ad ſuum integrum, vt referatur p.1. 208
Minutiæ, quæ æquales? pr.2. ibid.
Minutię quando proportione totorum eadem gaudeant pr.3. & quando proportione numerorum integrorum pr.4. 108
Minutias reducere pr.5. ibid.
Vide minutia.

Fruſtum.
Fruſtum coni, cui cono æquetur pr.13. Cor. 626
Fruſta conorum quæcumque numeris menſurare pr.69. 685
Fruſtum conicum, cui æquetur pr.13.14. 624
Fruſtum conorum, vel pyramidum ſimilia efficere pr. 10. 663
Segmentorum ſpheroidicorum ſuperficies, quibus æquentur Coroll. 566
Fruſto ſpheroidis æqualem conum exhibere pr.33. pag. 670
Sphæroidis fruſtum, quam proportionem habeat ad conum inſcriptum pr.40. 640
Superficies fruſti coni recti, ad quem annulum planum, quam proportionem habeat p.31. 562
Superficies fruſti coni recti, cui circulo æquetur pr.32. 562
Fruſtum ſphæroidis, quas partes æquet cylindri pr.34. 640
Vide ſphæroides.
Fruſtum pyramidis, cui æquetur pr.25. 619
Fruſtum pyramidis calculare pr.69. 684
Fruſti cylindrici acuta ſuperficies, cui æquetur pr.6. 552
Vide ſegmentum, & nomina rerum, quorum fruſta noſcere cupis.

G

Genitus numerus.
Genitus ex multiplicatione duorum numerorum planus eſt def.1. 166
Vide numerus, multiplicatio.

Geometria.
Geometria eſt ſcientia oſtenſiua pr.5. 23
& eius obiectum aſſignatur. ibid.

Geometrica Progreſſio, Proportio.
Geometrica progreſſio quid def.2. 256
Proportionis geometricæ continuę proprietates, & ſpecies, inexordio expenſionis. 230
Non omnes numeri continuari in proportione poſſunt pr.1. 231
Vt ſe producant numeri continuè proportionales pr.2. 230
Qui medij proportionales inter tres cadant pr.3. pag. 231
Medijs intermiſſis tot numero, tres numeri in continua proportione eandem rationem dicunt pr.4. 231
Quadratum medij rectangulo extremorum æquatur pr.5. 331
Et rectangulum mediorum duorum rectangulo duorum extremorum pr.6. 231
In maiori numero plures, & minutiores proportiones reperiuntur pr.7. ibid.
Vt ſumma ſeriei numerorum Geometricorum inueniatur pr.15. pag.233. & pr.16. 234
Vt ſeries Geometricorum proportionalium extendatur in numeris pr.17.pag.234.pr.17.& 18. addendo pr.19. & auferendo pr.20. & 21. & 22. & Cor. 1. ibid.
Vide Differentiæ, Termini, Maximus.
Proportionales inuenire, quorum ſummam æqualis ſit numero vnius in alterum procreato Cor. 2. 235
Inter duos numeros conſtituere geometricè proportionalem pr.23. 236
Inter duos numeros plures proportionales interponere pr.24. ibid.
Numerum datum in partes proportionales diſtribuere pr.25. ibid.
Maximum numerum, & extremum medijs intermiſſis multis depromere pr.26. ibid.
Geometrica progreſſio linearum. Vide ſeries.

Geometrica progreſſio planitierum.
Omnia, quæ de progreſſione Geometrica verificantur in lineis etiam de ſuperficiebus veraeuadunt pr.1. pag. 495. tum de ſpatijs ſimilibus, quam de diſſimilibus Cor.1.
Progreſſio infinita geometrica ſuperficierum producit determinatam, & finitam ſuperficiem, Cor.2. 495
Omnia ſpatia antecedentia ſunt ad conſequentia, vt vnum antecedens ad vnum conſequens Coroll.3. ibid.
Differentia primi ſpatij à ſecundo in progreſſione gometrica primum ſpatium, & ſeries infinita ſunt in continua proportione Coroll.4. pagina 496
Si ſeries duæ procedant per eandem analogyam, ita eſt tota ſeries ad totam ſeriem, vt primus terminus vnius ad primum alterius pr.2. ibid.
Planitiem æqualem ſeriei proportionalium geometricæ inuenire pr.3. ibid.
Reperire planum continuè proportionaliuꝰ terminorum pr.4. 496
Datis primis baſibus reperire planorum ſeriei æqualem ſuperficiem, & etiam quadratum pr.5.& Cor. ibid.
Seriem infinitam inuenire, quę à dato quadrato incipiat, & tota dato rectangulo æquetur pr.6. pag. 497. & etiam, quę à ſegmento incipiat pr.7. etiam alteri æqualem pr.8. 498
Seriem planorum alteri datam proportionem habentem, quæ incipiat à dato quadrato pr.9.ibid.

Geometrica progreſſio corporum.
Vide ſeries corporum.
Gnomon quid def.2. 52

H

Harmonica proportio numerorum.
Proprietates proportionis Harmonicæ Cor.1. 2. & 3. 243
Tres harmonicos inuenire pr.1. ibid.
Tertium Harmonicorum inuenire pr.2. ibid.
Non ſemper harmonicus tertius inueniri poteſt Coroll. 244
Duplex modus continuandi Harmonicam ſeriem in exord. ibid.
Continuare proportionem Harmonicam pr.3.244 & pr.4.& 5. 245
Quinam in ſerie Harmonica ſint Arithmetici Coroll.
Quinam ſint minutię Coroll. 244
Inter duos medium Harmonicum inuenire pr.6. pag. 245
Numerum in proportionem Harmonicam diſtribuere pr.7. 246
Arithmetici, vt Harmonicos producant Cor. ibid.

Harmonica proportio linearum.
Plurimas lineas in infinitum inuenire, quę proportione muſica creſcant, vel decreſcant pr.2. 264
Linea harmonicè diuiſa, eſt diuiſa in partes ſucceſſiuę denominationis pr.3. ibid.
Lineam Harmonicè ſim liter ſecare pr.4. 264
Quę ſeries Harmonicè proportionem ſemper eandem ſeruent pr.5. 265
Similem alteri ſeriem harmonicam propagare pr 6. 265
Omnes harmonicę proportionès ſunt in eadem Geometrica proportione pr.7. ibid.
Series Harmonicas datæ denominationis reperire pr.8.266. & etiam in pluribus lineis pr.9. Vide Termini differentiæ Triangula.
In qualibet data linea abſque fine progreſſio harmonica extendi poteſt pr.19. 269
In harmonica ſerie aſſignata qualibet minori, adhuc ad minorem poteſt peruenìri pr.20. ibid.
Nulla progreſſio harmonica extremum conſequi poteſt pr.18. ibid.
Omnes propoſitiones, quæ de lineis muſicis verificantur etiam de planitiebus vera ſunt Coroll. 499
Superficies Muſicas augere, & minuere ſecudùm datam rationem pr.48. 520
Superficies harmonicas iuxta datam rationem ſe incipientes minuì ponere pr.49. 521

Helix.
Helicis, & quadratricis comparatio. 197
Radius helicis, & applicata quadratricis quando æquales pr.21. 297
Radij helicis, quibus arcubus æquales pr.24. ibid.
Helicis lineam deſcribere pr.25. ibid.

Hemiſpheroides.
Hemiſpheroides duplum eſt coni inſcripti pr.39. pag. 640. Vide ſpheroides.

Homologum.
Homologæ quantitates quænam def.13. 114

Hyperbola, & Hyperbolicum conoides.
Hyperbolam deſcribere pr.64. 427
Data Aſymptoto, & pr.65. 428
Eamdem reſarcire, & producere pr.66. 429
Hyperbola quid? def.10. 391
Hyparbolæ parallelæ in cono ſimiles pr.6. 438
Quænam ſint Hyperbolæ, & Ellipſes æquales pr. 34. pag. 413. & pr.40. 414
Vide parabola, ellipſis, ſectio coni, Conoides.
A conoide hyperbolico, ſeu parabolico imperatam partem auferre pr 49. 678
Hyperbolicum conoidem iuxta datam rationem diuidere pr.48. 67
Hyperbolicum conoidem in conum æqualem trãſformare pr.34. 671

Hypotenuſa.
Hypotenuſa crure, & angulo datis quibuſlibet per logarithmos tertium reperire pr.18. 466

Datis crure, & angulo duobus quibuſlibet logarithmicè tertium reperire pr.19. 467

I

Icoſaedrum.

ICoſaedrum ponere, & ſphæra complecti, cuius latus oſtenditur irrationale diametro ſphęræ pr.10. 604

Inclinatio.

Lateri anguli inclinationis normalis omnibus aliis lineis normalis pr.4. 348
Triãgulum inclinationis planis inclinatis normale eſt Cor. 2. 349
Parallela in plano inclinato alteri, eſt etiam parallela ſectioni Cor.3. ibid.
Quinam anguli inter inclinata plana ſit maiores pr. 20. pag. 352. & pr.22. 353
Angulus inclinationis planorum idem, vbique in ipſis pr.18. 352
Rectę ad planum inclinatio quænam? def.3. & æqualis inclinatio def.5. 347
Plani ad planum inclinatio quænam def.4. & æqualis inclinatio def.5. 347
Inclinata ad vmbelicum à contactu æqualis eſt axis portioni interclusa inter verticem, & vmbelicum pr.26. pag. 407. Vide Vmbelicus.
Inclinatio circulorum, quæ? def.6. pag.354.& quæ ſimilis? def.7.

Incommenſurabiles lineæ.

Incommenſurabiles lineæ def.4. 182
Vide commenſurabiles.
Magnitudines proportione relatæ commenſurabilitate, vel incommenſurabilitate, etiam referuntur pr.5. 185
Quæ eidem magnitudini ſunt incommenſurabiles etiam inter ſe pr.6. 186
Quæ magnitudines incommenſurabiles pr.7.& 8. pag. 186
Magnitudo incommenſurabilis compoſita facit totum partibus incommenſurabile pr.10. 186
Incommenſurabiles longitudine tantùm, & etiam potentia inuenire pr.12. & etiam plures Coroll. 188
Inuenire rationales potentia, vt differentia quadrata habeat latus maiori commenſurabile pr. 13. pag. 188. & etiam incommenſurabile pr.14. pag. 189
Proportionalium laterum quadratorum exceſſus quando ſit commenſurabile, ſiue non pr.15.189
Sectio in partes inequales cum faciat lineas incommenſurabiles, ſeu non pr.37. conuertitur Coroll. 198
Incommenſurabilium longitudine quadrata, quam proportionem habeant pr.4. 184

Incommenſurabilia latera.

Incommenſurabilitas laterum figurarum regularium. 310. & ſeq.
Latus quadrati diametro circuli, in quo eſt inſcriptum eſt, incommenſurabile pr.7. 310
Item trianguli latus pr.8. latus decagoni, & pentagoni diametro, & longitudine, & potentia incommenſurabilis linea eſt pr.9. 311
Latus octogoni diametro incommenſurabile propoſ.10. 311
Inuenire duas lineas potentia incommenſurabiles, quarum quadratorum compoſitum ſit rationale, at rectangulum ex ipſis ſit medium pr.41. pag. 201. vel etiam quadratorum compoſitum medium, at rectangulum rationale pr.42. & etiam vtrumque medium pr.43. 202

Indiuiſibilia.

Pars vltima indiuiſibilis nec eſt, nec eſſe poteſt ſine alijs partibus pr.10. 10
Non ſunt mathematicę obiectum pr.13. 11

Indiuiduatio.

Indiuiduatio eſt vnitas numerica pr.1 13
eſt idem cum rebus indiuiduatis pr.15. 17

Infinitas.

Linearum proportionem propagare in infinitum pr.2. 248. Vide ſeries Geometrica, Harmonica.
Infiniti ad infinitum nulla proportio pr.1. 108
In aliqua finita quantitate, vt partes multiplicari poſſint in infinitum. pr.12.& Cor.1.& 2. 260

Inſcriptio.

Inſcriptio rectilineorum quenam def.1. 83
Rectilinei in circulo quæ? def.3. 83
Circuli in rectilineo quæ? def.5. 83
Inſcriptio trianguli in circulo pr.2. 84
Circuli in triangulo pr.4. 85
Quadrati in circulo pr.6. 86
Circuli in quadrato pr.8. 86
Pentagoni in circulo pr.11. 88
Circuli in pentagono pr.13. 89
Exagoni in circulo pr.15. 90
Trianguli æquilateri, & æquianguli inſcriptio pr. 15. 90
Quindecagoni in circulo pr.16. 91
Aliarum figurarum in circulo Cor. 91
Inſcribi poteſt corpus planis ſuperficiebus conſtans in quocumque corpore elliptico, Parabolico, hyperbolico pr.32. 591
Quando ſuperficies hæc inſcripti corporis agnoſci poſſit pr.33. 591
Inſcriptio ſolidi in ſolido quæ def.6. 597
Sunt minus, quam quadruplum maximi circuli ſphæra inſcripti conicæ ſuperficies ſphæra inſcriptæ pr.47. 568
At circumſcriptæ maius 42. ibid.
Parabolę maximum inſcribere triangulum pr.31. pag. 538
Quæ inſcripta triangula in parabola ſint æqualia pr.32. ſi vnum ex is ſit maximum etiam aliud Coroll.
Inſcribere in ſphęra conorum ſegmenta tangentia tantùm ſphæram aliam concludentē gr.13. 607. & etiam circumſcribere Cor.
Inſcribi quoq; tot ſolida corpori globoſo poſſunt, vt reliquant quantitatem omni data minorem pr.14. 608
Maximum triangulum Hyperbolæ inſcribere pr. 40. 541. Vide, quæ inſcribere cupis.

Intercepta.

Linea intercepta harmonica quenam def.2. 263
Interclpientes æquales arcus parallelæ Cor. 751
Quę in circulo bifariam ſecetur Cor. 76

Interuallum.

Interuallorum numerus multiplicatus cum ſecundo numero ſerie æquetur pr.4. 238
Interuallorum numerus ad numerum interuallorum, quam proportionem dicat in Arithmetica proportione pr.4.& 5. 238
Interuallorum numeri dicunt inuicem eam proportionem, quam differentiæ pr.7. 238
Numerum interuallorum Arithmeticorum inuenire pr.14. 241
Interuallum vide Arithmetica ratio.

Interſectio.

Planorum interſectio eſt linea recta pr.3. 348
Interſectiones planorum 347. & ſeq.
Interſectio circulorum in ſphęra. Vide circulos.

Inuerſa ratio.

Inuerſa ratio quid ſit? def.13. 116
Inuerſa ratio oſtenditur pr.4. Coroll. 120
Inuerſa ratio in proportionalitatibus pr.74. 278

Inuolucrum.

Inuolucrum ſphærę quadriformis, cui pyramidi æquetur pr.51. 649
Inuolucrum vngulæ, & lunulæ, quæ pars ſit cylindri, & parallelepipedi concludentis, ex quibus naſcuntur Coroll.2. 673
Inuolucri quadrati conoidis hyperbolici ſolidi tas quæ? Cor.1. 653
Inuolucrum vngulæ cylindricæ, cui pyramidi æquetur Cor.1. vt cognoſcatur Cor. Cor.2. 649
Irrationale quadratum def.9. & 10. 183
Compoſitis lineis irrationalibus commenſurabiles ſunt quoque irrationales compoſitæ pr.54. pag. 106
Irrationales quæ. def.7. & 11. 183. pr.25. 193

Iſoperimetræ.

Iſoperimetræ figuræ quænam? def.1. 521
Area Iſoperimetra quid def.2. ibid.
Figuram regularem alteri Iſoperimetram ponere pr.50. 522
Scaleno triangulum æquicrurum Iſoperimetrum facere pr.51. 522
Dato triangulo parallelogrammum, æquale, & Iſoperimetrum fabricare pr.52. ibid.
Figurarum Iſoperimetrarum ea eſt capacior, quæ plures continet angulos pr.67. 525
Iſoperimetrarum, quæ ſit figura maxima pr.68. 525
Circulus omnibus figuris Iſoperimetris capacior pr.69. pag. 525. eſt etiam maior Cor.1. & etiam ſphęra talis conditionis eſt Cor.2. 526
Rectangulum non rectangulo æquale. & Iſoperimetrum ponere pr.53. 522
Rectilineo æquale, & Iſoperimetrum rectangulum conſtituere pr.54. 522
Rectangulum facere æquale, & Iſoperimetrū ſemicirculo pr.55. ibid.
Iſoperimetra triangula quando minora prop. 56. pag. 523. Iſoſcellum quando eſt minus alio Coroll. 524
Eadem proportione in figuris Iſoperimetris latera, & anguli diminuuntur pr.55. pag. 524. & etiam differentia lateris, & anguli Cor.

Iſoſcelles.

Iſoſceles def.25. 24

L

Latus.

LAtera decagoni, & hexagoni inueſtigare pr.5. pag.309. Item trianguli Cor.1. 309. quadrati Cor.2. Item quindecagoni Cor. 310
Inueniuntur, & comparantur latera figurarum regularium pr.9. 605

Lemma.

Lemma quid ſit. 25

Linea.

Linea eſt quid reale indiuiſibile reduplicatiuè pr. 9. 9
Inadæquatè accipitur pr.11. 10
Et vt negatio pr.12. ibid.
Quid ſit? def.2. 26
Quinam eius termini? def.4. 27
Recta quænam ſit? def.5. ibid.
Parallela vide parallelæ.
Lineæ æqualem lineam ponere pr.5. 35
Illi detrahere partem datam pr.6. 35
Bifariam ſecare pr.7. ibid.
Normalem excitare à puncto in ea pr.8. 36
Si extra eam punctum detur pr.9. ibid.
Quos angulos inſiſtens alteri faciat pr.10. ibid.
Quæ ſint in directum pr.11. ibid.
Ad verticem ſe ſecantium anguli æquales p.12. 37
ne dum inuicem, ſed & quatuor rectis. Cor.
Æquipotentes vide æquipotentia.
Lineæ extenſæ plano nulla pars in ſublimi pr.1. pag. 348
Lineę ſe ſecantes, & triangula in eodem plano ſunt pr.2. ibid.
Lineæ ad ſuperficiem nulla proportio pr.4. 109

Logarithmus.

Similiter proportionatorum equales logarithmi Cor.2. pag.326. & pr.11. 332
De ſerie facili, geometricorum reperienda, cui arithmetica, & logarithmica deſeruiat prop.8. pag. 326. & 327
Exempla tabularum geometricorum continuè proportionalium cum logarithmis 327. & ſeq.
In progreſſione logarithmica principium ad libitum pr.9. 332
Tabulis Geometricis, ſeriebuſque eorum logarithmos inſcribere pr.10. 332. & Cor. 334
Quomodo reperiatur Geometricus quilibet ad continuandam ſeriem Coroll. pr. 11. 333. & Coroll. pr.15. 334
Quomodo reperiantur logarithmi ad continuandas tabulas logarithmorum pr.12.& Cor. 333 & Cor.1. & 2. pr. 13.
Logarithmos continuare Cor.pr.15.& Coroll. pr. 16. 335
Vt Geometrici in Infinitum in eadem proportione decreſcant in ſerie logarithmica poſiti propoſ.16. 335
In logarithmicis tabulis componendis fractiones non ſunt ſpernendæ pr.16. Cor. 336
Logarithmos tabulis ſinuum applicare pr 17. & Cor.1. & 2. ibid.
Quomodo ſinus gr. 45. logarithmus reperiatur Cor. 337
Logarithmos ſinubus arcuum minoribus, quàm gr. 45. applicare pr.19. & Coroll. 338
De tabulis logarithmicis ſinuum ordinandis, & logarithmis tangentium addendis 338. & ſeq.
Proprietates tabulę logarithmis inſtructę ſinuum, atque tangentium 335. vſque ad pag. 340
Tabulæ logarithmicę abſolutæ, vt condantur 340 & ſequentib. Vide differentiæ.
Aggregatum ex logarithmis anguli, & cruris æquatur logarithmo anguli, & cruris oppoſiti in obliquangulis triangulis pr.29. 470

In obliquangulis logarithmus aggregati crurum æquè subductus, quid relinquat? p. 30. & 31. 470
Logarithmus numerorum in serie naturali multiplicatorum quinam? pr. 27. 341
Numerorum ab 1. vsque ad 10. logorithmos reperire? pr. 37. 344
Numerorum, qui ex multiplicatione simplicium prodeunt logarithmos reperire pr. 18. 345
Alios logarithmos quoscumq; vltra denarium inuenire pr. 39. 345
In serie proportionali dato logarithmo vnius exquirere logarithmum alterius proportionalis pr. 32. 342
Numeris quibuscumque duobus datis, & logarithmo vnius exquirere logarithmum alterius proposito. 343
Logarithmus cruris in rectangulo æquatur logarithmo anguli, & basis pr. 16. 466
Item logarithmus cruris in rectangulo æquatur logarithmo tangentis oppositæ, & reliqui cruris pr. 17. ibid.
Cur arithmetici numeri proportionales vniantur geometricis. 324. & seq.
Quid logarithmi? in exord. 324
Symbolizatio geometricorum numerorum, & logarithmorum pr. 1. 324 & pr. 3. 5. 6. & 7. 325
Quænam progressio arithmetica sit applicanda geometricæ pr. 2. 324
Subductio logarithmorum, & additio in omnibus operationibus arithmeticis deseruit multiplicationi, & diuisioni geometricorum pr. 1. 3. 4. 5. & 6. 324
Vt reperiatur terminus datorum continuè proportionalium multiplicando solùm logarithmos pr. 31. 342
Quotorum numerus est reciprocè proportionalis numero logarithmorum in serie naturali logarithmica Coroll. ibid.

Lunula plana, & solida.

Trlangulum lunulæ planè æquale facere pr. 17. 532
Lunularum, & inuolucrum eius in pyramidē æqualem transfundere pr. 36. 672
Solidas lunularum solidarum quæ? pr. 52. 649. & eius inuolucri? ibid.

M

Magnitudo.

Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus reperire aliam mediam alicui datæ commensurabilem pr. 34. 387
Magnitudo magnitudini est, vt partes proportionales eadem proportione acceptæ ad partes proportionales eodem ordine acceptas pr. 37. 516
Proportio maioris inæqualitatis continuata facit proportionem maiorem omni data magnitudine pr. 13. 260
Msior irrationalis, vt fiat, quæ sit pr. 44. 202

Mathematica.

Mathematica habet pro obiecto ens quantum, vt mensurabile pr. 1. 21
Obiectum præcisè, & abstractè considerat pr. 2. 22
Est scientia ostensiua pr. 3. 22
In tres partes diuiditur pr. 4. 23
Introductio ad ipsam. 25
Ipsi incumbentes qui? 26

Maximus Numerus.

Maximus numerus in serie proportionali multiplici, vt contineat reliquos minores pr. 11. 232
Maximus numerus, vt contineat reliquos in proportione super particulari, & super partiente pr. 12. ibid.
Maximus detracto primo ad summam reliquorum, quam rationem dicat pr. 13. 233

Maximus Circulus.

Maximi circuli transitus per polos mutuus propos. 15. 359
Sectio mutua maximorum distat quadrāte à circulo, in quo polos habent Cor. pr. 15. 359
Circulum maximum in sphæra describere pr. 16. pag. 359. & etiam per duo puncta pr. 17.
Maximi circuli quinam? qui maiores, vel minores? pr. 11. 357
Maximi in sphæra bifariam necessariò se secant pr. 12. & è contrà pr. 13. 358
Maximus secat alium normaliter secat, & bifariam, & per polos p. 14. & è contra Cor. ibid.
Per polos circulorum maximus ductus per contactum circulorum transit pr. 2. & si per polum, & contactum etiam per alterum polum pr. 13. 373
Maximus minorem circulum tangens, & alterum tangit parallelum pr. 4. & è contrà pr. 5. & parallelos quoque maximo, cui obliquus est pr. 6. pag. 374
Si maximus maximum secet, sectio diameter sphæræ est, & circuli pr. 7. 374
A si minorem secet sectio chorda est pr. 8. 375
Qui circuli maximi per æquales arcus ducti inæquales de altero circulo maximo intercipiant arcus pr. 28. & 29. pag. 384. & de maximo parallelo pr. 23. 387

Maxima Harmonia.

Maxima, minorq; harmonia quænam? 241
vt reperiatur pr. 13. 247

Media proportionalis.

Mediam proportionalem duabus datis lineis inuenire pr. 16. 141
Media, & extrema ratione lineam secare pr. 17. pag. 142
Medias, & extremas proportionales lineas reperire pr. 1. 248
Inter duas lineas duas medias proportionales conijcere pr. 8. 290. & pr. 3. 249
Duabus datis lineis mediam, aut extremam proportionalem acquirere pr. 25. 255

Mediæ irrationales.

Media irrationalis quænam? pr. 26. 193
Mediæ quadrato æquale rectangulum quodnam latus habeat, si alterum sit rationale pr. 27. 194
Medias inuenire, quę rationale spatium cōtineant pr. 29. 194. & quę irrationale pr. 30. 195

Media Ratio.

Mediam rationem inter duas rationes inuenire pr. 41. 283

Medij numeri.

Mediū inter duos arithmeticos inuenire pr. 16. 241 & etiam plures medios pr. 5.
Datis duobus numeris medium proportionalem inuenire pr. 24. 226

Medium spatium, & corpus.

Medium spatium non superat aliud spatio rationali

nali Cor. 197
Duobus datis rectilineis medium proportionale inuenire pr. 33. 514
Etiam si sint circuli Cor.
Duobus datis corporibus corpus medium proportionale inuenire pr. 59. 681

Mensura.

Minutiarum maximam communem mensuram inuenire pr. 9. 210
Mensura communis duorum numerum non primorum pr. 2. 155. & trium etiam pr. 3. 156
Minutia per quam minutiam mensuretur ab alia minutia pr 18. 173. Fit id per decussatam multiplicationem Cor. ibid.

Meta.

Metæ soliditas, vt sit ad sphæram quadriformem pr. 54. 651. Æqualem ei facere pyramidem p. 38. 674. & etiam circulari. ibid.

Minimus numerus.

Reperire numerum minimum duos metientem pr. 26. pag. 164. Vide primus.
Minimos in data ratione reperire pr. 24. 164
Minimus mensuratus à duobus mensurat illum numerum quam duo mensurant pr. 23. 165
Tribus numeris datis minimum numerum, quem mensurant inuenire pr. 28. ibid.
Mensuratus numerus habet partes à mensurante denominatas pr. 29. ibid.
Numerum partes habentem metitur numerus à parte denominatus pr. 40. 166
Numerum minimum habentem partes datas inuenire pr. 41. ibid.
Minimos reperire pr. 2. & 3. 168
Non semper continui proportione reperiuntur pr. 4. 169
Et quando? pr. 5. & quomodo id dignoscatur? pr. 6. 169. & pr. 7. 170
Minimi proportionales numeri pr. 1. 167

Minor circulus.

Quænam sectio maximorum cum minoribus faciat arcus inæquales pr. 20. & non similes p 21. pag. 180
At si minor secet duos maximos sibi normales sinus fiunt pr. 9. 275. Vide segmenta circulorum. Vide maximus.

Minor harmonia.

Minor harmonia, vt reperiatur pr. 11. & 12. 247. Vide Harmonia.

Minor linea.

Minor irrationalis linea, vt fiat pr. 4. 213

Minutia.

Plures, quàm duas minutias ad eandem reducere pr. 6. 209
Minutias æstimare pr. 7. & Cor. 1. & 2. ibid.
Etiam secundùm alias partes pr. 8.
Fractiones fractionum in fractiones reuocare pr. 21. 214
Minutias inferere pr. 22 & 23. 215
Ad minutiam integros redigere pr. 11. 270
Vide multiplicatio, mensura, fractio.

Modi arguendi.

Modi arguendi pag. 115. & seq.

Multilaterum.

Figuram regularem in destinatas partes secare per parallelam vni lateri pr. 34. 514
Diuidere quoque per lineas nulli lateri parallelas sed alteri extrinsecæ pr. 35. 515
A multilatero auferre destinatam partem per parallelam vni lateri pr 36. 516
Vide diuidere, addere.
Figura regularis, & cæt. rectangulum triangulum parallelogrammum, & cæt.

Multiplex.

Numerus multiplex quinam? def 5. 93
Multiplex proportio superpartiens pr. 7. & superparticularis. 309

Multiplicatio rationum.

Datam rationem per aliam multiplicare pr. 34. 281
Datis rationum denominatoribus eas multiplicare pr. 35. 282
Rationem per rationem multiplicare pr. 36. ibid.

Multiplicatio numerorum.

Multiplicatio quid def. 15. 93
Qui numerus multiplicatus superet decimam pr. 10. & 11. 98
Multiplicantes se duo numeri eundem efficiunt pr. 16. 159
Minutias inuicem multiplicare pr. 14. 211
Minutiam per integrum multiplicare pr. 16. 212
Numerum integrū cum integro minutiæ adnexo multiplicare pr. 17. & etiam minutias tantùm in Cor. ibid.

Mutatio.

Ad rectilinei latus æquale ei triangulum facere pr. 7. & etiam si multilaterum pr. 8. 505
Mutatio superficiei in aliam, vel corporis in corpus. Vide corpora, vel corporum superficies quas desideras mutatas.

N

Normalis.

NOrmalis vnica duci potest ad aliam Cor. 8. pag. 40. vt ducatur pr 8. & 9. 35. & 36
Cadit ad partes acuti anguli Cor. 10. 40
Est breuissima inter lineas ab eodem puncto ductas Cor. 41
Normalis in figuris isoperimetris maior, quo rectilineum plures habet angulos pr. 56. 524
Normalis in rectangulo est media proportionalis inter segmenta basis Cor. 1. 138
Quæ lineę in circulo se secent bifariam, & normaliter pr. 13. & 14. 68
In cōtactum lineę à centro ducta ei normalis propos. 20. 72
In contactu eius normalis in se habet centrum pr. 20. ibid.
Casum normalis in triangulis inuenire prop. 15. & 16. 507
Punctum casus normalis in corporibus inuestigare pr. 5. 662
A centro sphęrę ad centrum circuli ducta circulo normalis pr. 4. & è contrà Coroll. 356
A centro sphęrę circulo normalis in polos eius cadit pr. 6. & è contra, & etiam in alterum polum pr. 7. ibid.
Poli centrum sphæræ, & circuli in normali alicui circulo pr. 8. Coroll. 357

Nor-

Normalis arcus.

Cùm normalis arcus intra triangulum sphæricum cadat pr.30. & 31. 362
In cuius trianguli sphærici basim duo arcus normales non cadant pr.32. 33. & 34. ibid.

Normalis linea plano, vel plana inuicem.

Normalis tribus si sit, hę in eodem plano sunt proposs. 349
Quæ lineæ ambæ necessariò planorum sectioni orthogonales prię. ibid.
Quæ lineæ ambæ necessariò plano normales pr.8. pag. 350
Quæ planis normales etiam parallelæ pr.7. 349
Quæ sint normalia plana pr.15. 351
Quæ sectiones planorū plano normales pr.16. 351
A puncto in sublimi plano normalē ducere pr. 10. pag. 350
A puncto in plano normalem excitare pr.11. 350
Crus trianguli super planum positi normale alicui sectioni ponere pr.21. 352
Normalem altitudinem corporum perscrutari, & superficierum intùs latentium pr.5. 662

Nota.

Quot sunt notæ in vnoquoque multiplicatore, tot erunt in facto, & aliquando vna minus pr.30. 341
Numerum notarum in vnaquaque muliplicatione obtinere faciliter pr.34. 343
Notarum numerum multis intermissis proportionalibus inuenire pr.35. ibid.

Numerus.

Numerus quid def.2. 92
Numerus non distinguitur à re realiter pr.7. 15
Sed addit ipsi metaphysicè aliquid pr.8. ibid.
Idem, ac vnitas obiectiua pr.13. 17
Non datur conceptus communis numeri pr.15. 17
Non potest dari infinitus pr.16. 18
Non possidet essentiam, vt numerus est pr.17. 20
Sed, vt circa quantitatis partes numeratas pr.18. 20
Et in ordine ad opera nostri intellectus pr.19. ibid.
Numerus metiens duos numeros etiam eorum communem mensuram metitur Cor. 155
Numerus cuius proportionalis alium multiplicans generet? pr.12. 98
Genitus comprehendit generantium partes? p.13. pag. 98
Numeri per eundem faciunt genitos in eadem ratione generantium pr.17. 160
Et è contrà idem duos multiplicans pr.18. ibid.
Numerare, & legere numeros pr.2. 95
Numeri continuantur per proportionem decuplam pr.1. 95
Numeri ordine naturali progredientes in aliqua magna serie posiunt esse continuè proportionales, vel proximè pr.36. 344
Maior numerus, quam 9. in fig. diuidenda qualibet nequit capere pr.20. 100
Ablato 9. à qualibet fig. num. quid remaneat pr. 24. & 25. Cor. 103
Vide simplex, minutia, fractio.

O

Obliquangulum, Triangulum sphæricum.

IN omni triangulo obliquangulo sinus complementi anguli maioris apud basim ad sinum complementi anguli minoris est, vt sinus anguli minoris ad sinum maioris, in quos diuiditur arcus à normali pr.66. 490
Data summa duorum arcuum, & eorum proportione reperire casum normalis pr.67. 491
Tribus cruribus datis in obliquangulo latera reperire pr.70. ibid.
Sinus secundi arcuum in obliquangulo à normali diuisæ basis sunt inuidem, vt sinus complementorum crurum pr.71. 492
Tangentes secundę laterum sunt inuicem, vt sinus secundi laterum angulorum, in quos à normali diuiditur obliquangulum sphæricum pr.74. 492
In obliquangulo sinus segmentorum basis à normali factorum sunt, vt tangentes complementorum angulorum pr.77. 493
Tangens dimidiæ basis ad tangentem dimidij aggregati crurum in obliquangulo sphęrico, vt tangens dimidię differentiæ crurum ad portionem basis, quæ extra circulum restat p.80. 493
Duobus cruribus, & angulo obliquanguli angulum reliquum reperire pr.54. 487
& pr.65. 490
Duobus angulis, & crure inuenire crus obliquanguli sphærici pr.55. 488. & pr.66. 490
Duobus cruribus, & angulo in sphærico triangulo datis inuenire basim pr.56. 488. & p.73. 492
Duobus angulis, & crure inuenire basim p.57. 488 & pr.78. 493
Duobus cruribus, & angulo angulum verticalem pr.58. 488. & pr.76. 493
Duobus angulis, & crure opposito inuenire angulum verticalem pr.59. 488. & pr.70. 491
Angulo verticali, & duobus cruribus basim pr.72. 492. & angulos inuenire p.73. 492. & p.60. 489
Dato crure interiacente, & duobus angulis angulum verticalem pr.61. 489. & pr.76. 492
Data basi, & angulis ad basim crura patefacere pr. 62. 489. & pr.79. 493
Datis tribus lateribus obliquanguli sphærici illud ad duo rectangula reducere pr.81. 494
Datis tribus lateribus angulos, quosłibet in obliquangulis reperire pr.82. ibid.
Ex duobus cruribus quibuscumque, & angulo in obliquangulo comprehenso angulos patefacere pr.33. 470
Ex duobus angulis, & crure reperire quartum, seu crus, seu angulum pr.32. ibid.

Obliquangulum rectilineum.

Obliquangulum ad duo rectangula reducere p.34. pag. 471
Datis angulis, & crure inuenire aliud aut basim pr.23. 468
Datis duobus lateribus, & angulo angulos reperire pr.24. 469
Duobus cruribus, & angulo verticali alios angulos inuenire pr.25. 468
Triangulum scalenum ad duo rectangula reducere pr.26. 469
Trianguli scaleni datis cruribus angulos inuenire pr.26. ibid.
Data basi, & crure in isoscellibus triangulis angulos inuenire pr.28. ibid.

Octaedrum.

Octaedrum facere, & sphæra complecti, & de diametri proportione ad eius latus pr.47. 601

Orthogonalis.

Orthogonalis linea plano quid sit def.1. 347
Vide normalis,

Ortho-

Orthographia.

Orthographia, à quo nascatur? pr.2. 444
Lineę, in quas lineas proijciantur orthographicè pr.5. 445. & pr.6. 446
Angulus in quem angulum orthographicè proijciatur pr.7. ibid.
Superficies in quid proiecta orthographicè mutetur pr.8. & 9. 447
Partes inuenire superficiei normalis orthographicè proiectæ pr.10. ibid.
Superficies orthographicè proijcere pr.11. ibid. & pr.12. 448
Proiectus circulus Ellipsis in orthographia pr.13. 449. At ellipsis, aut circulus, aut ellipsis pr.14. pag. 449
Proiectio parabolæ parabola est pr.15. ibid.
Proiectio Hyperbolę Hyperbola est pr.16. 450
Vt circulus, ellipsis, parabola, hyperbola, & cęt. orthographicè proijciatur. ibid.
Sectio diametri circuli prolungati quænam in ordine ad orthographiam circuli pr.17. 451
Dato situ diametri, & puncto peripherię circuli proiectionem inuenire orthographicam pr.18. 451. & duobus diametris datis pr.19. 442. & etiam tantùm puncto in peripheria pr.20. 442
Proiectæ lineæ orthographicè, vt inuicem situentur pr.17. 458

Ordinata ratio.

Ordinata proportio quę sit def.14. 114

Oualis.

Lineam oualem efformare pr.7. 290

P

Par, Impar.

QVid par, impar, & pariter par, & pariter impar, & impariter impar def.7.8.9.10. 93

Parabola.

Parabola quid? def.8. 391
Parabola est sesquitertia trianguli inscripti pr.33. pag. 538
In parabola diametro parallela per tactum ducta omnes tangentes parallelas bifariam secat p.27. pag.408. & habet rationem diametri. 409
Parabolæ aream ad quamcumque figuram redigere pr.42. 542
Omnes parabolæ sunt inuicem similes pr.51. 420
Parabolam describere p.61. 426. & etiam circa datum triangulum pr.62. eam producere, & rescindere pr.63. 427
Parabola ad parabolam, & segmentum ad segmentum, quam rationem habeant propos. 36. 540. Sunt inuicem, si habeant æquales bases, vt altitudines Coroll.
Quænam sint parabolæ æquales pr.38. 413
Vide ellipsis, hyperbola, sectio conica, triangulum, segmentum.

Parabolicum Conoides.

Parabolicum conoides est ad conum inscriptum, vt 3. ad 2. pr.34. 636
Æquatur quoque cono prismatico, & singulæ partes singulis suis partibus pr.35. 637
Conoidem parabolicum circulare, vel quadriforme in partes destinatas parallelo ductu basis secare pr.43. 676
Parabolico conoidi conum æqualē facere p.35. 671

Parallelæ.

Parallelę lineę quænam? pr.28. pag.45. & p.29. 46
Parallelæ quosnam cum incidente faciant angulos pr.30. 46
Vt ducantur? pr.32. 47
Comparatę vni tertię, vt sint inuicem pr.31. ibid.
Coniungentes parallelas, & æquales parallelæ pr. 33. ibid.
Quæ lineę non in eodem plano sint parallelæ pr.9. pag. 350
Parallelæ sectiones in cono æquales esse nequeunt pr.7. 438
Parallela cruri in triangulo aufert triangulum toti simile Cor.1. 136. diuiditurque ab eadem linea à vertice cadente in partes partibus basis proportionales Cor.2. 136
Parallelæ in triangulo basi, secant latera proportionaliter pr.2. 134
Parallelarum ad diametrum sectionis conicæ proprietates pr.41. & 42. 315

Paralleli circuli.

Paralleleli circuli circa eosdem polos sunt pr.19. pag 359. & è contra pr.20. 360
Duo circuli in sphæra tantùm sunt paralleli, & æquales pr.21. ibid.
Quę parallelæ auferant à maximo circulo alteri inclinato inæquales arcus pr.30. & 31. 385
Paralleli inæquales auferunt circumferentias inæquales à maximo, in quo polos habent, & quæ maiores? pr.26. 385
Arcus obliqui circuli, & maximi parallelorum non sunt similes sęcti à maximis à polo parallelorum ductis pr.35. 388

Parallela plana.

Parallela plana continentia solidum aliquod sunt æqualia, & similia pr.1. 609
Parallela axi parabola est in conoide parabolico pr.13. 440
Hyperbolico in conoide, & cono, quæ faciant sectiones similes. 437. & seq.

Parallelogrammum.

Parallelogramma circa diametrum sunt quadrata Cor.2. 56
Parallelogrammum def 34. 30
Eius partes circa diametrum def.37. & complementa. 30
Parallelogrammo, si vnus angulus rectus omnes recti pr.1. 53
Et in eo parallelæ faciunt parallelogramma, sub quibus contineatur def.1. ibid.
Parallelogramma æquealta se referunt, vt bases pr.1. 133
Eiusdem basis, vt altitudines Cor.
Parallelogrammi anguli aduersi in eo æquales pr.34. 47
Complementa æqualia pr.35. 48
Basi eadem, & inter parallelas easdem æquantur pr.36. 48
Et etiam super bases æquales pr.37. 49
Parallelogrammum est duplum trianguli eadem basi constituti, & super easdem parallelas p. 34. pag. 49
Etiam si sit super æqualem basim pr.40. 450
Et conuertuntur propositiones Cor.
Æquale Triangulo facere parallelog. pr.41. 50 & pr.43. pag.51. & etiam rectilineo pr.44. 52
In parallelogrammo, quæ partes sint similes proposs.25. 145
Ex parallelogrammo parabolam efformare p. 69. item hyperbolam 71. & ellipsim propos. 7. pag. 430

Similia

Simillia parallelogramma circa idem diametrum sunt pr.28. 147
Æquilatera parallelogramma quatuor, vt se referant ad inuicem si duo sint, & æquiangula proposi.7. 394
Dato quadrilatero æquale parallelogrammum constituere pr.3. 503
Dato parallelogrammo æquale parallelogrammum ponere pr.4. 504

Parallelepipedum.

Parallelepipedum per diagonios in æquales partes secatur pr.2. 609
Parallelepipeda æqualis basis, & altitudinis sunt æqualia pr.3 & 5. 610
Æqualis basis, & altitudigis æqualia pr.6. 611
Parallelis planis secti parallelepipedi partes sunt inuicem, vt bases pr.7. ibid.
Obtinent æquè eleuata eandem proportionem, quam bases pr.8. 612
Similia sunt in triplicata ratione laterum homologorum pr.9. ibid.
Si fuerint æqualia sunt altitudines basibus reciprocè proportionales pr.10. 613
Ex tribus datis continuè proportionalibus compositum æquatur cubo mediæ pr.11. 613
Ex quatuor factum æquatur cubo secundę proposi.12. 614
Ex quinque ædificatum æquatur parallelepipedo ex secunda, & tertia pr.13. ibid.
Quatuor parallelepipeda similia laterum proportionem obtinent pr.14. 615
Dato parallelepipedo æquale cõstruere pr.13. 664
Dato parallelepipedo cubum æqualem ponere pr. 14. 665
Parallelepipeda quæcumque calculare pr.64. 683
Dato parallelepipedo simile constituere,& æquale alteri dato pr.16. 665
Et etiam quodcumque aliud corpus regulare Coroll. eiusdem.
Parallelepipedum erigere in cylindrum pr.21. 666
Parallelepipedum in conũ transfundere p.22. ibid.
Parallelepipedo conficere æquale prisma p.17.665
Parallelepipedo æqualem pyramidem facere pr 17. pag. ead.

Parameter.

Contigua verticis appellatur parameter Cor. 394 & Coroll. 396
Conicæ sectionis cuiuscumque parametrum inuenire pr.9. 396. & pr 10. 397

Pars.

Pars quid def. 1. 106
Multiplex, & æquemultiplex quid def.2.& 3. 106
Pars numeri quid sit def.3. 92
Partes quid def.4. 93
Pars, vel partes est quilibet numerus cuiuslibet dati numeri pr.14. 156
Pars, & pars eadem duorum compositę sunt, & pars compositorum eadem pr.5. 157
Pars numerus numeri, vt ablatus ablati etiam ablatus ablati eadem pars erit pr.7. ibid.
& idem asserendum si partes sit pr.8. ibid.
Pars numeri, & pars alterius vicissim est pars partis, vel partes, vt numerus numeri alterius pr.9 158
Si fuerit partes,idem dicendum pr.10. ibid.

Peripheriæ.

Peripheriæ, quæ æquales pr.32. 78
Peripheriam bifariam secare pr.34. ibid.
Vide circulus, triangulum sphericum, arcus.

Perturbata proportio.

Perturbata proportio quænam def.15. 114
Permutata ratio in proportionibus propos.23. pag. 278

Pentagonum.

Pentagoni anguli quænam partes sint rectorum Cor.1. 88
Vide inscriptio.

Planum.

Plani numeri similes inuicem ducti efficiunt quadratum pr.6. pag.178.& inuertendo si efficiant quadratum similes erunt pr.7.
Planum ad planum rectum quodnam? def.2. 347
Quæ sectiones planorum sint parallelæ pr.14. 351
Quæ plana sint parallela pr.12.& 13. 350
& pr.16. 352

Planus numerus.

Planorum numerorum ratio, quænam? pr.15. 173
Plani numeri definitio def.1. 166

Poli.

Poli sphęræ quinam? def.5. 354
Polum circuli inuenire pr.18. 359
Poli circuli maximi ab eo quadrante distant Cor.2. & è contra. 359
Per polos ducta per circuli, & sphęræ centrum transit pr.8. 357
Vide circulus maximus.

Polygonum.

Polygona in circulis, vt quadrata ex circulis inuicem sunt pr.40. 152
Similia polygona sunt, vt prima ad tertiam continuè proportionalem Cor. pr.2. 144
Similia polygona in duplicata ratione homologorum laterum pr.25. 133
Simile rectilineum describere pr.23. 135
& æquale alteri dato pr.27. 146
Simile eidem rectilineo, sunt etiam similia inter se pr.24.135. Vide rectilineum,rectangulum,& nomina polygonorum.

Postulata.

Postulata quid? 24

Potentia linearum.

Rectanguli trianguli basis potest quascumque figuras similes laterum pr.32. 149
Quænam magis possit linearum pr.33. 150
Lineæ sectæ secundum extremam, & medíam rationem maius segmentum cum dimidio totius quid possit pr.34. ibid.
Minus cum dimidio maioris segmenti pr.35. 151
Tota, & minus segmentum seorsim pr.36. ibid.
Tota cum maiori segmento pr.36. ibid.
Tota, & minus segmentum, vt vna pr.37. ibid.
Potentia laterum figurarum regularium, 308. & seq.
Lateris trianguli potentia pr.2. 308
Lateris quadrati potentia pr.2. ibid.
Lateris decagoni, & exagoni potentia pr.3. 308
Lateris pentagoni potentia pr.4. ibid.

Quin-

Quindecagoni lateris potentia pr.6. 309
De potentijs laterum triangulorum 304. & seq.
Quadrata laterum trianguli simul, quibus quadratis æquentur pr.14. 304
Vide æquipotentia.

Primi numeri.

Primus numerus qui sit def.11. 93
Primi inuicem quinam? def.12. ibid.
Primi numeri quinam? pr.1. 155
Primi poterunt inueniri in infinitum pr.42. 166
Modus reperiendi numeros primos Cor. 166
Primi numeri in proportione ea minimi pr.26. pag. 162
Minimi in proportione sunt primi pr.27. 162
Primos inter se numeros metiens vnum, alium non metitur pr.28. ibid.
Primi numeri æquè maiores mensurant pr.29. 163
Genitus ex primis primus est illi numero, cui generantes sunt primi pr.30. ibid.
Et etiam duobus pr.31. ibid.
Geniti ex multiplicatione primorum in se primi inuicem sunt pr.32. ibid.
Aliquem compositum numerum aliquis numerus metitur pr.33. 164
Omnis numerus, vel est primus,vel metitur à primo pr.24. ibid.

Principia.

Principia quid? 23
Principia quædam pr.1. & cæt. 30

Prisma.

Prisma quid sit def.2. 550
Prismata æque eleuata sunt inuicem, vt bases pr.25. 615
Quadratæ basi duplæ triangularis situm prisma æquatur prismati basis triangularis pr.16. ibid.
Similia sunt in triplicata ratione homologorum laterum pr.18. 616
Omnia verificantur de prismatibus quibuscumq; quæ de triangularem basim habentibus pr. 19. & Cor. ibid.
Prisma ad prisma æqualis basis se habet, vt altitudo ad altitudinem pr.20. 617
Prisma triangularis basis numericè mensurare pr.66.
Prisma, vel prismaticum conum alteri similem exhibere pr.11. 613
Prismati Cylindrum æqualem facere pr.10. 666
Prisma triangulare parallelo ductu basis secare pr.42. 676
Prismatis, & coni concaui superficiebus constanti soliditas, quę pr.56. 651
Prisma simul, & pyramidem in partes datas secare 677
Prisma polygonę basis calculis subijcere 683
Prismati parallelepipedum æquale constituere pr. 17. 665
Prismatis superficies noscere pr.1. 550
Prismati æqualem Pyramidem facere pr.19. 666
Prisma in conum mutare pr.20. 666
Vide parallelepipedum, Cylindrum.

Prismaticus conus.

Prismaticum conum iuxta datam proportionem diuidere pr.43. 676
Coni prismatici sectio parallela basi ellipsis est pr.8. 438
Vide conus.

Probatio.

Probatio operationum arithmeticarum auferendo 9. quoties fieri potest pr.26. pag.103 & pr.27.5 28. 29. & 30. 104
Cuiuscumque regulæ operationem per aliam examinare pr.31. 10

Problema.

Problemata quid sint? 24

Proiectio.

Proiectio quid sit def 1. 444
Duplex Orthographia,& Stereographia pr.1.ibid. & quid sint def.2. & 3. 445
Proiectorum, & originalium superficierum proportiones pr.45. pag.519. & pr.46. & 47. 520
Quæ proiectionem mutent pr.4. 445
Lineæ proiectrices quid def 5. 440
Planum proiectorum quid def.6. ibid.
Vide Orthographia,Stereographia.

Progressio.

Progressio proportionum vide progressio Geometrica, Arithmetica, Harmonica, vide Series, Logarithmus.

Propositio.

Propositio quid? 25

Proportio.

Proportio quid sit? def 4. 107
Proportionem quando quantitates habeant def. 5. & 6. 107
Proportio angulorum. Vide angulus.
Propo tio numerica quænam def.18. pag.94. & def.1. 154
Proportio diuiditur in duas pr.5. 109
Proportio inæqualitatis in duas pr.6.
Proportio multiplex superpartiens superparticularis, multiplex superpartiens, & multiplex superparticularis, vel submultiplex superparticularis, & cęt. pr.7. 109
Proportionem duorum numerorum inuenire propos.8. 110
Rationes,& proportiones exprimere numeris Coroll. ibid.
Proportio replicata quid def.7. 111
Proportio composita quid def. 8. ibid.
Vt quatuor numerorum proportio tribus exprimatur pr.9. 112
Quomodo proportiones Arithmetica, Musica, Geometrica differant pr.9. & 10. 246
Vide Musica, Geometrica, Arithmetica.
Si dentur quatuor numeri continuè proportionales, vt quadrata primi, & secundi se referant pr.29. 228
Quatuor numeri continuè proportionales solidus primi in se, & extremum ducti est æqualis cubo secundi pr.30. ibid.
Inter duos numeros datos duos medios proportionales inuenire pr.31. ibid.
Proportionales faciunt ex extremis gẽitum numerum planum æqualem genito ex medijs, siue ex medio pr.19. & 29. 160
Propagare proportiones secundùm datam rationem pr.44. 284
Proportionalium trium numerorum primus quadratus habet tertium quadratum pr.20. 175
Vide series, ratio, logarithmus.

Proportionalium quatuor numerorum primus cubus habet quartum cubum pr.21. 175
Proportionales numeri, vt inter eos cadant medij proportionales pr.8. pag 170 & pr.9. 171
Proportio rationum componitur ex proportione terminorum inuersè sumptorum pr.11. 275
Et etiam directè, & inuersè pr.12. ibid.
Duæ rationes compositę, quam producant pr.13. pag. 176
Duę proportiones ab alijs duabus ablatę, quam proportionem relinquant pr.14. 176
Modus arguendi in compositione rationum Coroll. ibid.
Componere proportiones pr.15. 276
Ratio ducta in æqualitatis rationem se producit pr.16. ibid.
Exhibere proportionem rationum compositarum pr.17. 277
Quantitates inuicem ductę quonam modo eandem producunt rationem? pr.18. 277
Ratio in se conuersis terminis ducta producit rationem æqualitatis pr.19. 277
Inuersis terminis inuersæ rationes eandem proportionem dicunt pr.20. ibid.
Terminis permutatim sumptis rationes eędem perseuerant pr.20 277. Sic si inuertantur, & permutentur termini pr.21. 278
Proportionalitas quid? def.1. 271
Rationum denominatores vocantur quantitates def.2. ibid.
In quo consistat similitudo proportionum def.3. 271
Quæ similes proportiones def.4. ibid.
Proportiones eiusdem termini, vt referantur propos.1. 272
Si habeant commune consequens pr.2. 272
Si habeant eadem antecedentia pr 3. 272
Rationum denominatores reperire pr.4. 273
Vt reducantur ad idem consequens Cor. ibid.
Rationes proportionales reperire pr.5. ibid.
Duas rationes datam habentes rationem inuenire pr.6 ibid.
Duas rationes eiusdem denominationis duabus alijs proportionales inuenire pr.7. 273
Assignare proportionem similem datę, & cęt. propo.8. 174
Assignare rationem, quæ sit ad aliam rationem, vt sunt denominatores inuicem pr 9. ibid.
Vt componantur proportiones pr 10. 1-5
Proportio duplicata. Vide duplicata. Vide multiplicatio rationum. Vide Rationes.

Puncta.

Punctum accipitur inadequatè à mathematicis, & vt negatio pr.11. & 12. 10
Quid sit? def.1. 26
Terminat lineam def.3. 27
Puncta ad puncta proportionem non habent pr.3. pag. 108
Nec puncta ad lineas pr.4. 109
Puncta in quantitate mathematicè non ostenduntur pr.3. 3
Immo explodunturpr.4. 4
Infinita nequeunt admitti pr.5. 5
Quid sit punctum physicum, & reale pr.8. 8
Partes habet designabiles non factibiles. ibid.
Et est quid reale indiuisibile reduplicatiuè p.9.9
Vide indiuisibilia.

Pyramis.

Pyramis quid sit? def.1. 550
Pyramides, vt diuidantur pr.21. 617
Æqualis basis sunt æquales pr.21. ibid.
Sunt trien's prismatis pr.23. 618
Similes in triplicata ratione sunt laterum homologorum pr.23. ibid.
Sunt inuicem æquè-eleuatę, vt bases pr.24. ibid.
Æqualiũ reciprocantur bases, & eleuationes p.25. pag. ead.
Quod dicitur de pyramidibus triangularibus dicendum de polygonis pr.26. 619
Pyramidi erigere æqualę prisma pr.19. 666
Pyramidem cono æqualem erigere propos. 18. pag. 666
Vt basis triangula ad circulum, ita pyramis ad conum pr.2. 620. Cor. pr. 622
Pyramidem in corpus ex quinque regularibus mutare pr.22. 667
Pyramidę pyramidi vacuę equalę ponere p.27.669 Cor. etiam si sit vacuum simile toti Cor.pr.28.
Pyramidem numeris subijcere pr.68.
Pyramidem diuidere plano lateri parallelo iuxta datam rationem pr. 43. 676
Pyramidem ponere equalem parallelepipedo p.17. pag. 665
Pyramidem in cylindrum mutare pr.25. 666
Pyramidis superficies noscere pr. 52. 551
Pyramidem, conum, & coniforme corpus aleri simile statuere pr.7. 663
Etiam sola sectione Cor. 662
Pyramidem æqualem pyramidi flexis constanti ponere pr.37. 670

Q

Quadratrix.

Quadratrix linea quænam? def.11. 293
Quadratricem describere pr.14. 293. & pr. 15. & 16. 294
Axis quadratricis, centrum, & cæt. ibid.
Perpendiculares in quadratrice ad axem, vt sint ad diametrum proportionatę pr.18. 294
Arcus ab extremo applicatę ductus in quadratrice est ad applicatam, vt radius ipsius ad sagittam pr.19. 295
Quadratrix est linea asymptota pr.22. 290
Diuidit quadratrix angulum in partes datas pr.8. pag. 302

Quadratus numerus.

Quadrati numeri definitio def.3. 167
Quadrati duo inuicem ducti quadratum faciunt pr.7. 178. Cor.1. & è contra Cor. 2. 179
Quadratos duos inuenire, qui compositi quadratum faciant pr.13. 179
Si ratio sit quadratorum, & primus sit quadratus alter talis erit pr.22. 175
Si ratio sit cuborum, & primus sit cubus, alter erit cubus pr.23. 175
Numerus quadratus, cum quo alius numerus quadratum efficiat inuenitur Cor.1. 221. & Cor.2. 222. & qui demptus quadratum relinquat Cor.3.
Et qui subductus relinquat quoque quadratum 14
Quadratos inuenire quorum excessus non sit quadratus pr.15. 180
Quadratos inuenire, qui compositi non faciant quadratum pr.16. ibid.
Non quadratos inuenire, qui faciant compositi quadratum pr 17. 181
Numerus inuenitur non habens proportionem, quam quadratum ad duos alios pr.18. 181
Duos numeros inuenire non quadratos, quorum compo-

compositum non sit quadratum, &c. pr.19. 181

Quadratum.

Quadratum quid def.29. 29
Quadranguli altera parte longioris def.30. 29
Quadratum describere pr.38. 49
Duobus quadratis duo quadrata æqualia inuenire, & inter se pr.10. 505
Quadratum in circulum transfundere pr.14. 531 Vide Area.
Quadratum diametrorum quadranguli in circulo, quibus quadratis æquentur? pr.16. 317
Quadratum sinus recti, cui quaqrato æquetur p.17. pag. 318
Quadratum ex media æquat quadratum ex extremis pr.19. 142
Quadratum circumferentiæ se habet, vt 38. ad 7. ad aream circuli pr.8. 519
Quadratorum duplicata est ratio pr.18. 174
Quadratum quadruplum quadrati, cui latus subduplum Cor.1. 56

Quadriformis sphęra.

Sphęram quadriformem in pyramidem æqualem facere pr.36. 672
Quadriformis sphæra, vt sphæram proportione respiciat pr.48. 647
Quadriformi sphæræ, quæ pyramis sit æqualis? pr. 48. Cor. 648
Quadriformis sphęra quodnam æquet parallelepipedum? pr.50. ibid.

Quantitas.

Quænam species quantitatis pr.2. 2
Vtrùm constet ex punctis ex vi illationis Mathematicæ pr.3. 3
Ostenduntur puncta in quantitate argumentis mathematicis pr.4. 4
In ea infinita puncta nequeunt esse pr.5. 5
Partes semper concipi queunt in ea pr.6. 6
Diuisio quanti non perseuerat semper pr.7. 7
Est fundamentum vnitatis numeralis pr.3. 14
Quænam quantitates proportionem obtineãt def. 9. 113
Quænam maiorem rationem habere dicantur def. 11. ibid.
Quantitates, quæ obtineant rationem def.9. ibid. & quæ maiorem rationem def.11. ibid.

Quarta proportionalis.

Quartam proportionalem lineam excerpere pr.15. pag. 141
Tribus datis rectilineis quartum proportionale inuenire pr.32. 514
Tribus datis rationibus quartam proportionalem inuenire pr.43. 284
Tribus corporibus datis quartum proportionale reperire pr.60. 681

Quotiens Quoti.

Quotiens est aliquando maior minutia diuisa p.20 pag. 214
Quoti genitos, vt excedant in serie geometrica naturali, & vt æquentur pr.28. 341.
Numeri diuisi per 10. quoti rot sunt, quot ipsæ figuræ vna dempta pr.29. ibid.

R

Radij.

Radij harmonici quinam def.4. 263
Radius maximi ad radium minoris circuli in sphęra non est, vt peripheria ad peripheriam duobus circulis interceptam, & cæt. pr.3. 389
Radius vt refertur ad sinum basis, sic secans complementi cruris ad secantem anguli pr.28. 479
Radius est ad sinum cruris, vt tangens complementi cruris ad tangentem complementi anguli oppositi. 478
Radius ad sinum complementi cruris, vt secans basis ad secantem reliqui cruris pr.30. 479
Radius est ad secantem cruris, vt secans alterius ad secantem basis pr.32. 480
Radius est ad sinum anguli, vt secans alterius ad secantem cruris oppositi pr.34. 480
Radius ad secantem cruris, vt secans complementi anguli ad secantem anguli alterius pr.38 481
Radius ad sinum complementi cruris, vt secans anguli obliqui ad secantem anguli alterius obliqui pr.40. 481
Radius ad secantem complementi basis, vt secans comp. ang. oppositi ad secantem compl. cruris pr.42. 482

Radix.

Radices proportionis numericæ quæ def.3. 154
Quare in radice quadrata eruenda numerus alternus relinquatur in exord. 222
Quadratam radicem eruere pr.22. 223
Eductionem radicis quadratæ examinare pr.21.225
A numeris quadratis radicem quadratam proximè educere pr.22. 225
& à minutijs quadratis, & non quadratis pr.32. & 33. 229
Cubica radice in deducenda cur duo numeri intermittantur in exord. 226
Radicem cubicam excerpere pr.26. 227
Radicis cubicæ extractionem examinare pr.27.228
Radicem cubicam proximiorem à non cubico numero deducere pr.28. ibid.
& à minutijs cubicis, & non cubicis pr.32. & 33. 229
Extractio radicis quadratæ, & cubicę, Aurea regula, subductione, additione per logarithmos exercetur pr.6. 225. & Cor. 226
A fractionibus quadratis, & cubicis radicem quadratam excerpere pr.32. 229. & etiam à non cubicis, nec quadratis pr.33.

Rationale.

Rationale est medium potens p.45. 203
Rationales lineę quę? def.6. 182

Ratio.

Ratio qui sit? def.3. 107
Rationem extendere, vide series.
Ratio ex æquo in proportionalitatibus pr.28. 280 etiam si perturbata Coroll.
Vide multiplicatio, diuisio, proportio.
Ratio partium ad quantitatem, si componantur, quænam sit ad eandem? pr.29. 280
De ratione multiplici. 119
Quæ eidem rationi sunt eędem rationes, & inter se sunt eędem rationes pr.16. 125
Rectæ planis parallelis sectę in easdem rationes secantur pr.19. 353
Datas rationes ad eundem antecedentem, vel consequentem reducere pr.31. 280
Rationale quadratum quodnam def.8. 183
Vide proportio, series Geometrica, media, quarta, tertia, termini, differentię.

Reciprocæ figuræ.

Reciprocæ figuræ quenam? def.2. 132
Reciproca crura in triangulis, area, angulique æqualibus quæ? pr.11. 139
Reciproca latera in parallelogrammis æqualibus area, & vnico angulo quæ? pr.10. ibid.

Rectangulum.

Rectangulum quid def.6. 26
Rectangulo æquale quadratum ponere pr.9. 505 & etiam rectangulum pr.11. 506
Rectangulum ex medijs æquat illud ex extremis cruribus proportionalibus pr.18. 142
Vide figura, sectio. Addere, area.

Rectangulum triangulum sphæricum.

Triangula sphærica rectangula habent sinum cruris ad sinum basis in eadem ratione est prop.1. pr.2. pag. 472
Sinus totus ad sinum anguli sphæricorum triangulorum est, vt sinus basis ad sinum cruris oppositi Cori pr.1. ibid.
In sphæricis rectangulis sinus totus est ad sinum basis, vt sinus anguli obliqui ad sinum cruris pag. ead.
Crus oppositum, & adiacens in triangulis sphæricis inuenire pr.3. 472. & pr.11. & 13. 475. & pr.19. 476. & pr.31. 479. & pr 43. 482
Sinus totus in sphæricis triangulis est ad sinum anguli obliqui, vt sinus complementi alterius cruris ad sinum complementi anguli reliqui pr.4. 472
Angulum in rectangulis triangulis inuenire pr.5. 473. & pr.15. & 17. 476. & 25. 478. & pr.29. 479 & pr.35. 480. & pr.39. & 41. 481
Sinus totus ad sinum complementi cruris in sphæricis rectangulis est, vt sinus complementi reliqui cruris ad sinum complementi basis pr.6. 473
Basim in triangulis sphæricis rectangulis inuenire pr.7. 474. & pr.21. & 23. 477. & pr.33. 480. & pr.37. 481
Tangens primi arcus est ad tangentem complementi secundi, vt tangens huius ad tangentem complementi alterius pr.8. 474. & sinus totus ad sinum, vt, & cet. pr.9.
Sinus cruris est ad tangentem cruris alterius, vt radius, ad rangentem anguli pr.10. 474
Radius ad sinum complementi anguli, vt tangens basis ad tangentem cruris pr.12. 475
Radius ad tangentem anguli, vt sinus complementi basis ad tangentem complementi anguli in sphæricis rectangulis pr.14. 475
Radius ad tangentem cruris, vt tangens complementi basis ad sinum compl.anguli pr.16. 476
Radius est ad tangentem complementi anguli, vt tangens cruris ad sinum cruris pr.18. 476
Radius est ad sinum complementi anguli, vt tangens complementi cruris ad tangentem complementi basis pr.20. 477
Radius est ad tangentem anguli obliqui, vt tangens complementi reliqui obliqui ad sinum complementi basis pr.22. 477

Rectangulum planum.

In omni triangulo rectangulo si basis est radius duo crura sunt sinus arcus, & sinus complementi pr.1. 463
Latus rectilinei rectanguli reperire pr.3. 4. 8. & 11. 464
Angulum in rectangulo reperire pr. 5. 6. 7. & 12. pag. ead.
Basim in rectangulo reperire pr.9. 464. & p. 10. & 13. 465
at si crus sit sinus totus basis est secans, alterum crus tangens pr.2. ibid.

Reflexio.

Reflexio rationum quid def. 16. & seq. 115
Reflexio ostenditur pr.25. 130. & pr.26. 119
Reflexio rationis def.24. 117

Regulare corpus.

Omne corpus regulare sphæra descriptum est alteri simile, si sit eiusdem generis pr.8. 662
Alteri simile describere Coroll. ibid.
Corpus ex quinque regularibus in pyramidem æqualem transfundere pr.22. 667
Præter quinque corpora aliud corpus regulare non potest sphæra inscribi pr.12. 606
Omnium corporum regularium noscere superficies pr.3. 551

Regula aurea.

Regula aurea proportionale quartum datis tribus inuenire pr.1. 216. & pr. 9. & 10. 218. Etiam si primo adhæreat minutia pr.2. 216. Etiam si secundo numero pr.3. 117
Etiam si tertio pr.4. 117. etiam si primo, & secundo pr.5. vel secundo, & tertio pr.6. vel primo, & tertio pr.7. vel omnibus pr.8. 218
Probatio aureæ regulæ Cor. 218
Regula trium inuersa ad rectam reducitur p.12. 219
Regula aurea composita est aurea regula bis adhibita pr.14. 220
Recta, & composita pr.15. ibid.
Inuersa, & composita pr.16. ibid.
Composita inuersa, & recta pr.17. 221

Reliquæ.

Reliquis commensurabiles Reliquę quoque sunt pr.55. 106

Replicatio.

Replicatio rationis def.22. 117
Replicatio rationis ostenditur in quantitate multiplici pr.1. 119. & pr.18. 126

Residuatio.

Residuatio rationis def.21. 116
Residuatio rationis ostenditur pr.5. 120. & pr.12. pag. 129

Residuum.

Vt fiat residuum omni data quantitate minus in lineis pr.14. 261

Rhombus.

Rhombus quid? def.31. 30
Rhomboides quid? def.32. 30
Rhombus solidus, cui cono æquetur pr.10. 627 & pr.11. 626
Rhombus solidus vacuus, cui cono æquetur pr.12. 626. & pr.13. 627
Rhombum omnicum mensuris numericis examinare pr.72. 685

Sagitta

S

Sagitta.

Sagitta quadratricis def.3. & pr.19. 244
Sagittæ, & applicatæ quadratricis arcum tertium proportionalem inuenire pr.20.31. 296

Secantes.

Quæ secantium rectangula æqualia Cor.1. 81
Vide Tangentes, Triangula, Sphærica, Radius, Sinus, Rectangulum.
Secans addita tangenti, quam tangentem efficiat pr.27. 322. Vide Rectang. Tangens. Radius.
Secans quas tangentes æquet pr.28. 323

Sectio.

Sectio extrema, & media ratione quæ? def.3. 32
Omnis sectio sphæræ circulus est pr.5. 353
Sectio spiralis spatij, vt sit ad sectorem suum pr. 60. 549
Secare angulum, vide angulus.
Datum rectilineum in datas partes secare per rectas ab vno puncto in latere, vel angulo propos.39. 517
Figuram à dato in medio puncto in datas partes secare pr.40. 517
Figuram in partes destinatas secare, nec per parallelas, nec per lineas in punctum conspirantes pr.41. 518
Datum triangulum à dato extra ipsum puncto in datas partes secare pr.42. ibid.
Datum rectilineum in partes datas secare per lineas à puncto extra ipsum sumpto pr.43. 529. & etiam in plures aliquando Cor.
Coni elliptici sectio parallela basi ellipsis est pr.1. 436. & quandoque circulus pr.3. 437
Etiam si non parallela, & quæ pr.5.
Coni circularis basi subcontraria sectio circulus pr.2. 436

Sectiones conicę.

Similes conicæ sectiones quæ? def.14. 391
Æquales sectiones conicæ quænam? def.16. 392
Sectio per axem coni triangulum est pr.1. 392
Omnis sectio coni parallela basi circulus est pr.2. pag. ead.
Data quacumque coni sectione diametrum inuenire pr.3. ibid.
Sectiones conicæ omnes data basi angulo, & diametro pr.55. 422
Item data diametro, & parametro pr.56. ibid.
Datis vmbelicis, & vertice pr.57. 423. & p.58. 424
Circa datum triangulum sectiones describere pr. 59. & 60. 425. Vide parabola, hyperbola, ellipsis.
Sectio conorum parabolicorum, & hyperbolicorum quænam? Cor.2. 450
Ex vna sectione conica alteram eruere pr.76. 433. & pr.77. 78. 79. & 80. 434
In sectionibus rectæ, vtcumque ductæ se intersecant, vt in rectangula proportionalia pr.48. 419 & pr.49. & 50. Cor. 1. & 2. 420
Quælibet sectio in aliquo alio cono accomodari potest pr.29. 310
Vt conus in quo aptetur quælibet sectio conica inueniatur Cor.2. 311

Sector.

Sector circuli quinam? def.8. 64
Triangula basis, vt est ad sectorem, ita prisma ad sectorem cylindri solidum pr.1. 620
Sectorum inæqualium plana, quando circulis intercipientibus sint minus obliqua pr.27. 383
Qui sectores elliptici æquales pr.23. 534
Sectori æquale rectangulum facere pr.15. 531
Sectorem æqualem rectangulo à circulo eximere pr.16. 531
Sectores, ac arcus, & anguli proportionales in circulis pr.39. 152
Sectorem solidum, & portionem sphærę in conum æqualem commutare pr.31. 670
Cui rectangulo sector circuli sit æqualis pr.4. 528
Sectoris aream inuenire pr.10. 530
Sector sphæræ cui cono æquetur pr.44. 645
Sectores inscribere spiræ, & multiplicare donec relinquant quantitatem omni data minorem pr.52. 545
Sectores circumscripti primæ spiræ, vt sint ad sectores circuli pr.53. ibid.
Sectores inscripti spiræ secundæ, vt sint ad sectores primi circuli pr.55. ibid.
& vt ad suum circulum Coroll. 546
Sectores inscripti tertiæ spiræ, vt sint ad primum circulum pr.67. 547. & ad suum quoque in Cor.

Segmentum Circuli.

Circuli segmentum quodnam? def.5. 63
Angulus segmenti, & in segmento def.4. & 5. ibid.
Quænam segmenta circulorum se secantium inuicem sint æqualia in sphæra pr.10. 11. & 12. 375 & pr.14. 15. 16. & 17. 377
Quænam segmenta circulorum se secantium inuicem sint similia p.12. & 13. 376. & p.17. Cor. 378
Segmenta circulorum duo super eandem lineam æqualia esse nequeunt pr.9. 67
Si æquales rectę æqualia segmenta similia p.10. 67
Dato segmento inuenire circulum pr.11. ibid.
Segmentum describere capiens angulum datum rectilineum pr.30. 77
Et abscindere angulum datum pr.31. 78
Segmenta arcuum. & arcus secare, vide arcus.
Segmenta circulorum def.5. 63
quæ similia segmenta circulorum def.9. 64
Segmentum circuli, vt se referat ad segmentum ellipsis pr.28. 536

Segmenta linearum.

Segmento proportionali lineam augere diuersimodè pr.9. 251. & pr.10. 11. & 12 pag. 152. & pr.13. 14. & 15. ibid.
In segmenta proportionalia lineam distribuere diuersis proportionibus ad diuersa prędita pr.16. 252. & pr.17. 18. & 19. 253. & pr.20. 254
Secare rectam, vt segmenta sint reciprocè proportionalia pr.21. 254
Auferre à duobus lineis segmenta duo, vt residua remaneant proportionalia pr.22. 254

Segmenta planorum.

Segmenta concaua hyperbolica, quæ æqualia proposf.48. & 49. 543
Segmentum in hyperbola alteri æquale facere pr. 50. etiam si concauum pr.51. 544
Quæ segmenta ellipsium æqualia pr.22. 533
Segmenta in continua proportione crescentia à parabola abscindere pr.41. 542
Quæ segmenta Hyperbolæ sint æqualia inuicem pr.46. 543
Segmenta parabolica, quæ sint æqualia pr 35. 540

Auferre ab ea ſegmentum alteri æquale pr.38.540. & etiam proportionale pr.39. 541
Et etiam ſegmento alterius parabolæ pr.40. ibid.
Segmenti circuli aream reperire pr.11. 530
Quæ ſegmenta triangulorum æqualia pr.13. 501

Segmenta corporum.

Corpora diuerſa diuerſimodè ſecantur p.40.679. & ſeq. Vide ſecare.

Series.

Series progreſſionis Geometricè quid ſit? def.1. pag. 256
Series ad ſeriem habet proportionem ex terminis conflatam dummodo ſint æquales numero propoſ.9. 259
Duas ſeries ſimillium proportionalium exhibere pr.9. ibid.
Series ex terminis ab aliqua ſerie alternè ſublatis, quam proportionem ad illam obtineat? propoſ.11. 260
Datur quantitas æqualis infinitæ ſeriei Geometricæ linearum pr.15. 261. vt inueniatur pr.16. etiam alio modo Cor. 1. 2. & 3.
Seriem linearum in punctum deſtinatum finientem ordinare pr.17. 262
Quantitatem pluribus ſeriebus Geometricis æqualem inuenire in lineis pr.18. ibid.
Datam quantitatem ita ſecare, vt duplicis ſeriei idem ſit terminus pr.19. ibid.
Series harmonica, vide logarithmus.

Series corporum proportionalium.

Seriem continuam proportionalium corporum etiam diſſimilium inuenire pr.61. 681
Serici corporum proportionalium corpus æquale ponere pr.62. 682
Datum corpus in infinitam ſeriem corporum diſtribuere pr.63. ibid.

Series numerorum.

In ſerie continua proportionalium, qui quadrati ſui cubi numeri pr.24. 175. & pr.25. 176
Vide numerus, Proportio Geometrica, Arithmetica, Harmonica. Differentia, Media, Extrema, Tertia, Quarta, Ratio.

Similitudo.

Similes figuræ quænam? def.1. 132
Quæ ſuperficies planæ non rectilineæ ſimiles def. 1. 660. Vide ſuperficies.
Similem alteri cuicumque ſuperficiei ſuperficiem ponere pr. 1. 661
Similia triangula in proportione duplicata crurum homologorum pr.20. 133
Dato rectilineo conſtituere rectilineum ſimile maius, aut minus iuxta datam proportionem pr.27. 512
Quæ corpora non planis contenta ſimilia, & ſimilis poſitionis def.2. 660
Circuli, qui arcus parallelorum ſimiles auferunt quinam ſint? pr.17. 378. & pr.19. 379
In rectangulo à normali facta triangula toti, & inuicem ſunt ſimilia pr.8. 138
Quæcumque quatuor corpora ſimilia ſunt, vt latera ad inuicem pr.14.Cor. 815
Omnia corpora ſimilia triplicatam habent laterum, ſeu diametrorum rationem, ſed duplicatam baſium pr.55. 680
In conoide hyperbolico ónes hyperbolæ parallelę ſunt ſimiles pr.21. 443. & 442. Coroll. etiam ellipſes.
At parabolę axi parallelę ſimiles, & æquales in parabolico pr.16. 441
Ellipſes parallelę in conoide parabolico ſunt ſimiles pr.15. ibid.
Omnes ſectiones parallelæ ſunt ſimiles ellipſes in ſphæroide pr. 11. 439

Similes numeri plani.

Plani qui ſimiles pr.13. 173
Solidi qui ſimiles pr.14. ibid.
Plani ſimiles non ſunt inter quos medius proportionalis non cadat Cor.1. 174. nec ſi ab vnitate alter menſuretur Cor.2.
Nec quorum vnus eſt quadratus alter non Cor.3.
Inuentio non ſimilium numerorum Cor.4. 174
Inuentio ſimilium numerorum planorũ p.17. 174

Simplex.

Numerus ſimplex non ſimplicem multiplicans, quem numerum generet? pr.14. 98
Non ſimplex verò multiplicans non ſimplicem, quid generet? pr.15. 99
Simplicium multiplicatio pr.16. ibid.
Non ſimplicium multiplicatio pr.17. ibid.

Sinus.

Sinus in tabulis non repertos emendare pr.14.465
Sinus complementi primi ad ſecundi ſecantem, vt ſinus complementi huius ad ſecantem primi pr.26. 478
& inuersè in Cor.1. & permutatè Cor.2.
Vt inueniantur ſinus addendo, & ſubducendo pr. 23. Cor. 1. 2. & 3. 321
Sinus quid? def. 2. 307. complementi, totus, quinam? ibid.
Verſus ſinus def.3. 307
Rectus ſinus def.2. ibid.
Sinus arcuum in tabulis non repertorum proximè dare pr.15. 465
Quadrata ſinus complementi, & ſinus recti æquantur quadrato radij pr.11. 312
Quomodo inueniatur ſinus complementi Cor.1. & ſinus verſus. 312
Rectangulum ex duobus ſinubus, vt vno crure, & chorda intercepta, cui æquetur pr.14. 555
Sinum verſum ſine extractione radicis quadratę inuenire Cor.pr.17. 318
Dimidium ſinus tótius ſe habet ad ſinum arcus dimidium, ita ſinus complementi ipſius ad ſinum arcus pr.18. 319
Sinum duplicis arcus ſine extractione radicis quadratæ inuenire, vel è contra Cor.1. & 2. 319
Sinus ex chordis exquirere pr. 22. Cor. 320
Per ſolam additionem, & ſubductionem aliquos ſinus inuenire 321. & ſeq.
Sinus minutorum reperire pr.16.Cor.3. 314
Sinus Gr.45. eſt medium proportionale inter ſinum totum, & dimidium eius pr.18. 337
Vide Rectangulum, Triangulum ſphæricum ſecans, tangens, logarith. chorda.

Solidi numeri.

Solidi numeri definitio def.2. 167
Compoſitus numerum aliquem multiplicans ſolidum facit pr.8. 178
Solidi numeri ratio laterum ttiplicata pr.12. 172
Solidorum ratio eſt, quæ alicuius cubi ad cubum pr.16. 174

Solidum

Solidum quid ſit def.1. 597
Similes ſolidæ figuræ quænam? def.2. 597
Æquales quænam? def.3. ibid.
Simlis ſolidi, & plani def.5. 167

Species.

Species figurarum conicarum quę? Cor.2. 396

Sphæra.

Sphæra quid ſit def.1. & eius centrum def.2. 354
Sphæram, ſphæroidemque etiam quadriforme in partes datas ſecare pr.46. 677
Sphæræ ſphæroidi corpori parabolico, vel hyperbolico recto aliud ſimile corpus fabricare pr.5. pag. 663
Sphæra cui cono æquetur? pr.43. 644
Conus æqualis ſphæræ maximi ſphæræ circuli habet quadruplam baſim Cor. pr.43. 645
Vide fruſtum.
Sphæra cui rectangulo ſolido æquetur? pr.46. 646
Sphæræ ſunt ad inuicem in triplicata ratione diametrorum, radiorum, & peripheriarum pr. 47. pag. 647
Plures ſpheras in vnam ſphæram colligere pr.54. pag. 680
Sphæræ cubum æqualem ponere pr.23. 667

Sphæræ ſuperficies.

Quęcumque ſphæræ ſuperficies quadrupla eſt circuli, qui in ea maximus ſit pr.43. 689
Sphæricam ſuperficiem in planas ſuperficies per circulos diuiſam in planum extendere p.34.591
Sphæricam ſuperficiem eandem cylindrica ſuperficie ſectam extendere pr.35. 592
Vel à plano non pendiculari orizonti p.36. 592
Sphæricam ſuperficiem in annulares planas ſuperficies diſtribuere pr.26. 588
Etiam ſi à triangulari ſuperficie ſecta ſit pr.27.
Etiam à quatuor ſuperficiebus in quadratum poſitis pr.28. 589. & etiam oblongum pr.29. & etiam alio modo pr.30. 590
Etiam ſi angularibus ſuperficiebus ſecta ſit propoſ.31. ibid.
Sphæræ ſuperficiem proportionaliter ſecare propoſ.48. 571
A ſphęre ſuperficie abſcindere portionem equalem ſuperficiei dati circuli pr.49. 571
Superficies ſphęræ minor dimidio portionis, cui circulo æquetur pr.46. 570. at ſi ſit maior, cui pariter æquetur pr.47. ibid.
Sphæræ circum ſcriptum corpus, cui parallelepipedo æquetur pr.45. 646

Sphæroides.

Sphęroides quid? def.1. 439
Sphæroidi Conum æqualem exhibere pr.3. 670
Quæ de ſphæroide dicuntur, verificatur de ſphęra Cor.2. 639
Sphæroidis, vel conoidis ſuperficiem in planum extendere pr. 37. 593. & pr.40. 595
Sectum ellipſibus æqualibus pr.38. 594
& etiam inæqualibus pr.39. ibid.
Sphæroidis Elliptici ſuperficies, vt ſe habeat ad ſuperficiem ſphęrę pr.36. 563
Cui ſuperficiei ſphęricę æquetur pr.37. 564
A ſphęroide, vel conoide imperatam partem auferre alteri in eo æqualem pr.49. 678
Sphæroides, Conoideſque habent triplicatam rationem diametrorum dummodo ſint ſimilia corpora pr.55. Cor. 680

Sphęrica triangula.

Sphęrica triangula, vide triangula, tangentes, ſecantes, ſinus, arcus, logarithmus.
Quatuor fondamenta regulæ facillimæ ad ſoluenda ſphęrica præcipuè per logarithmos primum pr.44. 482. ſecundum pr.45. 483. tertium propoſ.46. quartum pr. 47. 484
Regulæ facillimę ad ſoluenda rectangula ſphærica per logarithmos breuiſſimè per ſinus, & tangentes pr.4 Cor. 484
Vide angulus, ſphęrici anguli.

Spiralis linea, ſpatium corpus.

Spiralis linea quænam def. 1. 290
Lineam ſpiralem ducere pr.9. ibid.
Spiralis linea æquat ſemicirculum pr.11.& 13.292
Eſt linea infinitis circulorum ſegmentis conflata pr.12. ibid.
Spatium primum ſpirale eſt ad circulum ſuum, vt 1. ad 3. pr.54. 545
Circulus ſecundæ ſpirę ſe habet ad ipſam, vt 12.ad 7. pr.56. 546
Spirę tertię ſpatium eſt, vt 19. ad 27. ad circulum ſuum pr.58. 548
Spirę primę, ſecundę, tertię ſpatia, vt ſint ad inuicem pr.59. ibid.
Spirarum aliarum inuenire proportiones Cor.548
In ſpiralibus ſpatijs, vt ſectores ſe habeant circumſcripti, vel inſcripti in exord. 544
Spirale corpus quodcumque mutare in cylindrum pr.34. 674
Corpus ſpiralis altitudinis, cui cylindro æquetur pr.57. 653
Etiam ſi in plures ſpiras torqueantur pr.57. Coroll. 654
Spiralis baſis corpus, cui cylindro æquetur pr.28. 654. & ſingulę partes, etiam ſi ſecundę, & tertię ſpirę inixum Coroll.1. & 2.
Corpus ſpirale baſi, & altitudine creſcens, cui parti cylindri æquetur pr.59. 655
Corpus eiuſdem rationis, ſed decreſcens 655. Coroll. 657
Secunda ſpiralia corpora baſi, & altitudine, quam cylindri partem æquent pr.60. 658
Superficies baſi normales ſpiralium corporum, quam qroportionem ad cylindri ſuperficiem dicant pr.39. 674

Stereographia.

Circulus ſtereographicè proiectus linea ſit pr.4. 454. vt proijciatur pr.5. partes eius proiectas inuenire pr.6. quam proportionem ſeruent p.7.
Circulus parallelus plano proiectus ſtereographicè ſit maior pr.8. 454. & ſubcontrarius, item ſit circulus pr.9.
Circulum proijcere, polum eius, & centrum pr. 10. 456. Eius partes inuenire quatuor modis pr.11. 456. & pr.13. 14. & 15. 457
Partes proiecti circuli, quę maiores pr.16. 458
Linea Stereographicè, vt proijciatur pr.1. 453
& quęnam proiectrices def.2.
Punctum ſtereographicę proiectionis quid? def.1. ead.
pag. ibid.
Planum ſtereographum quid? def.3.
Lineę in quas lineas ſtereographicè proiectę tranſeant pr.2. 443. partes, vt augeantur pr 3.
Superficiem rectangulam proijcere ſtereographicè pr.18. 459
Stereographia inuerſa, & recta pr.16. ibid.
Lineę ſtereographicè proiectę muſicè decreſcunt 460

Cor.

Qui

Qui circuli proiecti stereographicè in ellipses abeant pr.18. 460
Circulum quemcumque proijcere Cor.1. 461. & quamlibet etiam figuram Cor.2.& 3. & partes circuli Cor. 4. & pr.20.
Dato diametro circuli, & diametro ellipsis proiectæ stereographicè alterum diametrum conjungatam inuenire pr. 21. 462
Stereographia à quo nascatur pr.3. 445

Subductio.

Subductio, vt fiat pr.8. 97
Qui numeri possint,& sint subducendi p.6.& 7. 97
Minutias subducere pr.13. 211

Substitutio laterum.

Dato triangulo obtuso pro illo acutum assumere pr.48. 485
Trianguli sphærici anguli in latera,& latera in angulos permutare pr.49. 486
Datis lateribus reperire angulos, & datis angulis latera pr.50. 486
Sinus loco primo substituere radium in regula aurea pr.51. 487
Loco primo secantis substituere radium in regula aurea pr.52. ibid.
Loco primo tangentis radium ponere pr.53. ibid.

Subtensæ.

Portiones diametri subtensæ æqualibus arcubus inæquales pr.24. 382
& subtendentes arcus æquales si alios arcus subtendant, illi arcus erunt inæquales pr.25, 382. etiam si proportionaliter diminuantur in Cor.

Summa.

Summa mediorum quatuor Arithmeticorum est æqualis summæ extremorum pr.1. 237
At trium duplum medij æquat summam extremorum pr.2. 238

Superficies.

Superficies est quid reale indiuisibile reduplicatiuè pr.9. 9
Inadæquatè accipitur à mathematicis pr.11. 10
Et vt negatio pr.12. ibid.
Definitio eius def.3. 16
Termini eius def.6. 17
Quænam plana sit? def.7. ibid.
Superficies planas corporum augere, vel minuere pr.3. Cor. 551. Vide conus, pyramis, & cæt.
Quorum corporum superficies sit, vt axis basis ad circumferentiam basis pr.2. 661
Superficiei ad corpus nulla est ratio pr.4. 109

Superparticularis.

Superparticularis proportio pr.7. 109
Superpartiens proportio pr.7. ibid.

T

Tabulæ.

TAbulas logarithmicas condere, vide logarithmus.
Tabulam sinuum ordinare pr.16. facilius Cor.1. 314
Tabulæ tangentium constructio Cor.pr.25. 322
Sinus complementi radius, & secans arcus tres sunt continuè proportionales pr.26. ibid.

Tactus circulorum.

Circuli in sphæra quando se tangant propos.1. pag. 373
Maximus tangens minorem in sphæra, & secans ei parallelum huius tangentibus maximis circulis obliquus est, & quibus magis obliquus propos.23. 381
Quæ cadat linea in contactum circulorum interius tangentium pr.6. 65
At si exterius contingant pr.7. 66
Circulus tangit alium in vno puncto pr.8. ibid.
Tactus lineæ, & circuli quinam? def.2. 63
Circulorum quinam? def.3. ibid.
Sphæra vnico puncto planum tangit pr.1. 355
A centro ad contactum sphæræ ducta tangenti plano normalis pr.2. & è contra in Cor. 345
Segmentum arcus duos circulos tangens ducere pr.6. 289
Tactus circulorum in sphæra quinam? def.9. 354

Tangens.

Tangentes per solam additionem 45.graduum reperire pr.27. Cor. 323
Tangentes, & secantes multæ additione reperiuntur, vel subductione pr.28.Cor. ibid.
Quæ tangentium à dato puncto sit maior, & minor maxima minima, vel æqualis pr.22. 72
Quæ sint tangentibus parallelæ Cor.5. 76
Tangentis quadratum, cui rectangulo æquetur pr.36. 80
Quæ æquales, & quot? Cor.2. 81
Quæ tangat? pr.37. ibid.
Sinus rectus est ad sinum complementi, vt sinus totus ad tangentem pr.24. 322
Tangens, vt reperiatur pr.24. Cor. ibid.
Tangens arcus, radius, & sinus complementi sunt tres continuè proportionales pr.25. 322
Tangentis quadratum, cui rectangulo secantis æquetur pr.36. 80
Tangentes quæ ad verticem diametri ductæ pr.18. pag. 70
Tangentem ducere à dato puncto pr.19. 71
Quinam circuli tangentes æqualiter sint inclinati pr.18. 377
Circuli tangens def.2. 63

Tangentes sectionum Conic.

Portiones diametri interceptæ inter verticis tangentem, & applicatam in hyperbola, & ellipsi respondent proportione pr.13. 399
Lineas tangentes in sectionibus conicis ducere pr.15. 400
A tangentibus vertice applicatis, centroque portiones diametri, quæ rectangula efficiant, & vt inter se æqualia in parabola pr. 16. ibid.
Et in Ellipsi, & hyperbola pr.17. 401. & pr.18. 19. & 20. 402. & pr.21. 403
Quod planum tangat conum penes rectam lineam Quod diametrum sectionis tecet pr.11. 398
Tangens conum in sectione plani paralleli sectioni secat Hyperbolam in centro pr 43. 416
In Hyperbola, vel Ellipsi à centro per contactum ducta bifariam diuidit parallelas tangenti propos.28. 408
Hæ ductæ per contactus habent naturam diametri Cor.1.409. quod de circumferentia circuli verificatur Coroll.2.
Quæ linea dicatur tangens pr.11. 398
A tangente, & applicatæ ad contactum, & vertice partes diametri interceptæ æquales pr.12. ibid.

Terminus.

Terminus.

Terminus quid? def.13. 28
Terminus progressionis geometricæ quinam? def.3. pag. 256
Aggregata, & termini, vt se habeant pr.6. 258
Series duæ proportionales ad eundem terminum peruenientes, vt proportione se habeant pr.6. 258. & ab eodem termino incipientes pr.7. 259
Omnis proportionis termini per eundem numerum multiplicati faciunt numeros in eadem proportione pr.8. 246
Terminos harmonicos interserere in lineis propos.12. 267
Terminus primus Harmonicus, vt sit ad summam differentiarum pr.13. 268
Terminus minor, vt sit ad summam differentiarum harmonicarum pr.14. ibid.
Termini harmonici, qua proportione inuicem gaudeant pr.15. ibid.
Termini Harmonici quando, sint irrationales pr. 16. 268. vide Harmonica.
Proportio quot requirat terminos def.12. 114
Termini Harmonici vltra omnem assignatam quantitatem diminui possunt pr.21. 269

Tertium proportionale.

Tertiam proportionalem reperire datis duabus lineis pr.14. 141
Tertiam rationem proportionalem duabus datis rationibus inuenire pr.42. 283
Duobus datis rectilineis tertium proportionale inuenire propos.31. 513
Duobus datis corporibus tertium proportionale inuenire pr.58. 681
Duobus numeris tertium proportionale inuenire pr.23. 225

Tetaedrum.

Tetaedrum constituere, & sphæra complecti, & cæt. pr.6. 690

Theorema.

Theoremata quid? 24

Totum.

Si totum ad totum, vt ablatus ad ablatum, & reliquus ad reliquum tale est pr.11. 358
Vide segmentum, pars secare.

Trapezium.

Trapezia quid? def.33. 30
Trapezia proportionalia quæ? pr.14. 506
Trapezia inter parallelas, & super easdem, vel æquales bases sunt æqualia pr.12. 506
Trapezia æquantur inter parallelas, & super bases æquales pr.1. Cor. 506
Trapezia inscripta cylindro, quibus trapezijs planis æquentur pr.1. 572
Trapezia triangulis æqualia pr.32. 51
Trapezia harmonicis lineis intercepta habent proportionem duplicatam basis ad basim pr.11. pag. 498

Triangulum.

Triangulum constituere æquilaterum pr.1. 33
Ex tribus datis pr.2. 34
Super eandem basim pr.3. ibid.
Diuidere pr.6. ibid.
Trianguli partes, quæ æquales? pr.13. 37
Isoscelium infra, & supra basim anguli æquales pr.14. ibid.
At si sit rectus verticalis æquales illi semirecti Cor.3. 40
Æquilaterum habet omnes angulos 38, Coroll. & $\frac{2}{3}$ vnius recti 23. Cor.3. 40
Crura in aliud punctum conuenire nequeunt propos.16. 38
Tres interni anguli duobus rectis æquantur pr.17 39. & ideo duo minores Cor.6. 40
Et externus internis duobus oppositis pr.17. 39 & ideo vnico maior est Coroll. 40
Triangula habent omnes angulos omnibus æquales Cor. 2. ibid.
Si vnus rectus, reliqui acuti Cor.9. 40
Crus maius maiorem angulum exposcit pr.18. 41 & è contra pr.19. 41
Duo maiora reliquo pr.20. 42
Ductæ ab extremis basis intra, cruribus minores pr.21. 42
Quæ triangula æqualia pr.27. 45. & pr.22.23. 33
Ea efficere pr.24. 43
Quæ basim habeant altero maiorem pr.25. ibid.
Quæ angulum verticalem maiorem pr.26. 44
Trianguli rectanguli per vertices circulus transit ex dimidio eius basis, vt centro Cor. 77
Trianguli in circulo quinam sint anguli acuti? Crura circa circulum, vt se superent Coroll. 1. & 2. 85
Triangulum isosceles constituere, cuius anguli ad basim dupli sint reliquo pr.1. 87
Triangula æqualta se referunt, vt bases p.1. 133
At eiusdem basis, vt altitudines Cor. 133
Triangulorum, æquiangulorum latera proportionalia, quæ, & quæ homologa pr.4. 135
In triangulo quocumque crura se referunt, vt sinus pr. 20. 467
In omni triangulo summa duorum sinuum ad differentiæ medietatem, ita tangens summæ medietatis angulorum ad differentiæ dimidiæ tangentem pr.21. 468
In omni triangulo segmentum cruris ad seg. basis, ita basis ipsa ad aggregatum crurum pr.27.468

Triangulum sphæricum.

Triangulum sphæricum quodnam? def.1. 360
Cuiuscumque trianguli sphærici tres angulis duobus rectis maiores pr.5. 361
Angulus quicumque sphæricus æqualis angulo inclinationis planorum pr.6. 361
Anguli arcuum æquantur angulis subtensarum in se augendo, æquando, minuendo pr.7. & è contra in Cor. 362
In omni triangulo sphærico arcus quicumque minor semicirculo pr.8. 362
In omni triangulo sphærico duo arcus tertio maiores sunt pr.6. 363
Et tria latera circulo sunt minora pr.10. 363
Quæ triangula basim basi æqualem habeant pr.11. quæ maiorem pr.12. 363
Quæ habeant angulum verticalem maiorem propos.1. 364
In omni triangulo sphærico rectangulo sinus angulorum sunt in eadem ratione, ac sinus oppositorum crurum pr.63. 490
Quæ omnes angulos æquales habeant pr.14. 364 ibid.
Quæ latera æqualia pr.15. 364
Anguli æquales arcus subtensos habent pr.16.364 & è contra pr.17.
Anguli maiores subtensum arcum maiorem requirunt pr.18. 365 ibid.
Qui anguli æquales pr.19.

Quando

Quando crura triangulorum ſphæricorum ſemicirculum æquent, ſuperent, vel minus ſint propoſ.20. 365
Quæ triangula æquiangula habeant,& latera correſpondentia æqualia pr.21. ibid.
Triangula ſphærica ſoluere per logarith. Vide Logarith.
Quæ triangula æqualia pr.22. 366
& pr.23. 24. & 25. 367
Quę in triangulo ſphærico cognita ſecurè ad cognitionem totius trianguli inducant pr.22.366
& pr.23. 24. & 25. 367
Duo anguli ſphærici ad baſim duobus rectis æquales, vel maiores, vel minores talia faciunt crura reſpectu ſemicirculi pr.16. 368. & è contra pr. 17. 369
Duo crura quadranti æqualia in angulo verticali baſis polum habent pr.16. 369
In rectangulo ſphærico quinam anguli ſint acuti, quæ crura quadrante minora?pr.18. 370
Correſpondentia angulorum,& laterum in triangulo ſphærico rectangulo 370. Cor. 1. 2. 3. 4. 5. & 6. ſecundùm diuerſos reſpectus, quos habent inuicem.
In Iſoſcele ſphærico quando anguli ad baſim ſint acuti, vel obtuſi, vel recti?pr.29. 371
In triangulo quocumque ſphęrico quando anguli ſint obtuſi omnes,vel omnes acuti? Cor. 1. & 2. pag. 361. Vide Tangens, radius, ſecans, ſinus, rectangulum, obliquang.

Triangula inſcripta conicis.
Triangula cono inſcripta, quibus triangulis planis æquentur pr.16. 581
Triangulum maximum ellipſi inſcribere p.20. 533
Quæ triangula in ellipſi ſint æqualia pr.21. 533
Quorum ſi vnum maximum aliud quoq; Cor.ibid.
Triangulum extra parabolam tangentibus factum eſt, vt 4. ad 3. ad figuram totam concauam pr.34. 539
& ideo ſubduplam parabolæ Cor. 539
In Hyperbola quænam triangula æqualia? propoſ.43. 542
Triangula harmonicis lineis effecta ſunt æquealta pr.10. 267
Secta ab incidente diuiduntur crura in altitudines, ſeu partes harmonicas pr.11. 367
Quæ triangula maxima ſint æqualia in hyperbola pr.45. 542

Triangulum quoad aream.
Triangulo, cui deficiat vertex per parallelam vni latęri partem deſtinatam ſubducere pr.24. 510
Triangulum iuxta proportionem datam diuidere per lineas à dato puncto in eius latere p.15. 511
Per parallelas cruri triangulum in partes deſtinatas ſecare pr.26. ibid.
Triangulum in partes muſicas ſecare pr.10. 498
Aream cuiuſlibet trianguli in parallelogrammi aream transformare pr.1. 503
eriam ſi parallelogrammi, quod & habeat angulum datum, & latus datum. Vide area.
Inuenire lineas proportionales in eodem ordine, ac ratione, vt triangula, in quæ figura diuiſa ſit pr.38. 517

V

Vertex.
Vertex coni def.3. 390
Vertex ſectionum coni def.13. 391

Vmbelicus.
Parabolæ vmbelicum aſſignare pr.22. 404
Ellipſis,& hyperbolę vmbelicũ aſſignare p.22.404
Inclinatæ ad vmbelicos angulos cum contingente faciunt æquales pr.23. 405
Inclinatis ad vmbelicos parallela à centro ad contingentem æquatur dimidio tranſuerſi axis propoſ.24. 406
Inclinatæ ad vmbelicos à contactu in ellipſi ambæ æquales axi tranſuerſo; in hyperbola tranſuerſo axe maior minorem ſuperat pr.25. 407

Vngula.
Plana inſcripta vngulæ cylindricæ, cui æquentur? pr.15 556
Quadratum ex diametro baſis, cui vngulæ cylindricæ non ſit maius?pr.16. ibid.
& rectangulum ex partibus, quibus partibus eiuſdem? Cor. pr.16.557. nec poteſt eſſe minus pr.18. & idem de partibus in Cor. 557
Plana circumſcripta vngulæ, cui æquetur?p.17.557
Superficies vngulæ æquat quadratum diametri pr.19. 558. & partes rectangulis ex diametro, & eius portionibus eius Cor.1.
Omnia plana vngulam ambientia exceptis triangulis lateralibus ei æquantur,& ſingula ſingulis partibus Cor.2. & 3. pr.19. 558
Superficies vngulæ, cuius altitudo diameter, vt ſit ad alias vngulæ ſuperficies?pr.21. 559
Quæcumque ſuperficies vngulæ, cui rectangulo æquetur?pr.22.& eius portio in Cor.2. 559
Portionem æqualem portioni ſuperficiei vngularis abſcinere pr.23. 560
Vngularem ſuperficiem ſecundùm datam rationem partiri pr.20. 558. Vido ſuperficies.
Segmenta ſuperficiei vngulæ in qua proportione ſint ad inuicem pr.20. Cor.1. 558
Superficies vngulę, vt ſit ad ſuperficiem cylindri? pr.20.Cor.2. ibid.
Vngulam, & inuolucrum eius in æqualem pyramidem transfundere pr.36. 672
Vngula ſolida,quæ pars ſit cylindri, ex qua naſcitur?Cor.1. 673
Vngula quę pars ſit cylindri,in quo eſt?Cor.1.673
Vngula cylindrica eſt octaua pars ſphęrę, vel ſphæroidis quadriformis pr.49. 648
Vide inuolucrum.

Vnitas.
Vnitas quid? 92
Vnitas numerica eadem, ac indiuidualis pr.1. 13
Quid ſit? pr.2. 14
Fundatur in quantitate continua pr.3. ibid.
In quantitate intentionis pr.4. ibid.
In quantitate ſucceſſiua pr.5. ibid.
Non diſtinguitur à re vna realiter pr.6. ibid.
Sed ei addit methaphyſicè aliquid pr.8. 15
Nullam importat differentiam pr.9. 16
Sed per differentiam dignoſcitur pr.11. ibid.
Idem ac numerus obiectiuè pr.12. 17
Non præſcindit ab ea natura pr.16. ibid.
Datur conceptus communis eius pr.15. ibid.

Z

Zetema.
Zetema quid ſit? 25

INDEX TRIGONOMETRICVS

Triangula plana rectangula.

Data.	*Quæſita.*	
Baſis, & Angulus aliquis ex acutis.	Latus oppoſitum angulo dato pr.3.	464
	Latus adiacens angulo dato pr.4.	ibid.
	Angulus alter pr.5.	ibid.
Baſis, & Latus aliquod.	Angulus oppoſitus alteri dato pr.6.	464
	Angulus adiacens lateri dato pr.7.	ibid.
	Latus alterum pr.8.	ibid.
Latus vnum,& Angulus adiacens.	Crus alterum pr.11.	465
	Baſis pr.9.	464
Latus vnum,& Angulus oppoſitus.	Crus alterum pr.11.	465
	Baſis pr.10.	465
Latera duo.	Baſis pr.13.	465
	Angulus quilibet acutorum pr.12.	465

Triangula plana obliquangula.

	Quæſita.	
Latera duo Angulus oppoſitus.	Angulus oppoſitus alter reliquo dato lateri, qui debet eſſe prius ſpecie cognitus ex pr. 7. pag. 137. pr. 24. 468. & pr.32. quo remanet notus.	470
	Angulus verticalis, qui eſt complementum duorum iam cognitorum, quo, & alio angulo ex cognitis angulis.	
	Baſim perquires ex p.13.	468
Latera duo Angulus verticalis.	Alter angulorum ad baſim pr.25.469. & pr.33. ex quo perquiritur.	470
	Baſis ex pr.23.	469
Duo Anguli. Crus oppoſitum alteri corum.	Crus alterum oppoſitum ex pr.23. 468.& p.32.	470
	Baſis ex ijſdem, nam ex duobus angulis tertius eorum complementum conoſcitur ex quo baſis nempe alterum crus oppoſitum datorum angulorum complemento.	
Duo anguli Baſis.	Angulus verticalis ex pr.17. Cor.9.pag.40. cum ſit eorum complementum.	
	Crus oppoſitum alteri angulorum,quod elegeris, nam ex duobus angulis tertius eorum complemẽtum notum euadit, cui opponitur	
	Baſis vnde eruetur ex pr.23. pag.	468
Tria crura.	Anguli omnes pr.27. & pr.34.	469 / 471
Tres Anguli.	Nihil colligitur in rectilineis cum omnia data ſint eiuſdem rationis.	
Obliquangulum ad duo rectangula reducere pr. 26.pag.469. & pr.34.		471

Triangula ſphærica rectangula.

Data.	*Quæſita.*	
Baſis. Angulus obliquus adiacens baſi quadrante minori ex pr.25. pag. 368.	Crus oppoſitum angulo dato pr.3. pag.472. & logarithmicè pr.44. caſ.2. pag.482. & pr.42. pag.	482
	Crus adiacens angulo dato ex pr. 12. vel 13. pag. 475. & logarithmicè, pr.47. caſu 1. & 2. pag.	484
	Angulus obliquus alter baſi adiacens ex pr.14. vel 15. pag. 475. & logarithmicè pr.47 caſu 5. pag.	484
Baſis. Crus vnum, quæ non debent excedere quadrantem ex pr.20. 367	Angulus oppoſitus ex Cor. pr 3. pag.472 &pr.28. & 29 pag.479 & logarithmicè pr.46. caſu 2.	484
	Angulus adiacens lateri dato, & conformis datis ex pr.16 17.pag.476.& logarithmicè ex pr.46. caſu 2. pag.	484
	Crus alterum ex pr.7. Cor. pag 474 & pr 30. vel 31. pag.479. & logarithmicè ex pr 45 caſu 1. pag 483.	
Latus vnum minus quadrante.	Crus alterum conforme datis ex pr.18.& 19. 476. & logarithmicè ex pr.46.caſu 1.pag.	484
Angulus oppoſitus obliquus.	Angulus adiacens lateri dato & ei ſpecie cõformis pr.4. & 5.pag.472.Cor.& pr.40. pag. 481. & logarithmicè pr.44. caſu 2.	
Baſis verò debet eſſe nota ſpecie quadrante minor ex pr.25. pag. 368	Baſis pr.36. & 37. pag 480 & Cor. pr.3. pag.472. & logarithmicè pr.45. caſu 3. pag.483.	
Latus vnum minus quadrante.	Crus alterum ſpecie conforme datis ex pr.10.pag.474 & logarithmicè prop.47. pag.	484
Angulus adiacens obliquus.	Angulus alter pr. 4 & 5. pag.472. & pr.38 & 39. pag. 491. & logarithmicè pr.44. caſu 2.	
Baſis debet eſſe nota ſpecie quadrante minor ex pr. 25. pag. 368.	Baſis ex 20.& pr.21.pag.477. & logarithmicè 45.caſu 2. pag. 484.	

Data.	Quæsita.
	Angulus oppositus, cuiuis laterum ex prop. 24. vel 25. pag. 478. & 10. Coroll. 474. vel logarithmicè pr. 47. casu 3. pag. 484
Latera duo, quæ sint quadrante minora ex pr. 24. pag. 367.	Basis ex pr. 32. & 33. pag. 480 & pr. 6. pag 473. & logarithmicè prop. 47. casu 4. pag. 484.
	Latus oppositum alteri eorum ex pr. 34 & 35. pag. 480. & Coroll. pr. 5. pag. 473. & logarithmicè inuertendo casum 2. pr. 45. pag. 483.
Anguli duo acuti, vt crura sint minora quadrante ex prop. 28. pag. 370.	Basis ex pr 22. pag. 477. & logarithmicè pr. 46. casu 3. pag. 484.
Cognoscitur verò basis quadrante minor ex pr. 28. & Coroll. pag. 370.	

Triangula sphærica obliquangula.

Data.	Quæsita.
Duo crura, & Angulus oppositus vni quadrante minora, si anguli reliqui sint specie cogniti, ex prop. 24. pag. 367.	Angulus oppositus alteri pr. 54. pag 487. & 65. pag. 490
	Basis pr. 56 pag. 488. & pr. 73. pag. 492.
	Angulus verticalis p. 58. pag. 488. & pr. 76. pag. 493.
Duo crura	Alteruter angulorum ad basim pr. 60. pag. 489. & pr. 75. pag 492.
Angulus verticalis acutus si quadrante,	
singula crura sint minora, vt ex pr. 23. pag. 367.	Basis pr. 60. pag. 489. & pr. 72. pag. 492.

Data.	Quæsita.
Duo Anguli acuti, vel vnus saltem, & Basis minor quadrante.	Angulus verticalis prop. 79. pag. 493. & 61. pag. 489.
	Alterutrum crurum pr. 79. pag. 493. & 61. pag. 489.
Duo Anguli. Crus alterius eorũ oppositũ si reliqua crura nota sint specie ex pr. 22. pag. 366. nempe aut maiora, aut minora quadrante.	Crus alterum oppositum pr. 55. pag. 480. & prop. 66. pag. 490.
	Angulus verticalis pr. 70. pag. 491. & pr. 59. pag. 488
	Basis, si alterum crus sit specie notum pr. 57. pag. 488. & pr. 78. pag. 493.
Crura tria.	Anguli omnes, tamquam si essent verticales prop. 82. pag. 494.
Tres Anguli.	Crura, tamquam si essent bases pr. 69. pag. 491.

Reducere obliquangulum ad duo rectangula. datis tribus lateribus obliquanguli sphærici pr. 81. pag. 494. & pr. 54. pag. 484.

Commutare angulos in latera, & latera in angulos pr. 49. pag. 486. & pr. 50. ibidem.

Dato triangulo obtuso substituere acutum triangulum pr. 48. pag. 486.

Vice sinus primo loco ponere Radium propos. 51. pag. 487.

Vice secantis primo loco ponere Radium prop. 52. pag. eadem.

Vice tangentis ponere primo loco Radium pr. 53. pag. eadem.